REVISTA DE ECONOMÍA Y ESTADÍSTICA
ISSN 0034-8066
INSTITUTO DE ECONOMÍA Y FINANZAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

ARTÍCULOS

Acotación del Rango de una Suma, de una Diferencia y de un Producto de Matrices

Rolando F. Orban

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 13, No. 3-4 (1969): 3º y 4º Trimestre, pp. 83-100.

http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3661

ACOTACION DEL RANGO DE UNA SUMA, DE UNA DIFERENCIA Y DE UN PRODUCTO DE MATRICES

ROLANDO F. ORBAN

Recordaremos previamente algunos conceptos referentes a:

TRANSFORMACIONES LINEALES. Una transformación lineal T de un espacio vectorial V_m en un espacio vectorial V_n, definidos sobre el mismo cuerpo R, es una aplicación de V_m en V_n para la cual se verifica:

$$T(aX + bY) = aT(X) + bT(Y) \qquad X, Y \in V_m \text{ y } a, b \in R$$

El símbolo $T(X) = Y$ significa que la imagen del vector X según la transformación T es el vector Y. Simbolizamos una transformación lineal T de un espacio V_m en otro V_n del siguiente modo:

$$T : V_m \to V_n$$

símbolo que leeremos: transformación T que aplica V_m en V_n.

Teorema 1.— a) La imagen de cualquier vector X perteneciente a un espacio V_m según una transformación lineal T queda unívocamente determinada cuando se conocen las imágenes de los vectores de una base de V_m según dicha transformación.

En efecto, si se supone que una base de V_m es $E_1, E_2, \ldots, E_m$ y $X \in V_m$, tenemos:

$$X = x_1E_1 + x_2E_2 + \ldots\ldots + x_mE_m$$

Por lo tanto, si llamamos Y a la imagen de X según T:

$$Y = T(X) = T(x_1E_1 + x_2E_2 + \ldots\ldots + x_mE_m)$$

o sea:

$$Y = x_1 T(X_1) + x_2 T(X_2) + \ldots\ldots + x_m T(X_m) \qquad (1)$$

por definición de transformación lineal. De modo que si se conocen $T(E_1)$, $T(E_2)$, ..., $T(E_m)$; tenemos conocida $T(X)$.

b) El conjunto de imágenes según una transformación lineal T de un espacio V_m en un espacio V_n es un subespacio de V_n.

Surge esta conclusión de la expresión (1). Simbolizamos con R_T la resultante de la transformación T. Según (1) está formada por todas las combinaciones lineales que pueden realizarse con los vectores $T(E_1)$, $T(E_2)$, ..., $T(E_m)$; y el conjunto de todas las combinaciones lineales posibles de realizarse con un subconjunto de un espacio vectorial es un subespacio vectorial.

Como caso particular tenemos: la imagen de un subespacio de V_m según una transformación lineal T es un subespacio de V_n.

c) Las imágenes de los vectores de una base de un espacio (subespacio) según una transformación lineal genera la imagen de dicho espacio (subespacio). Surge inmediatamente de (1).

d) $\dim. V_m \geqq \dim. R_T \leqq \dim. V_n$

La primera relación se debe a que los vectores $T(E_1)$, $T(E_2)$, ...$T(E_m)$ generan R_T según c); luego $\dim. R_T \leqq m = \dim. V_m$. La segunda, a que R_T es un subespacio de V_n según b).

Teorema 2.— Elegida una base, $E_1, E_2, \ldots, E_m$ para V_m, y otra $F_1, F_2, \ldots, F_n$ para V_n, existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de transformaciones lineales de V_m en V_n y el de matrices $A = [a_{ij}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$, siendo a_{ij} elemento del cuerpo sobre el cual están definidos V_m y V_n.

En efecto: como en cualquier base las componentes de un vector están unívocamente determinadas, si $X \in V_m$, tenemos:

$$X = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \ldots + x_m E_m$$

y por definición de transformación lineal:

$$Y = T(X) = x_1 T(E_1) + x_2 T(E_2) + \ldots + x_m T(E_m) = \sum_{j=1}^{m} x_j T(E_j)$$

Como $T(E_j)$ tiene a su vez componentes unívocamente determinadas en la base $F_1, F_2, \ldots, F_n$, tenemos:

$$T(E_j) = a_{1j} F_1 + a_{2j} F_2 + \ldots + a_{nj} F_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} F_i$$

Luego:

$$Y = T(X) = \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} F_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right) F_i$$

lo que significa que las componentes y_i del vector Y en la base $F_1, F_2, \ldots, F_n$ son:

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (2)$$

conjunto de igualdades que convenimos en representar en una sola igualdad matricial:

$$Y = AX$$

siendo:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad ; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix}$$

Este convenio quedará justificado cuando se obtenga la definición del producto de matrices a partir de la definición del producto de transformaciones lineales.

Recíprocamente, cada matriz $A = [a_{ij}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$, determina una transformación si convenimos que la componente y_i de la imagen está dada por la igualdad (2); se demuestra de inmediato que la transformación es lineal: sean los vectores

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{m1} \end{bmatrix} \quad ; \quad X_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{m2} \end{bmatrix}$$

cuyas imágenes respectivas suponemos que son:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n1} \end{bmatrix} \quad ; \quad Y_2 = \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n2} \end{bmatrix}$$

Obtenemos, aplicando (2), la imagen de la combinación lineal $c_1X_1 + c_2X_2$; llamamos z_i a la componente genérica de dicha imagen:

$$z_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} (c_1x_{j1} + c_2x_{j2}) = c_1 \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_{j1} + c_2 \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_{j2}$$

donde se advierte que la imagen de la combinación lineal de los vectores X_1 y X_2 es la combinación lineal de las imágenes de los mismos, por lo cual la transformación es lineal.

Teorema 3.— La dimensión de la resultante de una transformación lineal es igual al rango de la matriz de la misma.

En efecto: la expresión (2) puede expresarse también en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \ldots + x_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

o más brevemente:

$$Y = x_1 A^1 + x_2 A^2 + \ldots\ldots + x_m A^m$$

siendo A^j la columna j-ésima de la matriz A; de donde resulta que el conjunto R_T de imágenes según la transformación T se obtiene realizando todas las combinaciones lineales posibles con las columnas de la matriz y con elementos del cuerpo R. Si suponemos que el conjunto de vectores

$$A^1, A^2, \ldots, A^m$$

tiene rango r y que los r primeros son linealmente independientes, con lo cual no se pierde generalidad, los restantes

$$A^{r+1}, \ldots\ldots, A^m$$

pueden ser expresados en función de los r primeros, y tenemos:

$$Y = x'_1 A^1 + x'_2 A^2 + \ldots\ldots + x'_r A^r$$

En la hipótesis sentada, cualquier vector perteneciente a R_T puede expresarse como combinación lineal de $A^1, A^2, \ldots, A^r$ y como son linealmente independientes, constituyen una base de R_T. Por lo tanto:

$$\dim . R_T = r(A)$$

siendo $r(A)$ el rango de las columnas de la matriz A, que es igual al rango de las filas, por lo cual en lo sucesivo diremos simplemente rango de una matriz.

Núcleo. Se llama núcleo de una transformación lineal T de un espacio V_m en un espacio V_n al subconjunto de vectores de V_m que según T tienen por imagen al vector nulo de V_n, que simbolizaremos θ_n. Es decir, llamando N_T al núcleo de la transformación T, tenemos:

$$N_T = [X/T(X) = \theta_n]$$

Teorema 4.— El núcleo de una transformación lineal T de V_m en V_n es un subespacio vectorial de V_m.

En efecto: sean dos vectores X_1 y X_2 pertenecientes al núcleo N_T de una transformación lineal T de V_m en V_n:

$$X_1 \ \varepsilon \ N_T \text{ luego: } T(X_1) = \theta_n$$
$$X_2 \ \varepsilon \ N_T \quad \text{''} \quad T(X_2) = \theta_n$$

Por lo tanto:

$$T(a_1X_1 + a_2X_2) = a_1T(X_1) + a_2T(X_2) = \theta_n$$

de modo que $a_1X_1 + a_2X_2$ pertenece a N_T, por definición de núcleo, y en consecuencia éste es un subespacio vectorial de V_m.

Teorema 5.— En toda transformación lineal se verifica la siguiente igualdad:

$$\text{dim.} N_T + \text{dim.} R_T = \text{dim. dominio}$$

Sea s la dimensión del núcleo y $E_1, E_2, \ldots, E_s$ una base del mismo. A dicha base del núcleo es posible agregarle los vectores $E_{s+1}, \ldots, E_m$ hasta completar una base de V_m, por cuanto por el teorema anterior N_T es un subespacio de V_m. El conjunto de imágenes $T(E_1), T(E_2), \ldots, T(E_m)$ genera R_T según el teorema 1 c); pero como

$$T(E_1) = T(E_2) = \ldots = (E_s) = \theta_n$$

resulta que solamente $T(E_{s+1}), \ldots, T(E_m)$ generan R_T. Si demostramos que son independientes, tendremos demostrado que constituyen una base de R_T y que por lo tanto este subespacio es de dimensión $m - s$.

Supongamos que existen escalares a_i no todos nulos tales que:

$$a_{s+1}T(E_{s+1}) + a_{s+2}T(E_{s+2}) + \ldots + a_mT(E_m) = \theta_n$$

o sea:

$$T(a_{s+1}E_{s+1} + a_{s+2}E_{s+2} + \ldots + a_mE_m) = \theta_n$$

Esto significa que el vector

$$a_{s+1}E_{s+1} + a_{s+2}E_{s+2} + \ldots + a_mE_m$$

pertenece al núcleo N_T, es decir, que existen escalares b_j tales que:

$$\sum_{i=s+1}^{m} a_i E_i = \sum_{j=1}^{s} b_j E_j$$

porque por hipótesis $E_1, E_2, \ldots, E_s$ constituyen una base del núcleo; la igualdad anterior equivale a:

$$-\sum_{i=s+1}^{m} a_iE_i + \sum_{j=1}^{s} b_jE_j = \theta_n$$

para escalares no todos nulos, en contra de la hipótesis que $E_1, E_2, \ldots, E_m$ constituyen una base de V_m. Luego

$$T(E_{s+1}), T(E_{s+2}), \ldots, T(E_m)$$

constituyen una base de R_T y la dimensión de éste es $m - s$. De modo que:

$$\dim . N_T + \dim . R_T = s + m - s = m = \dim . \text{dominio}$$

Suma de transformaciones lineales. Sea T una transformación lineal de V_m en V_n a la cual corresponde la matriz $A = [a_{ij}]$, y U otra transformación lineal de V_m en V_n cuya matriz suponemos que es $B = [b_{ij}]$. Definimos a la transformación $T + U$ como aquella transformación según la cual la imagen de cualquier vector X es la suma de las imágenes de dicho vector según T y según U:

$$(T + U)(X) = T(X) + U(X)$$

Si $T(X) = Y$ y $U(X) = Z$, llamando y_i y z_i a las componentes genéricas de Y y Z respectivamente, tenemos, según el teorema 2:

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j$$

$$z_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}x_j$$

Por definición de suma de transformaciones lineales, la componente genérica de la imagen de X según la transformación $T + U$ es:

$$y_i + z_i = \sum_{j=1}^{m} + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{m} (a_{ij} + b_{ij})\, x_j$$

de modo que la matriz de la transformación $T + U$ es $[a_{ij} + b_{ij}]$, que vamos a definir como la suma de las matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$.

Multiplicación de una transformación lineal por un escalar. El producto de una transformación lineal T por un escalar k se define mediante la igualdad:

$$(kT)(X) = k\,T(X)$$

es decir, que la imagen del vector X según la transformación kT es igual a la imagen del mismo vector según la transformación T multiplicada por el escalar k.

Si Y, de componente genérica y_i, es la imagen de X según T, cuya matriz suponemos que es $A = [a_{ij}]$, de acuerdo a la definición de producto de una transformación lineal por un escalar, tenemos que la componente genérica de la imagen de X según kT es:

$$ky_i = k \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{m} ka_{ij}x_j$$

lo que significa que la matriz correspondiente a la transformación kT es aquella cuyos elementos son ka_{ij}, matriz que vamos a definir como el producto del escalar k por la matriz A: $kA = [ka_{ij}]$.

Producto de transformaciones lineales. Sea T una transformación lineal de V_m en V_n y U una transformación lineal de V_n en V_p. Se llama producto de las transformaciones lineales T y U, en ese orden, que vamos a simbolizar con TU, a una transformación de V_m en V_p según la cual la imagen de un vector $X \varepsilon V_m$ en el espacio V_p es la imagen según la transformación U en V_p de la imagen de X en V_n según T. Simbólicamente:

$$(TU)(X) = U[T(X)]$$

Deduciremos cuál es la matriz correspondiente a la transformación TU en función de las matrices de T y de U. Supongamos que $Z \epsilon V_p$ es la imagen de $Y \epsilon V_n$ según la transformación U, a cuya matriz llamamos A y es de orden pxn; por lo tanto:

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

Si se supone además que Y es la imagen de $X \epsilon V_m$ según la transformación T, cuya matriz es B, de orden nxm, entonces:

$$y_j = \sum_{k=1}^{m} b_{jk}x_k \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

y reemplazando en z_i:

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{m} b_{jk}x_k \right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \right) x_k$$

de modo que el elemento genérico de la matriz correspondiente a la transformación TU es:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, p \\ k = 1, 2, \ldots, m \end{array}$$

Dicha matriz será llamada producto de las matrices A y B en ese orden:

$$AB = [a_{ij}]\,[b_{jk}] = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right] \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, p \\ k = 1, 2, \ldots, m \end{array}$$

Con estos elementos estamos en condiciones de abordar el objeto principal de esta monografía, que es el estudio del rango de una suma, una diferencia y un producto de matrices. Este estudio se reduce al de la dimensión de la resultante de una suma, una diferencia y un producto de transformaciones lineales, en virtud del teorema 3. Comenzamos con el:

Rango del producto de una matriz por un escalar. Supongamos que la dimensión de la resultante R_T de una transformación lineal es r y que una base de la misma está constituida por los vectores $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$. Sea Z un vector perteneciente a la resultante R_{kT} del producto de la transformación T por el escalar k; si llamamos Y a la imagen del vector X según la transformación T, tenemos:

$$\begin{aligned} Z = (kT)(X) = kT(X) = kY &= k(b_1Y_1 + b_2Y_2 + \ldots + b_rY_r) \\ &= (kb_1)Y_1 + (kb_2)Y_2 + \ldots + (kb_r)Y_r \end{aligned}$$

Resulta entonces que, como cualquier vector perteneciente a R_{kT} puede expresarse como combinación lineal de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ y éstos son independientes por ser una base de R_T, tenemos:

$$\dim . R_{kT} = \dim . R_T \quad ; \quad k \neq 0$$

y por lo tanto:

$$\dim . N_{kT} = \dim . N_T$$

Si A es la matriz correspondiente a la transformación, tenemos:

$$r(kA) = r(A)$$

y si $k = -1$:

$$\dim . R_{-T} = \dim . R_T$$

y

$$r(-A) = r(A)$$

Imponemos la condición $k \neq 0$ porque para $k = 0$, la transformación kT tiene por matriz a una cuyos elementos son todos nulos y la imagen de cualquier vector X según la misma es el vector nulo, θ_n, de modo que la resultante R_{0T} se compone únicamente de dicho vector nulo y su dimensión por lo tanto es cero.

Acotación del rango de una suma y de una diferencia de matrices.— En este punto debe tenerse presente la definición de suma y de intersección de subespacios vectoriales: Si V′ y V″ son dos subespacios vectoriales de un mismo espacio V, tenemos:

$$V' + V'' = \{X' + X'' / X' \in V' \text{ y } X'' \in V''\}$$

$$V' \cap V'' = \{X / X \in V' \text{ y } X \in V''\}$$

También debe tenerse presente que:

$$\dim. (V' + V'') + \dim. (V' \cap V'') = \dim. V' + \dim. V''$$

Para continuar con nuestro tema específico, demostraremos que:

$$R_{T+U} \subseteq R_T + R_U$$

En efecto: supongamos que $Y \in R_{T+U}$; luego:

$$Y = (T + U)(X) = T(X) + U(X) \quad ; \quad T(X)) \in R_T \quad ; \quad U(X) \in R_U$$

Como Y es la suma de dos vectores, uno perteneciente a R_T y otro a R_U, por definición de suma de subespacios vectoriales, Y pertenece a $R_T + R_U$; es decir:

$$Y \in R_{T+U} \rightarrow Y \in R_T + R_U$$

Luego:

$$R_{T+U} \subseteq R_T + R_U$$

y por lo tanto:

$$\dim . R_{T+U} \leqq \dim . (R_T + R_U) = \dim . R_T + \dim . R_U - \dim . (R_T \cap R_U)$$

de donde:

$$\dim . R_{T+U} \leqq \dim . R_T + \dim . R_U$$

y en consecuencia, si suponemos que A y B son las matrices de las transformaciones T y U respectivamente, tenemos:

$$r(A+B) \leqq r(A) + r(B)$$

Hallamos la cota inferior del rango de una suma de matrices aplicando la propiedad asociativa de dicha operación y la cota superior que acabamos de encontrar:

$$r(A) = r[(A+B) + (-B)] \leqq r(A+B) + r(-B) = r(A+B) + r(B)$$

de donde:

$$r(A) - r(B) \leqq r(A+B)$$

Por otra parte:

$$r(B) = r[(A+B) + (-A)] \leqq r(A+B) + r(A)$$

o sea:

$$r(B) - r(A) \leqq r(A+B)$$

De modo entonces que la acotación del rango de una suma de matrices es la siguiente:

$$|r(A) - r(B)| \leqq r(A+B) \leqq r(A) + r(B)$$

La acotación para el rango de una diferencia de matrices es la misma que para la suma, según puede demostrarse fácilmente:

$$r(A-B) = r[A + (-B)] \leqq r(A) + r(-B) = r(A) + r(B)$$

Además:

$$r(A) = r[(A-B) + B] \leqq r(A-B) + r(B)$$

de donde:

$$r(A) - r(B) \leqq r(A-B)$$

Por otra parte:

$$r(B) = r[A - (A-B)] \leqq r(A) + r[-(A-B)] = r(A) + r(A-B)$$

y de allí:

$$r(B) - r(A) \leqq r(A-B)$$

En consecuencia, y en resumen, podemos escribir:

$$|r(A)-r(B)| \leqq r(A \pm B) \leqq r(A)+r(B)$$

La acotación del rango de una suma de h matrices se obtiene aplicando las cotas ya obtenidas del rango de una suma de dos matrices, la propiedad asociativa de la operación mencionada y el principio de inducción completa. Veamos en primer lugar el caso de tres sumandos:

$$|r(A+B)-r(C)| \leqq r[(A+B)+C] \leqq r(A+B)+r(C)$$

o sea:

$$\pm [r(A+B)-r(C)] \leqq r(A+B+C) \leqq r(A)+r(B)+r(C)$$

reemplazando en el tercer miembro $r(A+B)$ por su cota superior. Consideramos en primer lugar el signo más del primer miembro y reemplazamos $r(A+B)$ sucesivamente por su cotas inferiores:

$$r(A)-r(B)-r(C) \leqq r(A+B+C) \leqq r(A)+r(B)+r(C)$$

$$r(B)-r(A)-r(C) \leqq r(A+B+C) \leqq r(A)+r(B)+r(C)$$

Ahora consideramos el signo menos y reemplazamos en este caso $r(A+B)$ por su cota superior:

$$r(C)-r(A)-r(B) \leqq r(A+B+C) \leqq r(A)+r(B)+r(C)$$

De las tres cotas inferiores obtenidas para $r(A+B+C)$ corresponde adoptar evidentemente la mayor, y será de alguna utilidad únicamente si es positiva, porque el rango de una matriz no nula es un número positivo.

Supongamos válida la acotación obtenida en el caso en que tuviéramos h matrices:

$$\max_{j} \left\{ r(A_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{h} r(A_i) \right\} \leqq r\left(\sum_{i=1}^{h} A_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{h} r(A_i) \quad ; \quad j=1,2,\ldots,h \qquad (3)$$

Por lo tanto, si aplicamos la propiedad asociativa de la suma de matrices y la acotación del rango de una suma de dos matrices, tenemos:

$$\left| r(\sum_{i=1}^{h} A_i) - r(A_{h+1}) \right| \leqq r(\sum_{i=1}^{h+1} A_i) = r(\sum_{i=1}^{h} A_i + A_{h+1}) \leqq r(\sum_{i=1}^{h} A_i) + r(A_{h+1})$$

o sea:

$$\pm \left[r(\sum_{i=1}^{h} A_i) - r(A_{h+1}) \right] \leqq r(\sum_{i=1}^{h+1} A_i) \leqq \sum_{i=1}^{h+1} r(A_i) \qquad (4)$$

Consideramos el signo más del primer miembro y reemplazamos $r(\sum_{i=1}^{h} A_i)$ por su cota inferior dada por la hipótesis (3):

$$\max_{j} \left[r(A_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{h} r(A_i) \right] - r(A_{h+1}) \leqq r(\sum_{i=1}^{h+1} A_i) \leqq \sum_{i=1}^{h+1} r(A_i) \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, h$$

Como $r(A_{h+1})$ no contiene j puede ser incorporado al sumatorio:

$$\max_{j} \left[r(A_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{h+1} r(A_i) \right] \leqq r(\sum_{i=1}^{h+1} A_i) \leqq \sum_{i=1}^{h+1} r(A_i) \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, h \qquad (5)$$

Consideramos ahora el signo menos de (4) y reemplazamos $r(\sum_{i=1}^{h} A_i)$ por su cota superior de la hipótesis inductiva (3):

$$r(A_{h+1}) - \sum_{i=1}^{h} r(A_i) \leqq r(\sum_{i=1}^{h+1} A_i) \leqq \sum_{i=1}^{h+1} r(A_i) \qquad (6)$$

Las acotaciones (5) y (6) pueden ser reunidas en una sola porque la (6) es nada más que la (5) en la cual se da a j el valor $h + 1$:

$$\max_{j} \left[r(A_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{h+1} r(A_i) \right] \leqq r(\sum_{i=1}^{h+1} A_i) \leqq \sum_{i=1}^{h+1} r(A_i) \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, h + 1$$

siendo válida en consecuencia la acotación (3). Nuevamente el primer miembro será de alguna utilidad práctica únicamente si es positivo.

Acotación del rango de un producto de matrices.— Sea T una transformación lineal de V_m en V_n, de matriz B:

$$T: \ V_m \rightarrow V_n \quad ; \quad R_T = \{Y/Y = BX \, ; X \in V_m\} \subseteq V_n$$

Sea además U una transformación lineal de V_n en V_p, de matriz A:

$$U: \ V_n \rightarrow V_p \quad ; \quad R_U = \{Z/Z = AY \, ; Y \in V_n\} \subseteq V_p$$

Por definición de producto de transformaciones lineales, la transformación TU aplica V_m en V_p de modo que la imagen de un vector $X \in V_m$ en V_p es la imagen según U de la imagen según T de X:

$$TU: \ V_m \rightarrow V_p \quad ; \quad R_{TU} = \{Z/Z = AY \, ; Y \in R_T \subseteq V_n\} \subseteq R_U$$

Escribimos $R_{TU} \subseteq R_U$ porque R_U es la imagen de todo V_n según U; en cambio, R_{TU} es la imagen según U de R_T, que es un subconjunto de V_n. Por lo tanto:

$$\dim . R_{TU} \leqq \dim . R_U$$

Como a la transformación TU le corresponde la matriz AB y a la transformación U la matriz A, tenemos:

$$r(AB) \leqq r(A)$$

Para demostrar que $r(AB) \leqq r(B)$ consideramos cualquier vector Z perteneciente a R_{TU}, que puede expresarse en la forma:

$$Z = AY = ABX = A(x_1B^1 + x_2B^2 + \ldots . + x_mB^m)$$

siendo B^j la columna j-ésima de la matriz B; si suponemos que el rango de esta matriz es s y que sus primeras s columnas constituyen una base para las columnas, con lo cual no se pierde generalidad, tenemos:

$$Z = A(x'_1B^1 + x'_2B^2 + \ldots . + x'_sB^s)$$

y simbolizando con C^i el producto AB^i, nos queda:

$$Z = x'_1C^1 + x'_2C^2 + \dots + x'_sC^s$$

Como cualquier vector perteneciente a R_{TU} se expresa como combinación lineal de s vectores, tenemos:

$$\dim. R_{TU} \leqq s = r(B) = \dim. R_T$$

o sea: $$r(AB) \leqq r(B)$$

Por lo tanto:

$$r(AB) \leqq \text{mín.}[r(A), r(B)]$$

Obtenemos una cota inferior de la dimensión del producto de transformaciones lineales, del siguiente modo:

Si como dominio de una transformación T de V_m en V_n se considera no todo el espacio V_m sino el subespacio V', el núcleo de la transformación T entendida de ese modo ya no es N_T sino $N_T \cap V'$. Aplicamos el teorema 5 a esta transformación y tenemos:

$$\dim. R'_T + \dim. (N_T \cap V') = \dim. V'$$

siendo R'_T la resultante de la transformación T aplicada a V'.

De modo similar, si:

$$\begin{aligned} T &: V_m \to V_n \\ U &: V_n \to V_p \\ TU &: V_m \to V_p \end{aligned}$$

la resultante R_{TU} se obtiene aplicando la transformación U nada más que a R_T, que es un subespacio de V_n; el núcleo de la transformación U aplicada a R_T es $N_U \cap R_T$. De modo entonces que, nuevamente por aplicación del teorema 5:

$$\dim. R_{TU} + \dim. (N_U \cap R_T) = \dim. R_T$$

o sea: $$\dim. R_{TU} = \dim. R_T - \dim. (N_U \cap R_T)$$

De las relaciones:

$$\dim. R_U = \dim. R_U$$

$$\dim. (R_T \cap N_U) \leqq \dim. N_U$$

obtenemos: $\dim.R_U + \dim.(R_T \cap N_U) \leqq \dim.R_U + \dim.N_U = n$

Por lo tanto:

$$\dim.R_T + \dim.R_U + \dim.(R_T \cap N_U) \leqq n + \dim.R_T$$

$$\dim.R_T + \dim.R_U - n \leqq \dim.R_T - \dim.(R_T \cap N_U) = \dim.R_{TU}$$

es decir, que: $r(A) + r(B) - n \leqq r(AB)$

siendo n el número de columnas de A y, desde luego, de filas de B. Hemos hallado en consecuencia la cota inferior de r(AB). Por lo tanto, tenemos:

$$r(A) + r(B) - n \leqq r(AB) \leqq \text{mín.}[r(A),\ r(B)]$$

Las cotas de un producto de dos matrices que hemos obtenido se pueden extender al caso de más de dos factores. Suponemos en primer lugar que los factores son tres y aplicamos la propiedad asociativa del producto de matrices y las cotas ya obtenidas para el rango de un producto de dos matrices.

Sean las matrices A, B y C, de órdenes mxn, nxp y pxq, respectivamente:

$$r(AB) + r(C) - p \leqq r(ABC) = r[(AB)C] \leqq \text{mín.}[r(AB),\ r(C)]$$

En el primer miembro reemplazamos r(AB) por su cota inferior y en el tercero por su cota superior:

$$\begin{aligned} r(A) + r(B) + r(C) - n - p \leqq r(ABC) &\leqq \text{mín.}\{\text{mín.}[r(A), r(B)], r(C)\} = \\ &= \text{mín.}[r(A), r(B), r(C)] \end{aligned}$$

Aplicamos ahora el principio de inducción completa para deducir las cotas en el caso de un producto de cualquier número de factores. Supongamos que la acotación obtenida también es válida en el caso del producto de h matrices: A_1, de orden $n_0 \times n_1$; A_2, de orden $n_1 \times n_2$; ....; A_h, de orden $n_{h-1} \times n_h$:

$$\sum_{i=1}^{h} r(A_i) - \sum_{i=1}^{h-1} n_i \leqq r(A_1 A_2 \ldots A_h) \leqq \underset{i}{\text{mín.}}[r(A_i)] \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, h \qquad (7)$$

De acuerdo a la acotación obtenida para el rango de un producto de dos matrices, tenemos:

$$r(A_1A_2\ldots A_h) + r(A_{h+1}) - n_h \leqq r[(A_1A_2\ldots A_h)A_{h+1}] \leqq$$
$$\leqq \text{mín.}[r(A_1A_2\ldots A_h), r(A_{h+1})]$$

Reemplazamos en el primer miembro $r(A_1 A_2 \ldots A_h)$ por su cota inferior de la hipótesis inductiva (7) y en el tercero, por su cota superior:

$$\sum_{i=1}^{h} r(A_i) - \sum_{i=1}^{h-1} n_i + r(A_{h+1}) - n_h \leqq r(A_1A_2\ldots A_{h+1}) \leqq$$
$$\leqq \text{mín.}\{\underset{i}{\text{mín.}}[r(A_i)], r(A_{h+1})\} \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, h$$

o sea:

$$\sum_{i=1}^{h+1} r(A_i) - \sum_{i=1}^{h} n_i \leqq r(A_1A_2\ldots A_{h+1}) \leqq \underset{i}{\text{mín.}}[r(A_i)] \quad ;$$
$$i = 1, 2, \ldots, h+1$$

Esto significa que las cotas establecidas en (7) son realmente verdaderas.

Otras reglas referentes al rango. Sean nuevamente las transformaciones:

$$T: V_m \to V_n \quad ; \quad R_T = \{Y/Y = T(X) = BX \; ; \; X \in V_m\} \subseteq V_n$$
$$U: V_n \to V_p \quad ; \quad R_U = \{Z/Z = U(Y) = AY \; ; \; Y \in V_n\} \subseteq V_p$$
$$TU: V_m \to V_p \quad ; \quad R_{TU} = \{Z/Z = AY \quad ; \quad Y \in R_T \subseteq V_n\} \subseteq R_U$$

Si suponemos que $R_T = V_n$, y por lo tanto que $\text{dim.}R_T = r(B) = n$, tenemos:

$$TU: V_m \to V_p \quad ; \quad R_{TU} = \{Z/Z = AY \quad ; \quad Y \in R_T = V_n\} = R_U$$

En este caso escribimos $R_{TU} = R_U$ porque la transformación U se aplica a todo V_n y no solamente a un subconjunto suyo como en el caso general. Luego:

$$\text{si } R_T = V_n, \text{ entonces: } \text{dim}.R_{TU} = \text{dim}.R_U$$

o bien: $$\text{si } r(B) = n, \text{ entonces } r(AB) = r(A)$$

siendo, como se ha dicho, n el número de filas de la matriz B. Podemos entonces enunciar la siguiente regla referente al rango de un producto de matrices:

— Cuando el rango del primer factor es igual al número de sus filas, el rango del producto es igual al del primer factor.

Como la trasposición de una matriz no altera su rango, podemos decir:

$$\text{si } r(B') = n, \text{ entonces } r(B'A') = r(A')$$

y de aquí deducimos otra regla:

— Cuando el rango del primer factor es igual al número de sus columnas, el rango del producto es igual al del segundo factor.

Como caso particular de las dos reglas enunciadas, tenemos:

— Si uno de los factores es regular, el rango del producto es igual al del otro factor.