REVISTA DE ECONOMÍA Y ESTADÍSTICA
INSTITUTO DE ECONOMÍA Y FINANZAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
ISSN 0034-8066

OPEN ACCESS

ARTÍCULOS

# La Tasa de Interés

José Fernando Carrizo

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 21, No. 1-2-3-4 (1977): 1º, 2º, 3º y 4º Trimestre (1977-1978), pp. 81-118.

http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3729

# LA TASA DE INTERES

JOSÉ FERNANDO CARRIZO

## 1. — INTRODUCCION.

Resulta de gran utilidad hablar de la tasa de interés, debido a que últimamente el Banco Central de la República Argentina ha empezado a diferenciar la tasa de interés equivalente anual de la tasa nominal y de la tasa de descuento, exigiendo que en algunas operaciones financieras y bancarias se determine la tasa de interés anual equivalente, aunque en la práctica de estas operaciones, y aun en algunas publicaciones del mismo Banco Central, se siguen utilizando equivocadamente términos, o procedimientos de cálculo, donde se confunden los conceptos, lo que puede desorientar aun a las personas más versadas sobre estas cuestiones.

No trataremos aquí los métodos equivocados de cálculo que modificar la tasa de interés en las operaciones de crédito ni tampoco cómo se determina la tasa en estas operaciones; nos limitaremos a efectuar un análisis de la tasa de interés y de su relación con la tasa de descuento y otros coeficientes que suelen mencionarse como tasa de interés.

## 2. — LA DEFINICION DE TASA DE INTERES

La definición de tasa de interés puede enunciarse de distintas maneras, pero tiene siempre el mismo significado, según se observa en las tres que indicamos seguidamente:

— La tasa de interés es la cantidad que se abona en una unidad de tiempo por cada unidad de capital invertido.

— La tasa de interés es el interés de una unidad de moneda en una unidad de tiempo.

— La tasa de interés es el rendimiento de la unidad de capital en la unidad de tiempo.

Se deduce fácilmente que los dos elementos fundamentales en la definición de tasa de interés son: la unidad de capital y la unidad de tiempo y aunque parezca trivial los trataremos detenidamente porque creemos que es la única manera de dejar bien claro el concepto de tasa de interés.

Por otra parte no es ninguna novedad que la tasa de interés se refiera a la unidad de capital y a la unidad de tiempo; en realidad en economía y en administración de empresas todas las tasas se refieren a una unidad de variable, como comprobará quien analice el significado de cualquier tasa. Las tasas siempre miden las variaciones en "por uno"; las medidas que indican los cambios en "por ciento" o "por miles" no son tasas y se llaman coeficientes o razones.

## 2.1.—LA UNIDAD DE MONEDA

La definición señala que la tasa de interés es el rendimiento de la unidad de moneda; pero no dice, aunque está implícito en ella, que la tasa de interés expresa ese rendimiento en la misma moneda con que se indica el capital. Así por ejemplo si la unidad de moneda es un dólar, la tasa de interés es el interés de un dólar, expresado también en esa moneda; y cuando la unidad de moneda sea un peso, la tasa de interés será el interés de un peso, expresado en pesos.

En la práctica de las operaciones financieras y bancarias es costumbre mencionar como tasa de interés el rendimiento de cien unidades de capital; se menciona como tasa de interés un "por ciento" y no un "por uno". Por ejemplo, en una circular del Banco Central se habla de una tasa de interés del 76 %, para indicar la tasa de interés 0,76. Según la definición que estamos analizando no es correcto decir "que una operación se efectúa a una tasa de interés del 76%", porque 76 se refiere a 100 unidades de capital y la tasa de interés corresponde a una unidad, salvo que interpretemos que la tasa de interés del 76% es aquella tasa que corresponde al 76% de interés, o sea 0,76.

Desgraciadamente la interpretación que se da es que la tasa de interés es 76 según se puede observar en algunas fórmulas difundidas por el Banco Central donde vemos que para obtener el resultado adecuado, se divide (o multiplica) por 100 aquello que se menciona como tasa de interés.

No queremos decir con esto que no se pueda hablar utilizando la expresión "por ciento"; al contrario, creemos que es muy cómodo y conveniente ya que estamos habituados a manejarnos en estos términos; pero en tal caso debemos decir, por ejemplo, que la operación se realiza al 76% de interés; o que se cobrará un interés del 76%. Tampoco creo que debamos molestarnos si algún comerciante, industrial, o el público en general, confunden la tasa de interés con el tanto por ciento. Pero sí creemos, como lo venimos diciendo desde hace más de 10 años, que el Banco Central en especial y los Bancos en general tendrían que usar correctamente esta terminología para evitar confusiones. Afortunadamente parece que el Banco Central trata de poner cierto orden alrededor de la tasa de interés, sin lograrlo todavía completamente.

En resumen, la tasa de interés, sin excepción, se refiere a una "unidad de moneda" aunque el interés puede expresarse "en por ciento", pero este por ciento no es la tasa de interés, y cuando alguien, equivocadamente, hable de la tasa de interés del 76%, por ejemplo, debemos interpretar que se refiere a la tasa 0,76 que corresponde al 76% de interés.

Salvo este pequeño inconveniente fácilmente subsanable que acabamos de citar, la unidad de moneda no crea realmente mayores problemas y prácticamente surge de la operación misma ya que cuando la operación sea en dólares, la unidad de moneda será el dólar, y cuando la operación se efectúe en pesos, la unidad de moneda será el peso.

## 2.2. — LA UNIDAD DE TIEMPO.

De las dos unidades que intervienen en la definición de tasa de interés, la que origina mayores inconvenientes es la unidad de tiempo. Al respecto nos podemos formular dos preguntas: la primera: ¿Cuál es la unidad de tiempo? y la segunda ¿Cómo se determina la unidad de tiempo?.

Una tercera pregunta podría ser: ¿qué es el tiempo?. Pero esto nos alejaría de nuestro tema y al curioso lector que la formule podemos indicarle que Martín Fierro dice: "el tiempo sólo es tardanza de lo que está por venir", y que en el Viejo Testamento se lee: "Cuando los tiempos estuvieron maduros Dios creó al Hombre".

Volviendo a nuestro tema, debemos señalar que en las operaciones financieras se establece que los intereses se pagarán, o se sumarán al capital es decir, se capitalizarán, al final de ciertos períodos de tiempo. El período al final del cual se deben pagar, y/o capitalizar los intereses, es la unidad de tiempo a la cual se refiere la definición de tasa de interés.

En consecuencia cuando los intereses deben pagarse (o capitalizarse) mensualmente la unidad de tiempo es el mes y la tasa de interés es mensual; pero cuando los intereses se pagan, o capitalizan anualmente, la unidad de tiempo es el año y la tasa de interés es anual. Recíprocamente debemos entender que si la tasa de interés es mensual, los intereses se deben pagar, o capitalizar, mensualmente y si la tasa es anual los intereses se pagarán anualmente.

Una costumbre muy singular en nuestro medio es la de fijar la tasa de interés anual y luego realizar los operaciones cobrando los intereses en períodos menores al año, generalmente en meses. Si las capitalizaciones, o los pagos, son mensuales, la tasa de interés es mensual siendo conveniente fijar la tasa de interés en términos de meses, y no de año, porque crea serios problemas según veremos más adelante.

Daremos algunos ejemplos, en los cuales, para simplificar, trabajamos, por el momento, con un capital inicial de un peso.

Sea un capital de $ 1.— colocado al 10 % de interés mensual (tasa mensual de interés 0,10) durante un año.

Si los intereses se cobran al final de cada mes, el acreedor recibirá $ 0,10 a fin de cada mes y el capital al principio de todos los meses será siempre igual al capital inicial. En el gráfico de Fig. 1 se observa el comportamiento de capital e intereses cuando estos últimos se cobran al final de cada mes; hemos señalado con una línea punteada los intereses y con una línea continua el capital.

La tasa de interés es 0,1 mensual, no hay tasa anual. Si alguien pretendiera obtener una tasa anual sumando todo lo que se cobró en el año obtendría:

$$0{,}1 \times 12 = 1{,}20$$

Pero este 1,20 no significaría nada en el campo financiero porque no se ajusta a la definición de tasa de interés ya que no es el interés producido por una unidad de capital en una unidad de tiempo sino en 12 unidades de tiempo. Se trata, además de

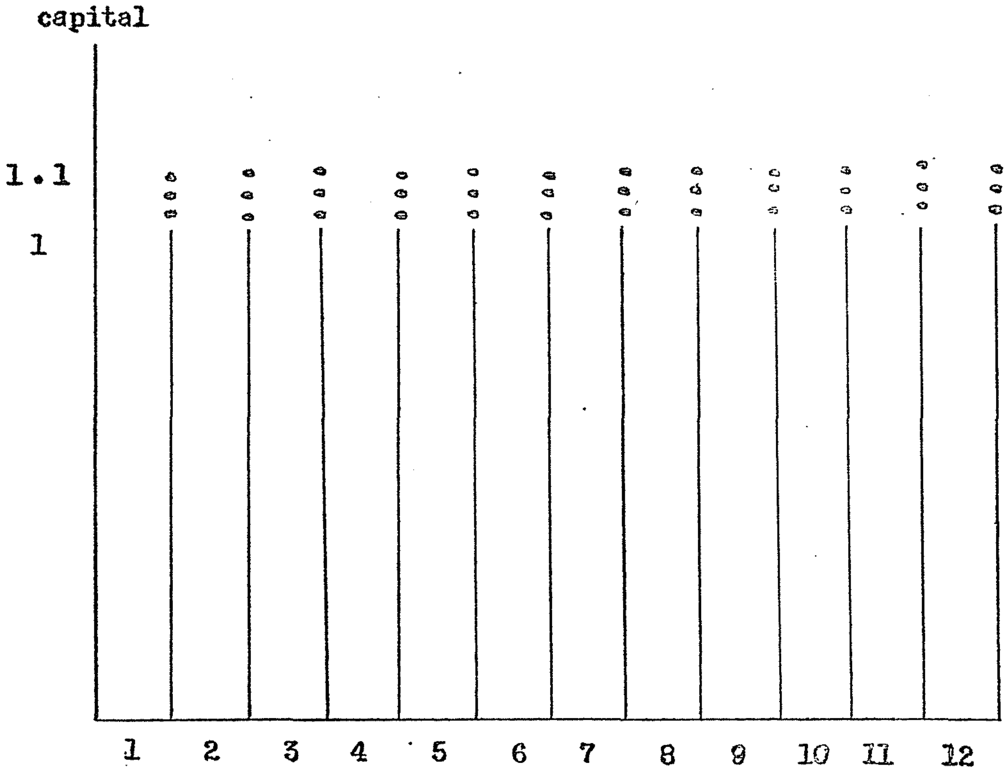


Fig. 1. — Capital al final cuando se cobran intereses.

la suma de 12 cantidades que no son homogéneas porque están ubicadas al final de cada uno de los doce meses del año, y en el campo financiero un peso de hoy no tiene el mismo valor de un peso dentro de un mes.

Sería una tasa anual de interés si fuera el interés producido por una unidad de moneda al cabo de un año; pero en tal caso 1,20 se pagaría o capitalizaría al final del año, todo junto, en ese momento y no durante el año.

Si en lugar de cobrar los intereses mensualmente, *se capitalizan* al final de cada mes, el capital crece a medida que pasan los meses y produce, por este motivo, más intereses cada mes, según se puede observar en el Cuadro 1 y en Fig. 2.

CUADRO 1

*Evolución del capital cuando se capitalizan los intereses al 0,10 % mensual*

| Período | Capital al principio | Intereses al final | Interés Acumul. |
|---|---|---|---|
| 1 | 1. | 0,1 | 0,1 |
| 2 | 1.1 | 0,11 | 0,21 |
| 3 | 1.21 | 0,12 | 0,33 |
| 4 | 1.33 | 0,13 | 0,46 |
| 5 | 1.46 | 0,15 | 0,61 |
| 6 | 1.61 | 0,16 | 0,77 |
| 7 | 1.77 | 0,18 | 0,95 |
| 8 | 1.95 | 0,19 | 1,14 |
| 9 | 2.14 | 4,21 | 1,36 |
| 10 | 2.36 | 0,23 | 1,59 |
| 11 | 2.59 | 0,26 | 1,85 |
| 12 | 2.85 | 0,29 | 2,14 |

Vemos que cuando los intereses se capitalizan mensualmente a la tasa de interés mensual 0,1, un capital inicial de un peso produce $ 2.14 de interés al año. Pero 2.14 no es estrictamente una tasa de interés porque si bien corresponde a la unidad de moneda no corresponde a la unidad de tiempo, la unidad de tiempo es el mes y 2.14 se han producido en 12 unidades de tiempo y no en una.

Las tasas 0,1 mensual y 2,14 anual corresponden a operaciones financieras distintas, una con unidad de tiempo mensual y la otra anual, ambas tasas producen el mismo interés al cabo del mismo tiempo y se llaman por esta razón, tasas equivalentes.

Por último debemos señalar que para que los intereses sean producidos, pagados o capitalizados, es necesario que el tiempo haya transcurrido. Si no ha transcurrido el tiempo no hay intereses. La idea de "intereses anticipados" no es financiera; se trata de una ficción según la cual se da en préstamo menos capital del que se contrata modificando la tasa de interés (aumentándola). Esto se ve claro con un ejemplo: Supongamos un préstamo al 100% de interés, pagadero por anticipado. Como el deudor tendría que pagar en concepto de interés una cantidad igual a la que se le otorgó en préstamo, firmaría los papeles y se iría sin recibir nada y al final de la unidad de tiempo tendría que volver a pagar el capital prestado más los gastos, lo que resulta absurdo.

3. — EL CAPITAL.

Antes de continuar con la tasa de interés, vamos a referirnos ligeramente al valor del capital a través del tiempo; al interés simple, y al interés compuesto.

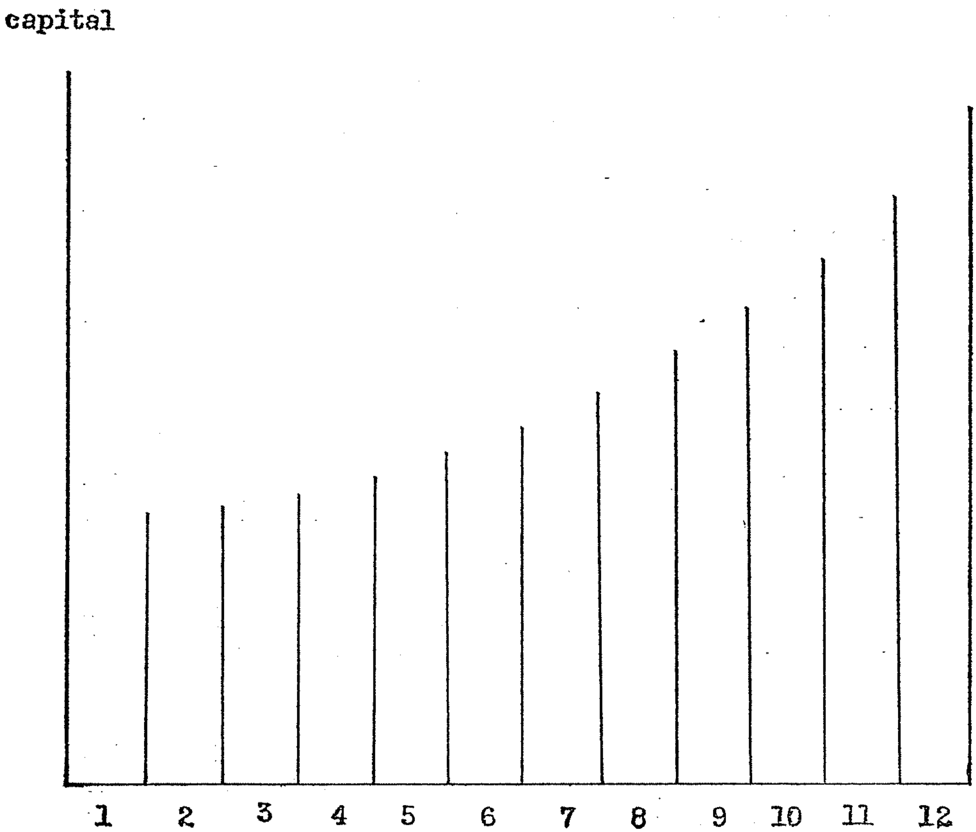


FIG. 2. — Capital al final cuando se capitaliza.

Si bien el capital crece continuamente, nosotros sólo consideramos, por ahora el valor que asume el capital al final de cada unidad de tiempo. Analizaremos los dos casos ya citados: cuando se cobran los intereses al final de cada unidad de tiempo y cuando los intereses se capitalizan.

3.1.—VALOR DEL CAPITAL CUANDO SE COBRAN LOS INTERESES (INTERES SIMPLE).

Supongamos que se coloca durante n períodos (n unidades de tiempo) a la tasa i, un capital de $f(0)$ pesos; $f(0)$ es el valor del capital en el momento cero, o sea al principio del primer período. Al final del primer período el capital, $f(1)$, tiene más valor que al principio: El capital al final del primer período es igual al capital inicial más los intereses de este período.

$$f(1) = f(0) + f(0)\ i.$$

Pero si se cobran los intereses en ese momento el capital retoma su valor inicial $f(0)$ y en consecuencia, al principio del segundo período, resulta:

$$f(1) = f(0)$$

que vuelve a ganar interés durante el segundo período, al final del cual tendremos:

$$f(2) = f(1) + f(1)\ i.$$

o sea

$$f(2) = f(0) + f(0)\ i.$$

Una vez cobrados los intereses, tendremos nuevamente el valor inicial $f(0)$, por lo tanto al principio del tercer período el capital será:

$$f(2) = f(0)$$

En todos los períodos (unidades de tiempo) sucederá lo mismo y al final del período enésimo el valor del capital será:

$$f(n) = f(0) + f(0)\ i.$$

Esto es en realidad lo que se conoce con el nombre de interés simple. Al principio de cada unidad de tiempo el capital es siempre el mismo, $f(0)$, y al final se cobran siempre los mismos intereses: $f(0)\ i$. El gráfico que representa el valor del capital al final y al principio de cada unidad de tiempo es análogo al de Fig. 1.

Si se suman los intereses cobrados en los n períodos se obtendrá la conocida fórmula del interés simple:

$$f(0)\ in.$$

Este no es un valor financiero, según dijimos, se trata de una simple suma algebraica, o contable, pero no tiene ningún significado en el campo financiero porque las n cantidades $f(0)i$ sumadas están ubicadas en distintos momentos, como puede observarse en el citado gráfico de Fig. 1. Por este mismo motivo decimos que en el campo financiero no existe el monto a interés simple ya que se trataría de la suma del capital inicial más los intereses cobrados al final de cada una de las n unidades de tiempo; para que tenga un significado financiero habría que añadir a los intereses cobrados al final de cada período, sus respectivos intereses hasta el final del período enésimo, en cuyo caso el valor del capital más los intereses sería igual al valor que se obtiene cuando los intereses se capitalizan. Pero tampoco esta cantidad sería el monto porque el monto es en realidad el valor del capital al final de cierto tiempo y hemos visto que cuando se cobran los intereses el valor del capital al final de todas las unidades de tiempo es siempre el mismo:

$$f(0)\ (1+i)$$

por esto decimos que en el campo financiero no existe el monto a interés simple.

### 3.2. — VALOR DEL CAPITAL CUANDO SE CAPITALIZAN LOS INTERESES (INTERES COMPUESTO).

Los intereses se capitalizan según el siguiente esquema:

El valor del capital al final del primer período es:

$$f(1) = f(0) + f(0)\ i = f(0)\ (1+i)$$

al final del segundo:

$$f(2) = f(1) + f(1)\ i = f(0)\ (1+i)^2$$

al final del tercero:

$$f(3) = f(2) + f(2)\ i = f(0)\ (1+i)^3$$

y al final del enésimo será:

$$f(n) = f(n\text{-}1) + f(n\text{-}1)\ i = f(0)\ (1+i)^n$$

En el gráfico de Fig. 2 se puede observar el comportamiento del capital al final de cada unidad de tiempo, cuando los intereses se capitalizan durante 12 (n) períodos, a la tasa 0,10.

Hemos considerado así el valor del capital al final de cada unidad de tiempo, sin hacer conjeturas sobre el valor que asume dentro de ellas; pero si en lugar de un número entero, n, consideramos un número real, t, la fórmula

$$f(t) = f(0)\ (1+i)^t \qquad (1)$$

nos permite obtener el valor del capital en cualquier momento, t, posterior al momento 0, bajo el supuesto que dentro de la unidad de tiempo el capital crece con la misma ley que crece al final de cada unidad. Esta fórmula nos indica ahora el comportamiento del capital a través del tiempo según puede observarse en Fig. 3 donde se ve que, como era lógico suponer, el capital no crece de golpe al final de cada unidad de tiempo, como lo insinúa la figura 2, sino continuamente a lo largo de todo el período, con una intensidad que está regida por la tasa de interés.

La tasa de interés indica la intensidad, o la fuerza de crecimiento del capital.

Para mayor ilustración supongamos un capital inicial de $ 10 colocado a la tasa de interés anual 2,1384 (213,84%). Esto significa que por cada peso de capital inicial se pagan, o capitalizan, 2,1384 pesos de interés al final del año; en consecuencia, al finalizar el primer año, el valor del capital será de $ 31,384. Supongamos que queremos saber cuál es el monto, o sea el valor alcanzado por el capital, en cualquier momento dentro del año, o después del año. Aplicamos la fórmula (1):

$$f(t) = f(0)\ (1+i)^t$$

Siendo t una variable real que mide el tiempo en años y $f(0) = 10$.

Al final del primer día, por ejemplo, el valor del capital será:

$$f(1|365) = f(0{,}0027397) = 10\ (1+2{,}1384)^{0{,}0027397} = 10{,}031384$$

Al cabo de 30 días el capital inicial de $ 10 adquiere el siguiente valor:

$$f(30|365) = f(0{,}0821918) = 10\ (1+2{,}1384)^{0{,}0821918} = 10{,}9856$$

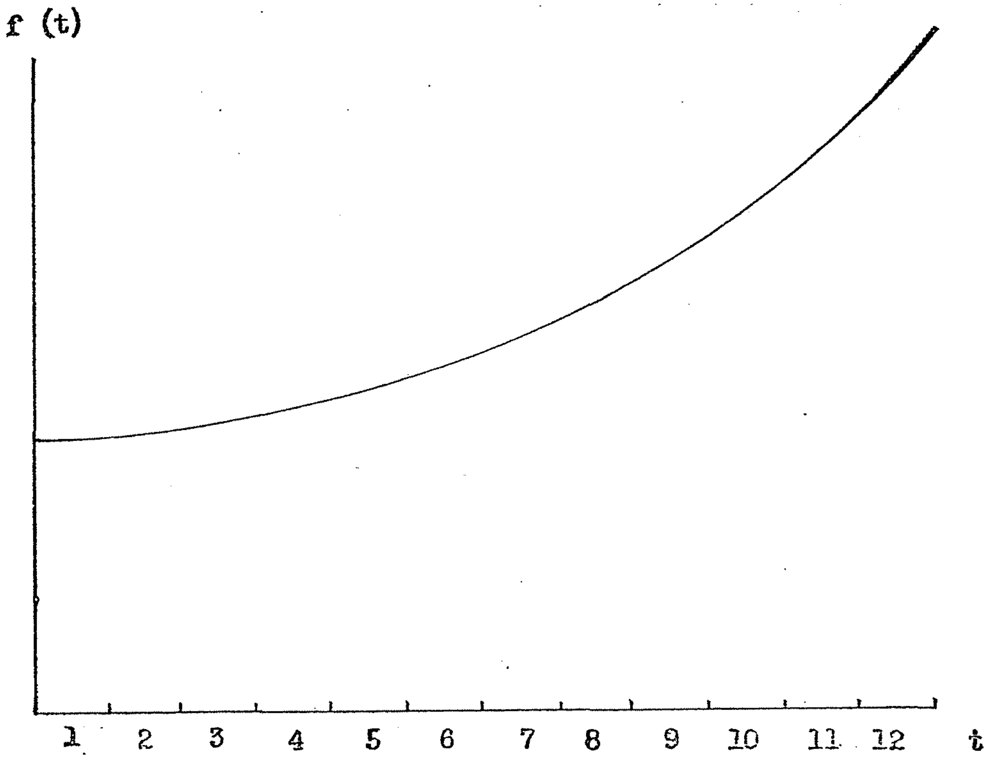


FIG. 3. — Capitalización.

Después de un mes, y dado que el año tiene 12 meses, tendremos:

$$f(1|12) = f(0{,}083333) = 10\ (1+2{,}1384)^{0{,}083333} = 11$$

Cuando hayan transcurrido cinco meses el capital alcanzará el siguiente valor:

$$f(5|12) = f(0{,}416667) = 10\ (1+2{,}1384)^{0{,}416667} = 16{,}050$$

De la misma manera se puede conocer el valor del capital al final de un período cualquiera mayor al año; al final de un año y diez días, por ejemplo, será:

$$f(375|365) = f(1{,}027397) = 10\ (1+2{,}1384)^{1{,}027397} = 34{,}2442$$

Para calcular el valor de t se debe tener en cuenta la unidad de tiempo que corresponde a la tasa de interés dada. En este caso la unidad de tiempo es el año, por lo tanto para un día t es:

$$\frac{1}{365} = 0{,}0027397$$

para 30 días:

$$t = \frac{30}{365} = 0{,}0821918$$

y para un mes:

$$t = \frac{1}{12} = 0{,}083333$$

De paso se puede observar que como el año tiene 12 meses y tiene también 365 días, financieramente, no es lo mismo, 30 días que un mes. Desde el punto de vista financiero, cuando la unidad de tiempo es el mes, los 12 meses son iguales y en consecuencia un mes tiene 30,4166 días.

4. — CAPITALIZACION CONTINUA.

La fórmula $f(t) = f(0)\ (1+i)^t$ para t real, tiene implícita la idea de capitalización contínua y de intereses que producen nuevos intereses que es la clave de nuestro enfoque, por eso, vale la pena que nos detengamos un poco más en este tema.

Supongamos que la operación se realiza por un número entero de unidades de tiempo, $t_o$; o sea que $t = t_o$. Este número entero $t_o$ puede descomponerse en dos números reales $t_1$ y $t_2$ tales que:

$$0 < t_1 < t_o$$
$$0 < t_2 < t_o$$
$$t_1 + t_2 = t_o$$

En tal caso será:

$$\begin{aligned} f(t_o) &= f\ (0)\ (1+i)^{t_o} = f(0)\ (1+i)^{t_1+t_2} \\ &= f(0)\ (1+i)^{t_1}\ (1+i)^{t_2} \\ f(t_o) &= f(t_1)\ (1+i)^{t_2} \qquad (2) \end{aligned}$$

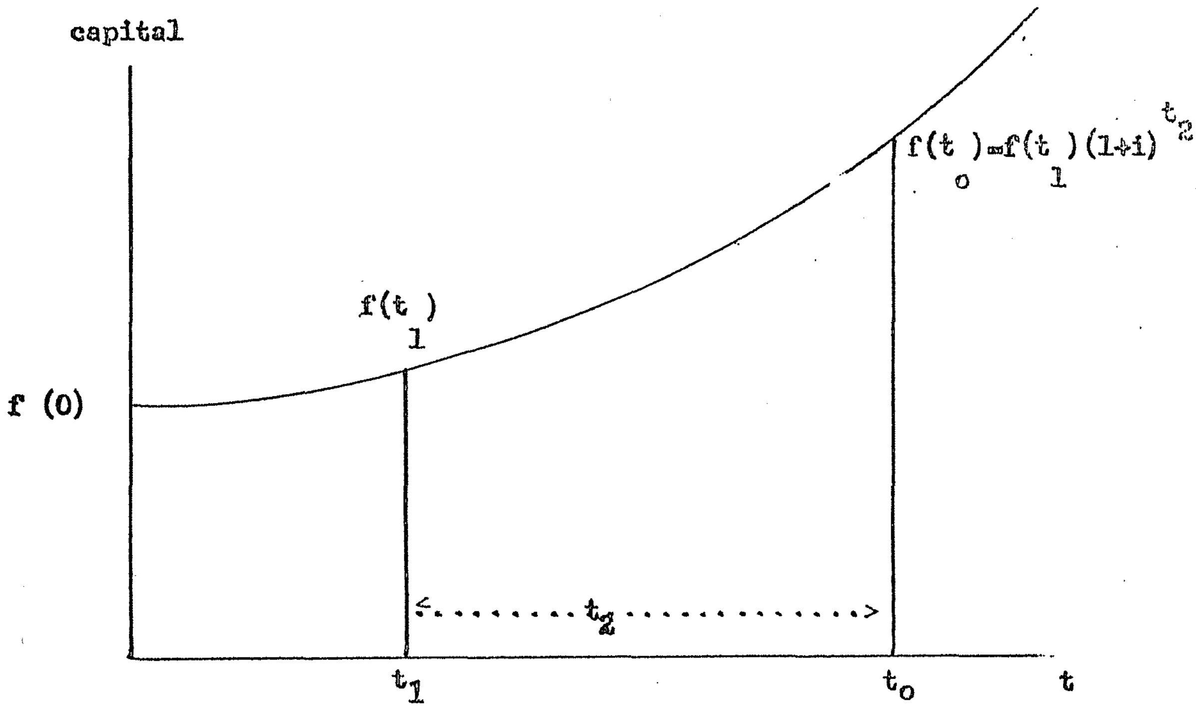


FIG. 4. — Capitalización continua.

donde

$$f(t_1) = f(0)\ (1+i)^{t_1} \qquad (3)$$

representa el valor que adquiere el capital $f(0)$ al final de cualquier período $t_1$ comprendido entre 0 y $t_0$; y (2) nos dice que si se coloca ese capital, $f(t_1)$, a la tasa i, por un plazo que complete el período $t_0$ se obtendrá el mismo monto que se logra al colocar $f(0)$ a la tasa i durante un período igual a $t_0$ (ver Fig. 4).

Veamos un ejemplo. Si la operación al 213,84% anual descripta anteriormente se realiza por un plazo de dos años; al cumplirse los dos años, tendremos:

$$f(2) = 10\ (1+2.1384)^2 = 98.4955$$

Esta cantidad se puede obtener también calculando el valor del capital para cualquier momento dentro de los dos años y luego capitalizando ese monto a la tasa 2.1384 anual por el tiempo que falta para cumplir los dos años. Por ejemplo el valor del capital al finalizar el primer mes es \$ 11 y el tiempo que falta, medido en años, es:

$$2 - \frac{1}{12} = \frac{23}{24} = 1{,}91666$$

por lo tanto tendremos

$$f(2) = f(1|12)\ (1+2{,}1384)^{1.91666} = 11 x 8.95414 = 98.4955$$

igual que antes

Si tomamos el valor del capital al final del primer día, 10,031384, y lo capitalizamos por el tiempo que falta para los dos años (729|365) obtenemos también este resultado:

$$f(2) = f(1/365)\ (1+2{,}1384)^{1{,}99726} = 10{,}031384 x 9{,}81874 = 98.4955$$

Lo mismo sucederá para cualquier período que consideremos dentro de los dos años.

Vemos así, que aunque la capitalización, o los pagos, se efectúan al final de las unidades de tiempo, *la fórmula del monto considera, implícitamente, una capitalización contínua de los intereses.*

Esto nos hace pensar que cuando se cobran los intereses el capital crece también en la misma forma dentro de la unidad de tiempo, pero al final de cada unidad de tiempo, el capital vuelve a su valor original, porque en ese momento se cobra el interés producido en ella, según se observa en Fig. 5, donde queda completo el esquema dado en Fig. 1.

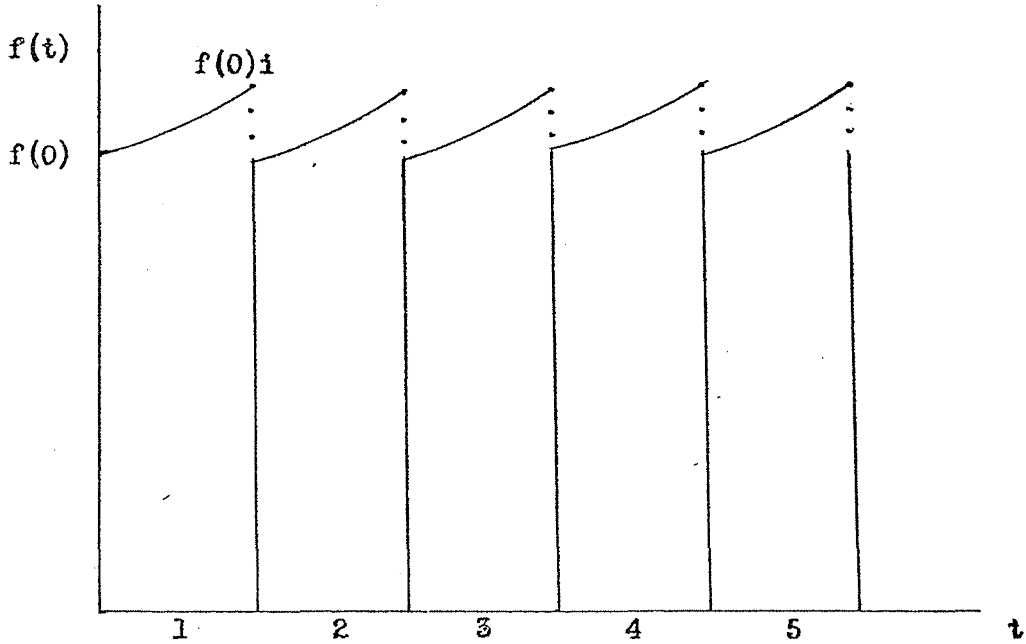


FIG. 5. — Capital cuando se cobran intereses.

5. — LAS TASAS EQUIVALENTES (TASAS EFECTIVAS).

Supongamos que se realizan dos operaciones financieras distintas: una operación, A, a la tasa de interés mensual 0,10 (10 %) y una operación B a la tasa anual 2,1384 (213,84%). Si se calcula el valor que en distintos momentos, asume un capital inicial de un peso con estas tasas, veremos que con ambas obtiene siempre el mismo monto.

En efecto, al final del primer día el valor de un capital inicial de un peso es:

$$f(12/365) = f(0{,}0328767) = (1 + 0{,}1)^{0{,}0328767} = 1{,}0031384$$

en la operación A, y

$$f(1/365) = f(0{,}0027397) = (1 + 2{,}1384)^{0{,}0027397} = 1{,}0031384$$

en la operación B. En las dos operaciones el interés producido por un peso en un día es \$ 0,0031384.

Con respecto a los valores que asume t cuando el plazo es de un día ya hemos visto que cuando la tasa es anual t es 1/365, pero cuando la tasa sea mensual debemos tener en cuenta que el año tiene 12 meses y por lo tanto el valor de t para un día es: 12|365.

Al final del primer mes el valor alcanzado por un peso es:

$$f(1) = 1+0{,}10 = 1{,}10$$

en la operación A, y

$$f(1/12) = f(0{,}083333) = (1 + 2{,}1384)^{0{,}083333} = 1{,}10$$

en la operación B.

Al final del primer año, tendremos:

$$f(12) = (1+0{,}10)^{12} = 3{,}1384$$

en la operación A, y

$$f(1) = 1+2{,}1384 = 3{,}1384$$

en la operación B.

Si tomásemos un período superior al año también obtendríamos la misma relación en los resultados. Se dice que las operaciones A y B, con distntas unidades de tiempo, son equivalentes porque en ambas una unidad de capital inicial va asumiendo el mismo valor mientras transcurre el tiempo.

En consecuencia dos operaciones financieras son equivalentes cuando tienen distintas unidades de tiempo y en ambas la unidad de capital produce el mismo monto al cabo del mismo tiempo.

Diremos que dos, o más tasas de interés son equivalentes cuando corresponden a operaciones financieras equivalentes. En consecuencia, para que las tasas de interés sean equivalentes deben cumplir dos requisitos fundamentales:

1) Deben tener distintas unidades de tiempo.
2) Las unidades de capital deben producir, con ambas tasas, el mismo monto al cabo del mismo tiempo.

De todo esto se deduce que las tasas de interés que cumplen los requisitos mencionados son equivalentes entre sí; así por ejemplo la tasa mensual 0,10 es equivalente a la tasa anual 2,1384 y ésta es, a su vez, equivalente a aquella. Por lo tanto dada una tasa de interés con una unidad de tiempo, quedan automáticamente determinadas *infinitas tasas equivalentes a ella,* y equivalentes entre sí, una tasa para cada posible unidad de tiempo distinta a la de la tasa mencionada. Cabe señalar que si las unidades de tiempo son iguales y las unidades de capital producen el mismo monto, las tasas no son equivalentes, sino iguales.

Veamos ahora la fórmula para calcular las tasas de interés equivalentes. Por lo general el problema se plantea de la siguiente manera: dada una tasa de interés para cierta unidad de tiempo, determinar la tasa equivalente para otra unidad de tiempo. Se quiere cambiar una operación financiera que tiene una unidad de tiempo por otra equivalente con distinta unidad de tiempo. Por lo general una de estas unidades suele ser el año o el mes.

Supongamos que se tiene la tasa de interés mensual $i=0{,}10$ y se quiere calcular la tasa anual j, equivalente. Según la definición de tasas equivalentes debe verificarse la siguiente relación:

$$1+j = (1+i)^{12}$$
$$1+j = (1+0{,}10)^{12} = 3{,}1384$$

por lo tanto la tasa anual equivalente a la tasa mensual 0,10 es:

$$j = 3{,}1384 - 1 = 2{,}1384$$

En general, la fórmula para determinar la tasa de interés j, equivalente a la tasa de interés i, es:

$$j = (1+i)^m - 1 \qquad (4)$$

donde m puede ser entero o fraccionario y representa el número de veces que la unidad de tiempo para la cual se quiere calcular la tasa quivalente, j, *contiene* a la unidad de tiempo de la tasa i dada. Para una mayor ilustración calcularemos las tasas diarias equivalentes a la tasa mensual 0,10 y a la tasa anual 2,1384, que lógicamente tendrán que ser iguales, ya que estas dos tasas son, también, equivalentes.

Para determinar m debemos tener en cuenta que un día es 1/365 partes del año, por lo tanto para calcular la tasa diaria equivalente a una tasa anual hacemos:

$$m = \frac{1}{365} = 0{,}0027397$$

y en consecuencia la tasa diaria equivalente a la tasa anual 2,1384 es:

$$j = (1+2{,}1384)^{0{,}0027397} - 1 = 0{,}0031384$$

Para obtener la tasa diaria equivalente a la tasa mensual 0,10 debemos recordar que un año contiene 12 meses y por lo tanto un día es igual a la 1|365 partes de 12 meses, o sea:

$$m = \frac{12}{365} = 0{,}0328767$$

siendo la tasa diaria, equivalente a la tasa 0,10 mensual:

$$j = (1+0{,}10)^{0{,}0328767} - 1 = 0{,}0031384$$

igual que antes. Se desprende de estos ejemplos que el único problema que se puede presentar es el de calcular el valor de m correctamente. Una vez determinado m el problema se limita a efectuar el cálculo de j mediante una calculadora electrónica de bolsillo que tenga la función $x^y$. Se puede observar, además, en los ejemplos dados que la tasa diaria 0,0031384, la tasa mensual 0,10 y la tasa anual 2,1384 son equivalentes entre sí.

Cuando se trabaja con una unidad de tiempo menor al año, a la tasa equivalente anual se le da el nombre de tasa efectiva anual. Así por ejemplo si se opera a la tasa mensual 0,10 se suele decir que 2,1384 es la tasa efectiva anual.

Para concluir con este tema de tasas equivalentes, nos restaría decir que cuando se establece una tasa de interés anual se pueden efectuar pagos, o capitalizaciones, en períodos menores al año, sin cambiar el rendimiento, o el costo de la operación, siempre que se utilice en el cálculo la respectiva tasa equivalente, de lo contrario, las operaciones no serán equivalentes y se cobrarán o se pagarán intereses que no concuerdan con la tasa de interés anual mencionada.

## 6.—TASAS PROPORCIONALES (TASAS NOMINALES)

Una costumbre muy generalizada en la práctica de las operaciones financieras y bancarias es la de establecer una tasa de interés anual, aunque los intereses se paguen, o capitalicen, en períodos menores al año. Este es lo que hacen, tanto el Banco Central cuando fija las tasas de interés, como todos los bancos y entidades financieras al concertar la mayor parte de sus operaciones. Si las operaciones en las que los intereses se pagan en períodos menores al año se realizaran a las tasas de interés equivalentes respectivas no habría ningún problema; pero resulta que la costumbre es (o ha sido hasta hace muy poco) la de calcular para la fracción de año, una tasa proporcional a la tasa anual establecida y al hacer esto se cambia la operación por otra con una tasa efectiva mayor y se cobran más intereses que los que corresponden a la tasa convenida.

Dadas dos o más tasas de interés con distintas unidades de tiempo, se llaman tasas proporcionales a aquellas que son proporcionales a las respectivas unidades de tiempo.

Así, por ejemplo, como el mes es la doceava parte del año, la tasa mensual proporcional a una tasa anual será la doceava parte de esta tasa anual.

Supongamos que se dice que una operación financiera es al 96 % de interés anual con pago mensual de los intereses, y que para determinar la tasa mensual, i, se divide la tasa anual por 12:

$$i = \frac{0,96}{12} = 0,08$$

Esta es la verdadera tasa de interés de esta operación. La tasa anual equivalente a 0,08 mensual es:

$$j = (1 + 0,08)^{12} - 1 = 1,518$$

En consecuencia la tasa de interés, efectiva, anual es 1,518 (151,8%) y no 0,96 (96%) como se dijo; para que la operación sea al 96% de interés anual, se debió calcular la tasa mensual equivalente a 0,96, o sea:

$$j = (1 + 0{,}96)^{1|2} - 1 = 1{,}96^{0{,}083333} - 1 = 0{,}05768$$

La diferencia entre la tasa mensual 0,08 que se cobra y la tasa 0,05768 que debió cobrarse es considerable. Lo mismo sucede con la diferencia entre las tasas anuales 0,96 y 1,518.

La tasa 0,96 anual, proporcional a la tasa mensual 0,08 que se cobra, *es una tasa nominal* ya que como tasa de interés sólo lo es de nombre; la tasa de interés anual equivalente a 0,08 mensual es 1,518 (151,8%). Esta última tasa se llama *tasa efectiva* anual precisamente para diferenciarla de la tasa nominal anual (0,96).

Las tasas proporcionales no son equivalentes. Las tasas nominales que se utilizan en la práctica son, por lo general, tasas anuales. Si la unidad de tiempo es la enésima parte del año, y denotando con i la tasa de interés de esta fracción de año y con $i^{(m)}$ la tasa nominal anual, tendremos:

$$i = \frac{i^{(m)}}{m}$$

de donde:

$$i^{(m)} = im. \qquad (5)$$

Las tasas $i^{(m)}$, e i, son proporcionales entre sí.

La fórmula (5) expresa el significado de la tasa nominal: Si la unidad de tiempo a la cual se refiere la tasa nominal es el año, y éste se subdivide en m partes iguales, la tasa nominal anual de interés es el interés que *produciría* la unidad de moneda en un año si el interés en cada una de las enésimas partes en que se divide al año, fuera igual al interés producido en el primer enésimo.

La fórmula:

$$(1+i)^m = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + j \qquad (6)$$

establece la relación entre la tasa de interés del subperíodo de año, i; la tasa nominal anual, $i^{(m)}$; y la tasa anual equivalente, j, (o tasa efectiva anual), y a partir de esta fórmula se puede despejar cualquiera de estas tasas en función de las otras.

Ultimamente el Banco Central ha dado un gran paso en lo que respecta a tasa de interés, disponiendo que en algunas operaciones realizadas por los Bancos y las entidades financieras no bancarias, se mencione la tasa efectiva anual, pero antes que ésta se indica también la tasa nominal y en la práctica aparece así dos tasas anuales para cada operación creando una gran confusión ya que se llama, generalmente, tasa de interés anual a la tasa nominal y tasa de rendimiento anual a la tasa efectiva.

Para evitar confusiones el Banco Central debe exigir que se fije la tasa que corresponde a cada período. Si se desea fijar una tasa anual, ésta debe ser la efectiva y las operaciones en fracciones de año deben realizarse a la tasa equivalente respectiva.

7. —EL VALOR ACTUAL DE UN CAPITAL.

Ya hemos visto que la fórmula (1) nos da la idea de capitalización contínua de intereses y que en la práctica resulta obviamente imposible pagar, o capitalizar los intereses continuamente. El pago, o lo capitalización, se efectúa al final de períodos que hemos llamado unidades de tiempo; pero los importes que se pagan, o capitalizan en esos momentos, son los que resultan del crecimiento contínuo del capital. La fórmula:

$$f(t) = f(0)\ (1+i)^t$$

expresa, según dijimos, el valor que adquiere el capital al final del período t-ésimo. La operación financiera indicada por esta fórmula se llama capitalización y tiene por objeto determinar el valor final de un capital. El gráfico de Fig. 6 representa el crecimiento de un capital inicial $f(0)$ a medida que va pasando el tiempo.

La operación financiera inversa a la capitalización se llama actualización y consiste en obtener el valor actual de un capital final.

Hemos visto que para encontrar el valor de un capital al final del período t, hay que multiplicar el valor inicial por $(1+i)^t$; se deduce fácilmente que si se conoce el valor final y se quiere encontrar el valor inicial, habrá que dividir ese valor final por $(1+i)^t$, o sea que:

$$f(0) = \frac{f(t)}{(1+i)^t} = f(t)\ (1+i)^{-t}$$

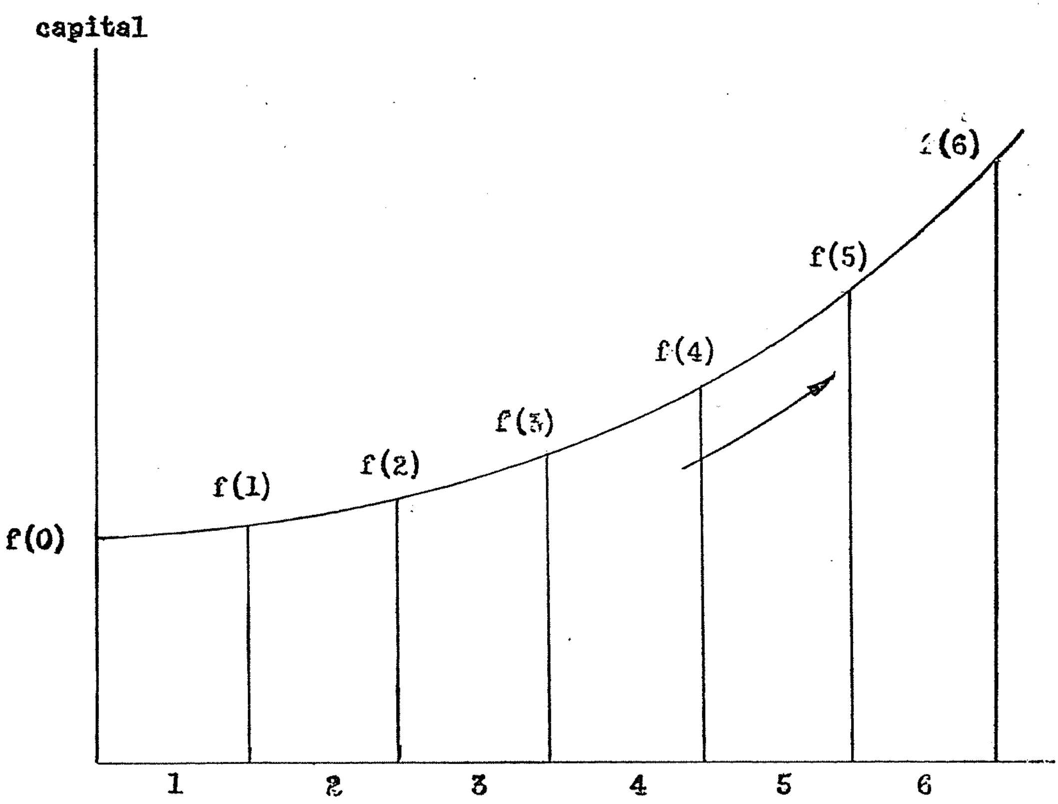


Fig. 6. — Capitalización

Haciendo:

$$v = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1}$$

nos queda:

$$f(0) = f(t)\, v^t \qquad (7)$$

Así como $(1+i)^t$ es el "factor de capitalización", $v^t$ es el "factor de actualización"; v indica el valor actual de una unidad de moneda en la unidad de tiempo. El valor final de un peso en una unidad de tiempo es $(1+i)$; el valor final de v pesos es un peso; el valor actual de un peso es v y el valor actual de $(1+i)$ es uno. La expresión:

$$v(1+i) = 1$$

señala claramente lo que acabamos de decir.

Es curioso observar el comportamiento de la variable t a medida que pasa el tiempo en la capitalización y en la actualización. Ya hemos visto que en la capitalización t crece cuando pasa el tiempo. Pero no sucede lo mismo en la actualización. Supongamos que tenemos un documento que vence dentro de n unidades de tiempo, cuando haya transcurrido la primera unidad de tiempo faltarán n-1 unidades para que el documento adquiera su valor final; luego faltarán n-2 y así sucesivamente hasta el vencimiento donde faltarán 0 unidades.

Cuando se trata de valor actual la variable t indica el tiempo que falta para que el capital adquiera su valor final, que se representa, generalmente, por $\Phi\ (0)$. De esta manera $\Phi\ (t)$ es el valor actual de un documento que tendrá un valor $\Phi\ (0)$ dentro de t unidades de tiempo:

$$\Phi\ (t) = \Phi\ (0)\ v^t \tag{9}$$

la variable t indica la cuenta regresiva del tiempo hasta el vencimiento.

Para una mejor comprensión de este tema vamos a denotar, provisoriamente, con t la variable que mide el tiempo transcurrido desde que se inició la operación, y con z la que mide el tiempo que falta para el vencimiento. Sea $\Phi\ (n)$ el valor actual de un capital que valdrá $\Phi(0)$ dentro de n unidades de tiempo:

$$\Phi(n) = \Phi(0)\ v^n$$

cuando hayan pasado t unidades faltarán n-t para el vencimiento y tendremos que

$$\Phi\ (n\text{-}t) = \Phi(0)\ v^{n-t}$$

pero como $n—t = z$:

$$\Phi\ (n\text{-}t) = \Phi(0)\ v^z = \Phi\ (z) \tag{10}$$

La fórmula (10) señala el valor del capital, t unidades de tiempo después del momento que tenía el valor inicial $\Phi(n)$ y z unidades antes de que adquiera el valor final $\Phi(0)$. En el gráfico de Fig. 7 se puede observar el comportamiento de $\Phi(z)$ a medida que pasa el tiempo y la relación ante t y z:

—t señala las unidades de tiempo transcurridos, y

—z señala las unidades de tiempo que faltan para que el capital adquiera el valor $\Phi(0)$; cuando t crece z disminuye.

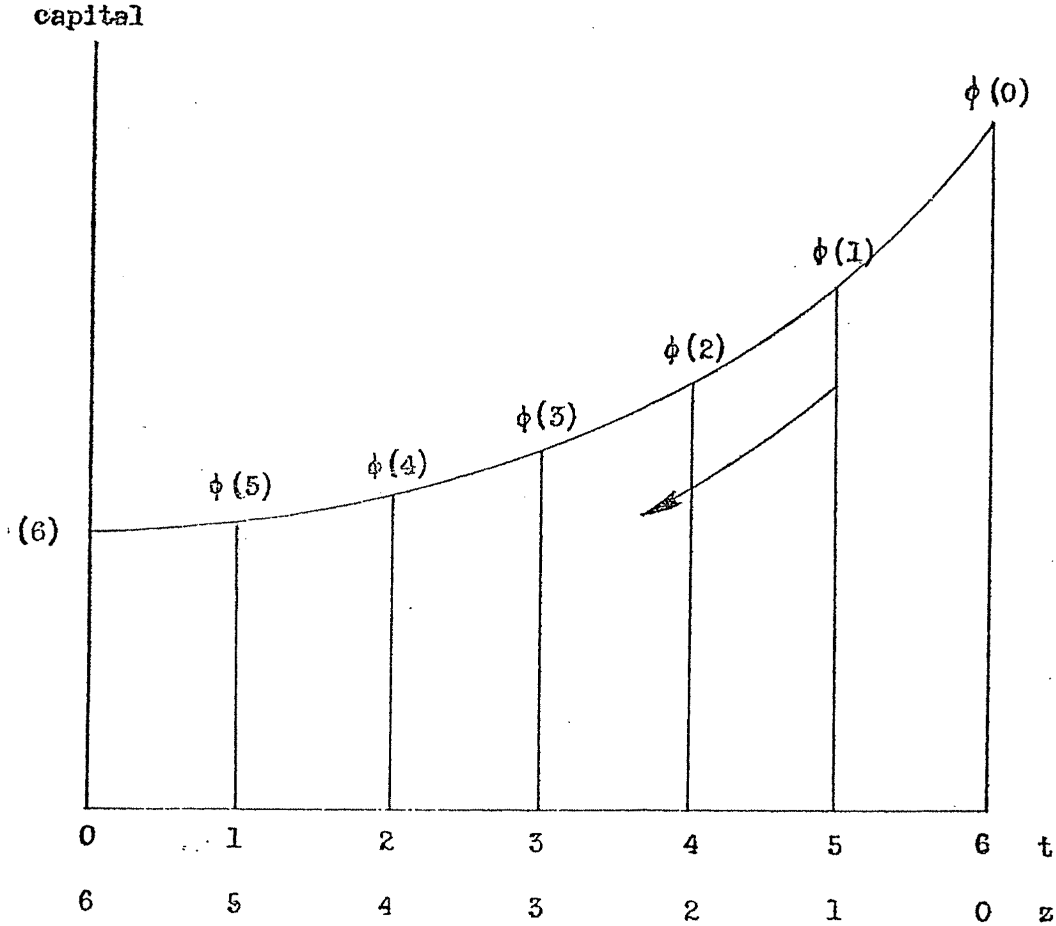


FIG. 7. — Actualización.

Comparando (7), (9) y (10) podemos obtener las siguientes relaciones para un n dado:

$$f(0) = \Phi(n)$$
$$f(n) = \Phi(0)$$
$$f(t) = \Phi(n\text{-}t) = \Phi(z)$$

Si en lugar de $\Phi(z)$ se utiliza $\Phi(t)$ hay que tener presente que, en tal caso, t indica las unidades de tiempo que faltan para que el capital adquiera cierto valor $\Phi$ (0), y que t disminuye a medida que pasa el tiempo.

La actualización y la capitalización son las dos operaciones fundamentales en el campo financiero. La actualización es una operación en la cual en lugar de conocer el valor inicial conocemos el valor final del capital. Entre el capital final y su valor actual existe la misma relación funcional que hay entre el monto y el capital inicial.

Para terminar con este tema sólo nos resta decir que la diferencia entre los operaciones de capitalización y actualización consiste en que actúan en distinto sentido en el tiempo. La capitalización toma como punto de referencia el capital inicial y determina el valor del capital final. La actualización toma como punto de referencia el capital final y determina el valor del capital inicial. Cuando hablamos de monto o interés de un capital, este capital es siempre un capital inicial y cuando hablamos de descuento o valor actual de un capital, este capital es siempre un valor final.

8. — EL DESCUENTO.

El término "descuento" suele utilizarse de distintas maneras en el campo financiero: una como operación y otra como cantidad. La operación financiera de descuento es la actualización, es decir, es la operación inversa a la capitalización; en la capitalización se suman los intereses, en el descuento, o actualización, se restan.

El descuento como cantidad es la diferencia entre el valor escrito (nominal) de un documento que vence al final de un plazo dado y el valor actual (efectivo) de ese documento.

Otras veces el término descuento se utiliza para indicar que se ha obtenido un crédito garantizado con documentos de terceros. Es común decir que se "ha descontado" un documento.

Nosotros nos referimos, en este punto, al descuento como cantidad, es decir a la diferencia, D, entre el valor escrito o valor nominal (N) de un documento y el valor actual, o valor efectivo (E) que se recibe al hacer la operación. Si el número de unidades de tiempo es n tendremos las siguientes relaciones:

$$D = N - E \qquad (11)$$

siendo

$$N = f(n) = \Phi(0)$$
$$E = f(0) = \Phi(n)$$

y

$$N = E(1+i)^n$$
$$E = N\, v^n$$

Además hemos visto que los intereses, I, son la diferencia entre el monto y el valor inicial, y por lo tanto:

$$I = N - E \qquad (12)$$

De (11) y (12) se deduce que el descuento y los intereses son la misma cosa, lo que se descuenta son los intereses y no hay ninguna diferencia entre descuento e interés. Alguien puede tener la impresión de que el descuento está ubicado al principio de la operación y los intereses al final, lo que significaría una diferencia substancial entre ellos, pero no es así, porque ambos son lo que paga el deudor por el préstamo recibido y a ambos los paga al final, como puede verse claramente en el siguiente ejemplo: Supongamos que una persona A, obtiene \$ 1.000 en calidad de préstamo, pagando al cabo de un mes, \$ 1.100 en calidad de amortización e intereses, y que otra persona, B, descuenta un documento que vence dentro de un mes, cuyo valor nominal es \$ 1.100 y recibe hoy \$ 1.000. Ambas operaciones son iguales porque en ambas los deudores reciben \$ 1.000 en calidad de préstamo y pagan \$ 100 por el uso de este capital. El deudor B piensa que le descontaron 100 al principio, pero en realidad los paga al final, igual que A. Los \$ 100 de diferencia, pagados por ambos deudores al final del mes son los intereses sobre los \$ 1.000 recibidos al principio. En consecuencia B no recibe un préstamo de \$ 1.100 del cual le descuentan \$ 100, sino uno de \$ 1.000 por lo que paga 100 al final.

## 9. — LA TASA DE DESCUENTO.

Si bien el descuento es el interés, la tasa de descuento no es igual a la tasa de interés. Este es un tema muy importante porque durante mucho tiempo el Banco Central ha confundido la tasa de interés con la tasa de descuento. El Banco Central fijaba la tasa de interés para las operaciones de crédito y en muchos casos estas tasas se aplicaban como si fueran tasas de descuento. Incluso el Centro de Estudios Monetarios y Bancarios del Banco Central publicó una tabla, que tuvo gran difusión en nuestro país, titulada "Tablas de equivalencias entre tasas de interés adelantadas y vencidas" que nosotros comentamos en nuestro trabajo "Tasas de interés adelantadas y vencidas" publicado en la revista "Administración de Empresas" Nº 79. La tabla en cuestión proporcionaba las tasas efectivas anuales de interés equivalentes a tasas nominales anuales de descuento. Como consecuencia de esto, hoy, en la República Argentina, todos hablamos de tasas de interés adelantadas y de tasas de interés vencidas, sin tener en cuenta que la tasa de interés es una sola, según señalamos en la definición que dimos al principio. La tasa de interés no es ni "adelantada" ni "vencida", es simplemente la tasa de interés.

Se define la tasa de descuento como el descuento (o interés) correspondiente a la unidad de tiempo, *por cada unidad de capital final.* Como el descuento es el interés la definición de tasa de descuento resulta análoga a la de tasa de interés; pero la tasa de interés se refiere (aunque no lo dijimos expresamente) a una unidad de capital inicial y la tasa de descuento a una unidad de capital final, en la cual están incluidos los intereses producidos en la unidad de tiempo.

Cuando $n=1$ resulta que

$$E = f(0) = \Phi(1)$$

es el valor del capital al principio de la unidad de tiempo y:

$$N = f(1) = \Phi(0) = E(1+i)$$

es el capital al final de dicha unidad. En consecuencia la tasa de interés, i, es:

$$i = \frac{N - E}{E}$$

y la correspondiente tasa de descuento, que denotamos con la letra d, es:

$$d = \frac{N - E}{N} = \frac{N - E}{E(1+i)} = \frac{i}{1+i} \qquad (13)$$

o sea que

$$d = v\,i \qquad (14)$$

Al mismo resultado se llega partiendo de la definición de tasa de descuento: dado que d es lo que hay que restar a un capital final de un peso para obtener su valor actual, resulta:

$$v = 1 - d \qquad (15)$$

de donde despejamos d:

$$d = 1 - v = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i}$$

Según (14) la tasa de descuento, d, es igual al valor actual de la tasa de interés, pero mejor sería decir que es igual a los intereses de v en una unidad de tiempo. De la misma manera i puede considerarse el descuento de (1+i) en la unidad de tiempo, o el monto de d, en el mismo período, ya que de (13) obtenemos:

$$i = d\,(1+i) \qquad (16)$$

El gráfico de Fig. 8 nos ilustra sobre estas relaciones.

Para obtener la tasa de descuento en función de la tasa de interés se usa la fórmula (13):

$$d = \frac{i}{1+i}$$

y para obtener i en función de d. se la despeja de la anterior:

$$i = \frac{d}{1-d} \qquad (17)$$

También son importantes las siguientes relaciones que se deducen fácilmente:

$$v = 1 - d = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1} \qquad (18)$$

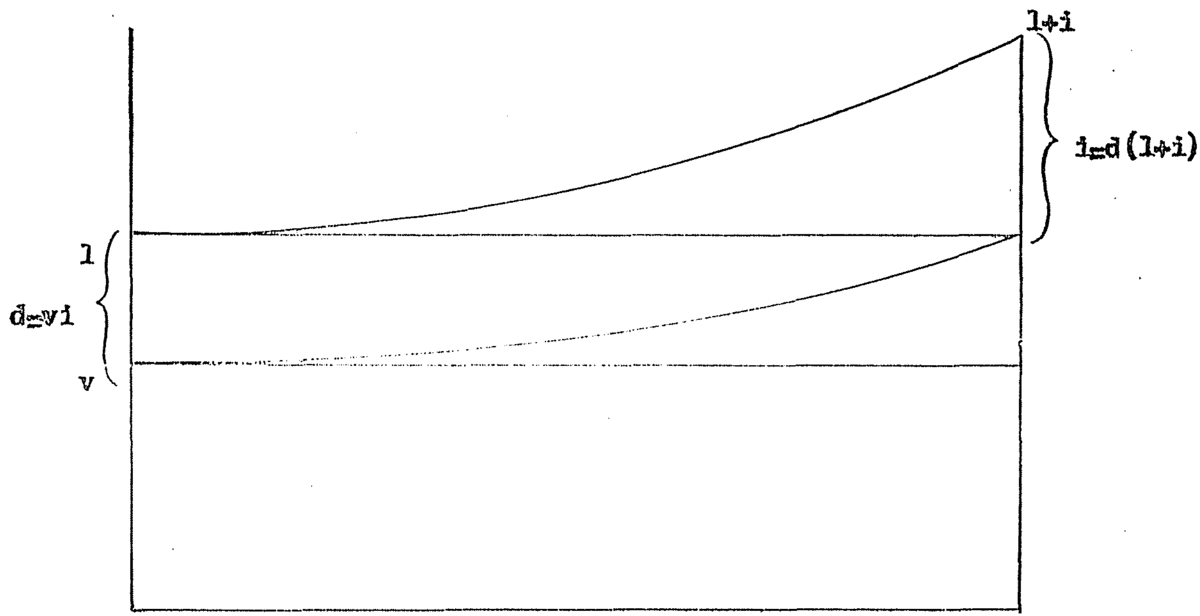


FIG. 8. — Tasas de interés y de descuento.

$$1 + i = \frac{1}{i-d} = (1-d)^{-1} \qquad (19)$$

y

$$d = i(1-d) \qquad (20)$$

En las operaciones financieras se pueden utilizar, indistintamente, la tasa de interés o la tasa de descuento, pero hay que tener cuidado de usarlas *correctamente*. Para capitalizar deben utilizarse las fórmulas (19) y para actualizar las (18). Supongamos que se otorga un préstamo de $ 1.000 a la tasa 0,10 de interés mensual, (al 10%) y que los intereses y el capital se pagan al cabo del año.

Si utilizamos la tasa de interés para calcular el valor final tendremos

$$f(12) = 1.000\ (1 + 0{,}1)^{12} = 3.138{,}42$$

Si se quiere utilizar la tasa de descuento, debemos calcular d y recordar la fórmula (19)

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0{,}1}{1{,}1} = 0{,}09090909$$

$$f(12) = \frac{1.000}{(1-d)^{12}} = \frac{1{,}000}{0{,}9090909^{12}}$$

$$= \frac{1.000}{0{,}31863082} = 3.138.42$$

igual que antes. De la misma manera si tengo un documento de $ 1.000 que vence dentro de 12 meses y lo quiero descontar al 10 % de interés mensual puedo calcular su valor actual con cualquiera de las dos tasas. Con la tasa de interés tenemos:

$$\Phi\ (12) = \frac{\Phi\ (0)}{(1+i)^{12}}$$

$$\Phi\ (12) = \frac{1.000}{1{,}1^{12}} = \frac{1.000}{3{,}13842} = 318{,}63$$

si se trabaja con la tasa de descuento, se arriba al mismo resultado:

$$\Phi(12) = 1.000\ (1\text{-}d)^{12} = 1.000\ (1\text{-}0{,}09090909)^{12}$$
$$= 1.000 \times 0{,}31863 = 318{,}63$$

pero si aplicamos, equivocadamente, la tasa de interés como si fuera una tasa de descuento, como lo hacen generalmente los Bancos, obtenemos un valor muy inferior:

$$\Phi(12) = 1.000\ (1\text{-}i)^{12} = 1.000 \times 0.28243 = 282{,}43$$

Como vemos en las operaciones financieras se puede utilizar cualquiera de las dos tasas pero, cuando sea necesario, hay que hacer la conversión mediante las fórmulas (13) o (17) según corresponda.

10. — TASAS NOMINALES Y TASAS EQUIVALENTES DE DESCUENTO.

Así como hay tasas nominales y tasas equivalentes de interés, también hay tasas nominales y tasas equivalentes de descuento.

10.1. — LA TASA NOMINAL DE DESCUENTO.

El concepto de tasa nominal de descuento es análoga al de tasa nominal de interés. Si el año se divide en m partes iguales siendo la unidad de tiempo esta enésima parte de año, la tasa nominal anual de descuento será:

$$d^{(m)} = dm \qquad (21)$$

luego:

$$d = \frac{d^{(m)}}{m} \qquad (22)$$

La tasa nominal anual de descuento $d^{(m)}$, es el descuento que *correspondería*, a la unidad de moneda final, en un año, si el descuento en cada una de las emésimas partes en que se divide el año *fuera* igual al descuento *del último* enésimo.

En la tabla que publicó el Centro de Estudios Monetarios y Bancarios del Banco Central citada anteriormente, se llama "tasa de interés adelantada" a la tasa nominal anual de descuento. En realidad esta tasa no significa absolutamente nada en el campo financiero dado que no es una tasa de interés y como tasa de descuento, sólo lo es de nombre. Pero pocas veces se la menciona por su nombre. En las operaciones de descuentos el Banco Central fija la tasa anual de interés y los Bancos la aplican como si hubiera fijado la tasa anual nominal de descuento, llamándola "tasa de interés anticipado".

Por ejemplo, cuando el Banco Central fijó la tasa de interés del 0,48 anual, en una operación a 180 días se efectuaban los siguientes cálculos: Se obtenía una tasa semestral dividiendo 0,48 por 2:

$$\frac{0{,}48}{2} = 0{,}24$$

Luego se calculaba el descuento aplicando esta tasa sobre el valor nominal, o final, del documento, y en consecuencia 0,48 se convertía en una tasa nominal de descuento. En efecto, si

$$d = 0{,}24$$

resulta

$$d^{(2)} = 0{,}24 \times 2 = 0{,}48$$

y la tasa semestral de interés es, entonces:

$$i = \frac{d}{1-d} = \frac{0{,}24}{1-0{,}24} = 0{,}3158$$

la tasa anual equivalente o sea la tasa de interés efectiva anual correspondiente, es:

$$j = (1+0{,}3158)^2 - 1 = 0{,}73130$$

muy superior a la tasa de interés mencionada del 0,48.

## 10.2. — LAS TASAS EQUIVALENTES DE DESCUENTO.

De todas las tasas que consideramos, esta tasa es la que tiene menor trascendencia, porque en la actualidad no es de ninguna aplicación en la práctica. Se trata de operaciones con distintas unidades de tiempo en las cuales las tasas de descuento deben ser tales que las operaciones sean equivalentes. Si designamos mediante la letra g la tasa anual de descuento equivalente a una tasa mensual de descuento, d, debe verificarse que:

$$1 - g = (1 - d)^{12} \qquad (23)$$

o sea:

$$g = (1 - d)^{12} - 1$$

La fórmula que relaciona todas estas tasas es la siguiente:

$$(1+i)^m = \{1 + \frac{i^{(m)}}{m}\}^m = i + j = (1-d)^{-m}$$

$$= \{1 - \frac{d^{(m)-m}}{m}\} = (1-g)^{-1} \qquad (24)$$

donde (si el año se divide en m partes):

—i, es la tasa de interés de la enésima parte del año.

—j, es la tasa de interés anual, equivalente a i.

—$i^{(m)}$, no es tasa de interés, se llama tasa *nominal* anual y es proporcional a i.

—d, es la tasa de descuento de la enésima parte del año.

—g, es la tasa de descuento anual equivalente a d.

—$d^{(m)}$, es la tasa nominal de descuento.

## 11. — UN CASO PRACTICO. LA TASA DE INTERES DE LAS LETRAS DE TESORERIA.

En un aviso publicado en un diario de nuestra ciudad (Córdoba) en el mes de agosto ppdo. se lee: Suscriba letras de Tesorería. Hasta el 23/8/77 a las 13,30 horas. Después se publica un cuadro con los plazos en días, con el precio de colocación de letras de valor nominal 100 y con el % mensual que corresponde en realidad a 30 días:

| Días | Precio de colocación | % mensual |
|---|---|---|
| 14 | 96,89 | 7,00 |
| 28 | 93,84 | 7,05 |
| 42 | 90,90 | 7,05 |
| 63 | 86,58 | 7,10 |
| 77 | 83,76 | 7,15 |
| 91 | 80,99 | 7,20 |
| 119 | 73,76 | 7,25 |

En este aviso, que es real, se cometió un error que difícilmente haya sido descubierto: hay un plazo con una tasa mal calculada, o un precio de colocación equivocado; quien suscribió a ese plazo, ha tenido un interés del 7,97% mensual, del cual, posiblemente, ni se enteró. Nosotros calcularemos las distintas tasas para el plazo de 14 días que es el primero de la lista, las demás quedan a cargo del lector; quien podrá encontrar, así, el error que mencionamos.

Para el plazo de 14 días tenemos los siguientes datos:

$$E = 96.89 \text{ y } N = 100$$

Podemos trabajar de muchas maneras, podemos calcular la tasa de interés y luego la tasa de descuento en función de ella; o a la inversa; o las dos tasas directamente. Nos parece que lo lógico es calcular primero la tasa de interés para los 14 días y así lo haremos:

$$i = \frac{N - E}{E} = \frac{100 - 96.89}{96.89} = \frac{3.11}{96.89} = 0{,}032098$$

Conocido i para los 14 días podemos calcular todas las otras tasas fácilmente. *La tasa de descuento* para 14 días es:

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0{,}032098}{1{,}032098} = 0{,}0311$$

Para calcular la tasa de interés mensual equivalente debemos tener en cuenta que para el Banco Central el mes tiene 30 días, por lo tanto:

$$m = \frac{30}{14} = 2.142857$$

en consecuencia:

$$j = (1 + 0{,}032098)^{2.142857} - 1 = 0{,}07$$

la tasa de interés mensual para plazos de 14 días que hemos obtenido coincide con la que trae el cuadro.

Para calcular la *tasa de interés anual equivalente* hacemos:

$$m = \frac{365}{14} = 26{,}07143$$

$$j = (1+0{,}32098)^{26{,}07143} - 1 = 1{,}2789$$

No podemos efectuar el cálculo a partir de la tasa mensual 0,07 calculada, y para m = 12, porque como hemos tomado 30 días para un mes y 365 para el año, nos faltarían 5 días para el año y en lugar de obtener una tasa anual obtendríamos una tasa para 360 días.

Por su parte la *tasa de descuento anual equivalente* se puede obtener directamente a partir de la tasa efectiva anual, j:

$$g = \frac{j}{1+j} = \frac{1{,}2789}{2{,}2789} = 0{,}56119$$

Finalmente las *tasas nominales anuales,* que a nuestro criterio no tienen ningún significado en el campo financiero, son:

$$i^{(m)} = im = 0{,}032098 \times 26{,}07143 = 0{,}83684$$

y

$$d^{(m)} = dm = 0{,}0311 \times 26{,}07143 = 0{,}81082$$

## 12. — LAS TASAS INSTANTANEAS DE INTERES Y DE DESCUENTO.

No estaría completo este trabajo de la tasa de interés si no dedicáramos dos páginas a las tasas instantáneas de interés, y de descuento.

Hemos visto que el capital crece en el campo continuo aunque en la práctica los pagos, o la capitalización, se realicen en el campo discreto. La tasa instantánea de interés es una tasa que indica el crecimiento contínuo del capital, se llama también "la fuerza del interés". Y constituye un elemento fundamental en la teoría del interés.

Antes de entrar en materia recordaremos dos límites notables que utilizaremos más adelante. En Análisis Matemático estudiamos que

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x \qquad (25)$$

y que

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = e^{-x} \qquad (26)$$

siendo $e = 2{,}71828$ la base de los logaritmos naturales.

12.1. —TASA INSTANTANEA DE INTERES.

La tasa instantánea de interés *es una tasa nominal;* es además, la tasa de un período bien definido, como el año, o el mes, y no la tasa de un instante como algunas personas creen. Se obtiene la tasa instantánea de interés al tomar límites de la tasa nominal de interés para m que tiende a infinito: si denotamos con $\delta$ la tasa instantánea de interés, tenemos:

$$\delta = \lim_{m \to \infty} i^{(m)} = i^{(\infty)} \qquad (27)$$

La tasa instantánea, $\delta$, es el interés que *produciría* la unidad de moneda en la unidad de tiempo bajo el supuesto de que el interés producido en cada uno de los instantes que constituyen esa unidad de tiempo es igual al interés *del primer instante.* Si en la expresión

$$1 + i = \left\{1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right\}^m$$

tomamos límites para m que tiende a infinito y recordando (25) y (27) obtenemos:

$$1 + i = \lim_{m \to \infty} \left\{1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right\}^m = e^{\delta} \qquad (28)$$

de donde se puede despejar la tasa instantánea anual en función de la tasa de interés anual

$$\delta = \ln (1+i)$$

En general $\delta$ corresponderá a la misma unidad de tiempo de la tasa de interés i. Si la unidad de tiempo de i, es el mes, $\delta$ será mensual y si es el año, $\delta$ será anual.

12.2. — TASA INSTANTANEA DE DESCUENTO.

La tasa instantánea de descuento es una tasa nominal de descuento y tiene las mismas características de la tasa instantánea de interés. La relación entre tasa instantánea de descuento y tasa instantánea de interés es análoga a la relación entre tasa nominal de descuento y tasa nominal de interés.

La tasa instantánea de descuento, en consecuencia, es el descuento que *correspondería* a una *unidad de moneda final* en una unidad de tiempo bajo el supuesto que el descuento en cada uno de los instantes que constituyen la unidad de tiempo, es igual al descuento del *último instante.*

Si denotamos con la letra griega $\rho$ la tasa instantánea de descuento tendremos:

$$\rho = \lim_{m \to \infty} d^{(m)} = d^{(\infty)} \qquad (30)$$

Si como lo hicimos anteriormente, denotamos con d la tasa anual efectiva de descuento ya que no hay ningún riesgo de confundirla con otra, podemos escribir

$$1 - d = \left\{1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right\}^m \qquad (31)$$

Al tomar límites para m que tiende a infinito nos queda, recordando (26):

$$1 - d = \lim \left\{1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right\}^m = e^{-\rho}$$

o sea que:

$$(1-d)^{-1} = e^{\rho} \qquad (32)$$

pero según, (19), $(1-d)^{-1} = 1 + i$, por lo tanto

$$1 + i = e^{\rho} \qquad (33)$$

luego:

$$\rho = \ln\,(1 + i) \qquad (34)$$

Al comparar (29) con (34) vemos que la tasa instantánea de interés y la tasa instantánea de descuento son numéricamente iguales.

$$\delta = \rho$$

Conceptualmente son distintas, pero dada una tasa de interés, ambas tasas instantáneas tienen el mismo valor.

Por último, dados, (28) y (32) y recordando (1) y (9), tenemos que:

$e^{\delta t}$ es el factor de capitalización; y
$e^{-\delta t}$ es el factor de actualización.

en consecuencia

$$f(t) = f(0)\, e^{\delta t}$$

y

$$\phi(t) = \phi(0)\, e^{-\delta t}$$