REVISTA DE ECONOMÍA Y ESTADÍSTICA
INSTITUTO DE ECONOMÍA Y FINANZAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
ISSN 0034-8066

ARTÍCULOS

La Teoría de Inventarios Un Instrumento de la Contabilidad Gerencial

José Walter Dörflinger

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 15, No. 1-2-3-4 (1971): 1º, 2º, 3º y 4º Trimestre, pp. 101-127.

http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3680

LA TEORIA DE INVENTARIOS - UN INSTRUMENTO DE LA CONTABILIDAD GERENCIAL

JOSÉ WALTER DÖRFLINGER

1. GENERALIDADES

Se encara en este trabajo uno de los aspectos referidos a la Investigación Operativa que más estrechamente está vinculado a la profesión de contador: el que comprende el conjunto de técnicas que se nuclea bajo el nombre de "Teoría de Inventarios" o "Gestión de Stocks".

Es decir problemas referidos a planificación, producción, formación de stocks. Estos problemas son muy comunes y conocidos donde existen los siguientes factores: inmovilización de capitales, pérdidas sufridas por falta de los materiales requeridos en la producción, transporte de materiales indispensables, etc.

Como toda técnica en progreso, tiene las más diversas interpretaciones y se le atribuyen los más diversos alcances y proyecciones. Es así que un problema de inventarios se refiere a la determinación de quién debe cumplimentar los pedidos, qué materiales deben ser solicitados, dónde y cuándo se deben realizar los pedidos, etc. Otras veces se refiere el problema al conjunto de toda la empresa, controlando los stocks en inventario como un todo. En este caso se tendrán problemas de renovación de stocks, financiación, depreciación, etc. También se le atribuye en otras ocasiones, el estudio sobre qué ítems deben ir al mercado, cuándo, dónde y cuánto, etc.

Los modelos más comunes, llamados "del lote económico", son suficientemente conocidos como para obviar su presentación, por lo que nos abocaremos directamente al tratamiento del modelo que pretendemos desarrollar.

El modelo que será analizado está encuadrado dentro de los llamados estocásticos. Es decir, presenta demanda estocástica y demora en la reposición también probabilística, para lo cual utilizaremos en su solución los procesos de Markov.

Para ello propondremos la posibilidad de utilizar una distribución de Poisson para la función de demanda, con una extensión al caso de aplicación de la distribución normal.

Para el caso de los modelos determinísticos es posible fijar para todo el proceso posterior del sistema, de manera más o menos precisa, cuál será el estado del mismo siempre que conozcamos a qué estado del proceso nos referimos y establezcamos la cantidad a ser ordenada así como los puntos de reordenamiento.

Sin embargo cuando introducimos el tratamiento aleatorio en el sistema, tanto para la demanda como para las demoras en el reaprovisionamiento, ya no es posible seguir efectuando este tipo de predicciones con absoluta certeza y sólo estamos en condiciones de conocer exactamente el estado del sistema una vez que nos proporcionen todos los elementos referentes a la demanda, momento en que se efectuó el pedido o la orden, recepción del embarque, etc. Todo este proceso de proporcionar información al encargado de efectuar la decisión, puede resultar en algunos casos, una de las dificultades mayores en la solución del sistema, y requiere a veces un complicado procesamiento de datos a fin de contar con los elementos básicos de decisión.

Para el tratamiento del sistema cuya solución propondremos, consideraremos que la función que genera el proceso de la demanda no cambia a través del tiempo; esto implica que la tasa promedio no varía.

Es necesario tener presente además que, cuando proponemos la posibilidad de que las demoras sean aleatorias ya no es posible predecir en forma precisa cuál será el inventario disponible en el momento en que se produzca el arribo de una orden.

O sea, hemos transformado de esta forma el inventario disponible en una variable aleatoria.

Llamaremos "nivel de seguridad" a la esperanza matemática del inventario neto en el momento del arribo de las órdenes, y corresponde al concepto que representaremos con la letra s.

El valor de este parámetro puede ser positivo, negativo o cero, según sea el comportamiento de la deficiencia de inventario existente. Sin embargo, si se considera el caso en el cual se pierde la venta por inexistencia del ítem, la variable s tendrá que ser necesariamente no negativa.

Las soluciones a que hemos arribado para este sistema, nos indican en general que este "nivel de seguridad" tiene valores positivos en los costos óptimos.

Quizás la razón de esto sea el que si fuese cero o más aún negativo, debido a la naturaleza aleatoria de la demora en el reaprovisionamiento, se producirían deficiencias en el inventario y consecuentemente el costo debido a estas deficiencias serían muy importantes.

Por cierto que también en este modelo, como en los ya anteriormente tratados, el propósito que perseguimos con la solución del sistema de inventarios, es determinar el valor óptimo para q o sea la cantidad óptima a ser ordenada en cada período de ordenamiento, una vez que el nivel de inventario disponible alcance un cierto tope. En forma simultánea estamos determinando el punto óptimo de ordenamiento.

A partir de estos conceptos básicos podemos considerar que estamos elaborando un sistema del tipo (q, s) donde el inventario máximo vendrá dado simplemente por $s + q = S$ y que evidentemente será el modelo apropiado cuando tomamos en consideración la circunstancia de que las demandas se producen en forma unitaria.

2. NOTACION

La notación que se usará a través del trabajo será la siguiente:

q_i indicará cantidad a ordenar en el instante i

t período de ordenamiento

s nivel de ordenamiento o sea stock mínimo que será admitido antes de realizar un nuevo ordenamiento.

S nivel máximo de inventario

L tiempo de demora del pedido desde el momento de su ordenamiento al instante que se cumple el pedido.

x cantidad demandada en el período t

r es la tasa de demanda en el período, es decir $r = \dfrac{x}{t}$

C_1 costo de almacenamiento

C_2 costo por deficiencias

C_3 costo de reaprovisionamiento

3. PRESENTACION DEL MODELO

Supondremos que el sistema corresponde a una empresa en la cual es posible obtener información permanente sobre las operaciones que realicen en ella.

Trataremos de obtener la cantidad óptima q que deberá ser ordenada y el punto s de reordenamiento para un solo ítem. En el supuesto de que hubiese más de un ítem, supondremos que no existe interacción entre ellos, es decir que pueden ser tratados como variables independientes. Como siempre, esta cantidad y punto de reordenamiento óptimos serán obtenidos mediante la obtención del costo promedio mínimo del sistema.

Haremos además los siguientes supuestos:

a) El costo unitario por ítem es independiente de la cantidad q ordenada.

b) El costo por deficiencias en el inventario es c_2 por unidad y no agregaremos costo adicional por el tiempo que se mantenga la deficiencia.

c) Consideraremos en principio, que no existe más de una orden pendiente. Luego trataremos el caso para el cual existe un número arbitrario de órdenes pendientes. Este supuesto implica que en el instante en que se produzca el reordenamiento no existen órdenes pendientes, de forma tal que el nivel del inventario es igual al inventario neto, o sea inventario disponible menos deficiencias.

d). El costo que supone la obtención de la información permanente del sistema, es independiente de q y de s.

e) El punto de reordenamiento será siempre positivo. Este supuesto nos parece lógico, ya que en la práctica en muy raras ocasiones se espera a que existan deficiencias en el inventario para efectuar el reordenamiento.

Como siempre diremos que el sistema ha cumplido un ciclo toda vez que se hayan producido dos ordenamientos sucesivos. Dada la característica del modelo estocástico planteado, el sistema no se repetirá exactamente en cada ciclo y menos aún en cuanto al largo del mismo. No obstante el sistema será constante en el sentido de que variará entre s y $s + q = S$ para cada uno de los ciclos.

Los términos que intervienen en la determinación del costo promedio del sistema están dados por el costo de ordenamiento, el costo de almacenaje y el costo por deficiencia, siendo innecesario incluir el costo unitario de los ítems debido al supuesto a) del modelo. Por otra parte todas las variables serán consideradas continuas y representaremos por $f(x ; t)$ a la probabilidad de que el número de unidades demandadas en el instante t estén comprendidas entre x y $x+dx$, considerando además que la tasa promedio de demanda es constante e igual a r.

El costo por efectuar un ordenamiento es c_3. Dado que la tasa promedio de demanda es r y las órdenes se producen cada vez que se ordena la cantidad q, el costo promedio será $c_3\, r/q$.

El costo promedio de almacenaje está representado por c_1 multiplicado por el número promedio de ítems mantenidos en almacén. En este caso observamos que de acuerdo a la definición dada más arriba el inventario neto será dado por el inventario disponible menos las órdenes pendientes, o sea que corresponde a la diferencia de dos variables aleatorias. Por lo tanto, la esperanza matemática del inventario neto para cualquier instante en el tiempo, es igual a la esperanza matemática del inventario menos la esperanza matemática de las órdenes pendientes.

Cuando éstas corresponden a deficiencias en los inventarios e implican una pérdida importante en el resultado general de la empresa, entonces se tratará de que si se produce una deficiencia en el sistema, ésta aparezca lo más cercana posible al arribo de un nuevo pedido. Es por ello que consideramos muy poco relevante el aporte al costo de almacenaje agregado por las deficiencias en el sistema y consecuentemente para nuestro modelo, a los efectos del cálculo del promedio de costo por almacenaje, el inventario neto será igual al inventario disponible.

Por definición, el inventario neto en el instante en que se produzca el arribo del pedido es igual al "nivel de seguridad" que representamos por s, e inmediatamente después de incorporado al inventario el pedido, será $s + q$. Este será el inventario disponible cuando consideramos que la esperanza de los pedidos pendientes por deficiencias en el inventario son despreciables. Dado que la tasa de demanda se considera constante, el promedio de inventario disponible en un ciclo, decrecerá linealmente desde $q + s$ hasta s y por lo tanto el promedio general en el ciclo será

$$\frac{1}{2}\,(q+s) + \frac{1}{2}\,s = q/2 + s$$

En vista que el punto de reordenamiento del sistema es s, y dado que de acuerdo a los supuestos planteados para nuestro modelo, no se produce ningún aprovisionamiento entre el momento en que se efectúa el ordenamiento y el instante en que se efectiviza la orden y si la orden demora un tiempo L en arribar, siendo x las unidades demandadas en ese período, entonces el inventario neto $g\,(x, s)$ será

$$g\,(x,s) = s - x$$

en el instante en que se produce el arribo de la orden, y la esperanza matemática del mismo será:

$$(1) \qquad \int_0^{\infty} g\,(x,s)\; f\,(x;L)\; dx = \int_0^{\infty} (s-x)\; f\,(x;L)\; dx$$

Para el caso en que las demoras son constantes, la fórmula (1) corresponde al inventario que mantendremos al "nivel de seguridad".

Pero suponiendo que las demoras son variables aleatorias, de forma tal que sea h(L) dL la probabilidad de que el tiempo de demora esté ubicado entre L y L+dL tendremos, que la esperanza matemática de g(x, s) es

$$(2) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty g(x,s)\ f(x;L)\,h(L)\ dx\,dL = \int_0^\infty (s-x)\ k(x)\ dx$$

donde

$$k(x) = \int_0^\infty f(x;L)\ h(L)\ dL$$

es la distribución marginal de la función correspondiente a las demoras aleatorias.

Considerando estos resultados obtendremos

$$\int_0^\infty (s-x)\ k(x)\ dx = s - \mu$$

donde μ será la media de las demandas producidas en el período de demora, siendo

$$\mu = \int_0^\infty x\ k(x)\ dx$$

Por lo tanto el costo promedio de almacenaje será

$$(3) \qquad c_1 \left[\frac{q}{2} + s - \mu \right]$$

Nos resta calcular el costo promedio de las deficiencias para lo cual supondremos que el número promedio de deficiencias en el inventario durante el período total considerado es igual al número promedio de deficiencias de un ciclo por el número de ciclos del período, o sea r/q veces el promedio de deficiencias del ciclo.

Ahora bien, el número promedio de deficiencias incurridas en un ciclo que representaremos por $\xi(x, s)$ serán simplemente las deficiencias observadas hasta el momento en que se produzca el arribo del pedido.

Por lo tanto

$$\xi(x, s) = \begin{cases} 0 & \text{si } x - s < 0 \\ x - s & \text{si } x - s \geqslant 0 \end{cases}$$

de donde el número promedio de deficiencias en el período será

$$(4) \qquad \xi(s) = \int_0^\infty \xi(x, s)\, k(x)\, dx = \int_0^\infty (x - s)\, k(x)\, dx =$$

$$= \int_s^\infty x\, k(x)\, dx - s\, K(s)$$

donde $k(x)$ es la densidad marginal de la demanda producida en el período de demora y $K(s)$ es la función de acumulación complementaria de $k(x)$.

En consecuencia, el costo promedio por período de las deficiencias es

$$(5) \qquad c_2\, r/q \left[\int_s^\infty x\, k(x)\, dx - s\, K(s) \right]$$

Contamos así con los costos promedios de cada uno de los conceptos que hemos incorporado en nuestro modelo, por lo que el costo promedio total será:

$$(6) \qquad C(q, s) = c_3\, r/q + c_1 \left[q/2 + s - \mu \right] +$$

$$+ c_2\, r/q \left[\int_s^\infty x\, k(x)\, dx - s\, K(s) \right]$$

Tendremos que obtener como siempre el valor de q y s que minimicen el valor de $C(q, s)$ en (6).

Si los valores óptimos de q_0 y s_0 satisfacen las soluciones $0 < q_0 < \infty$, $0 < s_0 < \infty$, entonces q_0 y s_0 deben satisfacer las ecuaciones

$$\frac{\partial C(q,s)}{\partial q} = 0 = -c_3 r/q^2 + \frac{c_1}{2} - c_2 r/q^2 \left[\int_s^\infty x\,k(x)\,dx - s\,K(s) \right]$$

$$\frac{\partial C(q,s)}{\partial s} = 0 = c_1 + c_2 r/q \left[-s\,k(s) + s\,k(s) - K(s) \right]$$

Despejando convenientemente tendremos

$$q = \sqrt{\frac{2r \left[c_3 + c_2 \left(\int_s^\infty x\,k(x)\,dx - s\,K(s) \right] \right.}{c_1}}$$

$$K(s) = \frac{c_1 q}{c_2 r}$$

Si suponemos que $k(s)$ se distribuye normalmente con media μ y error standard σ, o sea $x \sim n(\mu, \sigma)$, entonces

$$\int_s^\infty x\,k(x)\,dx = \int_s^\infty x \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-1/2 \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} dx$$

Haciendo cambio de variable de la forma $v = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ de donde $x = \mu + v\sigma$ y $dx = \sigma\,dv$ tendremos

$$\int_{\frac{s-\mu}{\sigma}}^\infty (\mu + v\sigma) \cdot \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-1/2 v^2} \sigma\,dv =$$

$$= \mu \int_{\frac{s-\mu}{\sigma}}^\infty \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-1/2 v^2} dv + \sigma \int_{\frac{s-\mu}{\sigma}}^\infty \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} v\,e^{-1/2 v^2} dv$$

$$= \mu \varnothing \left(\frac{s - \mu}{\sigma} \right) + \sigma \varphi \left(\frac{s - \mu}{\sigma} \right)$$

donde por $\varnothing \left(\frac{s - \mu}{\sigma} \right)$ representamos a la función de acumulación complementaria $1 - F \left(\frac{s - \mu}{\sigma} \right)$. Por lo tanto será también $K(s) = \varnothing \left(\frac{s - \mu}{\sigma} \right)$.

En consecuencia

$$(7) \qquad C(q, s) = c_3 r/q + c_1 \left[q/2 + s - \mu \right] +$$

$$+ c_2 r/q \left[(\mu - s) \varnothing \left(\frac{s - \mu}{\sigma} \right) + \sigma \varphi \left(\frac{s - \mu}{\sigma} \right) \right]$$

De esta forma, y mediante la ayuda de una tabla de la distribución normal es fácil calcular el valor de C siempre que contemos con los óptimos para q y para s.

4. CONSIDERACIONES SOBRE LA DETERMINACION DE VALORES PROMEDIOS DEL MODELO

De acuerdo al método utilizado a través de todo el trabajo, el criterio que se seguirá para la obtención de los óptimos para s y q, será la de tratar de *minimizar* el costo promedio anual, donde este costo se define como el límite del costo promedio para un período de tamaño T, cuando $T \longrightarrow \infty$.

Supongamos que elegimos valores arbitrarios para q y s, comenzando con los mismos el desarrollo del modelo; luego de un cierto tiempo, observamos en un punto el estado del sistema. Consideramos que transcurrido un período t, el sistema ha cumplido un ciclo y quizás parte de otro. Es indistinto fijar como origen de un ciclo el instante en que se realiza el pedido o al momento de la recepción de una orden.

Por otra parte en este acápite y a los efectos de un mejor desarrollo, fijaremos la idea en el sentido de que el proceso generador de la demanda y las demoras no cambian con el tiempo.

Sea t_i la extensión del ciclo i, t_{1i} la parte del ciclo i durante la cual existe stock en inventario y t_{2i} la parte durante la cual el ciclo i se encuentra con deficiencias; por lo tanto $t_{1i} + t_{2i} = t_i$.

Por otra parte, sea η_i el número anual de unidades de inventario mantenidas durante el ciclo i; ξ_i el número anual de unidades en deficiencia durante el ciclo i y sea δ_i el número de reordenamientos del ciclo i.

El número de órdenes efectuadas en el período de extensión T es $n + \varepsilon$, donde ε será igual a cero o uno, dependiendo de que se produzca o no una orden en la fracción de ciclo que podría ser considerada para T.

El número promedio de órdenes por año efectuadas durante el período T será $\dfrac{n+\varepsilon}{T}$. Cuando $T \longrightarrow \infty$, también $n \longrightarrow \infty$, y el número promedio de órdenes por año tiende al siguiente límite:

$$(8) \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{n}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{nq}{qT} = \frac{1}{q} \lim_{T\to\infty} \frac{nq}{T} = \frac{r}{q}$$

En primer lugar observamos que $\varepsilon \longrightarrow 0$ cuando $T \longrightarrow \infty$ y entonces nq tiende a ser la demanda total durante el período T, por lo que la tasa promedio de demanda r será

$$\lim_{T\to\infty} \frac{nq}{T} = r$$

Por lo tanto tendremos que la fórmula (8) nos representa el número promedio de órdenes por año que se efectúa en el sistema.

La parte del tiempo en que el sistema se encuentra con deficiencias lo denotaremos por P_d y será

$$(9) \qquad P_d = \lim_{T\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{2i}}{T}$$

Podríamos considerar a este valor como la probabilidad de que el sistema se encuentre con deficiencias para el caso de efectuar una observación en un punto aleatorio del tiempo.

Por otra parte el número promedio de unidades mantenidas en almacenaje durante el año será

$$(10) \qquad A = \lim_{T\to\infty} \frac{\sum_{i=1} \eta_i}{T} = \frac{\hat{\eta} r}{q}$$

donde $\hat{\eta}$ corresponde al número promedio de unidades anuales de stock, necesarias en cada ciclo. Este número A es la esperanza matemática del inventario disponible en cualquier instante.

Por otra parte tendremos

$$(11) \qquad R = \lim_{T\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} i}{T}$$

que será el número de reordenamiento en cualquier instante.

Por último denotaremos por D a la esperanza matemática del número de deficiencias que se produzcan y será

$$(12) \qquad D = \lim_{T\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{T} = P_d \,.\, r$$

El primer límite es igual a P_d de acuerdo a (9) y el segundo límite es igual a la tasa promedio de demanda ya que $\sum \xi_i$ es el número total de unidades demandadas durante el período $\sum t_{2i}$; el cociente de estas dos cantidades cuando $T\to\infty$ corresponde a la definición de r.

Los valores de A, R, D y P_d dependen de la naturaleza del proceso estocástico que genera las demandas y las demoras. Además dichos valores pueden ser computados, calculando primeramente la correspondiente esperanza matemática por ciclo y luego multiplicándola por r/q. Las correspondientes esperanzas se calculan mediante la información, obtenida para cada ciclo, referente a la demanda y las demoras.

Sin embargo, si es posible determinar la probabilidad $\Psi(x)$ de que el inventario neto sea x en cada estado estacionario entonces los valores de las esperanzas matemáticas pueden ser computados directamente. En ese caso serán

$$A = \sum_{x=0}^{x\,max} x\,\Psi(x) \tag{13}$$

$$R = -\sum_{x=-\infty}^{-1} x\,\Psi(x)$$

$$P_d = \sum_{x=-\infty}^{0} \Psi(x)$$

Las interpretaciones que se pueden dar a la probabilidad $\Psi(x)$ en un estado estacionario son las siguientes:

a) Es la probabilidad de que la posición del inventario sea x, si observamos al sistema en un punto aleatorio del tiempo.

b) Es la fracción de tiempo, en un período suficientemente largo, para el cual el inventario neto sea x.

c) Es el límite, para $N \to \infty$, de la fracción de un conjunto de N sistemas en equilibrio estadístico, que tienen la posición de inventario x en cada instante del tiempo.

5. PLANTEAMIENTO DEL MODELO PARA DEMANDAS CON DISTRIBUCION DE POISSON Y REAPROVISIONAMIENTO CONSTANTE

Determinaremos ahora la expresión correspondiente al costo anual promedio para un modelo que presenta un proceso de Poisson para generar las demandas, los ítems son demandados unitariamente, la tasa promedio de demanda es r y el período de aprovisionamiento es L.

A fin de poder tratar a la demanda como una variable discreta, consideraremos también como discretas a la cantidad a ordenar q, el punto de ordenamiento s y todos los niveles de inventario.

Como ya se ha dicho anteriormente, si s es el punto de ordenamiento en términos de la posición del inventario, entonces la posición que el mismo adopta inmediatamente después de efectuada una orden es $s+q$. Por lo tanto la posición del inventario será alguno de los siguientes valores: $s+1$, $s+2$, ..., $s+q$. El inventario nunca estará en una posición s por un período finito de tiempo, ya que no bien el inventario alcanza ese nivel debido a una cierta demanda, se efectúa una orden llevando el estado a la posición $s+q$. Si la posición es $s+j$, puede suceder: que no existan órdenes sin cumplimentar en cuyo caso el inventario neto sería $s+j$; una orden sin cumplimentar, en cuyo caso sería $s+j-q$; etc.

Para un proceso de Poisson, donde tendremos que existe una probabilidad positiva para el caso de que sea demandada una cantidad muy grande de ítems en un período de tiempo, es posible, al menos teóricamente, tener cualquier número de órdenes pendientes en un momento particular. El valor de esta probabilidad es pequeño. Para el caso en el cual existe un límite superior finito para la cantidad que puede ser demandada en cada período, no podrá haber más órdenes pendientes que las necesarias para totalizar la demanda producida en el período de demora.

Por otra parte, las especificaciones referentes al inventario neto, determinan únicamente el número de órdenes pendientes y la posición del inventario, dado que si x es el inventario neto, y n son las órdenes pendientes, entonces la posición del mismo será $x+nq$, que puede ser denotado por $s+j$, $j=1, \ldots, q$. El valor de n será el mayor entero no negativo que cumple con $s < x + np < s + q$.

En consecuencia, estipularemos que la probabilidad de que exista más de una orden pendiente, tiene un valor muy pequeño.

De acuerdo a lo establecido en las fórmulas (13), necesitamos conocer las probabilidades de los estados del inventario neto.

El problema que se plantea para la resolución de este sistema es que las demoras son constantes y no son generadas por un proceso de Poisson. Por ello, comenzaremos por encontrar las probabilidades de los estados $(s+j)$, de que la posición del sistema sea $s+j$, para $j=1, \ldots, q$. El conocimiento de esta situación permite la determinación de las probabilidades de los estados para el inventario neto. Como vemos aquí no interviene la naturaleza de los períodos de demora.

En un intervalo dt, si se produce una demanda, la posición del inventario se traslada desde el estado $s+j$ al $s+j-1$, para $j \geqslant 2$. Esto ocurre si un proceso de Poisson genera las demandas y los ítems son demandados unitariamente con probabilidad $r \,.\, dt$.

Si el sistema se encuentra en el estado $s + 1$ y ocurre una demanda, el sistema se traslada al estado $s + q$ dado que esta última demanda oficia de productor de una orden.

Tendremos entonces que las ecuaciones de balance para este caso particular serán:

$$\begin{aligned}
&(14) \qquad r\,\rho\,(s+j+1) = r\,\rho\,(s+j), \qquad \text{para } j=1, \ldots, q-1 \\
&\qquad\qquad r\,\rho\,(s+q) = r\,\rho\,(s+1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\rho\,(s+q) = \rho\,(s+q-1) = \ldots\ldots = \rho\,(s+1)$$

y dado que $\sum_{j=1}^{q} \rho\,(s+j) = 1$, se concluye que la solución única para $\rho\,(s+j)$ será

$$(15) \qquad \rho\,(s+j) = \frac{1}{q} \text{ para } j=1, \ldots, q$$

Es decir que para un estado estacionario, cada uno de los estados $(s+j)$ correspondientes a las posiciones del inventario tienen probabilidad $1/q$, siendo independientes de j. Estamos entonces en presencia de una distribución uniforme para $\rho\,(s+j)$.

A los efectos de calcular las probabilidades de los estados para los inventarios disponibles o las deficiencias, consideramos al sistema ubicado en un instante cualquiera t. Si L es el tiempo de demora del abastecimiento, tendremos también fijado el instante t–L. Por lo tanto, toda orden despachada hasta el momento t–L habrá arribado al almacén al instante t y las órdenes que se hayan despachado con posterioridad al instante t–L no podrán arribar al almacén hasta después del momento t.

Si la posición del inventario era $s+j$ en el instante $t-L$, la probabilidad de que en el instante t haya x unidades disponibles, es igual a la probabilidad de que se hayan demorado $s+j-x$ unidades durante el tiempo de demora L; siempre que sea $s+j-x \geqslant 0$; la probabilidad será cero para todo otro valor.

De acuerdo a nuestro supuesto, referente a demandas generadas por un proceso de Poisson, la probabilidad de contar con x unidades en el instante t será entonces

$$p\,(s+j-x;\, rL) \qquad \text{para } s+j-x \geqslant 0$$

donde rL corresponde a la tasa media de demanda en el período de demora, siendo en consecuencia una constante de acuerdo a las hipótesis planteadas para el modelo.

Por otra parte, conforme con (15), la probabilidad de que la posición del inventario sea $(s+j)$ en el instante $(t-L)$, es $1/q$.

Representando con $\Psi_1(x)$ la probabilidad del estado para el cual existen x unidades disponibles en el instante t, tendremos

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} p\,(s+j-x;\, rL)$$

Haciendo $\mu = s + j - x$, los límites del sumatorio serán: para $j = 1$, $\mu = s + 1 - x$; para $j = q$, $\mu = s + q - x$

Por lo tanto,

$$(16) \quad \Psi_1(x) = \frac{1}{q} \left[\overline{P}\,(s+1-x;rL) - \overline{P}\,(s+q+1-x;rL) \right] ; 0 \leqslant x \leqslant s+1$$

Por otra parte para $s+1 \leqslant x \leqslant s+q$ tendremos

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{q} \sum_{j=x-s}^{q} P(s+j-x\,;rL)$$

Haciendo $\mu=s+j-x$, los límites serán:

para $j=x-s$, $\mu=0$; para $j=q$, $\mu=s+q-x$

Por lo tanto

$$(17) \quad \Psi_1(x) = \frac{1}{q}\left[1-\overline{P}(s+q+1-x\,;rL)\right] \quad ;s+1 \leqslant x \leqslant s+q$$

Con estos resultados estamos en condiciones de calcular la esperanza matemática del inventario disponible en cualquier instante. De acuerdo con (13) tendremos que

$$A(s,q) = \sum_{x=0}^{s+q} x\,\Psi_1(x)$$

de donde aplicando las fórmulas (16) y (17) será

$$(18) \quad A(s,q) = \frac{1}{q}\left\{\sum_{x=s+1}^{s+q} x + \sum_{x=0}^{s} x\,\overline{P}(s+1-x\,;rL) - \right.$$

$$\left. - \sum_{x=0}^{s+q} x\,\overline{P}(s+q+1-x\,;rL)\right\} =$$

$$= s + \frac{q+1}{2} - rL + \frac{1}{q}\left\{\sum_{\mu=s+1}^{\infty} (\mu-s-1)\,\overline{P}(\mu;rL) - \right.$$

$$\left. - \sum_{\mu=s+q+1}^{\infty} (\mu-s-q-1)\,\overline{P}(\mu;rL)\right\}$$

A fin de calcular las esperanzas matemáticas de los restantes elementos que conforman el costo; es necesario calcular la probabilidad del estado $\Psi_2(y)$ de que existan y deficiencias en el instante t.

O sea, si el sistema se encuentra en el estado $s+j$ en el instante $t-L$, la probabilidad de que existan y deficiencias en el momento t es $p(y+s+j\,;rL)\,;\,y\geqslant 0$.

Por lo tanto, utilizando los conceptos planteados para $\Psi_1(x)$ tendremos

$$(19)\qquad \Psi_2(y) = \frac{1}{q}\left[\bar{P}(y+s+1\,;rL) - \bar{P}(y+s+q+1\,;rL)\right];\ y\geqslant 0$$

Con esta probabilidad podemos calcular el valor de P_d, o sea la probabilidad de que no exista inventario disponible en el instante t, que de acuerdo con (13) es igual a

$$P_d = \sum_{y=0}^{\infty} \Psi(y)$$

Por lo tanto tendremos:

$$(20)\qquad P_d = \frac{1}{q}\left\{\left[rL\,\bar{P}(s\,;rL) - s\bar{P}(s+1\,;rL)\right] - \right.$$

$$\left. - \left[rL\,\bar{P}(s+q\,;rL) - (s+q)\,\bar{P}(s+q+1\,;rL)\right]\right\}$$

Por otra parte, de acuerdo con (12) tenemos que

$$D(s\,;q) = P_d\,.\,\bar{r}$$

de donde

$$(21)\qquad D(s\,;q) = \frac{r}{q}\left\{\left[rL\,\bar{P}(s\,;rL) - s\bar{P}(s+1\,;rL)\right] - \right.$$

$$\left. - \left[rL\,\bar{P}(s+q\,;rL) - (s+q)\,\bar{P}(s+q+1\,;rL)\right]\right\}$$

Por último tenemos que calcular el valor de $R(s\,;q)$ o sea la esperanza matemática de los reordenamientos en cualquier instante t.

De acuerdo a la fórmula dada en (13) tendremos que

$$R(s, q) = \sum_{y=0}^{\infty} y \, \Psi_2(y)$$

de donde, aplicando la fórmula (19) será

$$(22) \quad R(s; q) = \frac{1}{q} \left[\sum_{y=0}^{\infty} y \, \bar{P}(y+s+1; rL) - \sum_{y=0}^{\infty} y \, \bar{P}(y+s+q+1; rL) \right] =$$

$$= \frac{1}{q} \left\{ \left[\frac{(rL)^2}{2} \bar{P}(s-1; rL) - (rL) \, s \bar{P}(s; rL) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{s(s+1)}{2} \bar{P}(s+1; rL) \right] -$$

$$- \left[\frac{(rL)^2}{2} \bar{P}(s+q-1; rL) - rL \, (s+q) \, \bar{P}(s+q; rL) + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(s+q) \quad (s+q+1)}{2} \bar{P}(s+q+1; rL) \right] \right\}$$

Tendremos entonces:

$$C(s, q) = c_3 \frac{r}{q} + c_1 \left[s + \frac{q+1}{2} - rL + R(s, q) \right] +$$

$$+ c_2 \left[D(s, q) + R(s, q) \right]$$

El modelo resultante es bastante complejo y por cierto no es sencillo obtener los valores óptimos para s y para q, ya que tanto D como R dependen de estos parámetros conforme a una ecuación complicada.

Sin embargo, mediante la programación de un computador es posible la obtención de una rutina que nos permita obtener resultados óptimos tanto para s como para q.

No obstante, si consideramos que la influencia en el resultado general del costo por parte de los términos que contienen a la función $R(s, q)$ es despreciable, se estaría en condiciones de resolver el sistema en forma mucho más fácil. Consideramos que este supuesto puede ser factible en la práctica.

6. INTRODUCCION DE LA APROXIMACION NORMAL EN EL MODELO

Como dijimos al principio de este trabajo, si consideramos un período largo durante el cual analizamos el comportamiento de la demanda, es posible utilizar la aproximación a la normal de la distribución de Poisson. En este caso, es necesario considerar a s y q como variables continuas y tendremos que si $rL \to \infty$, la $p(x; rL)$ tiende a una distribución normal con $\mu = rL$ y $\sigma^2 = rL$.

En este modelo seguimos con la hipótesis de mantener constantes las demoras.

Tendremos entonces que, la posición del inventario podrá ahora adoptar cualquier valor entre s y $s+q$ y no sólo los valores $s+1$,...., $s+q$, como en el caso tratado en el acápite anterior.

La probabilidad de que el inventario esté ubicado entre x y $x+dx$, donde $s \leqslant x \leqslant s+q$ es simplemente $\frac{dx}{q}$, ya que hemos visto en (5) que $\rho(s+j)$, la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado $s+j$, era $1/q$.

Tendremos entonces que

$$\int_{s}^{s+q} \frac{dx}{q} = \frac{x}{q}\Bigg|_{s}^{s+q} = \left[\frac{s+q}{q} - \frac{s}{q}\right] = \frac{s+q-s}{q} = 1$$

La distribución correspondiente a la probabilidad de que sean demandadas x unidades durante el período de demora, será en este modelo.

$$\eta(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma}\,\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

donde μ representa la media de las demandas durante el período de demora.

Por otra parte, la aproximación a la normal de la Poisson nos permite considerar que

$$\phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = 1$$

Entonces

$$(23) \qquad P_d = \frac{1}{q}\left\{\left[\sigma\varphi\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)-(s-\mu)\phi\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\sigma\varphi\left(\frac{s+q-\mu}{\sigma}\right)-(s+q-\mu)\,\phi\left(\frac{s+q-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}$$

Por lo tanto, el promedio de deficiencias en el año será:

$$(24) \quad D(s,q) = rP_d = \frac{r}{q}\left\{\left[\sigma\varphi\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)-(s-\mu)\,\phi\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\sigma\varphi\left(\frac{s+q-\mu}{\sigma}\right)-(s+q-\mu)\,\phi\left(\frac{s+q-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}$$

Además el número promedio de reordenamientos para cualquier momento es

$$(25) \qquad R(s,q) = \int_0^\infty y\,\Psi_2(y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{q}\left\{\left(\frac{1}{2}\left[\sigma^2-(s-\mu)^2\right]\phi\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)\frac{\sigma}{2}(s-\mu)\,\varphi\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\left[\sigma^2+(s+q-\mu)^2\right]\phi\left(\frac{s+q-\mu}{\sigma}\right)-\frac{\sigma}{2}(s+q-\mu)\,\varphi\left(\frac{s+q-\mu}{\sigma}\right)\right\}\right.$$

Nos resta calcular la esperanza matemática del inventario disponible o en almacén que será

$$(26) \qquad A(s,q) = \int_0^{s+q} x\,\Psi_1(x)\,dx =$$

$$= s + q/2 - \mu + R(s,q)$$

Contamos con todos los elementos necesarios para calcular el costo total por lo que el mismo será:

$$(27) \qquad C(s,q) = c_3 \frac{r}{q} + c_1 \left[s + \frac{q}{2} - \mu + R(s,q) \right] +$$

$$+ c_2 \left[D(s,q) + R(s,q) \right]$$

Como para el caso del acápite anterior tendremos que solucionar el modelo mediante la rutina de un computador.

7. CONSIDERACIONES SOBRE MODELOS CON DEMORAS ESTOCASTICAS

En esta sección analizaremos algunos aspectos referidos a la incorporación de demoras estocásticas en el sistema de inventarios.

Mientras se mantenga vigente la hipótesis que establece la posibilidad de que se encuentre pendiente una sola orden en cada ciclo, no existen mayores problemas en resolver el sistema. Si consideramos que la demora se comporta de acuerdo con una función de densidad $h(L)$, para obtener el costo óptimo de un modelo, es suficiente con obtener el costo promedio para un valor dado de L. O sea, si $C(s,q,L)$ es el costo promedio anual para un valor dado de L, el costo promedio con respecto a la demora es

$$C(s,q) = \int_0^{\infty} C(s,q,L)\,h(L)\,dL$$

Esta última expresión es la que deberá ser minimizada.

Sin embargo, para el modelo que presentamos en (5), es decir, donde la demanda se distribuye como una Poisson, tomándose además en consideración los reordenamientos, no siempre es posible considerar como válido el supuesto de que sólo se encuentra pendiente una orden en cada ciclo. En consecuencia, para todo intervalo t, donde $t>0$, existe la probabilidad de que se produzca un número grande de demandas y por ende que se efectúe más de una orden en dicho intervalo. Por lo tanto, existirá un valor mayor a cero para la probabilidad de que se encuentren pendientes un número cualquiera de órdenes.

En el supuesto de que existan pendientes más de una orden, se pueden presentar dos casos:

a) Considerar a las demoras como variables aleatorias independientes, es decir que, la demora correspondiente a una orden en particular es independiente de todas las otras demoras correspondientes a órdenes aún pendientes.

En este caso es posible que se produzcan entrecruzamientos en la recepción de las órdenes, o sea que no es necesario recibirlas en el mismo orden en que fueron despachadas. En consecuencia, existe la posibilidad de que la orden 2 llegue al almacén antes que la orden 1, y esto se mide mediante una distribución probabilística.

b) Considerar a las demoras como variables dependientes, o sea que no se pueden producir entrecruzamientos entre las órdenes, dado que las mismas son cumplidas en el estricto orden de pedidos, por lo cual cada orden depende del instante en que fueron despachadas las demás.

Evidentemente, este último caso es de tratamiento muy difícil y requeriría un modelo bastante más complicado del que hemos presentado hasta aquí. Sin embargo para el caso en el cual estamos considerando que las demoras son variables independientes, y las demandas se comportan como una Poisson, siendo que además no existen entrecruzamientos en la recepción de las órdenes, es posible plantear la siguiente función para la probabilidad de que se disponga de x unidades en el estado t:

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{q} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{q} p(s+j-x\,;rL)\ h(L)\ dL = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} k(s+j-x)$$

donde $k(s+j-x)$ es la distribución marginal de las demandas durante el período de demora. En este caso debemos reemplazar $p(x;rL)$ por $h(x)$ y resolver las ecuaciones.

El problema en este caso, es que se supone que las órdenes son independientes pero que no existen entrecruzamientos entre las órdenes.

Cuando el modelo tratado incluye la posibilidad de que la demanda se comporte como una normal entonces podríamos considerar que la distribución marginal de las demoras también se distribuyen normalmente.

8. CONCLUSIONES

Con las fórmulas (6) y (7) —págs. 108 y 110— hemos obtenido la solución de un modelo con demanda probabilística, en el cual no incorporamos ningún supuesto con respecto a la probabilidad de los estados estacionarios. Este resultado nos permite la solución de sistemas sencillos donde las demoras en el reaprovisionamiento no tienen mayor influencia.

Notemos que para estos modelos, el óptimo para q nunca puede ser menor que el calculado mediante la fórmula del lote económico. Esto se debe a que el promedio o mejor dicho la esperanza matemática de las deficiencias para cada ciclo, depende de s pero es independiente de q.

Sin embargo, el costo promedio anual de las deficiencias es proporcional a $1/q$. Por ello tenemos que para un valor fijo de s, cuando $c_2 > 0$, se tratará siempre de aumentar un poco el valor de q, a fin de evitar las pérdidas producidas por las deficiencias en el inventario. Evidentemente que este valor de q no podrá incrementarse indefinidamente ya que a partir de un cierto punto, la ganancia debida a la eliminación de deficiencias es inferior al costo de mantenimiento del stock.

La solución de este modelo es posible mediante la aplicación de un procedimiento iterativo para lo cual partimos de un valor particular del modelo que puede ser por ejemplo el resultado para el sistema en el supuesto de la aplicación de la fórmula del lote económico. Con este valor calculamos s utilizando la fórmula de K(s); este resultado de s lo volcamos en la fórmula para q y obtenemos su nuevo valor, el cual es utilizado para el cálculo de s y así sucesivamente. Esta rutina debe utilizarse hasta obtener para q y s una aproximación conveniente.

Si existe un mínimo, el mismo podrá ser obtenido mediante este proceso iterativo ya que el modelo es convexo (lo que asegura un mínimo absoluto).

Una vez solucionado este caso sencillo planteamos el modelo en el cual introducimos la hipótesis de que las demandas son generadas por una distribución de Poisson mediante un proceso de Markov que es discreto para los estados y continuo en cuanto al tiempo. Para ello computamos la probabilidad de un estado que de acuerdo a la fórmula (15) —pág. 115— corresponde a una distribución uniforme, lo cual por cierto no implica que si utilizamos un proceso de Poisson para el análisis de las demoras el resultado de la probabilidad de un estado será distinta al obtenido en nuestro caso particular. No obstante creemos que el supuesto planteado se adapta a la realidad dado que los procesos de la demanda pueden considerarse generados en forma constante a través del tiempo, sobre todo en el supuesto de demoras constantes.

No se nos escapa el hecho que el modelo presentado puede ser objeto de distintos supuestos alternativos que llevarían también a soluciones alternativas, pero es evidente que en este caso el cálculo de los óptimos se harían así más complicados.

Para nuestro modelo es necesario obtener un programa que permita contar con una rutina para la obtención de los óptimos. No obstante resulta conveniente poner de manifiesto a esta altura que no hemos hallado una solución matemática para demostrar que exista un mínimo relativo que sea absoluto para el modelo, ya que el mismo no es convexo, por lo cual la rutina del computador puede proveer un mínimo pero no es posible asegurar que el mismo corresponde a un mínimo absoluto.

La extensión que hicimos para el caso de demandas con distribución normal, nos lleva a un modelo cuya solución es semejante al caso anterior y por cierto podemos utilizar la misma rutina para obtener los óptimos para q y s.

Ahora bien, si el sistema es poco sensible al costo por deficiencias, o sea si c_2 puede hacerse igual a cero sin que afecte fundamentalmente los resultados del modelo, entonces

$$\varphi\left(\frac{s+q-\mu}{\sigma}\right) - (s+q-\mu)\,\phi\left(\frac{s+q-\mu}{\sigma}\right)$$

es poco significativo, siendo además despreciable el aporte al modelo de R(s,q). Esto nos demuestra que este último modelo es aplicable cuando los supuestos utilizados en 6 son extendidos al sistema para el cual pueden existir cualquier número de órdenes pendientes, es decir no necesariamente restringido al caso de una orden pendiente de acuerdo a la hipótesis de partida.

BIBLIOGRAFIA

a) *Textos.*

1. Arrow, K. J., Karlin, S. and Scarff, H.: *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production.* Stanford University Press, 1958.
2. Hadley, G. and Whitin, T. M.: *Analysis of Inventory Systems.* Prentice Hall. Inc., 1963.
3. Hansmann, Fred: *Operations Research in Production and Inventory Control.* John Wiley and Sons. Inc., 1962.
4. Holt, Charles. Modigliani, Franco; Muth, John F. y Simon Herbert A,: *Planeamiento de la Producción, Inventarios y Mano de Obra.* Ed. Herrero Hermanos Sucesores S. A., 1963.
5. Plossl, G. W. and Wight, O. W.: *Production and Inventory Control Principles and Techniques.* Prentice Hall, Inc. 1967.
6. Sasieni, Maurice; Yaspan, Arthur and Friedman, Lawrence: *Operations Research, Methods and Problems.* John Wiley and Sons, Inc., 1959.

7. STARR, Martin K., MILLER, David M.: *Inventory Control. Theory and Practice.* Prentice Hall, Inc., 1962.
8. TEICHROEW, Daniel: *An Introduction to Management Science. Deterministic Models.* John Wiley and Sons Inc., 1964.

b) *Artículos Especializados.*

1. ACKOFF, Russell L.: "Some new Statistical Techniques Applicable to Operation Research". *Journal of the Operation Research Society of America.* Vol. 1 Nº 1, Nov. 1952, pág. 10.
2. WHITIN, T. M.: "Erich Schneider's Inventory Control Analysis". O. R. Vol. 2 Nº 3, agosto, 1964, pág. 309.
3. VASSIAN, Herbert J.: "Application of Discrete Variable Servo Theory to Inventory Control". O. R. Vol. 3 Nº 3, agosto 1965, pág. 272.
4. LUCHAK, George: "Solution of the Single-Chanel Queing Equations Characterized by a Time - Dependent Poisson-Distributed. Arrival Rate and a General Class of Holding Times". O. R. Vol. 4 Nº 6, diciembre, 1956.
5. HARLING, John: "Simulations Techniques in Operations Research. A Review". O. R. Vol. 6 Nº 3, mayo-junio, 1958, pág. 307.
6. NADDOR, Eliezer and SALTZMAN, Sidney: "Optimal Reorder Periods for an Inventory System with Variable Costs of Ordering". O. R. Vol. 6 Nº 5, setiembre-octubre, 1958, pág. 657.
7. HERRON, David P.: "Inventory Management for Minimum Costs". M. S. Vol. 14 Nº 4, diciembre, 1967, pág. B-19.
8. EVANS, Richard V.: "Sales and Restocking Policies in a Single Item Inventory System". Vol. 14 Nº 7, marzo 1968, pág. 463.
9. FENSKE, R. W.: *"Non-Stocking Criterion"*, M. S. Vol. 14 Nº 12, agosto 1968, pág. B-705.