REVISTA DE ECONOMÍA Y ESTADÍSTICA
INSTITUTO DE ECONOMÍA Y FINANZAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
ISSN 0034-8066

OPEN ACCESS

ARTÍCULOS

El Excedente del Consumidor

José A. Delfino

Revista de Economía y Estadística, Cuarta Época, Vol. 25, No 1 (1984): Junio, pp. 57-81.

http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3747

EL EXCEDENTE DEL CONSUMIDOR

JOSÉ A. DELFINO

1. INTRODUCCION

El excedente del consumidor es quizás el primer intento formal de asignar un valor monetario a los cambios en el bienestar económico de un individuo. En líneas generales, intenta medir el ingreso equivalente a la variación en la utilidad total de un consumidor que se desplaza de una posición de equilibrio inicial a otra final a raíz de una modificación en los precios relativos.

El ingeniero francés J. Dupuit habría sido en realidad quien introdujo el concepto al análisis económico en el año 1844, cuando intentaba obtener una evaluación monetaria de los beneficios o pérdidas asociadas con la fijación de precios alternativos para un bien público. En el tradicional ejemplo del puente y el peaje demuestra que la ganancia del consumidor derivada de una reducción en el peaje debiera medirse en términos monetarios por el área situada por debajo y a la izquierda de la curva de demanda por el uso del puente y comprendida entre el precio (peaje) anterior y el actual.

Años más tarde A. Marshall se refirió explícitamente al concepto definiéndolo como "el exceso de precio que un individuo estaría dispuesto a pagar sobre lo que realmente paga para no quedarse sin un bien", empleó el mismo diagrama y llegó a idéntico resultado, aunque hizo una importante contribución al señalar que la exactitud de la medida requería que la utilidad marginal de ingreso fuera constante.

Posteriormente e interpretando el pensamiento de Marshall, J. R. Hicks señaló que el excedente del consumidor "puede considerarse como un medio de expresar en términos de ingreso monetario la ganancia que obtendría un consumidor como consecuencia de una baja en el precio" y propuso cuatro definiciones alternativas, entre las que se destacan las variaciones "compensatoria" y "equivalente". Definió la primera de ellas como la suma de dinero que debiera pagar o recibir un consumidor a raíz de un cambio en el precio de un bien para mantenerse en la situación de bienestar inicial y la segunda como la compensación necesaria para que el individuo conserve el nivel de utilidad subsiguiente a la variación del precio.

Teniendo en cuenta la importancia de estos instrumentos teóricos en los estudios de costo beneficio y en la economía aplicada, en la parte que sigue se analizan con cierto detalle empleando los recientes desarrollos del enfoque dual y de la teoría económica de los números índices y se comentan los últimos intentos de medición, señalándose algunas de sus limitaciones y demostrando que todos ellos pueden interpretarse como enfoques parciales de un esquema de análisis más amplio que relaciona cambios en el ingreso nominal y en el nivel y costo de vida en forma porcentual y de una manera consistente.

2. DUALIDAD EN LA TEORIA DE LA DEMANDA

El enfoque dual no tiene un contenido distinto que el de la teoría económica neoclásica que estudia la conducta optimizadora del consumidor, sino que constituye una reformulación sistemática que proporciona importantes ventajas analíticas en diferentes campos (separabilidad de variables, números índices, economía del bienestar, etc.) y amplía considerablemente las posibilidades de contrastación empírica.

Se dice que es una reformulación de la teoría económica tradicional pues bajo la denominación de dualidad se agrupan ahora una serie de enfoques dispersos que estaban implícitos en la teoría microeconómica convencional, aunque sin un desarrollo sistemático y una exposición rigurosa de sus relaciones con el ahora denominado problema primal.

El análisis más usual sobre la conducta de mercado del consumidor generalmente se plantea en términos de actividades físicas pues se ocupa de la maximización de la utilidad, mientras que el problema dual enfatiza en los valores correspondientes a la minimización del gasto. Teniendo en cuenta que el dual contiene toda la información proporcionada por la función de utilidad sobre las preferencias del consumidor, es evidente que a partir de aquél pueden obtenerse las características de ésta, ampliando en consecuencia sus posibilidades analíticas y de aplicación.

a) *Las funciones ordinarias de demanda*

En el análisis que sigue se supone que el consumidor es tomador de precios en el mercado de bienes, tiene un orden de preferencias que satisface las condiciones de continuidad, monotonicidad y cuasiconcavidad y su objetivo es la maximización de la utilidad que puede alcanzar asignando su ingreso limitado a la compra de conjuntos alternativos de bienes. Su orden de preferencias puede entonces representarse por una función de utilidad contínua $u:\Omega^n \rightarrow \Omega$ del tipo $u=u(X)$, donde Ω^n es el n-ésimo ortante positivo del espacio Euclideano y $X = [x_1, \ldots, x_n] \varepsilon \Omega^n$ representa una determinada combinación de bienes. El proceso de optimización puede a su vez plantearse formalmente así:

$$\text{Max } [u(X) \mid PX \leqq y \ \ \forall X \varepsilon \Omega] = \phi \ (P,y) \qquad (1)$$

donde $P = [p_1, \ldots, p_n] \varepsilon \Omega^n +$ es el vector de precios estrictamente positivo e $y \varepsilon \Omega^1 +$ el ingreso monetario. La solución a este problema proporciona las funciones generales de demanda $X = \phi(P,y)$, $\phi \varepsilon \Omega^n \rightarrow \Omega$ que indican las cantidades de cada bien deseadas por el consumidor en esas condiciones de precios e ingresos.

Si la función de utilidad fuera del tipo Cobb-Douglas con retornos constantes a escala, el proceso de optimización podría presentarse de este modo:

$$\text{Max } [x^a_1 x^b_2 \mid \Sigma_i p_i x_i = y] \qquad (2)$$

Las condiciones de primer orden o equilibrio para la existencia de un máximo requieren que:

$$(au/x_1) - \lambda p_1 = 0$$
$$(bu/x_2) - \lambda p_2 = 0 \qquad (3)$$
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 - y = 0$$

y las de segundo orden o estabilidad que el determinante hessiano formado con las derivadas segundas de u y bordeado con los precios de los bienes sea positivo, lo que implica estricta cuasiconcavidad de la función de utilidad (y geométricamente curvas de indiferencia convexas respecto del origen, como en la figura 2). La solución del sistema (3) permite obtener, finalmente, las funciones ordinarias de demanda cuya especificación es la siguiente:

$$x_1 (P,y) = ay/p_1 \qquad (4)$$

$$x_2 (P,y) = by/p_2$$

b) *La función indirecta de utilidad*

La sustitución de las cantidades en la función de utilidad del problema de optimización anterior por las expresiones analíticas de su solución, proporciona la función de utilidad indirecta cuya presentación formal suele hacerse así:

$$v (P,y) = u|x_i (P,y)| \quad i = 1, \ldots, n \qquad (5)$$

e indica la máxima utilidad que puede obtenerse para un conjunto de precios e ingreso dados. En el caso Cobb Douglas será:

$$v (P,y) = |(ay/p_1)^a (by/p_2)^b| = y/kp_1^a p_2^b \qquad (6)$$

donde $k = a^{-a} b^{-b}$. Uno de los atributos más importantes de la función de utilidad indirecta reside en el hecho de que permite obtener las funciones ordinarias de demanda por simple derivación. Para demostrarlo es suficiente diferenciarla totalmente con respecto a un solo precio manteniendo los demás y la utilidad constantes, obteniéndose:

$$\partial v/\partial p_j = \Sigma_i (\partial v/\partial x_i)/(\partial x_i/\partial p_j) = \Sigma_i u_i (\partial x_i/\partial p_j) = \lambda \Sigma_i p_i (\partial x_i/\partial p_j) \qquad (7)$$

$$\partial v/\partial y = \Sigma_i (\partial v/\partial x_i)/(\partial x_i/\partial y) = \Sigma_i u_i (\partial x_i/\partial y) = \lambda \Sigma_i p_i (\partial x_i/\partial y) \qquad (8)$$

pues las condiciones de optimización implican $u_i = \lambda p_i$. Diferenciando además la restricción presupuestaria ($\Sigma_i p_i x_i = y$) respecto de precios e ingreso se obtiene: $\Sigma_i p_i (\partial x_i/\partial p_j) dp_J + x_j \; dp_j = 0$ y $\Sigma_i p_i (\partial x_i/\partial y) dy = dy$ de donde resulta que $-x_j = \Sigma_i p_i (\partial x_i/\partial p_j)$ y $\Sigma_i p_i (\partial x_i/\partial y) = 1$, expresiones que reemplazadas en (7) y (8) finalmente proporcionan esta otra:

$$x_j = - \left| \partial v (P,y)/\partial p_j \right| / \left| \partial v (P,y) / \partial y \right| \tag{9}$$

que se conoce como "identidad de Roy" en homenaje al economista francés que la introdujo al análisis económico en 1942 y a partir de la cual resulta evidente que la función de demanda ordinaria puede obtenerse por simple derivación de la función de utilidad indirecta. Esta comprobación es fácil de hacer en el caso Cobb Douglas ya que derivando (6) se obtiene (4) en forma inmediata.

c) *La función de gasto*

Una forma alternativa de analizar la conducta de consumidor es suponer que su objetivo es minimizar el gasto con el que puede alcanzar un nivel de utilidad determinado, vale decir

$$e(P,u) = \min \left[PX \mid u(X) \geqq u^o \;\; \forall X \varepsilon \Omega^n \right] = \Psi (P,u^o).P \tag{10}$$

donde $u(X)$ y P satisfacen las condiciones ya expuestas y $\Psi (P,u^o)$ es el vector solución para un nivel de utilidad u^o y precios P, que proporciona las funciones de demanda de utilidad constante.

La presentación formal del problema de minimización del gasto con una especificación Cobb Douglas se plantea así:

$$\min \left[p_i x_i \mid x^a_1 x^b_2 = u^o \right] \tag{11}$$

y su solución proporciona las siguientes funciones de demanda compensadas:

$$\begin{aligned} x_1 &= a^b p^b_2 u^o / b^b p^b_1 \\ x_2 &= b^a p^a_1 u^o / a^a p^a_2 \end{aligned} \tag{12}$$

que reemplazadas en la función objetivo determinan el gasto mínimo del consumidor, cuya expresión analítica es:

$$e(P,u^o) = kp^a_1 \, p^b_2 \, u^o \qquad (13)$$

donde k tiene el mismo significado que antes. Esta función expresa entonces el costo monetario mínimo que permite al consumidor alcanzar el nivel de utilidad u^o a los precios p_i.[1]

Finalmente, es importante señalar que la función de gasto también puede calcularse invirtiendo la de utilidad indirecta, debido a que esta última es estrictamente creciente en y, razón por la cual es posible expresar el ingreso en función del nivel de utilidad y del vector de precios.

d) *El lema de Hotelling*

Si la función de gasto satisface ciertas condiciones de regularidad (que derivan de la función de utilidad de la que proviene) es posible obtener las funciones de demanda compensadas por simple derivación. Este es el lema de Hotelling y para demostrarlo (Varian, 1980) se parte de una situación de equilibrio en la que X′ es una combinación minimizadora de costos que permite al consumidor alcanzar un nivel de utilidad u^o a precios P′, vale decir $e(P', u^o) = P'X'$. Teniendo en cuenta esta expresión se define una función $f(P) = e(P,u^o) - PX'$, dependiente de los precios de los bienes dispuestos por el consumidor y que siempre será no negativa, pues $e(P,u^o)$ es la forma más barata de obtener un nivel de utilidad u^o. A lo sumo será igual a cero, que es lo que ocurriría si los precios fueran P′ pues son los que minimizan el gasto que permite obtener u^o con una combinación de bienes X′. Pero cuando f(P) alcanza su valor máximo su derivada debe anularse, vale decir cuando $f(P') = e(P',u^o) - P'X' = 0$ debe ser además $\partial f(P') / \partial e(P', u^o) / \partial p_i - x'_i = 0$ lo que a su vez implica:

$$x'_i = \partial e(P',u^o) / \partial p_i \qquad (14)$$

[1] Es evidente que este es un enfoque dual al considerarlo en el apartado a) y que los valores de la solución de ambos coinciden, ya que en el primer caso la curva de indiferencia *u* se desplaza hacia arriba hasta el punto de tangencia con la restricción presupuestaria *y* determinando la combinación óptima de bienes (x^o_1 y x^o_2) que maximizan el bienestar del consumidor, mientras que en el segundo, es la ecuación de balance la que se eleva hasta alcanzar el nivel de utilidad u^o.

expresión que indica que la demanda de cada bien se obtiene derivando la función de gasto mínimo con respecto a su precio, siendo posible demostrar que es única para todos los conjuntos de precios estrictamente positivos. Teniendo en cuenta además que la función de gasto es linealmente homogénea en precios, resulta evidente que las demandas derivadas serán homogéneas de grado cero, pudiendo además demostrarse que son homogéneas de grado uno en u y tienen las mismas propiedades que las funciones de utilidad de las que derivan.

Es fácil comprobar estos resultados en el caso Cobb Douglas, ya que derivando (13) con respecto a p_1 se obtiene:

$$e(P,u^o)/p_1 = ap^{a-1}{}_1\, p^b{}_2\ \ u^o/a^a\, b^b = a^{a-1}\, p^b{}_2\ \ u^o / b^b\, p^{1-a}{}_1$$

$$= a^b\, p^b{}_2\ u^o/b^b\, p^b{}_1 = x_1 \qquad (15)$$

expresión que es idéntica a (12). x_2 se calcula de un modo similar.

3. EL EXCEDENTE DEL CONSUMIDOR

Marshall definió el excedente del consumidor diciendo que "el exceso de precio que un individuo estaría dispuesto a pagar sobre lo que actualmente paga para no quedarse sin un bien, es la medida económica monetaria de su excedente de satisfacción o ganancia en utilidad" y geométricamente lo interpretó como el área comprendida por debajo de una curva de demanda ordinaria con un ingreso monetario fijo y entre un intervalo de precios relevante.

Si la curva de demanda del consumidor fuera como dd en la figura 1, el precio vigente en el mercado p_1 y la cantidad que adquiere x_1, su disposición a pagar vendría representada por la superficie $odax_1$, el gasto total por op_1ax_1 y su excedente por el triángulo p_1da, que en el campo contínuo podría representarse por la siguiente expresión analítica: $s = \int_o^{x_1} F(x)\,dx - p_1 x_1$. Teniendo en cuenta, sin embargo, que las funciones ordinarias de demanda convencionalmente expresan cantidades en función de precios, el excedente del consumidor generalmente se presenta así:

$$s = \int_{p^1}^{p_o} f(p)\,dp \qquad (16)$$

La ventaja que ofrece esta sustitución de variables y por consiguiente del intervalo de integración se hace evidente en la figura 1, donde se aprecia que permite medir los cambios en el excedente del consumidor provocados por variaciones en el precio del bien considerado entre una posición de equilibrio inicial (a) y otra final (b). En efecto, si el precio declinara de p_1 a p_0 p. ej., el área correspondiente al trapezoide p_0 $p_1$ab representaría el aumento en el excedente del consumidor que antes venía medido por el triángulo $p_1$ad.

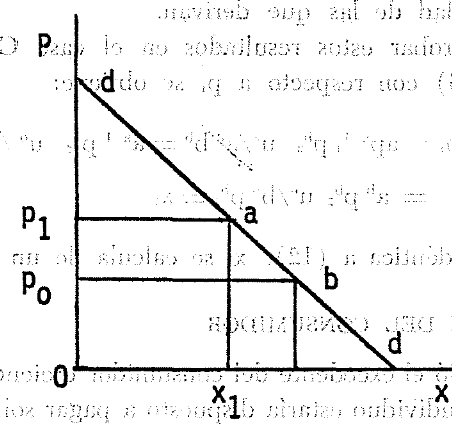

FIGURA 1

Para analizar las condiciones bajo las cuales este instrumento proporciona una medida exacta de los cambios en el bienestar es preciso reemplazar f(p) en (16) por la expresión analítica de la demanda derivada empleando el teorema de Roy, en cuyo caso se obtiene:

$$s = \int_{p0}^{p1} x_1(p,y)\, dp_1 = \int_{p0}^{p1} -|\partial v(p,y)/\partial p_1| / |\partial v_1(p,y)/\partial y| = \int_{p0}^{p1} -|\partial v(p,y)/\partial p_1|/\lambda \quad (17)$$

pues $\partial v(p,y)/\partial y = \lambda$, siendo λ la utilidad marginal del ingreso. Si esta última fuera independiente del cambio en los precios podría sustraerse del término de integración y en ese caso se obtendría un valor monetario único correspondiente al cambio en el bienestar derivado de un desplazamiento desde la posición de equilibrio inicial hacia la final y provocado por el cambio en p_1. Si la utilidad marginal del ingreso no fuera constante con respecto a los precios, el excedente del consumidor aún podría calcularse empleando la fórmula anterior, pero se obtendrían dos resultados alternativos que dependerían del valor que asuma λ en las posiciones de equilibrio inicial y final.

A pesar de que en este punto Marshall no fue lo suficientemente claro pues consideró que la utilidad marginal del ingreso era "aproximadamente constante", Samuelson (1942) se ocupó con detalle del tema demostrando que no es posible que λ sea constante respecto a cambios en el ingreso y en todos los precios simultáneamente, analizando por consiguiente las dos alternativas restantes: 1) Constancia con respecto a todos los precios, vale decir $\partial\lambda/\partial p_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$ lo que significa demandas con elasticidades ingreso unitarias y funciones de utilidad fuertemente aditivas y 2) Constancia con respecto al ingreso y a todos los precios excepto uno, o sea $\partial\lambda/\partial y = 0$ y $\partial\lambda/\partial p_i = 0$; $i = 2, \ldots, n$ que a su vez implica curvas de indiferencia vertical u horizontalmente paralelas, también conocidas como homotéticas en sentido vertical u horizontal.

En el primer caso, vale decir cuando la utilidad marginal del ingreso es constante con respecto al cambio en todos los precios ($\partial\lambda/\partial p_i = 0$) es posible extraer λ del signo integral obteniéndose:

$$s = (v^1 - v^o)/\lambda \tag{18}$$

El excedente del consumidor es, entonces, igual al cambio en la utilidad total provocado por una modificación en el precio del bien considerado convertido a unidades monetarias por la utilidad marginal del ingreso y por consiguiente el área comprendida por debajo de la curva de demanda marshalliana proporciona una medida exacta del cambio en el bienestar del consumidor [2].

[2] Si la función de utilidad fuera del tipo

$$u = a \ln x_1 + b \ln x_2$$

la utilidad marginal del ingreso sería $\lambda = (a+b)/ay$ y el excedente del consumidor, que podría expresarse del modo siguiente

$$s = \int_{p^o_1}^{p^1_1} ay/p_1 \, dp_1 = ay(\ln p^1_1 - \ln p^o_1)$$

proporciona el mismo valor monetario del cambio en el bienestar que el derivado de esta otra:

$$s = (v^1 - v^o)/\lambda$$

teniendo en cuenta que $v = \ln |ay/p_1(a+b)| + \ln |by/p_2(a+b)|$.

Si la utilidad marginal del ingreso fuese en cambio constante respecto a cambios en el ingreso y en todos los precios excepto el primero ($\partial\lambda/\partial y = 0$ y $\partial\lambda/\partial p_i = 0$, $i = 2,\ldots,n$) las curvas de indiferencia serían paralelas en sentido vertical u horizontal y para el bien "homotético" se presentaría una situación similar a la examinada en el caso anterior pues la utilidad marginal del ingreso con respecto a cambios en su precio sería constante, mientras que la situación del otro se parecería a la que se considera a continuación [3].

Si la utilidad marginal del ingreso dependiera tanto de los precios como del ingreso se obtendrían dos expresiones monetarias distintas de un mismo cambio en la utilidad total que vendrían determinadas por el valor que asuma λ. Esta situación caracteriza a las funciones de utilidad homogéneas y la Cobb Douglas constituye un buen ejemplo de ellas. En efecto, la solución del sistema de ecuaciones de punto máximo (3) permite obtener la siguiente expresión analítica de la utilidad marginal del ingreso:

$$\lambda = a^a\, b^b\, y^{(a+b-1)} / p^a_1\, p^b_2\, (a+b)^{(a+b-1)} \tag{19}$$

que se transforma en $\lambda = a^a\, b^b / p^a_1\, p^b_2$ cuando $a + b = 1$ y en $\lambda = y/2p_1 p_2$ si $a = b = 1$, p. ej. En este caso resulta evidente que si bien es posible estimar el excedente del consumidor empleando (18) los valores que se obtengan no serán únicos pues dependerán de los que

[3] Es fácil comprobar que la función de utilidad

$$u = \ln x_1 + x_2$$

proporciona curvas de indiferencia paralelas en sentido vertical. Las funciones de demanda ordinarias que derivan de ella son

$$x_1 = p_2/p_1, \qquad x_2 = (y/p_2) - 1$$

y el excedente del consumidor correspondiente al bien homotético

$$s = \int_{p^o_1}^{p^1_1} p_2/p_1 \; dp_1 = p_2(\ln p^1_1 - \ln p^o_1)$$

lo que proporciona el mismo resultado que

$$s = (v^1 - v^o)/\lambda$$

teniendo en cuenta que $v = \ln p_2/p_1 + (y/p_2) - 1$.

asuma λ en las condiciones de equilibrio inicial y final respectivamente. El excedente del consumidor correspondiente a la función de utilidad del ejemplo es:

$$s = \int_{p^0_1}^{p^1_1} (ay/p_1)\, dp_1 = ay\,(\ln p^1_1 - \ln p^0_1) \qquad (20)$$

y difiere del que se obtiene empleando (18) calculado a su vez a partir de la función de utilidad indirecta expuesta en (5).

Si se consideraran cambios alternativos en los precios de varios bienes y no sólo en uno de ellos, las condiciones para que el excedente del consumidor proporcione una medida exacta de los cambios en el bienestar son aún más restrictivas, lo que se comprueba fácilmente si se tiene en cuenta que en este caso su expresión analítica vendrá representada por una integral lineal del tipo $s = \int_c \Sigma_i x_i dp_i$. Si se sustituyen las x_i por las funciones de demanda calculadas empleando el teorema de Roy se llega al siguiente resultado:

$$s = \int_c \Sigma_i \left[\left|\partial v(p,y)/\partial p_i\right| / \left|\partial v(p,y)/\partial y\right| \right] dp_i$$

$$= \int_c \Sigma_i \left| \partial v(p,y)/\partial p_i \right| / \lambda \left| dp_i \right. \qquad (21)$$

La integral lineal así obtenida dependerá de las condiciones de equilibrio inicial y final y no de los valores que asuman las variables a lo largo del sendero de integración sólo si λ es constante con relación al cambio en los precios, vale decir $\partial\lambda/\partial p_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Si esto ocurre puede extraerse del término de integración obteniéndose una expresión idéntica a (18) y por consiguiente el excedente del consumidor proporcionará una expresión monetaria exacta del cambio en la utilidad que experimenta el individuo al desplazarse de una situación de equilibrio inicial a otra final como consecuencia de una variación en los precios de los bienes que consume, cualquiera sea el sendero de integración. Equivale, además, a la suma de las áreas comprendidas por debajo de las curvas de demanda ordinarias [4]. Si la función de agregación no fuese del tipo

[4] Las condiciones necesarias y suficientes para que la integral $\int_c f d\alpha$ (siendo f contínua en una región abierta $S \subset \Omega^n$) sea independiente del sendero de integración entre cualquier par de puntos a y b de S a lo largo de toda curva c requieren que exista una función real F (llamada función potencial de la función vectorial f) tal que $f = \nabla F$ (Apostol, 1957, teorema 10-37). En tal caso se tendrá:

$$\int_c f d\alpha = \int_c \nabla F = F(a) - F(b)$$

requerido para que la utilidad marginal del ingreso sea independiente del cambio en los precios (21) aún sería una integral exacta si se la multiplica por λ, aunque en este caso no representaría ya el excedente del consumidor en la forma propuesta por Marshall [5].

4. VARIACIONES COMPENSATORIA Y EQUIVALENTE

Posteriormente, interpretando el pensamiento de Marshall y tratando de encontrar una expresión alternativa que permitiera asignar un valor monetario a los cambios en la utilidad de un consumidor, J. R. Hicks señaló en su obra "Valor y Capital" (1976) que el excedente del consumidor "puede considerarse como un medio de expresar en términos de ingreso monetario la ganancia que obtendría el consumidor como consecuencia de una baja en el precio" y agregó que el concepto sería análogo a una variación en la renta suficiente para compensar la disminución en el precio sin colocarlo en una posición mejor que la anterior. Las críticas que recibió esta última interpretación (especialmente de Henderson, 1941, p.ej.) le llevaron en una segunda etapa a proponer cuatro definiciones alternativas de excedente del consumidor y a señalar cuidadosamente la relación existente entre ellas y la medida marshalliana (interpretada como el área ubicada por debajo de la curva de demanda ordinaria) destacándose las variaciones "compensatoria" y la "equivalente". La primera de ellas es el cambio en el ingreso monetario necesario para que un consumidor mantenga su nivel de utilidad cuando uno o más precios del conjunto de bienes que consume en dos situaciones de equilibrio alternativas aumenta o disminuye. La segunda es, en cambio, el ingreso adicional que tendría que recibir después de una caída (o antes de un aumento) en el precio de uno o más bienes que con-

[5] Esto se comprueba fácilmente si se tiene en cuenta que la expresión mencionada también puede considerarse una ecuación diferencial del tipo:

$$ds = \Sigma_i x_i dp_i$$

y que si se la multiplica por un factor integrante $\lambda(P,y)$ p.ej., se transforma en una diferencial exacta, pues la expresión resultante define movimientos sobre una misma superficie de utilidad indirecta, es decir:

$$\lambda ds = \lambda \Sigma_i x_i dp_i = \Sigma_i \ (\partial v/\partial p_i) \ dp_i = 0$$

pues $\partial v/\partial p_i = \lambda x_i$.

sume para conservar la utilidad que alcanzaría con su ingreso anterior y los precios nuevos si debiera soportar los precios de la situación inicial. Las distancias y_1y_0 e y_2y_1 representan en la figura 2, las variaciones compensatoria y equivalente correspondientes al desplazamiento del consumidor de una posición de equilibrio inicial (a) a otra final (b), provocada por una reducción en el precio de x_1.

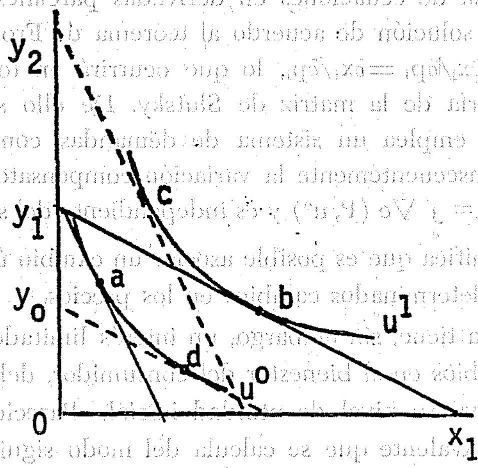

FIGURA 2

Teniendo en cuenta la función de gasto mínimo expuesta en (10) resulta evidente que la variación compensatoria puede también calcularse así:

$$c = e(p^1, u^o) - e(p^o, u^o) \qquad (22)$$

o sea como la diferencia entre el gasto que en las condiciones iniciales de precios p^o permitiría alcanzar el nivel de utilidad u^o y el necesario para mantenerla en la nueva situación p^1. Si sólo cambiara el precio de un único bien (x_1 p.ej.) la variación compensatoria podría estimarse de acuerdo al teorema fundamental del cálculo, del modo siguiente:

$$c = e(p^1, u^o) - e(p^o, u^o) = \int_{p^o_1}^{p^1_1} \left| \partial e(p, u^o)/\partial p_1 \right| dp_1,$$

$$= \int_{p^o_1}^{p^1_1} h_1(p, u^o)\, dp_1 \qquad (23)$$

donde $h_i(P, u^o)$ representa la demanda compensada, lo que significa que la variación compensatoria puede interpretarse como el área ubicada debajo de la curva de demanda de utilidad constante y entre el intervalo de precios relevante.

Teniendo en cuenta además que las funciones de demanda obtenidas a partir de una función de gasto aplicando el lema de Hotelling constituyen un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, resulta evidente que éste tendrá solución de acuerdo al teorema de Frobenius si y sólo si se verifica que $\partial x_j/\partial p_i = \partial x_i/\partial p_j$, lo que ocurrirá en todos los casos debido a la simetría de la matriz de Slutsky. De ello se sigue, entonces, que cuando se emplea un sistema de demandas compensadas la integral lineal y consecuentemente la variación compensatoria que ella mide se expresa así: $c = \int_c \nabla e\ (P, u^o)$ y es independiente del sendero de integración, lo que significa que es posible asociar un cambio único en el ingreso monetario con determinados cambios en los precios.

Esta medida tiene, sin embargo, un interés limitado en la cuantificación de los cambios en el bienestar del consumidor, debido a que supone que éste conserva su nivel de utilidad inicial. Pareciera, entonces, que la variación equivalente que se calcula del modo siguiente:

$$e = e(p^1, u^1) - e(p^o, u^1) \qquad (24)$$

es más adecuada, ya que considera en forma explícita movimientos de un nivel de utilidad a otro. Este instrumento también tiene importantes restricciones, sin embargo, ya que su magnitud depende en última instancia del sentido en que varíen los precios y por consiguiente no permite asociar un cambio único en el ingreso con una determinada modificación en el bienestar. Esto se comprueba fácilmente si se tiene en cuenta que cambios proporcionales en los precios y en la renta del consumidor alteran la utilidad marginal del ingreso determinando que la variación equivalente correspondiente a un desplazamiento del equilibrio provocado por una reducción en los precios difiera de la que registra los cambios en el bienestar originados en un aumento.

La variación compensatoria correspondiente a las funciones de agregación con utilidad marginal del ingreso constante consideradas en el apartado anterior pueden calcularse fácilmente a partir de las funciones de utilidad indirecta[6], mientras que la derivada de una Cobb Douglas como la del ejemplo es la siguiente:

$$c = a^{-a} b^{-b} u^o p_2 (p^{1a}{}_1 - p^{0a}{}_1) \qquad (25)$$

Sólo resta ahora examinar la relación que existe entre las variaciones compensatoria y equivalente y el excedente del consumidor marshalliano, para lo cual es conveniente ayudarse de la ecuación de Slutsky que formalmente se plantea así:

$$\partial x_1 (P, y^o)/\partial p_1 = \partial h_1 (P, u^o)/\partial p_1 - x_1 \partial x_1 (P, y^o)/\partial y \qquad (26)$$

Si además se supone que el bien considerado es normal (de modo que $\partial x_1 / \partial_y > 0$) es posible trazar las curvas de demanda ordinaria y compensadas (siguiendo a Willig, 1976) como se muestra en la figura 3).

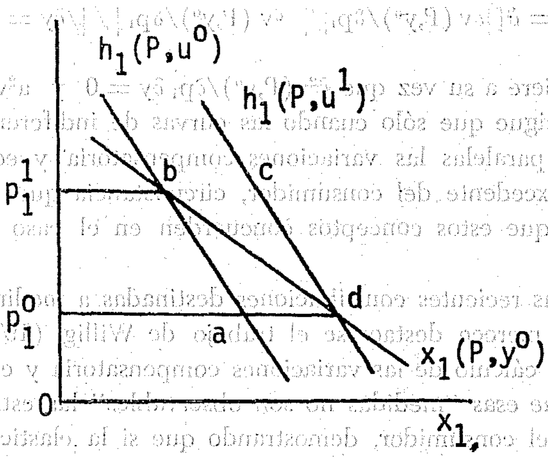

FIGURA 3

[6] La variación compensatoria en el primer caso sería:

$$c = y^o [\exp | ½ (\ln p^1{}_1 - \ln p^o{}_1) |] - 1$$

y en el segundo, para el bien "homotético":

$$c = p_2 (\ln p^1{}_1 - \ln p^{o}{}_1$$

El excedente del consumidor viene representado por el área $p^0_1 p^1_1$ bd, la variación compensatoria por $p^0_1 p^1_1$ ba y la equivalente por $p^0_1 p^1_1$ cd, comprobándose entonces que $e > s > c$. También es evidente que las demandas deben ser iguales para el precio de equilibrio inicial (p^0_1) pues $x_1(p^0,y^0) = h_1 \ (p^0, u^0)$ ya que $x_1(p^0,e(p^0,u^0))$ y $e(p^0,u^0) = y^0$. Si el precio se elevara a p^1_1 p. ej., la curva de demanda compensada estaría por encima de la marshalliana si el bien fuera normal, ya que en tal caso sería necesaria una compensación pecuniaria para mantener el nivel de utilidad constante a un precio mayor y por tanto $e(p^1,u^0) > y^0$.

Es posible comprobar además empleando la ecuación (26) que las pendientes de las curvas de demanda ordinaria y compensada son iguales cuando $\partial x_1/\partial y = 0$, vale decir cuando el bien considerado tiene "efecto ingreso" nulo, lo que significa a su vez utilidad marginal del ingreso constante con respecto a cambios en la renta y en los precios de los demás bienes. En efecto, teniendo en cuenta el teorema de Roy, resulta obvio que efecto ingreso nulo implica:

$$\partial x_1/\partial y = \partial [\,|\partial v\,(P,y^0)/\delta p_1|/|\ \partial v\,(P,y^0)/\delta p_1\,|\,/\,|/\partial y = 0 \qquad (27)$$

lo que requiere a su vez que $\partial^2 v(P,y^0)/\partial p_1\,\partial y = 0$ y $a^2 v(P,y^0)/\partial y^0 = 0$. De ello se sigue que sólo cuando las curvas de indiferencia sean homotéticamente paralelas las variaciones compensatoria y equivalente serán iguales al excedente del consumidor, circunstancia que excluye la posibilidad de que estos conceptos concuerden en el caso de más de dos bienes.

Entre las recientes contribuciones destinadas a medir los cambios en el bienestar merece destacarse el trabajo de Willig (1976), quien interesado en el cálculo de las variaciones compensatoria y equivalente y suponiendo que esas "medidas no son observables" las estimó a partir del excedente del consumidor, demostrando que si la elasticidad ingreso de la demanda fuese unitaria pueden calcularse en forma exacta (de este modo la primera de ellas $c = |\ \exp(s/y^0) - 1\ |$ y de una manera similar la segunda), mientras que en caso contrario sólo es posible lograr aproximaciones.

En un trabajo más reciente y haciendo referencia al anterior Hausman (1981) demostró que las aproximaciones no son necesarias ya que bajo ciertas condiciones las variaciones compensatoria y equivalente pueden calcularse en forma exacta. En efecto, en uno de los ejemplos que propone para el caso de dos bienes, parte de una función demanda del tipo $x_1 = kp^a_1 y^b$ en la que x_1 es la cantidad demandada, k una constante de comportamiento, p_1 el precio del bien considerado dividido por el del otro e y el ingreso deflactado por p_2, y empleando la identidad de Roy obtiene la función de utilidad indirecta cuya inversión proporciona finalmente la función de gasto. Empleando luego la fórmula propuesta en (22) determina la siguiente expresión analítica para la variación compensatoria $c = [(1-b)/(1-a)\, y^{ob}\, |p^1{}_1 x^1{}_1 - p^0{}_1 x^0{}_1| + y^{o(1-b)}]^{1/(1-b)} - y^o$ y otra similar para la equivalente, obteniendo medidas exactas del cambio en el bienestar. Generaliza luego este método de cálculo al caso de más de dos bienes, aunque considerando un solo cambio en los precios y empleando el teorema de la mercancía compuesta de Hicks, que impone severas restricciones sobre el comportamiento de los demás.

Si bien estas contribuciones representan un significativo avance en la contrastación empírica de los cambios en el bienestar, son también importantes sus limitaciones tanto de naturaleza teórica como de aplicación práctica. En efecto, aunque el método propuesto por Willig permite estimar de manera exacta las variaciones compensatoria y equivalente cuando la elasticidad ingreso de la demanda es unitaria y logra buenas aproximaciones en circunstancias diferentes, sus resultados descansan en el excedente del consumidor marshalliano y por consiguiente tienen sus mismas limitaciones. El enfoque de Hausman, por su parte, sólo permite calcular las expresiones analíticas de las utilidades indirectas y por lo tanto de las funciones de gasto que corresponden a determinadas especificaciones de las de demanda y bajo el supuesto de que sólo cambia un precio, tratándose por consiguiente de un análisis de equilibrio parcial, crítica que es extensible al anterior. En la vida real puede esperarse, por el contrario, que una modificación en las condiciones de equilibrio de un mercado repercutan en otros provocando una sucesión de cambios interrelacionados que conduzcan a un equilibrio final con un conjunto de precios y cantidades distinto del original, por lo que una medida completa del cambio en el bienestar del consumidor requeriría el cómputo de todos ellos. Ambos métodos tendrían, finalmente, la ya comentada dificultad adicional común derivada del limitado interés que tiene la variación compensatoria en la medición de los cambios en el bienestar debido a que supone que el consumidor mantiene su nivel inicial de utilidad y de las restricciones de la equivalente que no permite asociar un cambio único en el ingreso con una determinada modificación en el bienestar.

5. UNA MEDICION ALTERNATIVA DE LOS CAMBIOS EN EL BIENESTAR

Teniendo en cuenta esas limitaciones, en la parte que sigue se propone un método alternativo para el cálculo de los cambios en el bienestar de un individuo correspondiente a dos situaciones óptimas de consumo, que incorpora los recientes desarrollos de la teoría económica de los números índices y desagrega las variaciones en el ingreso nominal en sus dos componentes esenciales: un cambio en el índice de precios y otro en el nivel de vida, asociando este último a las modificaciones en el bienestar. De este modo se emplea un instrumento que computa el total de cambios implícitos en un desplazamiento desde la posición de equilibrio inicial a la final y que proporciona por lo tanto una medida exacta y completa de los cambios en el bienestar del consumidor.

Diferenciando totalmente la función de utilidad del individuo se comprueba que $du = \Sigma_i u_i dx_i$ y reemplazando luego u_i por $\lambda\,(p_i/y)$ se obtiene el siguiente resultado [7]:

$$du/\lambda = \Sigma_i (p_i/y)\, dx_i \tag{28}$$

que mide los cambios en el bienestar, pues du es la modificación en la utilidad total convertida a unidades monetarias por la utilidad marginal del ingreso y $\Sigma_i (p_i/y)\, dx_i$ su expresión monetaria. Sin embargo, a partir de la función de utilidad indirecta es posible llegar a un resultado similar. En efecto, su diferencial total es $dv(P/y) = \Sigma_i \Sigma_j (\partial v/\partial x_j) \mid \partial x_j/\partial (p_i/y) \mid d(p_i/y)$ y si se reemplaza luego $\partial v/\partial x_j = u_j$, $u_j = \lambda (p_j/y)$ y se considera que $-x_j = \Sigma_j (p_j/y) \mid \partial x_j/\partial (p_i/y) \mid$ se obtiene finalmente:

$$dV/\lambda = -\Sigma_i x_i\; d(p_i/y) \tag{29}$$

7 Estas son las condiciones de primer grado o equilibrio correspondientes a un proceso de optimización similar al propuesto en (2) pero con precios normalizados, vale decir con una restricción presupuestaria del tipo $\Sigma_i (p_i/y)\; x_i = 1$.

resultado que asociado al anterior permite interpretar que esta última expresión mide los cambios en el bienestar en el espacio de los precios mientras que la anterior lo hace en el de los bienes. Teniendo además en cuenta que $du/\lambda = dv/\lambda$ resulta evidente que:

$$\Sigma_i (p_i/y) dx_i = -\Sigma_i x_i \, d(p_i/y) \tag{30}$$

El análisis anterior puede desarrollarse en varias direcciones si se tiene en cuenta que ambos miembros de la expresión anterior son integrales lineales definidas a lo largo de diferentes senderos de integración. En efecto, como las funciones ordinarias de demanda obtenidas en el proceso de optimización y empleadas en la segunda de ellas depende de los precios y el ingreso $(X = \phi(P/y))$ el miembro de la derecha puede interpretarse como la integral de un gradiente a lo largo de una curva simple. Resulta evidente entonces que $\Sigma_i x_i \, d(p_i/y) = \int_c \Sigma_i x_i (P/y) \, d(P/y)$, comprobándose de una manera similar que el primer miembro es también una integral curvilínea del tipo $\int_{c'} \Sigma_i (p_i/y)(X) \, dx_i$, donde X es el vector de bienes y c', un sendero de integración distinto del anterior. Consecuentemente, la expresión correcta que mide los cambios en el ingreso monetario es la siguiente:

$$\int dy/y = \int_c |\Sigma_i (p_i/y)(X) \, dx_i| / y + \int_c |\Sigma_i x_i (P/y) \, dp_i| / y \tag{31}$$

pues desarrollando (30) se obtiene:

$$-\left[\int_c \Sigma_i |x_i (P/y) \, dp_i y| / y^2 - \int_c |\Sigma_i x_i (P/y) \, p_i \, dy| / y^2\right] = \int_c \Sigma_i (p_i/y)(X) \, dx_i$$

de donde

$$-\int_c |\Sigma_i x_i (P/y) \, dp_i| / y + \int_c dy/y = \int_c |\Sigma_i p_i \, dx_i| / y$$

expresión que finalmente proporciona (31). Si el ingreso monetario no cambiara, esta última se transformaría en:

$$-\int_c \Sigma_i (p_i/y)(X) \, dx_i = \int_c \Sigma_i x_i (P/y) \, dp_i \tag{32}$$

que constituyen medidas alternativas de los cambios en la situación de equilibrio del consumidor y consecuentemente en su bienestar, provocadas por modificaciones en las condiciones iniciales de precios relativos e ingreso real, aunque medidas sobre dos senderos de integración distintos.

Si se multiplica y divide la expresión anterior por p_i y x_i se obtiene un índice Divisia que desagrega los cambios en el ingreso nominal en sus dos componentes básicos: Un índice de precios o de "costo de vida" y otro de cantidades o de "nivel" cuya expresión analítica es la siguiente:

$$\int_c dy/y = \int_c \Sigma_i |(p_i/y)x_i/y| \, dx_i/x_i + \int_c \Sigma_i \, |(x_i p_i)/y| \, dp_i/p_i \qquad (33)$$

A partir de este resultado puede demostrarse que si la función de utilidad directa es homogénea de grado uno los índices de costo y nivel de vida son exactos ya que en tal caso vienen medidos por dos integrales lineales cuyo valor depende sólo de los valores iniciales y finales que asuman las variables. En efecto, en el primer caso se tiene:

$$\text{inv} = \int_c \Sigma_i |(p_i/y)x_i/y| \, dx_i/x_i = \int_c \Sigma_i \, (u_i \, x_i / \lambda y) \, dx_i/x_i$$

$$= \int_c \Sigma_i |(u_i x_i)/u| \, dx_i/x_i = \int_c \Sigma_i (\partial \log u/\partial \log x_i) d \log x_i \qquad (34)$$

considerando que $u_i = \lambda(p_i/y) \, u = \Sigma_i u_i x_i = \lambda \Sigma_i p_i x_i = \lambda y$, por el teorema de Euler y teniendo además en cuenta el de la función potencial. En el segundo caso y siendo la función de utilidad indirecta homogénea de grado -1, puede demostrarse de un modo similar que:

$$\text{icv} = - \int_c \Sigma_i (\partial \log v/\partial \log p_i) \, d \log p_i \qquad (35)$$

expresiones que reemplazadas en (33) finalmente proporcionan:

$$\int_c d \log y = \int_c \Sigma_i (\partial \log u/\partial \log x_i) d \log x_i$$

$$- \int_c \Sigma_i (\partial \log v/\partial \log p_i) d \log p_i \qquad (36)$$

o lo que es lo mismo:

$$y^1/y^o = (u^1/u^o)/(v^1/v^o) \qquad (37)$$

que es una expresión analítica completa que relaciona cambios en el ingreso nominal, costo y nivel de vida en forma porcentual y de una manera consistente [8]. Teniendo en cuenta que la función directa de utilidad empleada en el análisis es linealmente homogénea y que la indirecta es la inversa de la de gasto mínimo, resulta evidente que $v = 1/e(P)$ por lo que reemplazando en (37) se obtiene:

$$y^1/y^o = |u^1/u^o| \; |e(P^1)/e(P^o)| \tag{38}$$

Si el ingreso monetario se mantuviera (es decir $dy = 0$) estos índices proporcionarían medidas alternativas del cambio en el bienestar. En efecto, el desplazamiento hacia una superficie de indiferencia superior u provocado por una caída en los precios y el consecuente aumento en el ingreso real es captado por el índice de "nivel de vida" y constituye una versión porcentual de la "variación equivalente" pues mide en el espacio de los bienes el cambio en el ingreso que a los precios de la situación inicial permite al consumidor alcanzar un nivel de utilidad superior. Simultáneamente, en el espacio de los precios el equilibrio se desplaza hacia una superficie de utilidad indirecta v más cercana al origen lo que también significa una mejora en el bienestar y es equivalente a la "variación compensatoria" medida sobre bases porcentuales, ya que expresa la suma de dinero que permitiría al consumidor mantener el nivel de utilidad anterior en la nueva posición de quilibrio. De ello se sigue que la variación compensatoria es un concepto dual que cuantifica los cambios en el bienestar en el espacio de los precios y que la equivalente es la expresión primal que los computa en el de bienes.

Teniendo en cuenta, sin embargo, que sólo un mayor ingreso real puede provocar un aumento en el bienestar y que este incremento en la renta puede provenir tanto de un cambio en los precios relativos como de un alza en el ingreso nominal, resulta evidente que ambos indicadores pueden emplearse en forma complementaria para cuantificar los cambios en el bienestar: el índice del nivel de vida es el más apropiado para medir los cambios en el espacio de bienes mientras que el de costo de vida está especialmente diseñado para cuantificarlos en el de precios. Así p.ej.,

[8] Es evidente que si el ingreso nominal no cambia $u^1/u^o = v^1/v^o$.

un cambio en la misma dirección, vale decir un aumento en el ingreso nominal y una caída en los precios provoca un doble impacto sobre el bienestar, mientras que una variación en sentido contrario requiere que el aumento en la utilidad derivado del primer efecto y estimado por el índice de nivel de vida sea corregido por el índice de precios que en última instancia capta el efecto "real" negativo provocado por una modificación en los precios relativos.

Los índices obtenidos en la expresión anterior concuerdan con los de precios y cantidades usualmente empleados en el análisis económico. En efecto, el "índice económico de precios" generalmente se define como el cociente entre los gastos mínimos necesarios para alcanzar un nivel de utilidad determinado en dos situaciones de precios distintas (Samuelson and Swamy, 1974, p.ej.) y suele simbolizarse así:

$$p(P^1, P^0, u^0) = e(P^1, u^0)/e(P^0, u^0) \tag{39}$$

donde las variables tienen el mismo significado que antes. Si la función de utilidad es homotética el indicador es invariante, vale decir independiente del nivel de utilidad seleccionado como punto de referencia y dependerá sólo del valor de los parámetros de la función de agregación y del vector de precios, vale decir:

$$p(P^1, P^0, u^0) = e(P^1)/e(P^0) \tag{40}$$

expresión que concuerda con el índice de costo de vida obtenido en (38).

El índice económico de cantidades se define, a su vez, como el "cociente entre los gastos mínimos necesarios para adquirir los conjuntos de bienes correspondientes a dos niveles de utilidad distinto y para una situación de precios de referencia idénticos", se expresa simbólicamente así:

$$x(X^1, X^0, P^0) = e(P^0, u^1)/e(P^0, u^0) \tag{41}$$

y puede demostrarse que en el caso homotético se transforma en

$$x(X^1, X^0, P^0) = u^1(X)/u^0(X) \tag{42}$$

expresión que concuerda con el primer factor del segundo miembro de (38) y representa por lo tanto un índice de nivel de vida que permite medir los cambios en el bienestar.

Es evidente, además, que a partir de las dos expresiones anteriores es posible obtener esta otra:

$$u^1/u^o = |y^1/y^o|/|e(p^1)/e(p^o)| \tag{43}$$

que finalmente indica que el cambio total en el bienestar del consumidor puede también medirse en forma exacta con un índice de nivel de vida o alternativamente corrigiendo el cambio proporcional en el ingreso nominal con otro de costo de vida.

Debe destacarse, sin embargo, que los indicadores que se obtienen integrando (33) dependen de la especificación de la función de agregación debido a que tanto $x_i = \phi\,(P/y)$ como $p_i/y = \Psi\,(X)$ son expresiones analíticas diferentes en tanto lo sea la función de utilidad subyacente. En efecto, las contribuciones más recientes de la teoría económica de los números índices (Sato, 1976, Diewert, 1976 y Lau 1979, p.ej.) muestran que existen precisas relaciones entre indicadores económicos y funciones de agregación, en el sentido de que cada función de utilidad tiene asociada una determinada fórmula de números índices y viceversa. Consecuentemente, si el orden de preferencias del consumidor viniera representado por una función como la propuesta en (2) la expresión (43) se transformaría en esta otra:

$$x^{1a}{}_1 x^{1b}{}_2 / x^{oa}{}_1 x^{ob}{}_2 = (y^1/y^o)/(p^{1a}{}_1 p^{1b}{}_2 / p^{oa}{}_1 p^{ob}{}_2) \tag{44}$$

lo que significa que cuando la función de utilidad es del tipo Cobb Douglas con retornos constantes a escala, los cambios en el bienestar pueden medirse con índices de precios y cantidades que son medias geométricas de los valores que asumen precios y cantidades en las condiciones de equilibrio inicial y final respectivamente.

Sólo resta agregar que mediante el empleo de funciones distancia en la forma originariamente propuesta por Malmquist (1953) el análisis anterior puede extenderse al caso no linealmente homogéneo.

6. CONCLUSIONES

Este trabajo revisa los instrumentos tradicionales destinados a cuantificar los cambios en el bienestar y algunos intentos de medición y comprueba que el excedente del consumidor sólo proporciona resultados exactos bajo condiciones muy restrictivas, que la variación compensatoria tiene un interés limitado ya que supone que el consumidor mantiene su bienestar inicial y que la equivalente, si bien considera movimientos de un nivel de utilidad a otro, depende del sentido en que cambien los precios y por consiguiente no permite asociar un cambio único en el ingreso con una determinada modificación en el bienestar. Señala también que los intentos de medición tienen las limitaciones propias de los conceptos examinados y una restricción adicional derivada de considerar el cambio en un solo precio, lo que los convierte en instrumentos de análisis de equilibrio parcial. Finalmente muestra que si la expresión analítica que mide los cambios en la posición de equilibrio del consumidor se expresa sobre bases porcentuales, bajo determinadas condiciones referidas a la función de agregación es posible obtener una medida exacta y completa de los cambios en el bienestar mediante un índice de nivel de vida, que no es otra cosa que la variación equivalente naturalmente medida en el espacio de los bienes, o alternativamente a través de la diferencia entre los cambios proporcionales en el ingreso monetario y un índice de costo de vida, que es una versión porcentual de la variación compensatoria adecuadamente medida en el espacio de los precios.

BIBLIOGRAFIA

APOSTOL, T. M.: "Análisis matemático". Editorial Reverté, Barcelona, 1960.

BURNS, M. E.: "A note on the concept and measure of consumer's surplus". American Economic Review, 63, 1973, págs. 335-344.

DIEWERT, W. E.: "Exact and superlative index numbers", Journal of Econometrics, 4, 1976, págs. 115-145.

HAUSMAN, J. A.: "Exact consumer's surplus and deadweight loss", American Economic Review, 71, 1981, págs. 662-676.

HENDERSON, A.: "Consumer's surplus and the compensating variation", Review of Economic Studies, VIII, 1941, págs. 117-123.

HICKS, J. R.: "Valor y capital", Fondo de Cultura Económica, Bogotá, 1976.

HULTEN, Ch.: "Divisia index numbers", Econométrica, 41, 1973, págs. 1017-1025.

LAU, L.: "On exact index numbers", Review of Economics and Statistics, LXI, 1979, págs. 73-82.

MALMQUIST, S.: "Index numbers and indifference surfaces", Trabajos de Estadística. Vol. IV, 1953.

McKENZIE, G. W. and PEARCE, I. F.: "Welfare measurement. A synthesis", American Economic Review, 72, 1982, págs. 670-682.

MISHAN, E. J.: "Economía del bienestar", Ediciones Rialp, Madrid, 1969.

SAMUELSON, P. A.: "Constancy of the marginal utility of income" en O. Lange et al.: Studies in mathematical economics and econometrics, Chicago, 1942.

SAMUELSON, P. A. and SWAMY, S.: "Invariant economic index numbers and canonical duality: Survey and synthesis", American Economic Review, 64, 1974, págs. 566-593.

SATO, K.: "The ideal logchange index number", Review of Economic and Statistics, 58, 1976, págs. 223-228.

SILBERBERG, E.: "Duality and the many consumer's surpluses", American Economic Review, 62, 1972, págs. 942-952.

VARIAN, H. R.: "Análisis microeconómico", Antonio Bosch editor, Barcelona, 1980.

WILLIG, R. D.: "Consumer's surplus without apologie", American Economic Review, 66, 1976, págs. 589-597.