REVISTA DE ECONOMÍA Y ESTADÍSTICA
INSTITUTO DE ECONOMÍA Y FINANZAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
ISSN 0034-8066

OPEN ACCESS

ARTÍCULOS

Conexión entre Modelos Económicos mediante Técnicas Matemáticas Afines

Armando Phagouapé

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 20, No. 1-2-3 (1976): 1º, 2º, 3º y 4º Trimestre, pp. 95-109.

http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3721

CONEXION ENTRE MODELOS ECONOMICOS MEDIANTE TECNICAS MATEMATICAS AFINES

ARMANDO PHAGOUAPÉ

Este trabajo de Economía Matemática se aplica al campo de la Macrodinámica. Si bien en el mismo se llega a algunos resultados interesantes su pretensión es puramente metodológica.

1.0. *Síntesis*

Para todo aquel que trabaja en matemática aplicada son conocidos los métodos del Cálculo de Variaciones, de Ecuaciones Diferenciales y de Ecuaciones Integrales. Sin embargo hay cierta cantidad de usuarios de esos métodos que no conocen las íntimas relaciones entre ellos. Las mismas consisten en que en el campo de las operaciones Lineales hay una identidad formal entre los tres métodos, pues las integrales del Cálculo de Variaciones y de las Ecuaciones Integrales así como las Ecuaciones Diferenciales son operaciones lineales afines, en que puede obtenerse un pasaje, a veces cómodo, las más de las veces interesante, entre uno y otro, de tal manera que una misma función puede ser solución de los tres problemas convenientemente relacionados.

En otro trabajo, indicado en la bibliografía, el autor obtiene las conexiones formales entre los 3 métodos, ejemplificando con puras funciones matemáticas. Aquí, en cambio, aplicaremos la relación entre el Cálculo de Variaciones y las Ecuaciones Diferenciales para obtener una conexión formal entre el Modelo de la Carga de la Deuda de Domar y los Modelos de Crecimiento Económico de Ramsey y Solow, sin entrar en detalles resolutorios.

El objeto principal del trabajo es mostrar que cuando se realizan conexiones entre distintas formas matemáticas de presentar un mismo problema económico aparecen nuevas maneras de verlo y se vislumbran conexiones con otros problemas económicos aparentemente alejados de aquél. Claro está, esta es la "manera cualitativa" que tan útil resulta ser en la etapa en que se encuentra hoy la Teoría Económica, aún no totalmente finalizada ni esclarecida.

2.0. *El Modelo de Crecimiento de Ramsey*

Daremos la formulación más sencilla.

2.1. Se considera una política de ahorro paralela a un consumo a lo largo de un período infinito de tiempo (Horizonte infinito).

2.2. Se estima que tal política implica una Optimización en el sentido de que la Integral (impropia) de cierta función Utilidad se maximiza.

2.3. Para que el problema matemático tenga solución deberán considerarse dos imposiciones:

a) Acotación superior de la función utilidad.

b) Convergencia, a cero, de la misma, cuando el tiempo se hace infinitamente grande.

2.4. *Ecuaciones Tecnológicas del Modelo*

a) Función de producción del único bien (considerado de Capital)

$Q = F(K)$ (1)

Q = Producción del bien K = Capital

b) Ecuación Macroeconómica del Ingreso Nacional.

$Q = C + I$ (2) C = Consumo I = Inversión

c) Acumulación del Capital

$\overset{\circ}{K} = I - \delta K$ (3) δK = Depreciación del Capital

$K(O) = Ko$ (4)

Las ecuaciones deberán considerarse como cumpliéndose en la unidad de tiempo.

2.5. *Criterio de Optimización — Fórmula Variacional*

Se puede definir una función $U_{(c)}$ de utilidad referida al Consumo de tal manera que la optimización ocurriría cuando la integral impropia de esa función se maximice.

Sin embargo dada la circunstancia de que en la Economía puede ocurrir saturación del Consumo "per se" ó saturación del Capital K^* que ocasionen saturación del Consumo $C^\circ = F(K^\circ)$ (5) entonces es posible estimar un valor máximo de la utilidad correspondiente a ese valor de saturación C^* de tal manera que $B = U(C^*) = \underset{O \leqslant C}{\text{Sup.}} \; U(C)$ (6)

Según Ramsey se debería seleccionar una política de ahorro tal que el consumo C, compatible con ese ahorro.

Minimice el funcional

$$J_{(C)} = \int_0^{\infty} [B - U_{(C)}] \quad dt \qquad (7)$$

Teniendo en cuenta (1), (2) y (3) se tienen

$$C = Q - I = F(K) - \dot{K} - \delta K \qquad (8)$$

llegando al criterio

$$J(K, \dot{K}, \delta K) = \int_0^{\infty} \left\{ B - U \; [F_{(K)} - \dot{K} - \delta K] \right\} dt \qquad (9)$$

en que el Integrando resulta ser la discrepancia instantánea de la función utilidad del máximo que la misma puede adquirir en el desarrollo de la Economía.

Hay que tener en cuenta ciertos recaudos matemáticos.

La función utilidad será, en general, cóncava y acotada superiormente y aunque sea *no* decreciente deberá ocurrir que el máximo B suceda cuando $t \to \infty$, como condición *necesaria* de Convergencia,

es decir, $\lim\limits_{t \to \infty} U(C) = B$ y además

$$\lim_{t \to \infty} U'(C) = O$$

2.6. *Formulación Diferencial*

La (9) implica una relación global en todo un período [O, T] para $T \to \infty$. Sin embargo, en cada instante del tiempo habrá una relación entre las variables, en forma diferencial, y que deberá cumplirse en todos y cada uno de los instantes

$t \in [o, T]$, lo que implica las mismas condiciones de frontera ya estipuladas en 2.5.

Tal relación diferencial se obtiene mediante la Ecuación de Euler correspondiente a la (9):

$$\frac{d}{dK}\,(\text{integrando}) - \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{d\dot{K}}\,(\text{del integrando})\right] = O \text{ que nos da}$$

$$U'_{(C)}\,(F'_{(K)} - \delta K) + \dot{U}'_{(C)} = O \qquad (10)$$

donde la tilde significa derivación respecto del argumento y el punto, derivación respecto del tiempo.

Se ha tenido cuidado de las derivaciones "función de función". La (10) *no* es una función explícita de t y para integrarla tendremos en cuenta tal hecho. Para ello recordemos que si expresamos una función integrando como $F(xyy')$.

(ver textos de matemática)
la ecuación de Euler es

$$\frac{d}{dy}\,(F) - \frac{d}{dx}\left[\frac{dF}{dy'}\right] = O \quad \text{que desarrollada da:}$$

$$\frac{dF}{dy} - \frac{\partial^3 F}{\partial y'\,\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'\,\partial y}\,.\,y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'\,\partial y'}\,.\,y'' = O$$

Si no depende de x, $F(y\,y')$
entonces queda

$$\frac{dF}{dy} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'\,\partial y}\,y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\,.\,y'' = O \text{ que multiplicada por } y'$$

$$\text{da } y'\,\frac{dF}{dy} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'\,\partial y}\,y'^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\,y'\,y'' = O \text{ que es el desarrollo}$$

$$\text{de } \frac{d}{dx}\left[F - y'\,\frac{\partial F}{\partial y'}\right] = O \quad \text{cuya primer integral da}$$

$$F - y'\,\frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

Entonces aplicando esto a la (10) llegamos a

$$U_{(c)} - \dot{K} \frac{\partial U_{(c)}}{\partial y'} = \text{Cte.} \quad \text{pero} \quad \frac{\partial U_{(c)}}{\partial \dot{K}} = U'_{(c)} \cdot (-1)$$

luego $U_{(c)} + \dot{K}\, U'_{(c)} = \text{Cte.}$

Si tendemos al límite

$$\lim_{t \to \infty} \left[U_{(c)} + \dot{K}\, U'_{(c)} \right] = B$$

pues $\lim\limits_{t \to \infty} U_{(c)} = B$

$\lim\limits_{t \to \infty} U'_{(c)} = O$ es decir

Cte. = B
entonces

$$\boxed{B - U_{(c)} = \dot{K}\, U'_{(c)}} \qquad (11)$$

que desarrollada nos da

$$\dot{K}\, U' \left[F_{(K)} - \dot{K} - \delta K \right] = B - U \left[F_{(K)} - \dot{K} - \delta K \right] \qquad (12)$$

que es la conocida regla de Ramsey-Keynes que rige la trayectoria óptima de acumulación del Capital minimizando la discrepancia de la Utilidad instantánea respecto de la Utilidad máxima posible, en un período infinito.

NOTA: En (9) no se tiene en cuenta ningún tipo de descuento actualizante de $U_{(c)}$.

3.0. *El Modelo de Crecimiento de Solow.*

En la Economía que enfrenta este modelo se supone, como en el anterior, un solo bien en función del capital y del trabajo.

$$Y_{(t)} = \Psi \left[K_{(t)} , L_{(t)} \right] \qquad (13)$$

donde todas las variables son cantidades en el mismo instante t.

La función Ψ se supone ser homogénea de grado 1, lo cual significa rendimientos a escala constante.

Además Ψ y Ψ'' (segunda derivada) son contínuas en el intervalo $t \in [O, T]$ del análisis.

3.1. La población y el trabajo L se suponen crecer en forma exponencial con el coeficiente γ:

$$L(t) = L(O) \; . \; e^{\gamma t} \qquad \gamma \lesseqgtr O \tag{14}$$

3.2. La acumulación del capital se rige por la relación marginal de ahorro S:

$$\dot{K}_{(t)} = S \; . \; Y_{(t)} \qquad O \leqslant S \leqslant 1 \qquad (15)$$

Por ahora tanto γ como S se consideran constantes.

3.3. *Relaciones tecnológicas del Modelo*

Como (13) es homogénea de $\lambda = 1$ será

$$y_{(t)} = \frac{Y_{(t)}}{L_{(t)}} = \Psi \left[\frac{K_{(t)}}{L_{(t)}} \; ; 1 \right] = \Psi \; (K_{(t)}) \tag{16}$$

donde $K_{(t)} = \dfrac{K_{(t)}}{L_{(t)}}$, capital reducido

a la unidad de mano de obra.

Entonces $y(t)$ es el producto promedio del trabajo en el instante t.
La derivada $\Psi'(K)$ en la productividad marginal del Capital;
$\Psi - K \; . \; \Psi'(K)$ es la productividad marginal del trabajo.

De (14) y (15) se obtiene:

$$\dot{K}_{(t)} \equiv \frac{d}{dt} \left[\frac{K_{(t)}}{L_{(t)}} \right] = \frac{\dot{K} \; . \; L - K \; . \; \dot{L}}{L^2} = S . Y_{(t)} - \gamma \; . \; K_{(t)} \tag{17}$$

La (16) es la relación de producción estática.

La (17) nos dice cómo se conduce el sistema en el tiempo. De las dos ecuaciones se obtiene:

$\dot{K}_{(t)} = S \cdot \Psi [K_{(t)}] - \gamma \cdot K_{(t)}$ (18) que resultanos da $K_{(t)}$, la que introducida en (16) nos da $y_{(t)}$ y mediante la (14), $Y_{(t)}$, evolución temporal del bien producido.

3.4. *Criterio de Optimización y su Control Correspondiente*

La solución de (18) es función de S y γ, y si estos parámetros pudiesen ser variados a voluntad (entre ciertos límites, por supuesto) por el gobierno, éste tendría en sus manos un método para controlar la producción a lo largo del tiempo. Si ese control se realiza de tal manera de maximizar, por ejemplo, cierta función de utilidad o de bienestar general, se tendría entonces un problema de optimización y específicamente, la obtención de caminos temporales óptimos para $S_{(t)}$ y $\gamma_{(t)}$, según el criterio expuesto.

Parece ahora lo más indicado considerar como control indirecto el flujo del Consumo C(t) ó bien el flujo del consumo por cabeza c(t), asociando al mismo una cierta función de Utilidad $U[C_{(t)}]$ o $U[c_{(t)}]$ para evaluar el rendimiento total de ese flujo.

Como el coeficiente de consumo es (1-S) el consumo será (1-S) y el consumo por cabeza por unidad de tiempo.

$$(1-S)\frac{Y}{L} = (1-S) \cdot y_{(t)}$$

Entonces el problema de optimización consistirá en controlar $\gamma_{(t)}$ y $S_{(t)}$ de tal manera de maximizar

$$\int_0^T U[(1-S_{(t)}) \cdot y_{(t)}]\, dt \quad 0 < T < \infty \qquad (19)$$

Cumpliéndose las relaciones (16) y (17), y con la restricción $K_{(t)} \geqslant 0$ y la condición de frontera $K_{(0)} = K_0$.

Trabajando con (17) y (18) y reemplazando en (19) se obtiene el funcional

$$\underset{\text{máx.}}{I [K_{(t)}, \dot{K}_{(t)}]} = \int_0^T U[\Psi(K_{(t)}) - \dot{K}_{(t)} - \gamma \cdot K_{(t)}]\, dt \qquad (20)$$

Comparando la formulación de Ramsey con la de Solow vemos que hay una similitud formal entre (9) y (20) y que las funciones K y $\dot{K}$ ó del K reducido son similares, claro que en el segundo maximizando U y en el primero minimizando la discrepancia de U con una constante ideal.

Por otra parte la longitud del intervalo temporal diferente en ambos casos no es impedimento para aseverar que partiendo de supuestos diferentes, la estructura de ambos modelos es semejante *en cuanto problema de política de optimización se trate.*

3.5. *Formulación Diferencial en el Modelo de Solow*

La Ecuación de Euler correspondiente a (20) será la relación Diferencial (puntual):

$$U' [\ ] \,.\, [\Psi' (K_{(t)}) - \gamma] + \dot{U}' [\ ] = 0 \qquad (21) \text{ válida en todo}$$

$$t \varepsilon T \qquad 0 < T < \infty$$

Comparando (10) con (21) vemos la correlatividad entre ambas formulaciones. La primera referida al puro capital K y su constante de depreciación δ K; la segunda al capital reducido por el trabajo y la constante de este último.

Por último, la integración de (21), en que no interviene el tiempo, nos da

$$U(K \dot{K}) + \dot{K}\, U' (K \dot{K}) = Cte. \qquad (22)$$ en la cual la Cte. se calcularía para las condiciones de borde de cada problema particular. En el problema de Ramsey se avanzó un poco más, dando la longitud del intervalo y los valores límites, pero aquí no se especifican.

La (22) es correlativa de la (11).

4.0. *Confrontación de los Modelos de Ramsey y Solow*

Como subproducto del análisis anterior haremos unas pocas consideraciones de índole económica, pero que no son más que una interpretación en ese campo de los resultados matemáticos puestos en evidencia.

Si se supone en la Administración Central (Gobierno) capacidad orientadora suficiente para canalizar el ahorro de tal manera que el consumo, en el Modelo de Ramsey permitiese, según (7), (8) y (9), optimizar la evolución económica según el crecimiento del Capital, entonces el ahorro sería el parámetro de Control adecuado.

En el caso de Solow mediante un adecuado y, por cierto, limitado Control de los parámetros S (crecimiento del Capital) ecuación (15), y (crecimiento de la fuerza de trabajo) ecuación (14), permitiría controlar la evolución económica en función de los factores principales de la producción K y L.

En ambos casos es pues el adecuado control de la evolución del ahorro el que permitiría a la Economía funcionar según una sana trayectoria óptima, supeditada a una adecuada elección de la función Utilidad.

El problema del control del ahorro, sea en forma "blanda", mediante incitación y aliento financiero del mismo, o en alguna otra forma, no es cuestión que interese a este análisis.

5.0. *El Modelo de Domar de la Carga de la Deuda del Gobierno*

Si el gobierno presta continuamente, su "deuda" aumenta continuamente. El Interés sobre esa deuda, por supuesto, también aumentará, suponiendo que la tasa de interés no retroceda en ningún momento. Pero si se parte de la premisa lógica que los intereses se pagarán con el ingreso de los impuestos, el monto total de la recaudación impositiva deberá también aumentar en forma contínua, en esta reacción en cadena, con lo cual hay una "carga" para el público.

Sin embargo, según este modelo, la carga deberá medirse respecto del ingreso nacional, es decir, debe pensarse que si el ingreso nacional (la riqueza de la nación) crece continuamente, aun cuando la deuda crezca pero no en la misma proporción, es decir, si la razón $\frac{\text{Deuda}}{\text{Ingreso}}$ tiende a disminuir con el tiempo, entonces la situación, a largo plazo, no será mala sino buena.

Tales son las premisas del análisis de *Domar*

Ahora bien, pueden suceder varios casos:

I. El Ingreso (Renta nacional) aumenta *en una cantidad* constante en la unidad de tiempo (¿año?)

$$\frac{dy}{dt} = \gamma$$

II. El Ingreso aumenta *en una proporción* constante

$$\frac{dY(t)}{dt} = \beta \, . \, Y_{(t)}$$

En el primer caso los desarrollos muestran que la carga de la Deuda $\frac{D}{Y}$ crece indefinidamente cuando el tiempo tiende a ∞, con lo cual la situación a largo plazo (no ∞) tiende a ser cada vez peor.

Tal situación no nos interesa.

En el caso II, los desarrollos muestran que la carga de la Deuda tiende a estabilizarse en un valor asinptótico cuando t tiende a ∞, lo cual significa una acotación superior de la misma. Todo economista sabe que un problema económico con variables acotadas "es tratable"; dicho con otras palabras, que siempre hay una solución económica en todo problema donde la variable crítica se comporte en una forma razonablemente aceptable, desde el punto de vista de las acotaciones (limitaciones) presupuestarias actuales o previstas!... Por ello nuestro análisis se circunscribe a este caso II.

5.1. *El Modelo*

Fase Ingreso nacional

$$\frac{dY}{dt} = \beta \ . \ Y_{(t)} \qquad 0 < \beta < 1 \qquad (23)$$

Fase Deuda. La tasa del endeudamiento neto es proporcional a la tasa del flujo del Ingreso. Si la deuda pública total no saldada en el instante (t) es D(t), entonces será

$$\frac{d\,D(t)}{dt} = \alpha \ . \ Y_{(t)} \qquad 0 < \alpha < 1 \qquad (24)$$

Fase Interés. Si la tasa del interés (i) se mantuviese constante el impuesto "inducido" por el interés de la deuda será:

$$T_{(t)} = i \ . \ D_{(t)} \qquad (25)$$

Fase Carga de la Deuda

Por definición la carga de la deuda B será

$$B(t) = \frac{T_{(t)}}{Y_{(t)}} = i\,\frac{D_{(t)}}{Y_{(t)}} \qquad (26)$$ que indica que

la deuda no se considera en forma absoluta sino relativa al ingreso en el período correspondiente.

5.2. *Formulación Diferencial de la Deuda*

Derivando (24) respecto del tiempo y luego utilizando (23) y la misma (24) obtenemos

$$\frac{d^2 D(t)}{dt^2} = \alpha \ . \ \frac{d\,Y(t)}{dt} \quad \frac{d^2 D(t)}{dt^2} = \alpha \ . \ \beta \ . \ Y_{(t)} = \beta \ . \ D'_{(t)}$$

luego $$\frac{d^2 D(t)}{dt^2} - \beta \frac{d D(t)}{dt} = 0 \qquad (27)$$

En el instante inicial $t = 0$ tendremos los valores iniciales $D_{(0)}$, $Y_{(0)}$ y además $D'_{(0)} = \alpha \, . \, Y'_{(0)}$.

Resuelta la (27) nos da la evolución temporal de $D_{(t)}$ que para el objetivo de este trabajo solamente representa un subproducto.

$$D_{(t)} = \frac{\alpha}{\beta} Y_0 \, . \, e^{\beta t} + D_0 - \frac{\alpha}{\beta} Y_0 \qquad (28)$$

5.3. *Formulación Diferencial de la Carga de la Deuda*

$$B_{(t)} = i \frac{D_{(t)}}{Y_{(t)}} \quad \text{luego} \quad B'_{(t)} = i \frac{D'_{(t)} \, . \, Y_{(t)} - D_{(t)} \, . \, Y'_{(t)}}{Y_{(t)}^2}$$

$$B'_{(t)} = i \frac{1 - \dfrac{D_{(t)}}{D'_{(t)}} \, . \, \dfrac{Y'_{(t)}}{Y_{(t)}}}{\dfrac{Y_{(t)}}{D'_{(t)}}}$$

pero $B_{(t)} = i \, . \, \dfrac{D_{(t)}}{Y_{(t)}} = i\alpha \dfrac{D_{(t)}}{D'_{(t)}}$ además $\dfrac{Y'_{(t)}}{T_{(t)}} = \beta \dfrac{Y_{(t)}}{D'_{(t)}} = \dfrac{1}{\alpha}$

entonces $B'_{(t)} = i\alpha - \beta \, B_{(t)}$ dando

$$\frac{d B_{(t)}}{dt} + \beta \, . \, B_{(t)} = i\alpha \qquad (29)$$ la que

integrada da

$$B_{(t)} = i \left[\frac{D_0}{Y_0} - \frac{\alpha}{\beta} \right] e^{-\beta t} + i \frac{\alpha}{\beta} \qquad (30)$$

en la cual $$\lim_{t \to 0} B_{(t)} = i \frac{D_0}{Y_0} \qquad (31)$$

$$\lim_{t \to \infty} B_{(t)} = i \frac{\alpha}{\beta} \qquad (32)$$

La (32) da una cota asimptótica a la carga de la deuda.

A los efectos de este trabajo no nos interesan ni (28) ni (30) sino (27) y (29), aunque sí los valores límites (de borde).

5.4. *Formulación Variacional de B*(t). *Punto de vista Optimalista*

Se puede interpretar la (29), luego de una operación previa, como la Ecuación de Euler de un problema variacional, con lo cual se puede dar al modelo de *Domar* la forma de un problema de Control Optimo de la evolución temporal de la Deuda pública. Derivando la (29) respecto de t, nos da:

$$\frac{d^2 B(t)}{dt^2} + \beta \frac{d\, B\, t}{dt} = 0 \qquad (33)$$ la cual, con

los valores de borde

$$B_0 = i \frac{D_0}{Y_0} \qquad B(\infty) = i \frac{\alpha}{\beta}$$ equivale a la (29).

Pero la (33) puede transformarse en una formulación variacional

$$\underset{\text{Min.}}{I} \left[B_{(t)}, B'_{(t)}, \beta \right] = \int_0^\infty e^{\beta t} \left[\frac{d\, B_{(t)}}{dt} \right]^2 dt \qquad (34)$$

con aquellos valores de contorno.

Aquí se puede comprobar que $\lim_{t \to \infty} \frac{d\, B_{(t)}}{dt} = 0$; además el valor

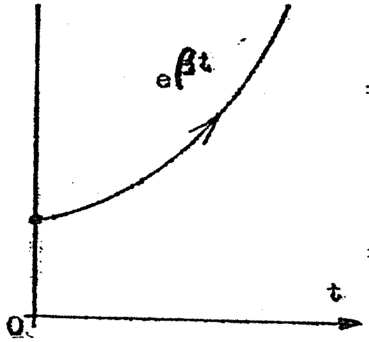
de la Integral, resuelta, reemplazando $B'_{(t)}$, resulta ser

$$I \min = \beta\, i^2 \left[\frac{D_0}{Y_0} - \frac{\alpha}{\beta} \right]^2$$

La $\frac{d\,B_{(t)}}{dt}$ es de orden exponencial negativo de allí la convergencia de (34). Podemos aplicar asimismo el criterio $\lim Fy'(t\,y\,y')\,.\,\eta(t) = 0$ para toda *variación* de la función integrando.

Por de pronto para la integral dada y para toda posible $\eta\,(t)$ $\lim_{t \to \infty} \eta\,(t) = 0$ pues uno de los extremos es justamente $t = +\infty$

$$\text{Ahora bien, } \lim_{t \to \infty} \frac{d}{d\,B'_{(t)}} \left[e^{\beta t}\,(B'_{(t)})^2 = \lim_{t \to \infty}(2e^{\beta t}\,.\,B'_{(t)}) = \right.$$



$$= 2 \lim_{t \to \infty} e^{\beta t} \left[-\,i\,\beta \left(\frac{Do}{Yo} - \frac{a}{\beta} \right) e^{-\beta t} \right] =$$

$$= -2i\,\beta \left[\frac{Do}{Yo} - \frac{a}{\beta} \right] \neq 0$$

Además $Fy'y' = 2\,.\,e^{\beta t} > 0$

constantemente para $t > 0$,

luego $F(y')$ es cóncava y el funcional *se minimiza*

Todo esto nos muestra que el modelo de *Domar* es tal que la carga de la Deuda está acotada y que la evolución temporal de la misma es tal de minimizar la integral de la función "penalty".

$$P_B = e^{\beta t} \left[d\,\frac{\dot{B}_{(t)}}{dt} \right]^2$$ en un intervalo con horizonte *no* finito.

Dicho en otras palabras, lo que aparece acotado funcionalmente es el crecimiento de la carga de la Deuda, es decir, que la tasa de crecimiento de $B_{(t)}$ es entonces razonable.

Como consecuencia de *la exigencia* de que el ingreso tenga una tasa proporcional a su valor (Ec. (23)) para afrontar la creciente deuda.

Como control real puede utilizarse entonces el parámetro β justamente, y si pensáramos que fuese variable $\beta = \beta_{(t)}$ tendríamos claro cuál debería ser la meta gubernamental: arbitrar los recursos para que $\beta_{(t)}$ *"controlado"* produzca una evolución de la Carga de la Deuda aceptable y no dañosa para el bienestar general.

5.5. *Repercusión variacional en la Deuda y en el Ingreso aislados*

Consideraciones análogas a las de 5.4, pero aplicables a $D_{(t)}$ y a la Ec. (27) nos llevan al Criterio de que la función deuda, en este modelo, debe cumplir con el requisito variacional

$$\underset{\text{Min}}{I}\ [D_{(t)}, D'_{(t)}, \beta] = \int_0^T e^{-\beta t}\ [D'_{(t)}]^2\ dt \qquad (35)$$

donde la tasa de la Deuda minimizará la integral a trozos del tiempo finitos, aun cuando puedan ellos ser muy grandes aunque no infinitos.

Ello se debe a la no convergencia de la Integral y a la forma de $D_{(t)}$.

La tasa está afectada por una función descuento con parámetro β. Es como si la deuda desplazase su importancia hacia el presente y en tiempos futuros fuese su incidencia cada vez menor!

Pero si ahora dirigimos nuestro interés directamente al ingreso y tenemos en cuenta las relaciones (23) y (24) las mismas, a α y β constantes, nos dan

$$D'_{(t)} = \frac{a}{\beta}\ Y'_{(t)} \text{ luego de la (35) se obtiene}$$

$$\underset{\text{Min}}{I}\ [Y'_{(t)}] = \int_0^T \left[\frac{a}{\beta}\right]^2 e^{-\beta t}\ [Y'_{(t)}]^2\ dt \qquad (36)$$

Con lo cual sorpresivamente vemos que en este modelo el crecimiento a su vez tiene una condición limitativa en su tasa, aunque con un coeficiente de descuento diferente al de la tasa de la deuda. Podemos afirmar que (35) y (36) son equivalentes, en conjunto, a la (34).

6.0. *Consecuencias cualitativas posibles del confrontamiento de los tres modelos*

Teniendo a la vista los resultados precedentes en que los tres modelos han sido presentados con igual ropaje (lenguaje) Matemático, pueden cotejarse los mismos extrayendo conclusiones con cierto peso de legitimidad.

En los tres se trata de una función de control optimalista, presentada, por supuesto, muy sumariamente, en que los parámetros de control son diferentes en general, pero como se ve, muy relacionados entre sí.

En el caso de Ramsey se trata del control del ahorro, el que ocasiona, en cascada, el control del consumo y el control del crecimiento del capital (único bien del Modelo).

En el caso de Solow (un poco más forzado, tal vez) se trata del parámetro S, que relaciona la tasa de crecimiento del Capital con una función Ψ del Capital y del Trabajo, y del parámetro γ que gobierna el crecimiento de la fuerza de trabajo.

En el caso de Domar sería el parámetro β que gobierna el crecimiento del ingreso nacional. Pero el ingreso nacional asimismo es el capital bruto de la Macroeconomía.

En los tres casos se ve que se trata de una optimización basada en el Control sobre parámetros que rigen la evolución del Capital, entendida ésta en su forma generalizada, sea él el único bien del macromercado, sea él el Capital mismo o en fin, el ingreso global de la Nación.

En una palabra, la *Producción de Bienes de Capital,* es el resorte maestro que a través del trabajo de estos tres economistas se toca para mantener funcionando una sana economía.

7.0. *Consideración Metodológica*

Hemos pretendido mostrar que comparando problemas económicos distintos pero relacionados, mediante la utilización de la misma herramienta matemática, es posible extraer consecuencias que nos permiten enfocar cada uno de esos problemas desde un punto de vista nuevo. Así, por ejemplo, sorpresivamente, la Carga de la Deuda resulta ser un problema variacional válido y el capital aparece con claridad como el determinante último de los tres casos estudiados.

Es decir, realizando una *nivelación metodológica* y utilizando una analogía *recién entonces válida,* es posible extraer conclusiones que de otra forma no hubiesen sido viables o al menos fácilmente aparentes.

En nuestro caso la Formulación Variacional directa o propuesta como retroacción (Feedback) nos permitió comparar con cierto fruto los problemas económicos aquí tratados.

B I B L I O G R A F I A

"Teorías Matemáticas del Crecimiento Económico". E. Burmeister, A. R. Dobell. Edit. Bosch. Barcelona, España.

"Variational Methods in Economics". G. Hadley, M. C. Kemp. Edit. North Holland Co.

"Capital y Crecimiento". John R. Hicks. Edit. Bosch. Barcelona, España.

"Problemas Diferenciales Considerados como Problemas Variacionales". A. Phagouapé. A publicarse.