REVISTA DE ECONOMÍA Y ESTADÍSTICA
INSTITUTO DE ECONOMÍA Y FINANZAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
ISSN 0034-8066

OPEN ACCESS

ARTÍCULOS

El Reajuste por Inflación en las Operaciones Financieras

Félix León

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 18, No. 1-2-3-4 (1974): 1º, 2º, 3º y 4º Trimestre, pp. 9-31.

http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3697/

EL REAJUSTE POR INFLACION EN LAS OPERACIONES FINANCIERAS

FÉLIX LEÓN

I. INTRODUCCION

La técnica Actuarial proporciona diversos modelos matemáticos aplicables en la valuación de las operaciones fundamentales que se presentan en las operaciones financieras y de seguros.

Tales operaciones se presentan como relaciones de equivalencia entre pagos y compromisos de pagos a efectuar en épocas distintas por las partes contratantes.

Así

$$M(t_1)\, v^{t_1} \equiv M(t_2)\, v^{t_2} \; ; \tag{1}$$

indica la equivalencia, en la época 0, entre un pago $M(t_1)$ a efectuarse en la época t_1, y un pago $M(t_2)$ en la época t_2.

Si suponemos $t_1 = 0$, en la (1) se obtiene:

$$M(0) = M(t_2)\, v^{t_2} \; ; \tag{2}$$

que expresa la equivalencia entre una entrega o pago al contado en la época 0 y un pago $M(t_2)$, a realizarse en t_2.

Asimismo dentro de las operaciones vitalicias, propias del seguro:

$$M(t_1)\; p(x_1, t_1)\, v^{t_1} \equiv M(t_2)\; p(x_2, t_2)\, v^{t_2} \tag{3}$$

expresa la equivalencia entre un pago probable $M(t_1)$ a la época t_1 y un pago $M(t_2)$, a la época t_2. Aquí $p(x_1, t_1)$ y $p(x_2, t_2)$ indican las probabilidades de que una persona de edad x_1 y otra de x_2, alcancen con vida las edades $(x_1 + t_1)$ y $(x_2 + t_2)$, respectivamente; y $M(t_1)\; p(x_1, t_1)\, v^{t_1}$, la esperanza matemática de la distribución

$$\left|\begin{array}{cc} 0 & M(t_2)\, v^{t_1} \\ 1 - p(x_1, t_1) & p(x_1, t_1) \end{array}\right|$$

y $M(t_2)\ p(x_2, t_2)\ v^{t_2}$, la esperanza matemática de la distribución[1].

$$\begin{vmatrix} 0 & M(t_2)\ v^{t_2} \\ 1 - p(x_2, t_2) & p(x_2, t_2) \end{vmatrix}$$

Si en la (3) suponemos $t_1 = 0$, queda:

$$M(0) = M(t_2)\ p\ (x_2, t_2)\ v^{t_2} \quad ; \qquad (4)$$

que expresa la equivalencia entre un pago o entrega al contado $M(0)$, a la época *0*, y un pago futuro probable, $M(t_2)$, a la época t_2.

Si en la (2) en lugar de un sólo pago cierto $M(t_2)$ suponemos que se trata de *n* pagos periódicos a efectuarse al final de cada uno de los subperíodos de *n*, se tendría la siguiente relación de equivalencia:

$$V_0 = \sum_{t=1}^{n} c_t\, v^t \quad ; \qquad (5)$$

donde, c_t, indica el pago de la cuota correspondiente a un subperíodo cualquiera; *t*, y v^t como sabemos, el factor de actualización correspondiente.

Análogamente, la relación (4) con el supuesto de *n* pagos probables, daría:

$$a(x_2, t_2) = \sum_{t=1}^{n} R_t\ p(x_2, t_2)\ v^{t_2} \quad ;$$

donde $a(x_2, t_2)$ indica el pago único que debe efectuar, en *0*, la cabeza x_2 para tener derecho al cobro, si vive, de $R_1, R_2, \ldots R_n$, cuotas de renta.

Ahora bien, en períodos de inflación, no obstante mantenerse la equivalencia financiera entre los compromisos de deudor y acreedor, o de asegurados y asegurador, la equivalencia económica se rompe, ya que cada uno de los pagos a efectuarse en el futuro, sean ciertos o probables, tienen un poder adquisitivo menor que el pago o entrega inicial y esta pérdida de capacidad adquisitiva es tanto mayor cuanto más alejados estén de la época inicial dichos pagos o cobros.

[1] Lucien FERAUD, "Valeurs Actuelles dans les caisses de retraites". *Revista de la A.I.S.S.*, Nº 10, pág. 148.

Resulta claro que si un prestatario recibe en la época 0, un préstamo V_0, y reembolsa al acreedor *n*, cuotas *c*, cada una de estas entregas tiene un poder adquisitivo menor, que está en relación inversa a la evolución del índice del nivel de precios.

En efecto, si es I_0, el Indice del nivel de precios a la época *0*, e I_t, el correspondiente a *t*, para que la cuota c_t, tenga el mismo poder adquisitivo que V_0, debe multiplicarse el poder adquisitivo de c_t a *t*, c_t/I_t, por I_t/I_0, o sea:

$$\frac{c_t}{I_t} \times \frac{I_t}{I_0} = \frac{c_t}{I_0}$$

Consideremos la conocida operación de reembolso de un préstamo, mediante *n* servicios *c*, que incluyen amortización e interés, capitalizándose estos últimos a la tasa nominal *i*.

De acuerdo a la fórmula tradicional, una vez fijados V_0, *n* e *i*, el valor del servicio *c*, se deduce, para pagos vencidos, a partir de la relación de equivalencia financiera:

$$V_0 = \sum_{t=1}^{n} c\, v^t = c\, a_{\overline{n}|i}$$

Dentro de un proceso inflacionario, como ya destacáramos, las cuotas *c*, pagadas escalonadamente en el curso de la operación, tienen un poder adquisitivo cada vez menor con respecto al de V_0, que recibe el deudor. Luego para que la operación resulte equitativa, tanto del punto de vista financiero como económico, deberán homogeneizarse los poderes adquisitivos de los servicios *c*, refiriéndolos a la época *0*; multiplicando al primero por I_0/I_1, al segundo por I_0/I_2, y, en general, al que se abona al final de la época *t*, por I_0/I_t.

En tal caso es correcto escribir la siguiente relación de equivalencia financiera y económica:

$$V_0 = \sum_{t=1}^{n} c \frac{I_0}{I_t} v^t = c_0 \sum_{t=1}^{n} \frac{I_0}{I_t} (1+r)^{-t}$$

donde r, representa la tasa real de interés, que resulta como consecuencia de la actualización económico-financiera de los servicios de reembolso de la deuda, a la época *0*, esto es, a la época original.

Como podrá advertirse, el coeficiente I_0 / I_t, tiene el sentido de una actualización económica, compensatorio de la desvalorización monetaria, lo mismo que $(1+r)^{-t}$, constituye el factor de actualización financiera y que funciona sin inconvenientes en períodos de completa estabilidad económica.

Como, para un peso de deuda

$$c = a^{-1}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

Será:

$$c \sum_{t=1}^{n} \frac{I_0}{I_t} (1+r)^{-t} = \frac{a_{\overline{n}|r}}{a_{\overline{n}|i}}$$

Ahora bien, la ventaja económica que obtendrá el deudor al amortizar la deuda con la moneda desvalorizada, puede medirse, en porciento de la deuda, mediante la siguiente diferencia:

$$g = 100 - 100 \frac{a_{\overline{n}|r}}{a_{\overline{n}|i}}$$

Un ejemplo numérico aclarará mejor el sentido de dicha ventaja o ganancia económica.

En el cuadro siguiente se tiene, para $n = 5$, e $i = 0{,}10$, los valores necesarios para la aplicación de la fórmula precedente[2].

Períodos	I_0/I_t	$(1+i)^{-t}$	$\frac{I_0}{I_t}(1+i)^{-t}$	
1	0,833	0,909	0,757	$a_{\overline{n}\|0{,}10} = 3{,}791$
2	0,666	0,826	0,550	
3	0,526	0,751	0,395	$g = 100 - \frac{2.163}{3{,}791} = 52{,}75$
4	0,400	0,683	0,273	
5	0,303	0,621	0,188	
			2,163	

[2] Consúltese: Italo CASACELLI "Valutazioni del guadagni e delle perdita derivanti dall'instabilita monetaria nelle operacioni finanziarie a lungo termine". Atti del Terzo Congresso Nazionale de Scienza delle Asciarazioni. Turin, 1951.

El resultado obtenido, debe interpretarse en el sentido que el deudor, logra en la operación una ventaja económica equivalente al 52,75% del préstamo obtenido, el que a su vez, indica el perjuicio económico del acreedor.

De no practicarse el reajuste de cada una de las cuotas, como se observa, el acreedor (o el asegurado en una operación de renta vitalicia), experimentará una pérdida de capital que puede tener graves consecuencias económicas y sociales.

En las fórmulas clásicas de la matemática financiera y actuarial, se supone, implícitamente, que los valores monetarios involucrados (c_t, R_t, V, i) se mantienen constantes durante todo el desarrollo de una operación y sólo experimentan las variaciones originadas en el proceso de capitalización o actualización. Sin embargo, como es bien conocido, en períodos de inflación, el precio de los activos físicos experimenta aumentos considerables y los capitales monetarios una fuerte desvalorización.

No es de extrañar, por lo tanto, que la aplicación de las fórmulas tradicionales, conduzca a resultados alejados de la realidad y a menudo contradictorios. Unos pocos ejemplos serán suficientes para ilustrar la veracidad de esta afirmación.

La cuota necesaria para constituir un fondo de compensación de la depreciación del valor, V_0, de un activo físico, cuya vida útil es igual a *t*, años y cuyo valor de rezago se estima en V_t, se determina mediante la ecuación:

$$(V_0 - V_t) = c\, a_{\overline{t|}\,i}$$

de donde

$$c = (V_0 - V_t)\; a_{\overline{t|}\,i}^{-1} \tag{6}$$

Se advierte, a simple vista, que desde el momento en que $V_t > V_0$, (lo que es común cuando se trata de maquinarias, automotores y otros bienes), la fórmula (6) daría una resultado negativo, lo que es contradictorio con el sentido económico de la operación.

Otro ejemplo ilustrativo, se da en la operación denominada de Ahorro y Préstamo, en que el suscriptor debe integrar mediante un cierto número de imposiciones a interés, un determinado porciento del préstamo *P*, a que aspira; por lo general destinado a la adquisición de una vivienda o automotor.

La cuota de imposición o ahorro, se determina por la fórmula conocida:

$$\alpha\, P = a\, s_{\overline{m|}\,i} = a\,\frac{(1+i)^m - 1}{i}$$

de donde:

$$a = \alpha P\, s_{\overline{m}|}^{-1} = \alpha P = \frac{i}{(1+i)^m - 1}$$

Si el precio del bien a adquirir, por efectos de la inflación, experimenta un aumento del k%, el ahorro constituido representará sólo $\frac{\alpha}{k}$ P; debiendo efectuar el ahorrista un aporte extraordinario igual a:

$$\alpha P - \frac{k}{\alpha} P = P \left(\alpha - \frac{\alpha}{k} \right)$$

Por ejemplo, si P = \$ 500.000 y $\alpha = 30\%$, el ahorro constituido ascenderá a \$ 150.000.

Pero si el bien a adquirir experimentó un aumento, digamos del 50%, vale decir, que ahora vale \$ 750.000 el ahorro constituido representará sólo el 30%/1,5 = 20%. En tal caso, el ahorrista deberá efectuar un aporte extraordinario de \$ 75.000.

Se comprende que, en la mayor parte de los casos, los suscriptores no estarán en condiciones de efectuar el aporte faltante, viéndose obligados a desistir de la operación con los consiguientes perjuicios económicos y sociales.

Un procedimiento para evitar los inconvenientes señalados, ya insinuado anteriormente, consistiría en reajustar cada una de las cuotas o servicios de amortización o cuotas de ahorro de renta vitalicia, en la operación de seguro, mediante un índice adecuado del nivel general de precios. Es decir, que en la operación de amortización de una deuda se tendría:

$$\sum_{t=1}^{n} c_t \frac{I_t}{I_o} v^t \quad \text{en lugar de} \quad \sum_{t=1}^{n} c_t v^t$$

Sin embargo, un mecanismo semejante sólo puede aplicarse a medida que las estadísticas oficiales den a conocer los índices del nivel de precios o remuneraciones, las que, por otra parte, se dan siempre con cierto atraso.

Además, es conocido que, por lo menos en nuestro país, los mecanismos de reajuste establecidos hace relativamente poco tiempo, no se aplican o se aplican imperfectamente.

No obstante, el inconveniente principal que presenta este criterio de reajuste a posteriori, aparte de que es resistido por los prestatarios, reside en la imposibilidad de todo cálculo o estimación previa, indispensable para planificar las inversiones.

En este ensayo proponemos una solución matemática que permite superar las dificultades antes enumeradas. Dicha solución consiste en modificar o generalizar las fórmulas tradicionales de la matemática financiera y actuarial, con la inclusión adecuada de los factores o coeficientes necesarios para tomar en cuenta la incidencia de la inflación sobre los valores monetarios involucrados en las mismas.

La solución propuesta se basa en el supuesto de que el proceso inflacionario puede describirse analíticamente, mediante una función exponencial análoga a la que representa el proceso de capitalización y además, que siempre es posible estimar, mediante predicción científica, una tasa de inflación para el mediano plazo (3 a 5 años). Dicha tasa media de inflación actuará, en el proceso inflacionario, en forma similar a la tasa de interés en el proceso de capitalización.

Resulta claro que el criterio de reajuste propuesto puede aplicarse con muchas ventajas, cuando se trate de entidades oficiales que, por sus finalidades sociales, deben soportar ciertas pérdidas de capital por la desvalorización monetaria. En cuanto a las entidades privadas comerciales, el procedimiento resultará conveniente, porque elude la resistencia de los particulares a contraer compromisos indeterminados; porque evita los elevados gastos que ocasiona la renovación de contratos y pólizas que exige la ampliación periódica de los capitales y tasa de interés y, como ya se dijo, porque permite la planificación de las operaciones a realizar por la empresa.

De cualquier manera, siempre podrá preverse en los contratos pertinentes, la modificación de la tasa de reajuste fijada a priori, cuando ésta se aleje de ciertos límites.

II. FORMULA DEL MONTO COMPUESTO

Con reajuste por inflación

El monto de un capital C colocado a interés que se capitaliza según una tasa i, en t períodos, se representa por la relación de equivalencia.

$$M(t) = C\ (1+i)^t \tag{7}$$

Cuando se suponen variaciones continuas de *t*, por:

$$M(t) = C\, e^{\delta t}$$

donde δ, como se sabe, representa la tasa instantánea de interés.

Si en (7), suponemos $C = 1$ y $t = 1$, se tiene:

$$M(1) = 1 + i = e^{\delta}$$

que es el factor de capitalización para la unidad de capital y de tiempo.

De acuerdo a lo expresado antes, para describir el proceso inflacionario, adoptaremos una función simple de la forma:

$$f(t) = k^t = (1 + \alpha)^t$$

donde α, indica la tasa media constante de inflación (estimada para el mediano plazo) lo mismo que en:

$$M(t) = C\,(1 + i)^t$$

i, representa la tasa unitaria de interés.

Es conocido que cuando se consideran variaciones continuas de tiempo, la tasa instantánea de interés se define mediante la ecuación diferencial:

$$\delta = \frac{1}{M(t)} \cdot \frac{dM(t)}{dt} = \frac{1}{C(1+i)^t} \cdot \frac{d\,C\,(1+i)^t}{dt}$$

$$= \frac{C(1+i)^t \log_e (1+i)}{C\,(1+i)^t} = \log_e (1+i)$$

Análogamente, puede determinarse una "tasa instantánea de reajuste por infración", mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\delta_r = \frac{1}{k^t} \, \frac{d\,k^t}{d_t} = \frac{k^t \log_e (1+\alpha)}{k^t}$$

$$= \log_e (1+\alpha) \qquad (8)$$

Desde luego que es factible adoptar una función más elaborada para representar el proceso inflacionario, pero en el propósito de arribar a fórmulas simples, de fácil aplicación, con la utilización, incluso, de las Tablas Financieras en uso en los cálculos financieros, prescindiremos de innecesarias sutilezas matemáticas.

Consideremos un proceso en que el capital inicial se va reajustando en forma ininterrumpida, acorde con una cierta "tasa instantánea de inflación" y simultáneamente capitalizando los intereses.

De esta manera, el monto compuesto, en cada instante de tiempo, experimenta un crecimiento como consecuencia del reajuste por inflación más un aumento por la capitalización de los intereses.

Es decir, en términos matemáticos, la variación o crecimiento infinitesimal del monto en función del tiempo t, en el intervalo $(t, t + dt)$, estará determinado por la relación:

$$d\,M(t) = M(t)\ [\delta(t) + \delta_r(t)]\ dt \tag{9}$$

donde $\delta(t)$ representa la tasa instantánea de interés y $\delta_r(t)$ la tasa instantánea de reajuste por inflación, ambas, en general, funciones del tiempo *t*.

Separando las variables en (9) y luego integrando acorde con el procedimiento conocido, se tiene sucesivamente

$$\frac{d\,M(t)}{M(t)} = [\delta(t) + \delta_r(t)]\ dt$$

$$\log_e M(t) = \int_0^t [\delta(t) + \delta_r(t)]\ dt + \log_e C$$

donde, $\log_e C$, es la constante de integración.

$$M(t) = e^{\log_e C}\ e^{\int_0^t \delta(t)dt}\ e^{\int_0^t \delta_r(t)dt}$$

$$M(t) = M(0)\ e^{\phi(t)}\ e^{\phi_r(t)}\ .$$

donde $M(0)$, representa el capital original y se ha puesto $\phi^{(t)}$ y $\phi_r^{(t)}$ en lugar de las integrales exponentes.

Para un término de capitalización de *0* a *n*, se tendrá:

$$M(n) = M(0)\ e^{\phi(n)}\ e^{\phi_r(n)} \tag{10}$$

Si se supone que $\delta(t) = \delta$ y $\delta_r(t) = \delta_r$, fácilmente se deduce que:

$$M(n) = M(0)\, e^{\delta n}\, e^{\delta_r n} \qquad (11)$$

Para pasar al caso de variaciones discretas de *t*, basta recordar que:

$$e^{\delta} = 1 + i \quad y \quad e^{\delta n} = (1 + i)^n \qquad (12)$$

Asimismo es natural poner:

$$e^{\delta_r} = 1 + \alpha \quad e^{\delta_r n} = (1 + \alpha)^n \qquad (13)$$

Reemplazando en la fórmula (10) resulta:

$$M(n) = M(0)\ (1+i)^n\ (1+\alpha)^n = M(0)\ [(1+i)\ (1+\alpha)]^n \qquad (13)$$

Como se observa, en la fórmula tradicional del monto compuesto, aparece ahora un factor de reajuste, que tiene el efecto de compensar la pérdida de poder adquisitivo del capital, por la desvalorización monetaria que se deriva de la inflación.

III. FACTOR DE ACTUALIZACION ECONOMICO-FINANCIERA

En un proceso inverso al considerado en el punto (I), partiendo del valor final reajustado, expresado por la fórmula (10), esto es,

$$M(n) = M(0)\ e^{\phi(n)}\ e^{\phi_r(n)}$$

cabe determinar el valor actual a la época original *0*, de dicho valor final.

De la relación precedente se deduce:

$$M(0) = M(n)\ e^{-\phi(n)}\ {}^{-}e^{\phi_r(n)}$$

Representando a $M(0)$ por $V(0)$ y a $M(n)$ por $A(n)$, resulta:

$$V(0) = A(n)\ e^{-\phi(n)}\ {}^{-}e^{\phi_r(n)}$$

En la que, cuando se supone que $\delta(t)$ y $\delta_r(t)$ son constantes, o sea igual a δ y δ_r, resulta:

$$V(0) = M(n)\ e^{-\delta n}\ e^{-\delta_r n}$$

Como se advierte, al multiplicar a, A(n) por el factor $e^{-\delta n} e^{-\delta_r n}$, se efectúa una actualización económica-financiera de dicho valor.

En efecto, el factor $e^{-\delta n}$, efectúa la actualización financiera, ya que financieramente, supuesto estabilidad económica, contar con un capital A(n), al final de *n*, equivale a contar con A(n) $e^{-\delta n}$ al comienzo del período *n*; toda vez que, esta última suma, con sus intereses capitalizados, constituirá al final del periodo el capital A(n).

Análogamente, el factor $e^{-\delta_r n}$, efectúa la actualización económica de la suma final A(n). En otros términos, expresa el valor de A(n) a precios de la época *0*.

Finalmente, utilizando las equivalencias (12) y (13), la última equivalencia, puede escribirse:

$$V_o = A_n (1 + i)^{-n} (1 + \alpha)^{-n} \tag{14}$$

IV. AMORTIZACION DE UNA DEUDA REAJUSTADA POR INFLACION

Si en lugar de admitir implícitamente como en el modelo tradicional, que las cuotas de constitución de un fondo o capital se mantienen inalterables en el tiempo, se supone que cada cuota se va modificando acorde con el factor de reajuste correspondiente, se tendrá para el caso de imposiciones vencidas:

$$A_r = c_r h^{n-1} k^{n-1} + c_r h^{n-2} k^{n-2} + \ldots + c_r h k + c_r ,$$

donde $h = (1 + i)$ y $k = (1 + \alpha)$; esto es, *h* es el factor unitario de capitalización y, *k*, el factor unitario de reajuste por inflación.

En el segundo miembro de la expresión precedente se tiene la suma de los términos de una progresión geométrica de razón (hk), cuando se la considera de derecha a izquierda; luego por la fórmula conocida:

$$A_r = c_r \frac{(h k)^n - 1}{(h k) - 1}$$

Puede comprobarse que cuando $\alpha = 0$, o sea: $k = 1 + \alpha = 1$, la fórmula se convierte en:

$$A = c \frac{h^n - 1}{h - 1} = c \frac{(1 + i)^n - 1}{1} \quad ;$$

que es la fórmula tradicional de las imposiciones a interés compuesto vencidas.

Planteemos ahora la siguiente relación de equivalencia:

$$V h^n k^n = c_r \frac{(h k)^n - 1}{(h k) - 1} \qquad (15)$$

de donde, despejando c_r, resulta:

$$c_r = \frac{V[(h k) - 1] (h k)^n}{(h k)^n - 1} \qquad (16)$$

Como se advierte, la relación (15) expresa la equivalencia entre el valor final de un préstamo o deuda, V, reajustada según el factor $k = (1 + \alpha)$ y la constitución de dicho valor final, mediante n cuotas c reajustadas y capitalizadas.

Puede comprobarse que para $\alpha = 0$, esto es, $k = 1 + \alpha = 1$, la relación (15) se convierte en:

$$c = \frac{V(h-1)(h)^n}{h^n - 1} = \frac{Vi(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

que es la conocida fórmula que permite determinar la cuota o servicio de reembolso en el sistema de amortización acumulativa o francés, sin reajuste por inflación.

Con fines ilustrativos y de comparación, aplicaremos la fórmula (16) en el caso de $V = 100$; $n = 5$, $i = 0{,}10$; $\alpha = 0{,}15$.

La tabla financiera dá:

$$h^5 = (1 + 0{,}10)^5 = 1{,}6105 \qquad (h k)^5 = 3{,}2392$$

$$\therefore$$

$$k^5 = (1 + 0{,}15)^5 = 2{,}0114 \qquad (h k) = 1{,}2650$$

$$c_r = \frac{100 \times 0{,}2650 \times 2{,}2392}{2{,}2392} \cong 38{,}33$$

CUADRO DE AMORTIZACION E INTERESES

Período	Deuda al comienzo reajustada	Cuota con reajuste	Amortizac. al final reajustada	Intereses al final reajustados	Saldo al final
1	115,00	38,33	26,83	11,50	88,17
2	101,40	38,33	28,19	10,14	73,21
3	84,19	38,33	29,91	8,42	54,28
4	62,42	38,33	32,09	6,24	30,33
5	34,85	38,33	34,85	3,48	
		191,65	151,87	39,78	

CUADRO DE AMORTIZACION E INTERESES
SIN REAJUSTE POR INFLACION

Períodos	Deuda al comienzo	Servicio constante	Amortización al final	Intereses al final	Saldo al final
1	100,00	26,38	16,38	10,00	83,62
2	83,62	26,38	18,02	8,36	65,60
3	65,60	26,38	19,82	6,56	45,78
4	45,78	26,38	21,80	4,58	23,98
5	23,98	26,38	23,98	2,40	0
		131,90	100,00	31,90	

De la observación de las cifras de ambos cuadros se deduce que, en el sistema con reajuste, el acreedor obtiene en concepto de compensación por desvalorización monetaria, el 51,87 % del capital original y el 7,88 % como suplemento de interés.

Resulta claro que la aplicación del sistema tradicional sin reajuste, beneficiaría en el mismo por ciento al prestatario, pero a la larga ocasionaría la descapitalización y pérdida de capacidad operativa del acreedor [3].

[3] Precisamente, la falta de un mecanismo compensatorio de la desvalorización monetaria, fue la causa de la descapitalización del Banco Hipotecario Nacional y otras instituciones previsionales, que durante muchos años operaron con préstamos a largo plazo (hasta cincuenta años); y del fracaso, en dos

V. AMORTIZACION CON CUOTA REAJUSTABLE

El procedimiento de reajuste por inflación más utilizado en la práctica consiste en fijar el servicio de la deuda de acuerdo con la fórmula tradicional, pactando su reajuste periódico, según la cifra que arroje el índice oficial de precios adoptado a tales efectos.

Es factible, como hemos visto, sustituir este procedimiento de reajuste indeterminado, por el método de establecer a priori una tasa media constante de reajuste según se convenga al otorgarse el préstamo o contraerse la deuda.

Este sistema de reajuste, si bien da lugar al pago de servicios crecientes en progresión geométrica, ofrece la ventaja de que los compromisos de deudor quedan precisamente determinados, al par que significa un esfuerzo financiero menor que el reajustado con cuota constante que estudiáramos en en punto IV).

Para plantear el problema en términos matemáticos, supondremos que el deudor paga en forma vencida las cuotas:

$$c \; ; \; ck \; ; \; ck^2 \; ; \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; ; \; ck^{n-2} \; ; \; ck^{n-1}$$

El valor definitivo de dichas cuotas, computando intereses compuestos a la tasa nominal *i*, estará dado por:

$$\begin{aligned} A_r &= ch^{n-1}k^{n-1} + (ck)\,h^{n-2}k^{n-2} + (ck^2)h^{n-3}k^{n-3} + \ldots\ldots + (ck)^{n-1}. \\ &= ck^{n-1}\,[1 + ch + ch^2 + ch^3 + \ldots\ldots\ldots + ch^{n-1}] \\ &= ck^{n-1}\,\frac{h^n - 1}{i} \end{aligned}$$

En definitiva, queda:

$$A_r = k^{n-1}\,c\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Este resultado dice que el fondo a constituirse mediante cuotas reajustadas, a partir del segundo período, es igual al que resulta

---

oportunidades, en nuestro país, del denominado crédito recíproco o ahorro y préstamo.

A nuestro juicio, aparte de razones de índole comercial y políticas, contribuyó a esa seria omisión, la ausencia, en nuestro país, de fórmulas y mecanismos simples como los que tratamos de establecer en este ensayo.

de la imposición de n imposiciones constantes, multiplicado por el factor de reajuste, elevado a,$n-1$.
Por otro lado, una deuda V, que comienza a reajustarse a partir del segundo período, computando intereses compuestos a la tasa nominal i, asume un valor definitivo o final:

$$A_r = V\, h^n k^{n-1}$$

Planteemos ahora la siguiente relación de equivalencia financiera y económica:

$$V\, h^n k^{n-1} = c\, k^{n-1} \frac{h^n - 1}{i}$$

Esta relación muestra que cuando se hace pagar al deudor cuotas reajustadas mediante la tasa acumulativa k, la primera cuota es la misma que resulta de aplicar la fórmula tradicional.

Resulta de interés ver como evoluciona la amortización real en este método. La primera amortización, supuesto el pago vencido será: $a_1 = c - Vi$. Y el saldo reajustado según el factor $k = 1 + \alpha$, será:

$$S_1 = (V - a_1)\, k = Vk - a_1 k$$

El interés reajustado del segundo período, será:

$$I_2 = (Vk - a_1 k)\, i = Vki - a_1 ki$$

Y por lo tanto la amortización real del segundo período será:

$$a_2 = ck - Vki + a_1 ki = k(c - Vi) + a_1 ki = ka_1 + a_1 k$$
$$a_2 = a_1 h\, k$$

El saldo al final del segundo período será:

$$S_2 = (Vk - a_1 k - a_2)\, k = V k^2 - a_1 k^2 - a_2 k$$

El interés del tercer período será:

$$I_3 = V\, k^2\, i - a_1 h^2\, i - a_2 ki$$

y por lo tanto la amortización del tercer período estará dada por:

$$a_3 = ck^3 - Vk^2 i + a_1 k^2 i + a_2 ki = k(ck - Vki + a_1 ki) +$$
$$+ a_2 ki = ka_1 + a_2 ki = a_2 k\,(1 + i) = a_1\, hk.hk = a_1 h^2 k^2$$

Y en general al final del período p, la amortización estará dada por la fórmula:

$$a_p = a_1 \, h^{p-1} \, k^{p-1} \qquad (17)$$

Este resultado, como se advierte, pudo preverse, ya que la amortización en el sistema francés sin reajuste, está dada por:

$$t_p = t_1 \, (1 + i)^{p-1} = t_1 \, h^{p-1}$$

Y ahora al reajustar el servicio, igual a la amortización más interés del período, quedarán multiplicadas por k, ambos términos de la suma.

Es decir; como:

$$c = a_1 + Vi \, ,$$

resulta:

$$c_r = a_1 k + Vki$$

El total amortizado luego de la entrega de p cuotas o servicios, será en este caso:

$$_rT_p = a_1 + a_1 hk + a_1 h^2 k^2 + \ldots\ldots + a_1 h^{p-1} k^{p-1}$$

$$_rT_p = a \, \frac{h^p k^p - 1}{hk - 1}$$

donde $h = (1 + i)$ y $k = (1 + \alpha)$.

El saldo de la deuda, luego de computarse p, cuotas, no se obtiene como en el sistema tradicional restando de la deuda original el total amortizado, ya que se trata ahora de una operación con servicios y saldos reajustables.

No obstante, puede establecerse para el saldo de la deuda en este método reajustable una fórmula simple como sigue:

Hemos visto que:

$$S_1 = (V - a_1)k = Vk - a_1 k$$

$$S_2 = (Vk - a_1 k - a_2)k = Vk^2 - a_1 k^2 - a_1 hk^2$$

$$= k^2 \, [V - (a_1 + a_1 h)] = k^2 \left[V - a_1 \, \frac{h^2 - 1}{i} \right]$$

Por el mismo método se comprueba que:

$$S_3 = k^3 \left[V - a_1 \frac{h^3 - 1}{i} \right]$$

Y en general, el saldo luego de la entrega de *p* cuotas, estará dado por:

$$_rS_p = k^p \left[V - a_1 \frac{h^p - 1}{i} \right]$$

Lo que dice que, en el sistema reajustable, el saldo es igual al del sistema tradicional conocido, multiplicado por el factor de reajuste, elevado a un exponente igual al número de cuotas entregadas, o computadas. Es decir:

$$_rS_p = k^p\, S_p = k^p \left[a_1 \frac{h^n - 1}{i} - a_1 \frac{h^r - 1}{i} \right]$$

$$= k^p \frac{a_1}{i} \left[h^p - k^p \right]$$

Resulta claro que, cuando se hayan entregado o computado, *n–1*, cuotas, el saldo de la deuda tendrá que ser igual a la última amortización:

En efecto:

$$_rS_{n-1} = k^{n-1} \left[V - a \frac{h^{n-1} - 1}{i} \right]$$

Pero: $$V = a_1 \frac{h^n - 1}{i}$$

Luego reemplazando, se tiene:

$$_rS_{n-1} = k^{n-1} \left[a_1 \frac{h^n - 1}{i} - a_1 \frac{h^{n-1} - 1}{i} \right]$$

Extrayendo factor común, $a_1 h^{n-1}$ y después efectuando la resta dentro del paréntesis cuadrado, resulta, en definitiva:

$$r^S_{n-1} = a_1 h^{n-1} k^{n-1}$$

VI. AMORTIZACIONES Y SALDO EN CASO DE FACTOR DE REAJUSTE VARIABLE

Esta situación se presenta, cuando se adopta el criterio de reajustar el servicio y saldo, de acuerdo a un cierto índice de precios. El caso más común se presenta en las operaciones de créditos para la construcción o adquisición de vivienda o compra de terreno a plazo, pactándose que los servicios de la deuda se reajustarán al final de cada año o período fijado, de acuerdo al índice de las remuneraciones, costo de vida o de construcciones.

Resulta claro que en este caso no será posible efectuar ningún cálculo de antemano respecto a la amortización y saldo y el cuadro de amortización tendrá que irse completando luego de fijado el coeficiente de reajuste.

No obstante, si no se ha confeccionado el cuadro de amortización, como sucede muy a menudo, para determinar el saldo (a los fines de cancelación anticipada, de contabilización, de previsión financiera u otro motivo) o las amortizaciones efectuadas, podrán aplicarse las fórmulas siguientes:

$$a_p = a_1 h^{p-1} k_1 k_2 \ldots\ldots k_{p-1} \quad ;$$

Si $k_1 = k_2 = \ldots = k_{p-1} = k$, esta fórmula se convierte en:

$$a_p = a_1 h^{p-1} h^{p-1}$$

$$r^S_p = k_1 h_2 \ldots\ldots k_p \left[V - a_1 \frac{h^p - 1}{i} \right]$$

que, para: $k_1 = k_2 = \ldots\ldots = k_p = k$, se convierte en:

$$r^S_p = k^p \left[V - a_1 \frac{h^p - 1}{i} \right]$$

Resulta ilustrativo confeccionar el cuadro de amortización e intereses en este sistema reajustable.

CUADRO DE AMORTIZACION E INTERESES CON REAJUSTE DE SERVICIOS Y SALDOS

Períodos	Deuda al comienzo	Cuota reajustable	Amortización al final reajustable	Interés al final reajustable	Saldo al final
1	100,00	26,38	16,38	10,00	83,62
2	96,16	30,34	20,72	9,62	75,44
3	86,76	34,88	26,21	8,68	60,55
4	69,63	40,12	33,16	6,96	36,47
5	41,94	46,14	41,94	4,19	0.
		177,86	138,41	39,45	

Como podrá notarse, este método de reajuste por inflación determina una compensación para el acreedor del 38,41 del capital original prestado y un suplemento de intereses del 7,55%, con respecto al obtenido en el sistema sin reajuste, cuyo cuadro de amortización se consignó al tratar el método de cuota constante reajustada.

La compensación resultante para el acreedor, tanto en concepto de recuperación de capital como de interés, es menor que en el método de cuota constante reajustada considerada en el punto IV). Ello se explica, porque ahora se supone que cada cuota pese a ser reajustada, se mantiene inalterable hasta el final de la operación, en tanto que allá se establece una equivalencia económica y financiera completa al final de la operación.

VII. MEDIDA DE LA DESCAPITALIZACION ORIGINADA EN LOS SISTEMAS DE AMORTIZACION SIN REAJUSTE

Se desprende de todo lo expuesto, que cuanto más largo es el plazo de amortización de un préstamo, sin haberse incluído un mecanismo compensatorio de la creciente desvalorización monetaria que ocasiona el proceso inflacionario, mayor será el perjuicio económico para el acreedor, o descapitalización que sufrirá.

Una medida de dicha descapitalización se obtiene comparando las recuperaciones del acreedor en el sistema sin reajuste y las que lograría si impusiera una cláusula de reajuste, del tipo del que venimos considerando en este trabajo.

En el cuadro siguiente, figuran las cifras referidas a la operación tipo antes considerada, esto es, para: $V_o = 100$; $i = 0,10$; $\alpha = 0,15$ y $n = 5, 10, 15, 20, 25$ y 30.

Períodos	Recuperaciones sin reajuste	Recuperaciones con reajuste	% de recuperación	% de descapitalización
5	131,898	177,862	74,16	25,80
15	162,740	330,429	49,26	50,74
15	197,205	625.565	31,53	68,47
20	234,920	1.203,360	19,52	80,48
25	275,425	2.344,451	11,75	88,25
30	318,240	4.612,011	6,90	93,10

Las cifras del cuadro precedente, indican en forma por demás elocuente, que a largo plazo, las pérdidas de capital por efectos de la desvalorización monetaria serán totales, esto es, determinan la completa descapitalización y por ende su capacidad operativa, de las entidades que operan en préstamos a largo plazo.

Cabe agregar, que técnicamente, el sistema o método correcto para incorporar la cláusula de reajuste en las operaciones de préstamo a largo plazo, es el que surge de la aplicación de fórmulas de la naturaleza de la (16) utilizada en el problema de la constitución de un fondo y amortización de una deuda con cuotas y saldos reajustados.

Para que cumpla el principio de la equivalencia financiera y económica, tanto en valores actuales como finales, es necesario considerar cantidades homogéneas en lo que se refiere a su poder adquisitivo.

El criterio —que ha comenzado a utilizarse en estos últimos años— de determinar la cuota de imposición o servicios de amortización según la fórmula tradicional y luego reajustarlas periódicamente acorde con los aumentos reflejados en un índice de precios, no es, como ya se señaló, técnicamente correcto, pues implica admitir que cada cuota mantiene inalterable su poder adquisitivo, durante el curso de la operación.

En el fondo, consiste en utilizar la conocida fórmula de imposiciones o amortizaciones con cuotas que varían de acuerdo a una cierta progresión, a tasa constante o variable.

De cualquier manera, con tal procedimiento, se logra siempre una cierta compensación.

VIII. AHORRO Y PRESTAMO CON REAJUSTE POR INFLACION

La operación denominada "ahorro y préstamo o crédito recíproco", consiste en la constitución de un fondo, mediante los aportes de un grupo de personas, destinado, por lo general, al otorgamiento de préstamos a los propios ahorristas.

Se trata, como se advierte, de un fondo de carácter mutual o cooperativo, constituido por personas que se suponen van ingresando al sistema en forma ininterrumpida.

La adjudicación de los préstamos se efectúa, por lo común, en función de la antigüedad del ahorrista y el porciento de ahorro constituido.

Al comienzo de este ensayo se citó, precisamente, al ahorro y préstamo, como uno de los ejemplos típicos que ilustran sobre la distorsión que el proceso inflacionario ocasiona en las operaciones financieras, cuando no se prevé un mecanismo adecuado compensatorio de la desvalorización monetaria.

Se hizo ver allí, de manera objetiva, el problema que se crea a los ahorristas, o suscriptores de certificados de ahorro, en razón de que el préstamo que se les otorga, al final del período de constitución de ahorro establecido, es insuficiente para la adquisición de la vivienda, automotor o el bien a que está destinado.

El mecanismo financiero del sistema que nos ocupa, es bastante simple. El ahorrista o suscriptor, debe constituir, mediante cuotas mensuales que se imponen a interés compuesto a una cierta tasa nominal i, un determinado porciento ε, del importe del préstamo P.

Si es m, la cantidad de cuotas a imponer, el importe de la cuota mensual se determina por la fórmula:

$$\text{Cuota de ahorro} = \varepsilon\, P\, s^{-1}_{\overline{m}|i} = \varepsilon\, P \frac{i}{(1+1)^m - 1}$$

Integrado el ahorro y adjudicado el préstamo, la cuota o servicio de amortización, se determina mediante la fórmula:

$$\text{Cuota de amortización} = P\, a^{-1}_{\overline{m}\, y} = \frac{Pi\,(1+\gamma)^n}{(1+\gamma)^n - 1} \quad ;$$

donde n, es el plazo de reembolso del préstamo e, y, la tasa fijada para el préstamo, por lo general, mayor que la tasa computada para capitalización de las cuotas de ahorro.

Cuando se considera el problema en forma global, que es el que interesa si se trata de evaluar el grado de financiación de un plan de ahorro y préstamo, se supone que los ahorristas van ingresando al sistema en forma ininterrumpida, teóricamente en forma continua, y por lo tanto, los ingresos constituyen una corriente continua de renta.

Además, se toma en cuenta que, permanentemente, una cierta cantidad de ahorristas salen del sistema por diversas causas, admitiéndose, por lo común, que el número que deserta es proporcional a la cantidad que permanece en el sistema.

Sea aV, el ahorro total anual constituído por cada grupo de ahorristas (o suscriptores) ingresados al sistema en la misma época. Entonces en un plazo t, el grupo inicial o fundador habrá constituído un fondo aVt. Pero si las deserciones se suponen proporcionales al número de ahorristas restantes, según una función exponencial de extinción e^{-st}, la suma anterior se reducirá a:

$$A_t = a\ V\ e^{-st}$$

Luego, el conjunto de todos los grupos de ahorristas de todas las antigüedades de ingreso, constituirán en el período $[o, n]$, un fondo:

$$D_t = \int_o^n a\ V\ t\ e^{-st}\ dt$$

Esta integral, aplicando el conocido método de integración por partes, da:

$$D_n = \frac{a\,V}{s^2} \quad [1 - e^{-sn} - sn\ e^{-sn}] \tag{18}$$

$$= \frac{a\,V}{s^2} \quad [1 - e^{-sn}\ (1 + ns)]$$

Si suponemos ahora, acorde con el criterio adoptado en el problema de las imposiciones, que el ahorro se va reajustando en forma continua según una cierta tasa instantánea de reajuste por inflación, δ_r, esto es, mediante el factor de reajuste $e^{\delta r}$, la integral anterior se escribirá:

$${}_rD_t = \int_o^n aV\ t\ e^{st-}\ e^{\delta_r t}\,dt$$

e integrando por partes resulta:

$$
\begin{aligned}
{}_{r}D_{n} &= \frac{aV}{(\delta_r - s)^2} \left[1 - e^{-sn} - ns\ e^{-sn} + n\,\delta_r\ e^{-sn}\right] \\
&= \frac{aV}{(\delta_r - s)^2} \left[1 - e^{-sn}\ [1 - n\ (\delta_r - s]\right]
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Como se advierte al comparar las fórmulas (18) y (19), en esta última figura un término de corrección que representa el reajuste a realizarse para corregir los efectos distorsionantes de la desvalorización monetaria que se deriva de la inflación de precios.

Además, puede comprobarse que cuando $\delta_r = 0$, vale decir, $e^{\delta r} = 1$, la fórmula (19) se convierte en la (18) [4].

SINTESIS Y CONCLUSIONES

En el presente ensayo se intenta una generalización de las fórmulas tradicionales de la matemática financiera a fin de hacerlas aptas para los cálculos en períodos de inflación.

Se incorpora en dichas fórmulas un factor de reajuste que tiene el efecto de corregir los efectos distorsionantes derivados del proceso inflacionario, e evitar los resultados contradictorios y aún absurdos que proporcionan al suponer, implícitamente, inalterables los valores monetarios involucrados, en particular V, A, c e i.

Concordante con el propósito de arribar a fórmulas simples, de fácil comprensión y aplicación, se acepta para describir la evolución del proceso inflacionario una función exponencial de la misma naturaleza que el monto compuesto. De esta manera, es natural definir "una tasa instantánea de inflación" que actúa en el proceso inflacionario en igual forma que la tasa de interés en el proceso de capitalización.

La solución propuesta debe considerarse como una primera aproximación, en el intento de proporcionar un instrumento matemático adecuado para los cálculos financieros en períodos de inflación. Queda, a nuestro juicio, el camino abierto para encarar elaboraciones más amplias y definidas.

En un futuro trabajo, intentaremos aplicar el método utilizado en este ensayo, para generalizar las fórmulas de la matemática actuarial, aplicables en las operaciones de seguro.

[4] Consúltese la publicación del "Congreso Argentino de Financiamiento de la Vivienda" del Instituto Argentino de la Vivienda. Mar del Plata, 1961.