REVISTA DE ECONOMÍA Y ESTADÍSTICA
INSTITUTO DE ECONOMÍA Y FINANZAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
ISSN 0034-8066

ARTÍCULOS

Análisis Estático-Comparativo de la Hipótesis de Baumol sobre la Maximización de las Ventas

Andrés Vázquez Pérez

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 17, No. 1-2-3-4 (1973): 1º, 2º, 3º y 4º Trimestre, pp. 77-92.

http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3694

ANALISIS ESTATICO-COMPARATIVO DE LA HIPOTESIS DE BAUMOL SOBRE LA MAXIMIZACION DE LAS VENTAS *

ANDRÉS VÁZQUEZ PÉREZ

I. INTRODUCCION

El presente trabajo consiste en un análisis estático-comparativo de la conocida hipótesis de Baumol [2] sobre la maximización del ingreso (ventas), condicionada a la obtención de un determinado nivel de beneficio. En primer lugar se exponen las condiciones de equilibrio y, a continuación, se describen los efectos producidos en las cantidades demandadas de los factores y en la oferta del producto por un cambio paramétrico en el precio de un factor o en el beneficio de la empresa. Los resultados son formalmente análogos a los del supuesto de la maximización de las ventas para un coste dado. En particular, el efecto total producido en las cantidades demandadas de los factores, por un cambio paramétrico en uno de sus precios, puede descomponerse en dos efectos parciales, formalmente análogos a los efectos de sustitución y de renta en la teoría del consumidor.

II. CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Sea la función de producción de la empresa

$$x = f(v_1, v_2, \ldots, v_n), \tag{1}$$

donde x representa la cantidad obtenida de producto y v_i es la cantidad empleada del factor i-ésimo $(i = 1, 2, \ldots, n)$. La función

* Profesor de Microeconomía en la Universidad de Madrid, Investigador Científico del Consejo Superior de Investigaciones Científicas y Faculty del Departamento de Economía de la Universidad de California, Los Angeles.

de producción se supone creciente con las cantidades de cada factor, estrictamente cóncava y dos veces diferenciable en el cuadrante positivo, con derivadas parciales de primero y segundo orden representadas por

$$f_i = \frac{\partial x}{\partial v_i} \quad f_{ij} = \frac{\partial^2 x}{\partial v_i \, \partial v_j} = f_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Sea la función de demanda del mercado

$$x = h(p), \tag{2}$$

donde p denota el precio del producto. El ingreso y el coste de la empresa son, respectivamente,[1]

$$I = xp \tag{3}$$

$$C = \sum_{i=1}^{n} v_i p_i, \tag{4}$$

donde p_i representa el precio del factor i-ésimo. El beneficio de la empresa viene dado entonces por

$$B = I - C = xp - \sum_{i=1}^{n} v_i p_i \,. \tag{5}$$

De acuerdo con la hipótesis de Baumol, la finalidad primordial de la empresa no consiste en la maximización del beneficio, sino en la maximización de las ventas, expresadas por el importe del ingreso total, que para el empresario representa una medida del volumen físico del producto, condicionada a la obtención de un determinado nivel de beneficio capaz de satisfacer los deseos de los accionistas y financiar la expansión de la empresa.

Analíticamente, el problema consiste en hallar el máximo de (3) con la condición

$$xp - \sum_{i=1}^{n} v_i p_i = B_0, \tag{6}$$

[1] Por simplicidad se supone que no existen costes fijos o bien que se hallan incluidos en la condición del beneficio mínimo (6). Por otra parte, los efectos de un cambio paramétrico en éstos son análogos a los de un cambio paramétrico en el nivel de beneficio.

donde B_0 es el nivel de beneficio requerido. Obviamente se supone que este último es factible, o sea que no es mayor que el beneficio máximo que podría obtener la empresa en las mismas condiciones técnicas y de mercado, puesto que de lo contrario no habría ninguna cantidad de producto que verificase la condición (6) de equilibrio [2]. En estas condiciones, la forma de Lagrange es

$$L = x\,p + \lambda\left(x\,p - \sum_{i=1}^{n} v_i\,p_i - B_0\right),$$

o sea,

$$L = (1 + \lambda)\,x\,p - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\,p_i + B_0\right), \qquad (7)$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange.

Las condiciones de primer orden para la maximización condicionada del ingreso requieren que

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = (1+\lambda)\left(p + x\frac{dp}{dx}\right) f_i - \lambda p_i = O \quad (i = 1,2,\ldots,n) \qquad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x\,p - \sum_{i=1}^{n} v_i\,p_i - B_0 = O. \qquad (9)$$

En el equilibrio ha de verificarse asimismo que

$$\frac{\partial I}{\partial B_0} = -\lambda < O, \qquad (10)$$

de donde se deduce que $\lambda > O$. De (10) se sigue asimismo que una variación del beneficio requerido implica una variación de signo opuesto en el ingreso de la empresa.

[2] Si el beneficio requerido fuese igual al máximo beneficio posible, la condición (6) sería inefectiva, y el problema se reduciría al tradicional de la maximización del beneficio. La condición (6) sería igualmente inefectiva, si el beneficio requerido fuese menor que el correspondiente al máximo del ingreso. El equilibrio vendría entonces determinado por la demanda del mercado, puesto que consistiría en la maximización incondicionada del ingreso. Como señala Portes [4, p. 237 n], en este caso no habría ningún incentivo para minimizar el coste. Las variaciones de éste no afectarían al producto, y los efectos de un cambio en el precio de los factores serían indeterminados.

Las condiciones (8) de equilibrio se pueden expresar asimismo de la siguiente forma alternativa:

$$p_i = \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) I' f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

donde I′ es el ingreso marginal:

$$I' = p + x \frac{dp}{dx}.$$

Como $\lambda > O$, se deduce de (11) que el precio de los factores es mayor que el valor de su productividad marginal. Este resultado contrasta con el conocido principio de la maximización del beneficio, según el cual los factores son retribuídos de acuerdo con el valor de su productividad marginal. La explicación de este hecho es simple. Como un incremento del ingreso requiere una disminución del beneficio, según se ha indicado anteriormente, el empresario fija un nivel de beneficio mínimo que es menor que el máximo beneficio posible que podría obtener. La diferencia entre ambos es precisamente la cantidad adicional que compensa el exceso entre lo que recibe y lo que produce cada factor. Como señala Baumol [2, p. 190], esta diferencia puede ser considerada como un fondo de beneficios sacrificables consagrados a incrementar las ventas tanto como sea posible.

El hecho de que la retribución de los factores sea mayor que el valor de su productividad marginal significa que el beneficio marginal es negativo. En efecto, como el coste marginal es $C' = p_i/f_i$, las ecuaciones (8) u (11) se pueden escribir de la siguiente forma:

$$C' = \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) I'. \tag{12}$$

Recordando que $\lambda > O$, se sigue de (12) que el equilibrio se establece para una cantidad de producto cuyo coste marginal es mayor que el ingreso marginal, de modo que el beneficio marginal es negativo [3].

[3] Análoga conclusión se obtiene escribiendo las condiciones necesarias de equilibrio de la forma

$$I'f_i - p_i = -\frac{1}{\lambda} I' f_i.$$

La primera parte de esta ecuación representa el beneficio marginal del factor i-ésimo, es decir, la diferencia entre el ingreso correspondiente a la can-

Por otra parte, de las condiciones (8) de equilibrio se obtiene directamente la conocida expresión

$$\frac{f_i}{p_i} = \frac{f_j}{p_j} \qquad (i \neq j = 1, 2, \ldots, n),$$

que muestra que, en el equilibrio, las productividades marginales de los diferentes factores son proporcionales a sus respectivos precios. Este resultado, como es sabido, se encuentra igualmente en el equilibrio clásico de la teoría de la empresa. La razón de esta correspondencia radica en que la asignación óptima de los factores presupone en ambos casos el cumplimiento del criterio de eficiencia económica, es decir, la obtención de cualquier cantidad de producto con el menor coste posible o, alternativamente, la obtención de la máxima cantidad de producto para cualquier coste dado.

Si el coste de producción está dado, la maximización del beneficio implica obviamente la maximización del ingreso, puesto que, como reconoce Baumol [2, pp. 190-191], el beneficio se define como la diferencia entre el ingreso y el coste [4]. En otras palabras, para un coste dado, la empresa que maximiza el ingreso empleará la misma cantidad de factores y venderá la misma cantidad de producto que la empresa que maximiza el beneficio. Análogamente, dada la cantidad de producto o el ingreso, la maximización del beneficio coincide con la minimización del coste, de modo que el comportamiento de la empresa en cuanto al empleo y asignación de los factores será también idéntico en ambos casos. Sin embargo, la oferta de producto que maximiza el beneficio es menor que la correspondiente a la maximización condicionada del ingreso [5]. En efecto, de acuerdo con

tidad de producto obtenida por la aplicación de la unidad marginal del factor y el precio del mismo. Como la segunda parte de la ecuación anterior es negativa, el beneficio marginal es también negativo, es decir, cada factor recibe más de lo que produce.

[4] En el análisis gráfico Baumol [2, p. 190] considera que la convexidad de las curvas isoingresos hacia el origen de coordenadas es el resultado de los precios decrecientes de los productos (curvas de demanda con pendiente negativa). Esta conclusión, sin embargo, no sería válida en el caso de curvas de demanda fuertemente convexas hacia el origen de coordenadas.

[5] Suponiendo que el equilibrio del maximizador del ingreso se establece inicialmente para la misma cantidad de producto que el del maximizador del beneficio, Portes [4] analiza el comportamiento del primero en función de los resultados conocidos del segundo, y encuentra que la diferencia más importante es la aparición de un "efecto de renta" y la posibilidad de "factores Giffen", en precisa analogía con la teoría del consumidor. En efecto, en el

Baumol [2, p. 189], si el coste marginal correspondiente al máximo beneficio es positivo, un aumento del producto supone un aumento del ingreso total, puesto que, en el equilibrio, el ingreso marginal es igual al coste marginal y, por tanto, es también positivo.

Las condiciones de segundo orden para la maximización condicionada del ingreso requieren que

$$(-1)^k \begin{vmatrix} O & -\dfrac{I'}{\lambda} f_1 & \cdots\cdots & -\dfrac{I'}{\lambda} f_k \\ -\dfrac{I'}{\lambda} f_1 & (1+\lambda)\,(I'' f_1^2 + I' f_{11}) & \ldots & (1+\lambda)\,(I'' f_1 f_k + I' f_{1k}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\dfrac{I'}{\lambda} f_k & (1+\lambda)\,(I'' f_k f_1 + I' f_{k1}) & \ldots & (1+\lambda)\,(I'' f_k^2 + I' f_{kk}) \end{vmatrix} > O \quad (k=2,3,\ldots,n),$$

donde I'' denota la derivada del ingreso marginal:

$$I'' = \frac{d\,I'}{dx} = 2\,\frac{d\,p}{dx} + x\,\frac{d^2p}{dx^2}\,.$$

Estas condiciones pueden expresarse igualmente de la forma

$$(-1)^k \left(\frac{I'}{\lambda}\right)^2 (1+\lambda)^{n-1}\, D > O \qquad (k = 2, 3, \ldots, n), \qquad (14)$$

siendo D el determinante simétrico

$$D = \begin{vmatrix} O & f_i \\ f_j & I'' f_j f_i + I' f_{ij} \end{vmatrix} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)\,. \qquad (15)$$

aspecto puramente formal, el equilibrio del consumidor guarda un paralelismo completo con el correspondiente al supuesto de la maximización del producto para un coste dado. Este último es análogo, a su vez, al de la maximización condicionada del ingreso, según se ha indicado anteriormente. Por otra parte, aunque en la maximización del beneficio no puede darse el caso inverso, el efecto total que en la cantidad demandada de los factores ocasiona un cambio en uno de sus precios puede descomponerse, sin embargo, en un efecto de sustitución y en un efecto de escala. Este último refuerza siempre el efecto de sustitución directo y excluye la posibilidad del caso análogo al de la paradoja de Giffen. Véase, por ejemplo, [5] y [6].

Sea F el hessiano orlado de la función de producción:

$$F = \begin{vmatrix} O & f_i \\ f_j & f_{ij} \end{vmatrix} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Las filas y columnas de D y F se numeran 0, 1, . . ., n, y los adjuntos se denotan en la forma usual de subíndices, el primero de los cuales indica la fila y el segundo la columna. Sumando a los elementos de la columna i-ésima del determinante D los correspondientes elementos de la columna cero, multiplicados por el factor $-I'' f_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, se obtiene que

$$D = (I')^{n-1} F \tag{17}$$

$$D_{oi} = (I')^{n-1} F_{oi} \quad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{18}$$

$$D_{ji} = (I')^{n-2} F_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

En virtud de (17), la condición (14) se convierte entonces en

$$(-1)^k \lambda^{-2} (1 + \lambda)^{n-1} (I')^{n+1} F > O \quad (k = 2, 3, \ldots, n). \tag{20}$$

Ahora bien, como la expresión $\lambda^{-2} (1 + \lambda)^{n-1} (I')^{n+1}$ es positiva, la condición (20) implica que los menores principales del determinante F sean alternativamente positivos y negativos, de modo que

$$\frac{F_{ii}}{F} < O \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{21}$$

Estas condiciones se verifican gráficamente si las superficies isocuantas son convexas hacia el origen de coordenadas. Las condiciones de segundo orden para la maximización condicionada del ingreso son pues equivalentes a las de la maximización del producto para un coste dado o, lo que es lo mismo, a las de la minimización del coste para un volumen de producción dado. Estas condiciones se verifican asimismo si se verifican las condiciones de segundo orden para la maximización del beneficio, puesto que estas últimas implican aquéllas, pero no a la inversa.

III. DESPLAZAMIENTO DEL EQUILIBRIO

En orden a obtener los efectos producidos en las cantidades demandadas de los factores por un cambio paramétrico en uno de sus precios o en el beneficio mínimo requerido es necesario diferenciar las condiciones de primer orden del equilibrio. Suponiendo que el factor cuyo precio varía es el j-ésimo, permaneciendo invariables los precios de los demás factores, la diferenciación de las condiciones (8) y (9) de equilibrio conduce, después de simplificar, al siguiente sistema de (n + 1) ecuaciones diferenciales lineales:

$$(1+\lambda) \sum_{h=1}^{n} (I' f_{ih} + I'' f_i f_h)\, dv_h - \frac{I'}{\lambda} f_i d\lambda = \lambda \delta_{ij} dp_j \quad (i=1, 2, ..., n)$$

$$- \frac{I'}{\lambda} \sum_{h=1}^{n} f_h\, d\, v_h = v_j\, d\, p_j + dB_o, \qquad (22)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Aplicando la regla de Cramer a la resolución del sistema (22), y teniendo en cuenta (17), (18) y (19), se obtiene

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial B_o}\right)_{dp_j = O} = - \frac{\lambda}{I'} \frac{F_{oi}}{F} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (23)$$

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial p_j}\right)_{dB_o = O} = \frac{\lambda}{I'(1+\lambda)} \frac{F_{ji}}{F} - \frac{\lambda}{I'} v_j \frac{F_{oi}}{F} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (24)$$

La ecuación (23) expresa el efecto que un cambio paramétrico en el beneficio fijado ocasiona en las cantidades demandadas de los factores, cuando los precios de éstos permanecen constantes. Las condiciones de segundo orden del equilibrio no determinan el signo de (23). Este depende del carácter normal o regresivo (inferior) del factor en cuestión. Esto se comprende claramente si se tiene en cuenta que las variaciones del beneficio afectan a las demandas de los factores a través de la modificación que ocasionan en la oferta de producto.

En efecto, derivando parcialmente (1) y (8) con respecto a la cantidad de producto se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\sum_{h=1}^{n} f_h \frac{\partial v_h}{\partial x} = 1 \tag{25}$$

$$(1+\lambda) I' \sum_{h=1}^{n} f_{ih} \frac{\partial v_h}{\partial x} - \frac{I'}{\lambda} f_i \frac{\partial \lambda}{\partial x} = (1+\lambda) I'' f_i \quad (i = 1,2,\ldots,n),$$

cuya solución es

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)_{dp_j=O} = \frac{F_{oi}}{F} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{26}$$

La ecuación (26) expresa la variación que experimentan las cantidades demandadas de los factores, en respuesta a un cambio en la oferta del producto, a lo largo de la senda de expansión de la empresa, es decir, suponiendo que los precios de los factores permanecen constantes. Ahora bien, de acuerdo con Hicks [3, p. 104-105], un factor se define como normal o regresivo (inferior), respectivamente, según que la cantidad demandada del mismo varíe directa o inversamente con la oferta de producto, para unos precios dados de los factores. En consecuencia, la expresión (26) será positiva, si el factor en cuestión es normal, y negativa, en el caso contrario.

Derivando ahora parcialmente la función de producción con respecto a B_o, y haciendo uso de (23), se obtiene

$$\left(\frac{\partial x}{\partial B_o}\right)_{dp_j=O} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial v_i}{\partial B_o} = -\frac{\lambda}{I'} \frac{1}{F} \sum_{i=1}^{n} f_i F_{oi}. \tag{27}$$

El sumatorio del último término de (27) corresponde al desarrollo del determinante F por los elementos de la fila o columna cero:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i F_{oi} = F, \tag{28}$$

de modo que (27) se reduce a

$$\left(\frac{\partial x}{\partial B_o}\right)_{dp_j=O} = -\frac{\lambda}{I'}. \tag{29}$$

La expresión anterior es negativa, lo mismo que la (10) [6]. En consecuencia, la oferta del producto, así como el ingreso total de la empresa, varían inversamente con el beneficio requerido. Por el contrario, en el caso normal de una demanda decreciente, el precio del producto y el beneficio de la empresa varían en el mismo sentido. Esto confirma nuevamente que, en orden a incrementar el producto o el ingreso total y compensar la disminución del precio, el empresario ha de reducir el máximo beneficio posible que podría obtener. Baumol [2, p. 189] explica este resultado basándose en el simple hecho de que al ser la cantidad de producto que maximiza el ingreso mayor que la correspondiente a la maximización del beneficio, cualquier incremento en el producto implica una disminución del beneficio. Inversamente, un incremento en el beneficio mínimo requerido exige una reducción del producto y un aumento de su precio.

La ecuación (23) puede escribirse ahora, de acuerdo con (26) y (29), de la forma

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial B_o}\right)_{dp_j=O} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)_{dp_j=O} \left(\frac{\partial x}{\partial B_o}\right)_{dp_j=O} \quad (i=1, 2, \ldots, n) , \tag{30}$$

que pone de relieve que el efecto producido en las cantidades demandadas de los factores, por un cambio en el beneficio de la empresa, es igual al originado indirectamente a través de la modificación que experimenta la oferta del producto. La ecuación (30) pone asimismo de relieve que las cantidades demandadas de los factores varían en distinto o en el mismo sentido que el beneficio de la empresa, según que éstos sean o no normales.

En cualquier caso, de (30) y de la primera ecuación de (25), o de (27) y de la última ecuación de (22), se deduce directamente la condición de agregación

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial B_o}\right)_{dp_j=O} = \left(\frac{\partial x}{\partial B_o}\right)_{dp_j=O} . \tag{31}$$

[6] Sustituyendo (29) en la expresión $\frac{\partial I}{\partial B_o} = I' \frac{\partial x}{\partial B_o}$ se obtiene nuevamente la anterior ecuación (10).

Esta condición expresa que, no variando el precio de los factores, la suma de los efectos que un cambio en el nivel de beneficio ocasiona indirectamente en la oferta del producto, a través de las demandas de los factores, es igual al ocasionado directamente en esta última por un cambio en aquél. La condición (31) muestra asimismo que, si bien es posible en este caso también que todos los factores sean normales, no todos pueden ser regresivos, puesto que ello implicaría el resultado contradictorio de que las productividades marginales son negativas [7].

Es posible analizar ahora los efectos producidos por un cambio paramétrico en el precio de un factor, cuando los precios de los demás factores y el beneficio de la empresa permanecen constantes. En primer lugar, la variación experimentada en estas condiciones por las cantidades demandadas de los factores viene dada por la ecuación (24). En el aspecto formal, el análisis de esta ecuación es análogo al de la conocida ecuación de Slatsky en la demanda del consumidor. Es decir, el efecto total del cambio en el precio del factor puede descomponerse en un efecto de sustitución y en un "efecto de beneficio" o, alternativamente, en un "efecto de expansión (escala)", similares a los efectos de sustitución y de renta en la demanda del consumidor. El primero implica, como es sabido, un desplazamiento a lo largo de la superficie isocuanta inicial, mientras que el segundo corresponde a un desplazamiento a lo largo de la nueva senda de expansión de la empresa.

En efecto, si la cantidad de producto se supone invariable,

$$dx = \sum_{h=1}^{n} f_h \, d v_h = O, \qquad (32)$$

y las n primeras ecuaciones de (22) se convierten en

$$(1 + \lambda) I' \sum_{h=1}^{n} f_{ih} \, d v_h - \frac{I'}{\lambda} f_i \, d\lambda = \lambda \, \delta_{ij} \, dp_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (33)$$

Resolviendo el sistema (32) y (33) se obtiene la expresión correspondiente al efecto de sustitución:

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial p_j} \right)_{dx=O} = \frac{\lambda}{I'(1+\lambda)} \frac{F_{ji}}{F} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (34)$$

[7] Esta conclusión se deduce también directamente de la primera de las ecuaciones del sistema (25).

El efecto de sustitución directo es negativo, según se deduce de (34) y (21), mientras que, por definición, el efecto de sustitución cruzado es negativo, si el factor en cuestión y aquel cuyo precio se supone que varía son complementarios, y positivo, si son sustitutivos.[8]

La variación necesaria que en este caso ha de experimentar el beneficio de la empresa para compensar la invariabilidad del producto es, según se deduce de (32) y de la última ecuación de (22),

$$\left(\frac{\partial B_o}{\partial p_j}\right)_{dx=O} = -v_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (35)$$

El signo negativo de (35) muestra que, en orden a mantener invariable la cantidad de producto, el beneficio requerido ha de variar en distinto sentido que el precio del factor[9].

Por otra parte, el efecto que un cambio paramétrico en el precio del factor origina en la oferta del producto se obtiene sustituyendo (24) en la derivada parcial de la función de producción con respecto al precio del factor j-ésimo:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p_j}\right)_{dB_o=O} = \sum_{i=1}^{n} f_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial p_j}\right)_{dB_o=O} = -\frac{\lambda v_j}{I' F} \sum_{i=1}^{n} f_i F_{oi} +$$

$$+ \frac{\lambda}{(1+\lambda) I' F} \sum_{i=1}^{n} f_i F_{ji} \qquad (36)$$

[8] En cualquier caso, de (11), (34) y (37) se obtiene la condición de agregación (véase también [1, págs. 498-99] y [3, págs. 396-99])

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial p_j}\right)_{dx=O} = O \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

que implica que cualquier factor puede ser sustitutivo, pero no complementario, de todos los demás factores.

[9] La expresión correspondiente a la variación compensadora del coste, necesaria para contrarrestar la invariabilidad del producto en el efecto de sustitución, sólo difiere de la (35) en el signo. Esta divergencia se debe a que, si la cantidad de producto es constante, una variación del coste implica una variación opuesta en el beneficio de la empresa.

Ahora bien, según una conocida propiedad de los determinantes, la suma de los productos de los elementos de una fila o columna por los adjuntos de una paralela a ella es nula, es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} f_i F_{ji} = O \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) . \tag{37}$$

Sustituyendo (28) y (37) en (36) se obtiene [10]

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p_j}\right)_{dB_o=O} = -\frac{\lambda}{I'} v_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) . \tag{38}$$

En contraste con la maximización del beneficio, cuya oferta de producto varía inversamente con el precio de los factores normales y directamente con el de los regresivos, el signo negativo de (38) pone de relieve que, en la maximización condicionada del ingreso, la oferta de producto varía siempre en distinto sentido que el precio de cualquier factor [11].

Finalmente, la sustitución de (29) y (35) en (38) conduce a la expresión

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p_j}\right)_{dB_o=O} = -\left(\frac{\partial x}{\partial B_o}\right)_{dp_j=O} \left(\frac{\partial B_o}{\partial p_j}\right)_{dx=O} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) ,$$

que establece que el efecto negativo que el cambio en el precio de un factor ocasiona directamente en la oferta de producto es igual al que en esta última produciría un cambio en el beneficio de la empresa, suponiendo constantes los precios de los factores, por la variación que experimenta éste, como consecuencia del cambio en el precio del factor, manteniéndose invariable la oferta de producto.

[10] La ecuación (38) se puede obtener asimismo sustituyendo la última ecuación de (22), para $dB_o = O$, en la primera igualdad de (36). Véase [4, p. 240].

[11] Esta conclusión se encuentra igualmente en el supuesto de la maximización del producto para un coste dado. Véase [6, p. 286].

La ecuación (24) se puede expresar ahora, de acuerdo con (23), (34) y (35), de la forma

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial p_j}\right)_{dB_o=O} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial p_j}\right)_{dx=O} - \left(\frac{\partial v_i}{\partial B_o}\right)_{dp_j=O} \left(\frac{\partial B_o}{\partial p_j}\right)_{dx=O} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{39}$$

o, alternativamente, según (26), (34) y (38), de la siguiente:

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial p_j}\right)_{dB_o=O} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial p_j}\right)_{dx=O} + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)_{dp_j=O} \left(\frac{\partial x}{\partial p_j}\right)_{dB_o=O} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{40}$$

El primer término de la segunda parte de (39) y (40) representa el efecto de sustitución o efecto directo. Este expresa, como es sabido, la modificación ocasionada en las cantidades demandadas de los factores, por un cambio en uno de sus precios, suponiendo que los demás precios y la cantidad de producto permanecen constantes. El otro término de la segunda parte de (39) o (40) corresponde al efecto que el cambio en el precio del factor origina indirectamente en las cantidades demandadas de los factores, a través de la variación experimentada por el beneficio requerido por la oferta de producto. Es decir, el efecto indirecto es igual, según (39), a la variación que un cambio unitario en el beneficio de la empresa ocasiona en las cantidades demandadas de los factores, siendo constantes los precios de éstos, por la variación necesaria del beneficio para compensar la invariabilidad del producto en el efecto de sustitución. Alternativamente, el efecto indirecto puede definirse, de acuerdo con (40), como la variación que en las cantidades demandadas de los factores ocasiona un cambio unitario en la oferta de producto, permaneciendo los precios constantes, por la modificación que experimenta la oferta de producto, como consecuencia del cambio en el precio del factor cuando el beneficio de la empresa se supone invariable.

Si $i = j$, las ecuaciones (39) y (40) se convierten, respectivamente, en las siguientes:

$$\left(\frac{\partial v_j}{\partial p_j}\right)_{dB_o=O} = \left(\frac{\partial v_j}{\partial p_j}\right)_{dx=O} - \left(\frac{\partial v_j}{\partial B_o}\right)_{dp_j=O} \left(\frac{\partial B_o}{\partial p_j}\right)_{dx=O} \quad (j = 1,2, \ldots, n) \tag{41}$$

$$\left(\frac{\partial v_j}{\partial p_j}\right)_{dB_o=O} = \left(\frac{\partial v_j}{\partial p_j}\right)_{dx=O} + \left(\frac{\partial v_j}{\partial x}\right)_{dp_j=O} \left(\frac{\partial x}{\partial p_j}\right)_{dB_o=O} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) . \tag{42}$$

El efecto de sustitución directo es siempre negativo, pero el efecto indirecto o de expansión (escala) es negativo, si el factor en cuestión es normal, y positivo, en el caso contrario. Por consiguiente, se sigue de (41) o (42) que las cantidades demandadas de los factores normales varían en distinto sentido que su propio precio. El efecto directo o de sustitución es reforzado en este caso por el efecto indirecto. En el caso de los factores regresivos (inferiores), sin embargo, ambos efectos tienen signo opuesto, y el resultado final depende obviamente del que resulte dominante. Si el efecto indirecto positivo prevalece sobre el efecto de sustitución negativo, la cantidad demandada y el precio del factor regresivo varían entonces en el mismo sentido. Este sería el caso análogo al de la paradoja de Giffen en la demanda del consumidor.

El efecto que un cambio en el precio de un factor ocasiona en la cantidad demandada de otro sólo tiene signo definido si los factores son complementarios y normales, o sustitutivos y regresivos [12].

[12] Lo mismo que en la maximización del producto para un coste dado el efecto total que un cambio en el precio de un factor ocasiona en la cantidad demandada de otro no es igual al efecto que un cambio en el precio de este último ocasiona en la cantidad demandada del primero, excepto en el caso particular en que el gasto en ambos factores sea el mismo. En la maximización del beneficio, sin embargo, estos efectos cruzados son iguales.

Las expresiones (41) y (42) serían negativas, en el primer caso, y positivas en el segundo. En otras palabras, la cantidad demandada de un factor normal varía inversamente con el precio de otro factor, si éstos son complementarios, mientras que la cantidad demandada de un factor regresivo varía directamente con el precio del otro factor, si éstos son sustitutivos. En ambos casos, el efecto indirecto refuerza al efecto de sustitución cruzado. En los dos casos restantes, es decir, si los factores son complementarios y regresivos, o sustitutivos y normales, los dos términos de la segunda parte de las ecuaciones (41) y (42) tienen signo opuesto, de modo que el efecto total que el cambio en el precio de uno de los factores ocasiona en la cantidad demandada del otro depende obviamente del efecto parcial que resulte dominante.

BIBLIOGRAFIA

1. ALLEN, R. G.: *Análisis Matemático para Economistas;* Aguilar, S. A., Madrid, 1959.
2. BAUMOL, W. J.: On the Theory of Oligopoly; *Economica,* agosto, 1958.
3. HICKS, J. R.: *Valor y Capital;* Fondo de Cultura Económica, Méjico, 1945.
4. PORTES, R. D.: Input Demand Functions for the Profit-Constrained Sales-Maximizer: Income Effects in the Theory of the Firm; *Economica,* agosto, 1968.
5. PUU, T.: Les effets de substitution et d'expansion dans la théorie de la production; *Revue d'Economie Politique,* enero-febrero, 1966.
6. VÁZQUEZ, A.: Las demandas de los factores en la teoría de la producción; *Anales de Economía,* enero-diciembre, 1970.