REVISTA DE ECONOMÍA Y ESTADÍSTICA
ISSN 0034-8066
INSTITUTO DE ECONOMÍA Y FINANZAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

OPEN ACCESS

ARTÍCULOS

La Elasticidad de Sustitución

Luis Eugenio Di Marco

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 17, No. 1-2-3-4 (1973): 1º, 2º, 3º y 4º Trimestre, pp. 63-75.

http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3693

LA ELASTICIDAD DE SUSTITUCION

LUIS EUGENIO DI MARCO

El objeto de estas notas es poner al alcance del lector algunos elementos básicos acerca de este concepto y su conexión con aspectos del análisis económico.

1. GENERALIDADES

A modo de introducción, trataremos de ubicar dentro del análisis económico la elasticidad de sustitución, dando un breve concepto. La necesidad de su empleo surge ya que en muchas ramas de la teoría económica se hacen supuestos acerca de cómo los factores productivos —trabajo y capital, fundamentalmente— son sustituibles el uno por el otro. Como se sabe hay tres hipótesis alternativas al respecto: la que supone —à la Leontief— coeficientes constantes de insumo (implícito también en los modelos de Harrod-Domar); la que presume una elasticidad unitaria de sustitución entre el capital y el trabajo (partiendo de la función Coob-Douglas de producción); la que supone una elasticidad constante de sustitución entre el capital y el trabajo (que parte de una función "general" de producción —conocida como CES o SMAC; "general", en el sentido de que comprende a los dos anteriores como casos especiales). Como nota histórica, digamos que Hicks (1932) fue el primero que definió el concepto de su forma actual. Hicks quería examinar el comportamiento de la participación laboral ("labor share") relativamente a la magnitud de la elasticidad de sustitución.

Hecha esta breve digresión, cuyos detalles deben consultarse en la literatura que se cita al final —especialmente Allen (1959) y K. J. Arrow et al. (1961)— veamos una definición del concepto.

Sea la siguiente función de producción no especificada

$$(1.1) \qquad F_i\ (K_i\ ,\ L_i) = \overline{Y}_i$$

donde K = capital
L = trabajo
$\overline{Y}$ = un nivel constante de producción
i = 1, 2, .. denota los sectores económicos

Se presume que (1.1) es una función continua y dos veces diferenciable [1]. [En el caso corriente, una curva del mapa de isocuantas pasa por cada punto (K, L) del octante no-negativo —digamos, del plano Okl—, teniendo pendiente negativa y siendo convexa hacia el origen]. Diferenciando y denotando los productos marginales por

$$F^{k}_{i} = \frac{\partial F_i}{\partial K} \quad \text{y} \quad F^{L}_{i} = \frac{\partial F_i}{\partial L} \quad \text{se tiene:}$$

$$(1.2) \qquad F^{K}_{i}\, d\, K_i + F^{L}_{i}\, d\, L_i = O$$

Esta es la relación aproximada entre los incrementos $d\, K_i$ y $d\, L_i$ en los factores a lo largo de la isocuanta a través de (K, L). Y ya que $\overline{Y}_i$ es fijo, la relación vale para cualquier par de puntos (implicando, asimismo, que los cambios en la curva de producto constante son iguales a cero).

A partir de (1.2), se puede determinar la pendiente de la isocuanta:

$$(1.3) \qquad \frac{d\,L_i}{d\,K_i} = -\frac{F^{K}_{i}}{F^{L}_{i}} \quad \text{o} \quad (1.3') \quad dL_i = -\frac{F^{K}_{i}}{F^{L}_{i}}\, d\, K_i$$

Como ya señalamos, estamos considerando el caso normal tal que dentro del área relevante de Okl, este gradiente es negativo y su valor numérico se denomina *tasa marginal de sustitución* (TMS) del factor L por el factor K en la producción del bien $\overline{Y}$ (esto es, el valor de la TMS depende de la combinación de los factores considerados: es una función de ambos factores, K y L).

Dado que las isocuantas son convexas hacia el origen, el valor de la TMS debe aumentar a medida que L aumenta (y K disminuye) a lo largo de la curva de igual producto. Vale decir, la convexidad implica el principio de la TMS creciente: a medida que la sustitución tiene lugar es más difícil sustituir L por K. Aquí es donde

[1] Para mayores detalles véase Di Marco (1969).

entra nuestro concepto. La idea es determinar cuán rápidamente crece la TMS, esto es, medir la *elasticidad de sustitución.*

En consecuencia, se define la elasticidad de sustitución como la relación entre el cambio en el cociente de L a K ("tasas medias") al cociente de cambios en la TMS entre K y L:

$$(1.4) \qquad \sigma = \frac{\dfrac{d\left(\dfrac{L_i}{K_i}\right)}{\dfrac{L_i}{K_i}}}{\dfrac{d\left(\dfrac{F^K{}_i}{F^L{}_i}\right)}{\dfrac{F^K{}_i}{F^L{}_i}}}$$

donde

$d\left(\dfrac{L_i}{K_i}\right)$ = representa el aumento (o disminución) en la utilización de L comparado con el de K.

$d\,(TMS) = d\left(\dfrac{F^K{}_i}{F^L{}_i}\right)$ = representa la correspondiente variación en la TMS.

(Nótese que al ponerse estos diferenciales en forma proporcional, hace que la elasticidad de sustitución sea independiente de las unidades de medida en que ellos vienen expresados).

2. ALGUNAS EXTENSIONES

Desde que (1.4) es fundamentalmente una manera simplificada de expresar la elasticidad de sustitución, es propósito de las consideraciones que siguen: (a) desglosar un poco más tanto el denominador como el numerador de σ; (b) encontrar la expresión correspondiente de σ cuando la función de producción correspondiente está sujeta a rendimientos constantes de escala; (c) señalar otras conexiones del concepto que nos ocupa con diversos aspectos del análisis económico.

a. Comencemos con el desarrollo de (1.4). Para lo que sigue haremos el supuesto de que

$$F_i^{KL} = F_i^{LK}$$

esto es, la derivada del producto marginal del capital con respecto al trabajo es idéntica a la derivada del producto marginal del trabajo con respecto a la variable capital [2].

Desarrollemos el numerador del denominador de (1.4) [dado (1.1) y la pendiente de la isocuanta (1.3)].

$$(2.1)\quad d\left(\frac{F^K{}_i}{F^L{}_i}\right) = \frac{1}{F^L{}_i}\left(F_i^{KK}\, dK_i + F_i^{KL}\, dL_i\right) - \frac{F^K{}_i}{(F^L{}_i)^2}\left(F_i^{KL}\, dK_i + F_i^{LL}\, dL_i\right)$$

Agrupando convenientemente:

$$= \frac{1}{(F^L{}_i)^2}\left[\left(F^L{}_i\, F_i^{KK} - F^K{}_i\, F_i^{KL}\right) dK_i + \left(F^L{}_i\, F_i^{KL} - F^K{}_i\, F_i^{LL}\right) dL_i\right]$$

Utilizando (1.3′), (2.1) se expresa finalmente así:

$$(2.1')\quad d\left(\frac{F^K{}_i}{F^L{}_i}\right) = \frac{dK_i}{(F^L{}_i)^2}\left[(F_i^L)^2\, F_i^{KK} - 2F_i^K F_i^L F_i^{KL} + (F_i^K)^2\, F_i^{LL}\right]$$

[2] No hay ninguna razón por la cual $F^{KL} = F^{LK}$ desde que cada una denota el cambio en una de las variables, manteniendo la otra constante. Sin embargo, es posible demostrar matemáticamente que el orden de la diferenciación es inmaterial al tomar derivadas parciales (con tal que la función sea continua y diferenciable dos veces).

Trabajando ahora el numerador del numerador de (1.4) se tiene:

$$(2.2)\quad d\left(\frac{L_i}{K_i}\right) = \frac{1}{K_i}\, dL_i - \frac{L_i}{K^2_i}\, dK_i$$

Utilizando nuevamente (1.3′):

$$= - \frac{F^K_i}{F^L_i}\; \frac{dK_i}{K_i} - \frac{L_i}{K^2_i}\, dK_i$$

tal que agrupando convenientemente, obtenemos:

$$(2.2')\quad d\left(\frac{L_i}{K_i}\right) = - \frac{dK_i}{K^2_i\; F^L_i}\,(F_i^K K_i + F_i^L L_i)$$

Reordenando el numerador de (1.4) y empleando (2.2′) puede escribirse:

$$(2.3)\quad \frac{K_i}{L_i}\; d\left(\frac{L_i}{K_i}\right) = - \frac{dK_i}{Ki_i\, L_i i\, F_i^L}\,(F_i^K K_i + F_i^L L_i$$

Y al denominador de σ —empleando (2.1′)— se expresa así:

$$(2.4)\quad \frac{F_i^L}{F_i^K}\,.\; d\left(\frac{F_i^K}{F_i^L}\right) = \frac{dK_i}{F_i^K\,(F_i^L)^2}$$

$$\left[(F_i^L)^2\, F_i^{KK} - 2F_i^K\, F_i^L\, F_i^{KL} + (F_i^K)^2\, F_i^{LL} \right]$$

En consecuencia, la expresión para la elasticidad de sustitución cuando la función de producción no ha sido especificada, viene dada por la siguiente relación [obtenida a partir de (2.3) y (2.4)]:

$$\sigma_i = \frac{-\dfrac{dK_i}{K_i\; L_i\, F_i^L}\,(F_i^K K_i + F_i^L F_i)}{\dfrac{dK_i}{F_i^K\,(F_i^L)^2}\left[(F_i^L)^2\, F_i^{KK} - 2F_i^K\, F_i^L\, F_i^{KL} + (F_i^K)^2\, F_i^{LL} \right]}$$

es decir,

$$(2.5) \quad \sigma_i = \frac{F_i^K F_i^L \left(F_i^K K_i + F_i^L L_i\right)}{-K_i L_i \left[(F_i^L)^2 F_i^{KK} - 2F_i^K F_i^L F_i^{KL} + (F_i^K)^2 F_i^{LL}\right]}$$

que es lo que se quería demostrar.

b. El próximo paso consiste en encontrar la expresión para σ cuando la función de producción es linealmente homogénea. Hay varias propiedades de las funciones homogéneas de primer grado entre las que se destaca la aplicación del teorema de Euler (que es la piedra angular de la teoría más simple de la producción y la distribución difundida por L. Walras y J. B. Clark). En la terminología que venimos empleando el teorema de Euler se expresa:

$$(2.6) \quad F_i^K K_i + F_i^L L_i = F$$

al diferenciar con respecto a K, tenemos:

$$F_i^K + K_i F_i^{KK} + L_i F_i^{KL} = F_i^K$$

Resolviendo para F_i^{KK}:

$$(2.7) \quad F_i^{KK} = - \frac{L_i}{K_i} F_i^{KL}$$

al diferenciar (2.6) con respecto a L se obtiene:

$$K_i F_i^{KL} + L_i F_i^{LL} + F_i^L = F_i^L$$

Resolviendo para $F_i^{LL} =$:

$$(2.8) \quad F_i^{LL} = - \frac{K_i}{L_i} F_i^{KL}$$

Haciendo ahora algunas consideraciones en el denominador de (2.5), utilizando (2.7) y (2.8):

$$\frac{-K_i L_i}{-K_i L_i} \left[(L_i F_i^L)^2 + 2(L_i F_i^L)(K_i F_i^K)^2 + \right.$$

$$\left. + (K_i F_i^K)^2 \right] F_i^{KL} = (L_i F_i^L + K_i F_i^K)^2 F_i^{KL}$$

tal que la elasticidad de sustitución bajo una función de producción con retornos constantes a escala es:

$$\sigma_i^* = \frac{F_i^K F_i^L (F_i^K K_i + F_i^L L_i)}{(F_i K_i + F_i^L L_i)^2 F_i^{KL}}$$

es decir

$$(2.9) \qquad \sigma_i^* = \frac{F_i^K F_i^L}{F_i F_i^{KL}}$$

c. Haciendo algunas transformaciones de los términos utilizados e introduciendo otros, podemos definir por lo menos dos acepciones más del concepto de elasticidad de sustitución. Sea

$$\frac{F_i}{L_i} = f_i \left(\frac{K_i}{L_i} \right)$$

Además,

$$y_i = \frac{Y_i}{L_i} = \text{producto por trabajador} \left(= \frac{F_i}{L_i} \right)$$

$$k_i = \frac{K_i}{L_i} = \text{intensidad de capital}$$

tal que:

$$y_i = f_i (k_i)^3 \text{ , } y_i > O \quad \text{para } k_i > O$$

Con esta nueva notación podemos redefinir los productos marginales:

$$F_i^K = \frac{\partial (L_i y_i)}{\partial K_i} = L_i f'_i \frac{1}{L_i} = f'_i$$

$$F_i^L = \frac{\partial (L_i y_i)}{\partial L_i} = f_i - L_i f'_i \frac{K_i}{L_i^2} = f_i - k_i f'_i$$

[3] Nótese que $y_i = f_i (k_i)$ es también una función continua y dos veces diferenciable. Entonces

$$f_i' > O \quad y \quad f_i'' < O$$

Siendo una función de producción "regular" se tiene:

$$f'_i (O) = \infty \text{ , } \qquad f' (\infty) = O$$

También:

$$F_i^{KK} = \frac{\partial f_i'}{\partial K_i} = f''_i \frac{1}{L_i}$$

Antes de dar la interpretación económica de σ, podemos expresar la elasticidad de sustitución con la nueva notación:

$$\sigma_i^+ = \frac{f'_i\,(f_i - k_i\,f'_i)}{-\,f_i\,L_i\,f''_i\,\dfrac{k_i}{L_i}}$$

es decir,

$$\sigma_i^+ = \frac{-\,f'_i\,(f_i - k_i\,f'_i)}{k_i\,f_i\,f''_i}$$

Definiendo:

$w = p_i\ (f_i - k_i\ f'_i) =$ tasa de salario

$r = p_i\,f'_i =$ precio por la renta del capital

$$q = \frac{w}{r} = \frac{f_i - k_i\ f'_i}{f'_i}$$

Podemos hacer las siguientes interpretaciones económicas de σ:

$$(2.11)\quad \sigma_i = \frac{dy_i/y_i}{dw/w}$$

tal que la elasticidad de sustitución se interpreta como la elasticidad del ingreso per capita con respecto a la tasa de salario.

$$(2.12)\quad \sigma_i = \frac{dk_i/k_i}{dq/q}$$

es decir, la elasticidad de sustitución mide la flexibilidad del cambio porcentual en la intensidad de capital con respecto al cambio relativo del cociente entre la tasa de salario y el precio del capital.

3. OTRAS CONSIDERACIONES

Hay otros aspectos del concepto que nos ocupa que trataremos de presentar brevemente. Ellos hacen alusión a aspectos prácticos u "operacionales" de la elasticidad de sustitución.

a. La primera consideración se refiere a la relación entre σ y la participación de los factores ("factor shares") en el producto. Llamemos

π_i = participación del capital en la industria i.

Analíticamente:

$$(3.1) \quad \pi_i = \frac{r_i K_i}{p_i Y_i} = \frac{p_i f'_i K_i}{P_i Y_i} = \frac{f'_i K_i}{Y_i} =$$

$$= f' \frac{K/L}{Y/L} = \frac{f' k_i}{y_i} = \frac{f' k_i}{f_i}$$

Las relaciones anteriores hacen uso de las definiciones introducidas en la sección 2c.

A los efectos de analizar qué sucede en π ante variaciones en la intensidad de capital, diferenciamos (3.1) con respecto a k:

$$(3.2) \quad \frac{d\pi_i}{dk_i} = \frac{f'_i}{f_i} + \frac{k_i f''_i}{f_i} - \frac{f'_i k_i}{f_i^2} f'_i$$

Sacando como factor común el segundo término del segundo miembro se tiene:

$$\frac{d\pi_i}{dk_i} = \frac{k_i f''_i}{f_i} \left\{ 1 + \frac{f'_i}{f_i} \frac{f_i}{k_i f''_i} - \frac{(f'_i)^2 k_i}{f_i^2} \frac{f_i}{k_i f''_i} \right\}$$

Recordando la expresión (2.10) para la elasticidad de sustitución, puede observarse que ella coincide con lo encerrado entre corchetes salvo por el uno. Consecuentemente, podemos escribir:

$$(3.3) \quad \frac{d\pi_i}{dk_i} = \frac{k_i f''_i}{f_i} \left[\sigma_i - 1 \right] ; \ \sigma_i > O, \ f''_i < O$$

Con este resultado podemos hacer las inferencias aludidas entre la elasticidad de sustitución y el comportamiento de la participación de los factores en el producto. Se distinguen tres situaciones:

$$\text{(i)} \quad \sigma_i = 1 \, , \frac{d\pi_i}{dk_i} = O$$

es decir, la participación del capital no cambia a medida que el capital por hombre varía (o π_i es fijo).

$$\text{(ii)} \quad \sigma_i > 1 \, , \frac{d\pi_i}{dk_i} > O$$

esto es, la participación del capital aumenta ante variaciones en k (o π_i es creciente).

$$\text{(iii)} \quad \sigma_i < 1 , \frac{d\pi_i}{dk_i} < O$$

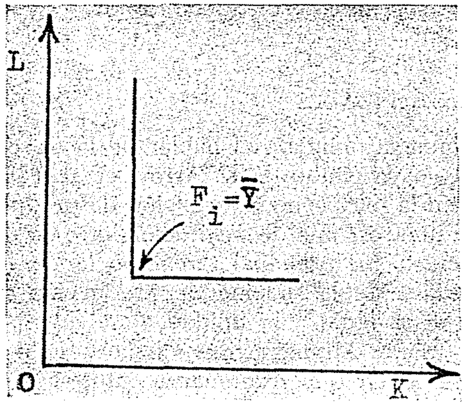
vale decir, la participación del capital disminuye ante variaciones en la intensidad del capital (o π_i es decreciente)[4].

b. A continuación tratamos de visualizar gráficamente los valores extremos que puede asumir la elasticidad de sustitución[5]. Considerando el espacio R^2 y utilizando los factores clásicos, trabajo y capital, podemos graficar dos formas límites de isocuantas (entre las cuales se dan los casos corrientes):

[4] Un análisis puede hacerse considerando la participación de los salarios ("wage-shares"). Queda como ejercicio para el lector interesado.

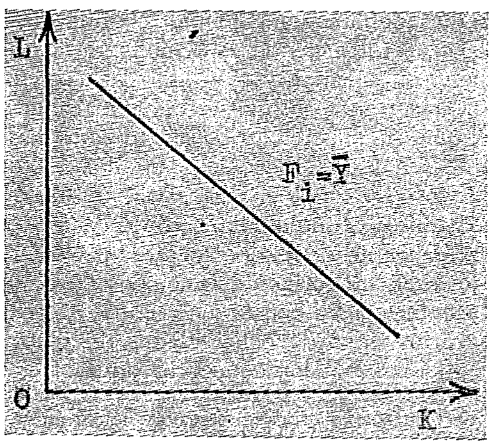
[5] Debe tenerse presente que la elasticidad de sustitución se define "bajo la isocuanta" (esto es, la producción es fija).

(i)



En este caso, la isocuanta es una línea recta tal que $\sigma_i = \infty$ [el denominador de (1.4) es nulo]. Desde el punto de vista del análisis económico hay sustitución perfecta entre los factores productivos.

(ii)



En este caso, la isocuanta es —en verdad— el vértice tal que $\sigma_i = O$ [el numerador de (1.4) se anula]. Teóricamente, se dice que hay perfecta complementariedad entre los factores productivos.

En definitiva, estas consideraciones apuntan a mostrar que el intervalo de variación de σ_i es el siguiente:

$$0 \leqslant \sigma_i < \infty$$

4. OBSERVACIONES FINALES

a. Una referencia obligada al hablar de la elasticidad de sustitución es el trabajo ya citado de K. Arrow et al. (1961), donde los autores elaboraron la muy conocida función de producción CES, que contiene tres parámetros: uno de sustitución, otro de distribución y el tercero de eficiencia. Su principal tarea fue la de hacer un "test" acerca de la validez de la función de producción del tipo Cobb-Douglas, donde σ_i es igual a la unidad.

En síntesis, Solow-Minhas-Arrow-Chenery (SMAC) realizaron un trabajo empírico en que examinaron información de 19 países y 24 industrias (al menos para 6 países). Mediante el análisis de regresión (véase la expresión 8 de su artículo, pág. 229) obtuvieron valores muy similares para σ_i en los diferentes países. De las 24 industrias, los valores de las σ_i presentaron valores menores que la unidad en 23 de ellas. Ello implica que la función de producción Cobb-Douglas no era aplicable, y que era preciso recurrir a una función de producción que tuviera una elasticidad de sustitución constante pero no necesariamente igual a uno[6].

b. Finalmente, debemos mencionar el importante trabajo de Mundlak (1968). Los alcances de esta monografía impiden que nos extendamos mucho en su análisis. Sin embargo, señalaremos sus aspectos salientes. Hasta aquí se hizo referencia primordialmente a la medida más genuina de elasticidad de sustitución: la que representa el cambio proporcional en el cociente de dos factores correspondiente al cambio proporcional en sus TMS, definida en una curva de producto constante. Mundlak ha centrado su exposición en los usos posibles del concepto dentro del análisis económico. Es por ello que partiendo de tres categorías de funciones de demanda derivada (producción constante, costo constante y costo marginal constante), haya generado varios tipos de elasticidades de sustitución, algunos de los cuales coinciden con los conceptos aquí ofrecidos[7]. La exis-

[6] Problemas de tipo econométrico deben consultarse en V. J. Elías (1969) y en Arrow et al. (1961).

[7] Mundlak desarrolla diversas medidas: (i) un factor, un precio; (ii) dos factores, un precio; (iii) dos factores, dos precios; (iv) elasticidades cruzadas de sustitución; (v) elasticidades de corto y largo plazo, elasticidades parciales y totales, y diversas combinaciones de estos conceptos. El lector matemático debe consultar este artículo.

tencia de muchas definiciones lleva implícita un problema de elección que el analista deberá resolver según sea el contexto en el cual σ sea utilizada. Básicamente, Mundlak sugiere, la elección del tipo de función —a partir del cual se obtiene la elasticidad de sustitución— debe realizarse a través del análisis empírico, lo cual involucra también los siempre presentes aspectos de la estimación.

LITERATURA CONSULTADA

1. R. G. D. Allen (1959), *Análisis Matemático para Economistas,* Aguilar. Cap. 13.
2. K. J. Arrow, H. B. Chenery, B. S. Minhas y R. M. Solow (1961), "Capital - Labor Sustitution and Economic Efficiency", *Review of Economic and Statistics,* volumen XLIII, Nº 3, Agosto.
3. Curso de Economía Matemática (1968), Trimestre de Invierno, University of California, Berkeley.
4. L. E. Di Marco, (1969), *Notas de Economía Matemática,* primera versión, Publicación Nº 1, Departamento de Estadística y Matemática, F.C.E., Univ. de Córdoba, Cap. 5, mimeo.
5. V. J. Elías (1969), *Sesgos en la Estimación de la Elasticidad de Sustitución,* Instituto de Investigaciones Económicas, Universidad de Tucumán.
6. J. R. Hicks (1932), *The theory of Wages,* Macmillan, Londres, pp. 117 y 245.
7. A. P. Lerner y F. Kahn (1933), "Notes on the Elasticity of Substitution", *Review of Economic Studies.*
8. Y. Mundlak (1968), "Elasticities of Substitution and the Theory of Derived Demand", *The Review of Economics Studies,* vol. XXXV (2), Nº 102, Abril.