REVISTA DE ECONOMÍA Y ESTADÍSTICA
ISSN 0034-8066
INSTITUTO DE ECONOMÍA Y FINANZAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

OPEN ACCESS

ARTÍCULOS

Método para estimar la razón de depreciación de la unidad monetaria

Fernando Ferrero

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 12, No. 3-4 (1968): 3º y 4º Trimestre, pp. 81-119.

http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3649

METODO PARA ESTIMAR LA RAZON DE DEPRECIACION DE LA UNIDAD MONETARIA

FERNANDO FERRERO

INTRODUCCION

Cuando en el transcurso de un período de tiempo la unidad monetaria que se ha utilizado en la transacción de bienes y servicios finales experimenta un cambio de valor, se plantea el problema de cuantificar la magnitud del cambio operado en dicha unidad. El propósito del presente trabajo es desarrollar íntegramente un método de estimación de la razón de depreciación del valor de la unidad monetaria (se considera únicamente el caso de pérdida de valor) basándose en la selección de un conjunto representativo de dichas unidades y de forma tal que el método suministre un modelo adecuado para el cálculo de los errores de fluctuación y controle dentro de límites tolerables los sesgos inherentes a la estimación.

Por regla general, el objetivo final de los índices de precios que usualmente se calculan consiste en arribar a una medición de los cambios de valor en la unidad monetaria. Sin embargo, tales índices generales de precios —que se construyen según procedimientos habituales— adolecen de dos grandes defectos: a) no existe ningún criterio válido para agregar índices parciales o sectoriales; b) aun cuando se dispusiera de tal criterio, la individualización de un conjunto representativo de bienes y servicios y su permanencia a través del tiempo traen aparejados problemas que son prácticamente imposibles de resolver.

Básicamente, el método propuesto consiste en obtener un subconjunto de unidades monetarias, asignando una probabilidad igual de selección a todo elemento del conjunto, y observando en cada una de ellas la magnitud de la desvalorización que se ha operado en el transcurso del período. Estas estimaciones individuales son luego combinadas a los efectos de producir una razón general de depreciación que sea válida tanto para el agregado total de bienes y servicios finales como para cada uno de los sectores o grupos homogéneos que lo componen.

El rasgo más saliente de este método consiste en que al asignar iguales probabilidades a todos los elementos del conjunto de unidades monetarias, los bienes y servicios en ellas involucrados quedan *automáticamente ponderados*. Si, por ejemplo, la importancia relativa del bien A es m veces mayor que la del bien B, el número de unidades que en el subconjunto seleccionado incluirán al bien A será m veces mayor que el correspondiente al bien B. En este sentido, lo que interesa realmente individualizar son las unidades monetarias; los bienes y servicios involucrados importan al solo efecto del cálculo de la tasa de depreciación, no siendo necesario su identificación y permanencia por períodos mayores a un año.

En síntesis, las razones fundamentales por las que se han escogido "unidades monetarias —comprensivas tal vez de diferentes artículos— en vez de seguir los procedimientos habituales con que se construyen los índices generales de precios, radican en:

1) Una población de artículos sería tan variada y difícil de construir que aun cuando se dispusiera de los recursos necesarios para llevarla a cabo, quedarían en pie problemas tales como diferenciación de calidades, aparición de nuevos productos, desaparición de otros, etc.

2) Los criterios que se adoptaran para agregar índices sectoriales tendrían influencia sobre la magnitud y composición de los errores sistemáticos del índice general. Puesto que no es en manera alguna deseable que una estimación de agregado pase a ser función de los criterios escogidos, sería mucho más lógico obtener primeramente una estimación directa del índice total y de cada uno de los índices sectoriales y de allí luego deducir cuál sería el mejor sistema

de ponderación aplicable. Al proceder de este modo se eliminarían las fuentes más importantes de errores sistemáticos, que son desde luego las que más atentan contra la precisión de los índices.

3) Aun bajo la hipótesis —a todas luces imposible— de que se pudieran controlar los errores sistemáticos, subsistiría empero la imposibilidad de medir los errores de selección, dadas las características de los métodos que usualmente se emplean.

4) Si se diera el caso de una enumeración completa de los bienes y servicios, como puede ocurrir con los índices de precios implícitos, tampoco se conseguiría eliminar la variabilidad entre los errores sistemáticos de las estimaciones parciales.

Tales son, a grandes rasgos, las razones fundamentales que impulsan a concebir un método diferente de estimación; método que, al igual que el que aquí se propone, debe reunir ciertas características deseables. Entre ellas, merecen destacarse:

1) Un sistema de ponderaciones que esté implícitamente construido dentro de las estimaciones totales. Además, cuando así se lo desee, el método debe suministrar una base segura para calcular de modo explícito dichos factores de ponderación junto con sus respectivos errores.

2) Que a lo largo de todas las etapas de selección, los errores sistemáticos y los errores de selección y medición quedan estrictamente controlados por debajo de niveles especificados de antemano; que los errores derivados de respuestas no obtenidas queden reducidos a un mínimo y que, finalmente, los errores de selección sean perfectamente estimables, variando en magnitud conforme al número de unidades que se desee investigar.

3) Por otra parte, el índice así calculado deberá ser tal que posibilite estratificar a posteriori según los criterios que más interesen a los fines de análisis ulteriores. La adopción de un criterio específico no debe excluir la posibilidad simultánea de otros sistemas de estratificación.

4) Finalmente, el índice debe ser comprensivo de todos los bienes y servicios finales, sean de consumo o inversión, sin perjuicio de obtener estimaciones separadas para cada grupo.

1. METODO PARA LA CONSTRUCCION DEL NUEVO INDICE

1.1. *Especificación de las unidades de observación: unidades monetarias*

A objeto de una mayor simplificación, supóngase la investigación reducida al ámbito de la ciudad de Córdoba y referida a un año determinado.

En un primer enfoque, considérese el universo de las unidades monetarias que a lo largo de un período han sido utilizadas en las transacciones de bienes y servicios finales de cualquier índole. Por razones de conveniencia, supóngase las primeras como constituidas por unidades de un millón de pesos y originadas en la transacción del total de bienes y servicios que en el período pasaron a manos de usuarios finales, exceptuando únicamente los bienes y servicios nuevos que se consumen por primera vez en el período.

Obviamente, la presente definición excluye: a) bienes y servicios intermedios; b) bienes que se producen y/o consumen por primera vez en el año; c) bienes producidos en el período anterior y que figuraban como stock del año precedente, no habiendo sido aún objeto de transacciones.

Debe aclararse que tal definición no entraña contradicción alguna con los propósitos esbozados en el apartado anterior. Los tipos de bienes que se producen por primera vez, se excluyen el primer año que aparecen pero se incluyen a partir del subsiguiente. En los índices tradicionales la inclusión debe postergarse indefinidamente —por los trastornos que ello ocasiona—, impidiendo de este modo que el índice involucre otros artículos que no sean los que se consumían en el año base. En este caso, lo que se produce es simplemente un retardo de un período en la inclusión de bienes y servicios nuevos.

Desde otro punto de vista, lo que la definición persigue es encontrar una ley de correspondencia entre los elementos del universo con que se trabaja —unidades monetarias— y elementos de otro universo desconocido, constituido por bienes y servicios específicos, que en algún momento del período han pasado a manos de consumidores finales. Es un recurso que entre otras cosas hace posible: a) hallar un marco de referencia en el cual cada unidad monetaria se pueda identificar de un modo unívoco; y b) un conjunto de unidades que permita desarrollar una técnica de estimación de la razón de depreciación, sin enfrentarse con los inconvenientes que implicarían los bienes y servicios en cuanto tales.

La tasa de depreciación que así se obtenga, no será otra cosa que la recíproca del índice general de precios que incluye explícitamente todos los bienes finales, sean de consumo o inversión. Construir el índice siguiendo el método aquí aconsejado, es una tarea perfectamente viable; elaborar directamente un "índice de precios", es prácticamente imposible y cuando no insegura, a menos que se relajen ciertas restricciones sobre magnitud de errores.

Por el contrario, el objetivo del presente método es arribar a una estimación insesgada de la razón de depreciación total y sectorial de las unidades monetarias, lo que de por sí implica que se dispondrá de estimaciones también insesgadas de la relación inversa: nivel general de precios totales y por sectores.[1]

Para destacar mejor el sentido de esta última afirmación, considérese X el agregado total de unidades monetarias en el universo en el año t; Y, el agregado total de unidades monetarias en el universo que hubieran sido desembolsadas en la hipótesis de que los precios en el año t permanecieran constantes con relación al período $t-1$. Considérese a x e y como los totales muestrales observados y F la inversa de la probabilidad de selección de cada unidad monetaria, luego el método aludido asegura,

$$E(Fx) = X \quad y \quad E(Fy) = Y$$

[1] No se supone directamente que si $E(y/x) = Y/X$, siendo Y/X la tasa de depreciación de las unidades monetarias en el universo, la relación x/y tienen por fuerza que ser una estimación insesgada de X/Y, nivel general de precios en el universo. Es decir que $E(y/x) = Y/X$ no implica necesariamente que $E(x/y) = X/Y$.

y bajo condiciones que se analizan en el apéndice,

$$E(y/x) = Y/X \quad y \quad E(x/y) = X/Y$$

donde la relación X/Y es el índice general de precios del período (en el universo).

Las estimaciones de totales muestrales se realizan sobre la base de computar en cada unidad monetaria, seleccionada de un conglomerado mayor, el porcentaje de depreciación que han experimentado. A tal fin, una vez seleccionada la unidad monetaria, quedan explícitamente individualizados el conjunto de bienes y servicios involucrados en la transacción a que dio origen esa unidad. Con la información disponible en el establecimiento o empresa, se computan los precios unitarios medios en el período anterior, $t-1$, y de este modo surge un componente de y.

De esta forma, para la unidad monetaria así seleccionada resulta una razón de depreciación positiva y menor que la unidad (en caso de aumento de precios) que se designará por r.

Luego, la agregación del total de cifras que figuran en el numerador de r, dividido por el número total de unidades monetarias observadas, producirá la r combinada para el conjunto de unidades. O sea $r = y/x$, donde x es la suma de todas las unidades observadas, en tanto y es la suma de esas mismas unidades pero bajo la hipótesis de que los precios no hubiesen variado.

1.2. *Características generales del procedimiento de selección*

Ya han sido mencionadas las dificultades que plantea el no poder disponer de un listado completo que sirva como marco de referencia para cada una de las unidades monetarias. Si se diera la alternativa de un marco de referencia para establecimientos, es decir un listado completo y actualizado de todas las unidades que transfieren bienes y servicios directamente a los consumidores, el procedimiento de selección bien podría circunscribirse a dos etapas. La primera consistiría en selección de empresas a partir del listado disponible, y, en la segunda etapa, unidades monetarias dentro de los establecimientos elegidos.

Sin embargo, la alternativa no es desde luego factible puesto que aun cuando existen listados de establecimientos comerciales en un padrón de contribuyentes, quedarían excluidos los establecimientos no inscriptos, los establecimientos destinados a prestación de servicios, etc. Por tal razón hay que recurrir a un artificio consistente en la división de toda área sometida a estudio en conglomerados de establecimientos. Como todo establecimiento contiene un grupo de unidades monetarias, obviamente cada conglomerado estará constituido por un conjunto de unidades monetarias, variable en magnitud y composición según sea su localización en el área total sujeta a investigación.

A tal efecto se supone que el área de la ciudad de Córdoba puede subdividirse en unidades primarias de tamaño y extensión variable y con una medida de importancia asignada a cada uno de ellos. Las medidas de importancia pueden representar valor de la producción total, ocupación total o cualquier otro indicador que se pueda usar para tener una idea aproximada del tamaño de la unidad primaria.

Conviene aclarar que esta asignación de medidas son aproximaciones muy ligeras y nada hay que temer acerca de su concordancia con la realidad. Como más adelante se aclarará, el procedimiento de selección debe asegurar que la disparidad entre medidas aproximadas y las reales no tenga ningún efecto en la precisión de las estimaciones. Para ello es necesario prever, en cada etapa, la corrección de las aproximaciones cometidas en la etapa anterior y de forma tal que en el conjunto de etapas se produzca una cancelación de errores, con una probabilidad de selección constante e igual para todas las unidades monetarias.

Luego de la división de unidades primarias y la selección de un conjunto representativo en el que cada unidad está constituida por un grupo de manzanas o bien una manzana individual, (dependiendo ello de cada zona en particular), seguirá un listado completo de todos los establecimientos que realizan ventas finales, ubicados dentro de la unidad primaria. Conviene destacar que en este trabajo se supone que los establecimientos pueden seleccionarse en dos etapas, pero si se tratara de áreas mayores, tal elección habría que efectuarla sobre la base de tres o más etapas. Por otra parte, los tipos de establecimientos a incluir en el listado final de las unidades primarias, pueden excluir a un segmento bien definido, a condición de que ello redunde en una economía sustancial en el costo de operación y sin menoscabo a la representatividad de las estimaciones.

Del listado de unidades secundarias —establecimientos— se seleccionará luego un subconjunto destinado a representar a todo el conglomerado primario y repitiendo tal secuencia dentro de los establecimientos se elegirán las unidades finales de observación, es decir, unidades monetarias propiamente dichas.

En cada etapa, la selección se realizará sobre la base de asignar probabilidades proporcionales al tamaño de cada unidad, ya sea primaria o secundaria, para lo cual se dispondrá de las medidas de importancia ya señaladas. Además, cada etapa de selección supone un sistema de estratificación previa a objeto de reducir los errores de fluctuación.

La formación de las unidades primarias no es en modo alguno un paso arbitrario, el número de unidades como también las características que deben reunir está sujeto a ciertas restricciones.

En primer lugar, toda el área se puede dividir en A unidades primarias de tamaño y composición variable y cuyo número dependerá de la extensión asignada a cada una de ellas. Para determinar sus límites se tiene en cuenta que un número grande de unidades primarias tiene la ventaja de difundir mejor la selección de a conglomerados primarios dentro de la extensión total del área sujeta a estudio (de las A primarias en que se ha dividido la ciudad, se eligen a unidades). Cuanto mayor sea la extensión de cada unidad primaria menor será el número de A y por consiguiente las a seleccionadas tenderán a concentrarse en sectores muy definidos de la ciudad. De modo que desde este punto de vista conviene que las primarias sean pequeñas en extensión y grandes en número.

Por otra parte, una unidad primaria de extensión reducida tiene los inconvenientes de una mayor homogeneidad interna, lo que es otro modo de decir un alto grado de correlación intraclásica entre los miembros del mismo conglomerado y esto por supuesto tiene una repercusión desfavorable en la eficiencia de las estimaciones. Un compromiso razonable es pues lograr el mayor número posible de primarias, compatible con un buen grado de heterogeneidad interna, o sea, que dentro de cada conglomerado convendrá tener establecimientos de diversos tamaños y pertenecientes a diferentes ramas. No obstante, no se pueden dar recomendaciones generales que sean válidas para cualquier caso en particular, un número de selecciones primarias superior a 50 es comúnmente imprescindible, pero de todos modos su fijación definitiva dependerá, entre otras circunstancias, del número de unidades primarias A, que comprenden el conjunto del área, de la variación entre totales de conglomerados y de los costos de listado y observación dentro de cada unidad primaria. El cociente de a/A medirá la probabilidad de selección de unidades de primera etapa y será desde luego el primer componente de la probabilidad total de selección de cada unidad final.

1.3. *Tipo de estratificación*

Luego de dividir e identificar todas las unidades primarias, el paso siguiente consiste en introducir estratificación, tanto como sea posible a fin de controlar y mantener por debajo de un nivel deseado la magnitud de los errores de selección.

A la inversa de lo que ocurriría cuando se consideraron las reglas básicas para la construcción de unidades primarias, en materia de estratos debe observarse el principio de que éstos sean internamente homogéneos, pues el cálculo de errores de las estimaciones totales surge por combinación lineal de errores estratales, considerando la intravarianza como único componente de la variación total. La finalidad de la formación de estratos responde, en consecuencia, a minimizar la variación interna de cada estrato.

El número de estratos, si bien sujetos a limitaciones en cuanto a cantidad óptima, está condicionado por el valor *a*, número de unidades primarias que se desean y del modelo escogido para el cómputo de errores.

En el método que se observará en el presente trabajo, se formarán tantos estratos como unidades primarias seleccionadas, es decir, *a* estratos. Las primarias se elegirán del total *A* del universo, previa asignación a cada uno de los estratos que correspondan. Consiguientemente, se tendrá una observación de primera etapa por estrato, una menos que el número mínimo que se requiere para el cálculo de la varianza de cada estrato; cómputo que todavía es factible si en la etapa de estimación se consolidan cada par de selecciones primarias a fin de representar un estrato.

Los *a* estratos, cada uno con una selección, se construirán de tal forma que el agregado total de unidades monetarias sea aproximadamente uniforme en todos los estratos. Nuevamente se trata de una mera aproximación ya que las medidas de importancia son en sí mismas aproximadas. Simbolizando por

$$N_h = \sum_i N_{hi}, \text{ donde } h = (1, 2, \ldots a) \quad i = (1, 2, \ldots A_h)$$

N_h; el agregado total en el h-ésimo estrato

N_{hi}; el agregado total en la i-ésima unidad primaria dentro del h-ésimo estrato.

Como variables de estratificación se pueden utilizar las siguientes características (y con un número de niveles acorde con la cantidad de estratos que se buscan):

1. Rama o sector predominante en el conglomerado.
2. Promedio de agregado total de unidades monetarias por establecimiento.
3. Porcentaje que del agregado total de unidades monetarias observe el primer decil de establecimientos (clasificados de mayor a menor).

De tal forma, el total de unidades primarias se puede clasificar de acuerdo al primer criterio en $R_1, R_2, \ldots R_r$, niveles; a su vez cada uno de éstos se puede reclasificar de conformidad al segundo criterio, dando lugar a

$$R_i T_1, R_i T_2, \ldots R_i T_t, \quad i = (1, 2, \ldots r), \text{ niveles.}$$

Asimismo, cuando se introduce el tercer criterio, se obtienen las categorías,

$$R_i T_j G_1 \ , \ R_i T_j G_2 , \ldots\ldots R_i T_j G_g .$$
$$i = (1, 2 \ldots\ldots r)$$
$$j = (1, 2 \ldots\ldots t)$$

Las cantidades r, t y g se eligen de tal forma que r. t. g = a, con libertad para manejar cada una de ellas según resulte más conveniente.

Los criterios escogidos no son en ningún modo exhaustivos ni excluyentes. Su adopción obedece a la necesidad de estratificar con aquellas variables que más se relacionen con las variables de estimación, pues la división en estratos reduce la variación en un factor $1 - R^2$, donde R^2 no es más que el coeficiente de correlación entre las variables de estimación y estratificación.

Los límites en cada estrato obedecen a consideraciones de óptimo, (implícitamente se ha usado aquí la regla de iguales agregados por estrato). El procedimiento para encontrar los puntos óptimos está basado en un mecanismo iterativo.

1.4. *Elección de unidades primarias a base de controles*

De conformidad a los lineamientos ya esbozados, se seleccionará una unidad primaria por estrato y con probabilidades proporcionales al tamaño de la unidad primaria, a cuyo efecto se tomarán en cuenta las medidas de importancia aludidas en el apartado anterior.

Es un requisito fundamental, en una investigación de este tipo, lograr una adecuada representación en el conjunto de unidades primarias seleccionadas con relación a los criterios de clasificación antes mencionados. Este aspecto adquiere gran importancia en investigaciones de tipo económico, caracterizadas por la presencia de unidades de tamaño en extremo variable (establecimientos) y que presentan rasgos diferenciales de una rama a otra.

Para lograr un adecuado balance dentro de ciertas ramas y que a la vez satisfaga determinadas categorías de establecimientos —de conformidad a la dimensión de los mismos—, sin perder tampoco de vista un tercer requisito de representación, es necesario impedir que la selección de las unidades primarias dentro de los estratos quede librada totalmente al azar. Si así fuera, nada podrá garantizar que el conjunto de unidades primarias elegidas representará con un mínimo de observaciones un determinado estrato, ni tampoco que ciertas combinaciones altamente deseables, como por ejemplo los establecimientos grandes de una determinada rama, aparezcan en el conjunto. Tal es el inconveniente que plantean los métodos de uso más común al realizar una selección simple al azar (con o sin reposición de primaria) dentro de cada estrato. Ciertamente, cada primaria proviene de una combinación $R_i T_j G_k$ diferente, pero puede suceder que la combinación elegida deje importantes zonas sin cubrir, zonas para las cuales pueda resultar interesante un análisis posterior por subclases.[2]

A fin de evitar tales problemas, el procedimiento aconsejado es un método de selección de unidades primarias que se conoce con el nombre de "selección controlada" y que asigna una probabilidad de selección de conformidad al tamaño o importancia de la unidad, a la vez que atribuye una cierta probabilidad a cada patrón de selección.[3] Por patrón de selección se entiende una secuencia específica de elección tal que, asegurando una unidad por estrato, maximiza la verosimilitud de que la unidad primaria provenga de uno de los subestratos para los cuales se introdujo el control. El control es naturalmente aquella variable de la que se pretende obtener una mejor representación. Supóngase que se desea sujetar cada estrato a c controles, de forma que cualquier unidad primaria provenga de un determinado control. Todo estrato resulta de este modo dividido en c controles, y

$\sum_{k=1}^{kc} N_{hjk}$ será la suma de medidas de importancia de unidades primarias en el h-ésimo estrato para el j-ésimo grupo control. A su vez,

$N_h = \sum_{j.k} N_{hjk}$, al dividir la expresión anterior, dará la probabi-

[2] Goodman, R. and Kish, L., "Controlled Selection, a Technique in Probability Sampling", (1950).

[3] Hess, I., "The Controlled Selection Technique", 1963.

lidad de selección del grupo control j en el estrato h es decir,

$$\text{Probabilidad de una selección en el estrato } h, \text{ grupo control } j = \frac{\sum_{k} N_{hjk}}{\sum_{jk} N_{hjk}}$$

Además, $\sum_{hk} N_{hjk}$ representará la medida de importancia total del grupo control j, siendo $j = (1, 2, \ldots\ldots\ldots c)$.

Designando por $N_{hi} = \sum_{j} \sum_{k} N_{hijk}$ la medida provisoria de importancia asignada al conglomerado primario i (en el estrato h), su probabilidad de selección será: $\frac{N_{hi}}{N_h}$ (en la hipótesis de una sola selección por estrato, es decir, $a_{hi} = 1$, para todo h)

1.5. *Elección de unidades de segunda etapa* (establecimientos)

Una vez seleccionadas las *a* unidades primarias del total A del universo y habiendo tenido en cuenta los requisitos de estratificación previa, descriptos en el apartado anterior, el paso siguiente consistirá en realizar un listado completo de todos los establecimientos que se encuentran ubicados dentro del área de la unidad primaria. Se incluirán en el listado toda empresa dedicada a la venta de bienes y servicios finales, cualquiera sea su naturaleza, y sin distinguir si se trata de una entidad pública o privada. De esta forma se incluirán las empresas del Estado, prestatarias de servicios públicos de agua, luz, gas, transporte, etc.,los servicios profesionales de médicos, odontólogos, etc., como también las viviendas para residencia ocupadas por dueños o inquilinos. En este último caso se plantean problemas que requieren un tratamiento especial. La tasa de depreciación de las unidades monetarias utilizadas en las transacciones de venta de servicios de vivienda se observará tanto del lado del comprador como del vendedor, según sea la condición legal de la persona que ocupa la vivienda. A tal efecto, en la segunda etapa se elegirán segmentos de aproximadamente diez viviendas, asignándoseles una medida de importancia proporcionada al número de viviendas, ubicación, tipo predominante de edificación, etc., y sin necesidad de listar cada una por separado. Cada segmento de viviendas se seleccionará luego con procedimientos semejantes a los que se utilizarán para establecimientos, hecho lo cual se confeccionará un listado minucioso de las viviendas en el segmento elegido, tomando en cuenta las medidas anteriores o bien asignando un nuevo conjunto de medidas de importancia sobre la base de un análisis más detenido de las características de las viviendas.

Por lo que respecta a los establecimientos comerciales, el listado deberá incluir alguna información adicional sobre tipo de actividad, cantidad aproximada de personal ocupado, o cualquier otro indicador que sea de fácil obtención y que en general no requiera entrevistas previas con el titular del establecimiento. La información puede incluso darse en términos de una escala que haya sido convenientemente elaborada a los fines de servir para estratificación y reasignación de medidas de importancia, como paso previo a la selección de segunda etapa.

En caso que se obtengan medidas que modifiquen las usadas en la etapa anterior, habrá que reajustarlas a fin de que concuerden con el total asignado a la unidad primaria, o también reajustar el número de establecimientos que se elegirán en esa unidad primaria.

Considérese primero el caso más general, es decir cuando en cada etapa se introduce un sistema nuevo de medidas. En la primera alternativa la unidad primaria i-ésima se eligió con una probabilidad igual a

$$\frac{N_{hi}}{N_h} \quad ; \qquad \text{donde } N_h = \sum_{i=1}^{A_h} N_{hi} \text{ , y}$$

$$h = (1, 2 \ldots\ldots H)$$

siendo,

b_{hi}: número de establecimientos a seleccionar

B_{hi}: número de establecimientos en la unidad primaria

N'_{hij}: medida de importancia asignada al j-ésimo establecimiento en la i-ésima unidad.

B_{hi}

y $\sum_{j=1} N'_{hij} = N'_{hi}$, tamaño revisado de la unidad primaria.

Para preservar igual probabilidad de selección, habrá que corregir, al tiempo de seleccionar establecimientos, de forma que,

$$\frac{N_{hi}}{N_h} \times \frac{N'_{hij}}{N'_{hi}} \times b_{hi} \times \frac{N'_{hi}}{N_{hi}}$$

será la probabilidad de selección hasta la segunda etapa.

O sea que el inconveniente que trae aparejado el haber partido en la primera etapa con medidas menos aproximadas que en la segunda, es que en vez de obtener b_{hi} establecimientos, se conseguirán en realidad

$$b_{hi} \frac{N'_{hi}}{N_{hi}} \quad \text{establecimientos.}$$

Puesto que uno de los objetivos primordiales del diseño es lograr una estimación autoponderada de la razón de depreciación de la unidad monetaria, será necesario igualar la fracción de selección dentro de cada estrato, es decir,

$$f_h = f \qquad \text{para todo } h = (1, 2, \ldots . . H)$$

Tampoco existen obstáculos a que el número b_{hi} sea una cantidad constante en cada primaria, excepto por las aproximaciones debidas a la asignación de medidas de tamaño. A tales fines deberá dejarse en libertad el número de selecciones que sean necesarias para preservar una fracción constante dentro de cada estrato. El valor c_{hij}, que representa el número de unidades monetarias a elegir dentro del j-ésimo establecimiento deberá ser fijado con la condición que

$$b_{hi} \times c_{hij} \times \frac{1}{f_h} = N_h \text{ y, de conformidad al supuesto anterior,}$$

$$F \times b_{hi} \times c_{hij} = N_h \text{ , por ser } \frac{1}{f_h} = \frac{1}{f} = F \quad (2.5.1)$$

Es claro que en todas estas alternativas tales valores deberán fijarse sobre consideraciones de óptimo, no sólo con relación a varianza, sino también con referencia a varianza y costos de observación de listado. Si dentro de un estrato cualquiera, los costos de listado de establecimientos son más elevados que en otro, convendrá reducir la magnitud de b_{hi} a expensas de aumentar el valor de c_{hij}, y viceversa. Por ello, conviene dejar librada la elección de estos valores según sea la naturaleza particular de cada estrato.

Cualquier solución que en definitiva se adopte, ésta deberá garantizar que para el conjunto de etapas, las medidas de importancia adoptadas se cancelan sucesivamente para dar lugar a una probabilidad constante e igual para todas las unidades monetarias, al par que las selecciones continúan siendo proporcionales al tamaño previsto, es decir,

$$\frac{N_{hi}}{N_h} \times b_{hi} \frac{N'_{hi}}{N_{hi}} \times \frac{N'_{hij} \; c_{hij} N'_{hij}}{N'_h \; N'_{hij} N'_{hij}} = \frac{1}{F} \qquad (1.5.2)$$

$$\frac{b_{hi} \times c_{hij}}{N_h} = \frac{1}{F} \text{ de acuerdo a } (1.4.1.)$$

Cabe destacar que para seleccionar las unidades secundarias se debe usar el intervalo fijo (dentro de cada estrato) igual a

$$\frac{N'_{hi}}{b_{hi} \times \dfrac{N'_{hi}}{N_{hi}}} = \frac{N_{hi}}{b_{hi}},$$

lo cual asegura una probabilidad de selección proporcional al tamaño del establecimiento, N'_{hij}.

La selección de establecimientos se llevará a cabo a partir del listado de establecimientos en el que consta el tipo y tamaño de cada uno y combinados estos criterios en un cierto orden, la selección sistemática aprovechará las ventajas de la estratificación así lograda.

A esta altura creo oportuno destacar el sentido de la ecuación (1.5.2.) que señala de qué modo, al cancelarse todas las medidas de importancia utilizadas en la selección proporcional, cada unidad monetaria recibe una probabilidad constante e igual de selección (1/F), *siendo por consiguiente innecesario el uso de factores de ponderación.* En la etapa de estimación, iguales probabilidades implican iguales pesos o iguales factores de ponderación.

Si para transar el bien final Z se han utilizado en el universo *m* unidades, y para transar el bien Y, *n* unidades (ambas a lo largo del período), la importancia relativa de Y en términos de Z, será n/m. Ahora bien, el conjunto de unidades elegidas es una proporción 1/F del total y puesto que cada unidad recibe una misma probabilidad de selección, dicho conjunto contendrá (1/F)m unidades del bien Z y (1/F)n unidades del bien Y, de donde la importancia relativa de Y en términos de Z (en el conjunto seleccionado) será igual a n/m, o sea la misma que existía en el universo.

Por consiguiente, en la medida que el conjunto seleccionado sea autoponderado, cada unidad o grupos de unidades con características similares, recibirá el mismo peso o ponderación que tienen en el universo, sin que sea necesario introducir expresamente ningún factor de ponderación.[4]

Es desde este punto de vista que se puede afirmar que la tasa de depreciación (calculada en el conjunto elegido) es un estimador insesgado de la tasa de depreciación global del universo, a excepción, claro está, de un pequeño sesgo que está implícito en las fórmulas de cómputo (ver apéndice IV).

1.6. *Selección de unidades monetarias*

A éstas se llega luego de la selección de establecimientos, lo cual a su vez está condicionado por las primarias que fueron elegidas en la primera etapa. El número deseado, c_{hij}, de unidades monetarias

[4] En realidad, se trata de igualdad de pesos o factores de ponderación en valor esperado.

se logra a través de la aplicación del intervalo $\frac{N_{hij}}{c_{hij}}$ al conjunto listado de unidades monetarias en el j-ésimo establecimiento.

La elección de estas unidades requiere algunas aclaraciones en cuanto a las etapas que encierra.

1) Para cada establecimiento hay que disponer un listado por rubros o grupos de artículos de las ventas totales habidas en el año (en caso que el año sea el período de referencia adoptado).

2) Las cantidades para cada artículo o rubro se redondean a unidades de un millón.

3) El orden de listado, tal cual es suministrado por la empresa, se considera aleatorizado con relación a otros establecimientos.

No debe esperarse que las unidades así obtenidas consistan de artículos perfectamente diferenciados u homogéneos ni tampoco que sus valores sean exactamente iguales a uno. En la mayoría de los casos tales unidades comprenderán grupos de artículos, particularmente cuando éstos son grandes en cantidades pero pequeños en valor, cuyos montos variarán entre 1, 3, 5 e incluso más. Tal variación en la magnitud de las unidades monetarias no presentará dificultades ni significará una fuente adicional de error en la medida que pueda ser controlada al nivel de las unidades primarias, pues son las variaciones en la magnitud de los conglomerados primarios las que pueden influir sobre la validez de las fórmulas de estimación de errores, como también sobre los sesgos de la razón estimada.

Sin embargo, es importante que cada artículo quede identificado unívocamente dentro de una unidad monetaria dada, y a su vez cada unidad monetaria sea unívocamente establecida dentro de la población de unidades del conglomerado.

El listado de unidades dentro de cada establecimiento tendrá una estructura como la que aparece en la tabla siguiente, siendo $q_{hij(k)}$ y $p_{hij(k)}$ las cantidades y precios, respectivamente, del artículo *K*, en el período *t*, en el establecimiento *hij* ($k = 1, 2, 3 \ldots\ldots k_{hij}$).

Establecimiento hij

Artículo (o grupo)	1	2	3	4	5
1	$q_{t-1,1}$	$q_{t-1,1}\ p_{t-1,1}$	$p_{t-1,1}$	$q_{t,1}$	$q_{t,1}\ p_{t-1}$
2	$q_{t-1,2}$	$q_{t-1,2}\ p_{t-1,2}$	$p_{t-1,2}$	$q_{t,2}$	$q_{t2}\ p_{t,2}$
3	$q_{t-1,3}$	$q_{t-1,3}\ p_{t-1,3}$	$p_{t-1,3}$	$q_{t,3}$	
.					
.					
.					
.					
.					
K_{hij}	$q_{t-1,k_{hij}}$	$q_{t-1}\ p_{t-1,k_{hij}}$	$p_{t-1,k_{hij}}$	. . .	$q_{t,k}\ p_{t,k_{hij}}$

$$\sum_{k=1} q_{tk}\ p_{tk}.$$

Lógicamente, si se hubiera dispuesto de las medidas de importancia exactas, el total de la producción bruta $\sum_k (q_{tk}\, p_{tk})$ tendría que ser igual a N_{hij}, lo cual es poco probable que sucediera. Pero puesto que deben mantenerse iguales probabilidades de elección, no quedará otra solución que aplicar el intervalo $\dfrac{N'_{hij}}{c_{hij}}$ al total efectivo, $\sum_{k=1} q_{tk}\, p_{.tk}$

La diferencia fundamental radica en que en el primer caso se hubieran conseguido el número c_{hij} de unidades monetarias, en tanto que en el segundo tal cantidad aparecerá corregida por el factor

$$\frac{\sum q_{tk}\ p_{tk}}{N'_{hij}}$$

cuya magnitud será mayor o menor según el grado de aproximación a la medida real.

En el primer caso se tendría (siendo x_{hij} el número de unidades monetarias a seleccionar en el establecimiento hij),

$$E(x_{hij}) = E\left(N_{hij} \frac{c_{hij}}{N_{hij}} \right) = E(c_{hij}) = c_{hij}$$

y en el segundo:

$$E(x_{hij}) = E\left(\sum_k p_{tk}\, q_{tk} \frac{c_{hij}}{N'_{hij}} \right) = c_{hij}\, E\left(\frac{\sum_k p_{tk}\, q_{tk}}{N'_{hij}} \right)$$

haciendo $Q_t P_t = \sum q_{tk}\, p_{tk}$; $E(x_{hij}) = c_{hij}\, E\left(\frac{Q_t P_t}{N'_{hij}} \right)$

cualquier número al azar entre 1 y $\frac{N_{hij}}{c_{hij}}$, que determinará la primera selección, servirá además para decidir las selecciones siguientes, o sea

$$N_a$$

$$N_a + \frac{N'_{hij}}{c_{hij}}$$

$$N_a + \frac{2\,N'_{hij}}{c_{hij}}$$

$$N_a + (n_{hij} - 1) \frac{N'_{hij}}{c_{hij}},$$

donde N_a es el número al azar entre 1 y $\frac{N'_{hij}}{c'_{hij}}$

Cada uno de estos números, al ser aplicados sobre los totales acumulados de la columna 6 de la tabla anterior, fijarán el conjunto de x_{hij} unidades del establecimiento seleccionado.

Tal como puede advertirse, si las cantidades fueran notoriamente mayores que el tamaño de la unidad promedio, se produciría la situación de que algún artículo o grupos de artículos, al ser $(q_{tj}\ p_{tj}) \geqslant \dfrac{N'_{hij}}{C_{hij}}$ resultarían seleccionados con certeza.

Y puesto que no hay subselecciones dentro del artículo o del grupo de artículos, no habrá otra alternativa que tomar el conjunto, tal cual aparece en el listado. Inclusive, si un grupo de artículos tiene $(q_{tj}\ p_{tk}) \geqslant \dfrac{2N'_{hij}}{C_{hij}}$, ello implicaría la selección de dos unidades monetarias dentro del conglomerado; no obstante, de acuerdo a los procedimientos desarrollados, se obtendrá sólo una, pero de tamaño dos veces mayor que las restantes; de ahí pues las ventajas de forzar los artículos o grupos de artículos a unidades próximas al millón.

Al elegir una unidad cualquiera, de inmediato queda identificado un conjunto de artículos (bienes o servicios) que servirán de base para la estimación de la razón de depreciación. Para cada uno de los artículos que aparecen al final del período *t* se calculan los precios unitarios medios en el período t—1 dejando de lado aquellos artículos que están presentes en el año t sin haberlo estado en el t—1, al igual que aquellos que dejaron de registrarse entre el período t—1 y t. Obviamente, la base de cómputo de la unidad monetaria no será exactamente igual a $q_{tk}\ p_{tk}$. De este modo, el cociente para el grupo de artículos *K*

$$\frac{P_{t-1(k)}\ q_{t(k)}}{p_{t(k)}\ q_{t(k)}} = r_{k,}\ (_{hij})$$

medirá la razón de depreciación en el grupo k-ésimo[5]. Desde luego que no es otra cosa que la recíproca de un índice de Paasche pero

[5] En la acepción corriente del vocablo, la razón así definida sería en realidad el complemento de la tasa de depreciación, pero en el presente trabajo tiene el sentido siguiente: si un peso del año t—1 vale hoy r (siendo

con la diferencia de que se trata de un único artículo o de un conjunto homogéneo y donde el factor de ponderación

$$\frac{p_{tb(k)}\ q_{tb(k)}}{\sum_{b} p_{tb(k)}\ q_{tb(k)}}$$

son cantidades reales, observadas en el establecimiento. No es el caso aquí de factores de ponderación estimativos; antes bien, son los factores verdaderos en el subconjunto poblacional que constituye la unidad elegida (el sumatorio se refiere a los posibles diferentes artículos que componen el grupo k-ésimo). De igual modo, la razón de depreciación para el total de unidades en el establecimiento (suponiendo que cada grupo consta de un único artículo), será

$$r_{hij} = \frac{\sum_{k} p_{t-1k}\ q_{t,k}}{\sum_{k} p_{tk}\ q_{tk}}$$

Sin embargo, es conveniente dar a esta razón de depreciación una interpretación diferente. De cada grupo, $p_{tk}\ q_{tk}$, se extraerán una o más unidades monetarias de un millón de pesos, según sea su respectivo tamaño. Si el intervalo de selección es $\frac{N'_{hij}}{c_{hij}}$ y el tamaño del grupo,

$$n \times \frac{N'_{hij}}{c_{hij}} \leqslant p_{tk}\ q_{tk} \leqslant (n+1) \times \frac{N'_{hij}}{c_{hij}}$$

se obtendrán entonces entre n y n+1 unidades monetarias para representar a ese grupo, cada unidad de un valor constante e igual a un millón. Si se trata de una sola unidad, su razón de depreciación será la que resulte del grupo en su totalidad; si hay más de una unidad monetaria, cada una de ellas tendrá el mismo valor de depreciación que el observado en el conjunto.

---

0 r 1), ello implica que el valor que la unidad tenía en el t—1, se ha depreciado al valor, r en el período t; r es, por lo tanto, la razón de depreciación de la unidad.

Representado por x_{hijk} una cantidad cualquiera en el k-ésimo grupo ($x_{hijk} = 1$), e y_{hijk} el valor de una unidad del período t en el t—1, o sea,

$$0 \leqslant y_{hijk} \leqslant 1,$$

la razón de depreciación para tal unidad, será

$$r_{hijk} = \frac{y_{hijk}}{x_{hijk}}$$

De la misma manera, la razón de depreciación para el establecimiento,

$$r_{hij} = \frac{\sum_k y_{hijk}}{\sum_k x_{hijk}}$$

La cantidad $x_{hij} = \sum_k x_{hijk}$ es una variable aleatoria, puesto que es una función de la magnitud $x^+_{hij} = c_{hij} \dfrac{\sum q_{tk} p_{tk}}{N'_{hij}}$, número de observaciones a obtener del j-ésimo establecido.

x_{hij}, cantidad de unidades monetarias, es un número entero; x^+_{hij}, promedio de observaciones, es un número no necesariamente entero. Sea

$$x_{hij} \leqslant x^+_{hij} \leqslant x_{hij} + 1$$

luego, $\quad 0 \leqslant x^+_{hij} - x_{hij} \leqslant 1$

por otra parte,

$$x^+_{hij} = x_{hij} + x^+_{hij} - x_{hij}$$
$$x^+_{hij} = x_{hij} + d; \quad (0 \leqslant d \leqslant 1);$$

de acuerdo al procedimiento de selección, el número de unidades monetarias será x_{hij}, con una probabilidad igual a (1—d), o bien $x_{hij} + 1$, con una probabilidad igual a d.

2. ESTIMACIONES PUNTUALES Y DE RECORRIDO

2.1. *Estimación de la razón de depreciación*

Para el cálculo de la razón global de depreciación hay que agrupar el total de observaciones, obteniéndose

$$r = \frac{\sum_{h=1}^{H} \sum_{i=1}^{i_h} \sum_{j=1}^{j_{hi}} \sum_{k=1}^{k_{hij}} y_{hijk}}{\sum_{h=1}^{H} \sum_{i=1}^{i_h} \sum_{j=1}^{j_{hi}} \sum_{k=1}^{k_{hij}} x_{hijk}}$$

que es una estimación aproximadamente insesgada de la razón poblacional $R = \frac{Y}{X}$; donde X representa el total de unidades monetarias en el Universo e Y el total depreciado de tales unidades.

Ya se señaló que el intervalo de selección es factible de descomposición en tres factores, uno para cada etapa y relativo a un estrato cualquiera, es decir,

$$F_h = F_{ha} \times F_{hb} \times F_{hc}, \text{ donde,}$$

F_{hc} intervalo de selección de la tercera etapa
F_{hb} intervalo de selección de la segunda etapa
F_{ha} intervalo de selección de la primera etapa
Generalmente, si $F_h = F$ para todo h ($h = 1, 2, \ldots\ldots H$),

$$F = F_a \times F_b \times F_c$$

pero al haber asignado iguales probabilidades de selección a todas las unidades, y dejando de lado las diferencias entre medidas de importancia estimadas y reales, la cantidad

$$\frac{N_{hij}}{c_{hij}} \sum_{k} y_{hijk} \text{ es un estimador insesgado del total } Y_{hij}.$$

También

$$\sum_j \sum_k \frac{N_{hi}}{b_{hi}\ N_{hij}} \times \frac{N_{hij}}{c_{hij}}\ y_{hijk}$$

es un estimador insesgado del total Y_{hi} y, finalmente,

$$\sum_i \sum_j \sum_k \frac{N_h}{a_h\ N_{hi}} \times \frac{N_{hi}}{b_{hi}\ N_{hij}} \times \frac{N_{hij}}{c_{hij}}\ y_{hijk}$$

es un estimador insesgado de Y_h. O sea

$$E\,(F_h \sum_{i,j} y_{hij}) = E\,(F_h\ Y_h) = Y_h$$

y

$$E\,(\sum_h F_h\ y_h) = Y$$

Pero a los fines del cómputo de errores en la razón de depreciación hay que partir de los totales de cada unidad primaria,

$$y_{hi} = \sum_j \sum_k y_{hijk}$$

2.2. *Estimación de errores*

Para la estimación de varianzas hay que suponer que cada par de observaciones (y_{h1}' y_{h2}) proviene de un mismo estrato, formado por el acoplamiento de cada par consecutivo. De lo contrario, con un solo total de conglomerado primario por estrato, no sería posible estimar varianzas. El modelo hasta aquí descrito, basado en una sola unidad primaria por estrato, requiere este supuesto adicional sobre apareamiento de conglomerados.[6]

Con tal propósito deben establecerse cuáles serán los estratos que formarán parejas —lo cual tiene que ser hecho antes de la selección— y teniendo en cuenta un cierto criterio sobre homogeneidad con respecto a las características que más se relacionan con la variable o variables de estimación. Las ventajas del método radican en que permite profundizar la estratificación hasta el máximo posi-

[6] Kish, Leslie, (1965), "Survey Sampling", pp. 202.

ble. En el otro extremo, un mínimo de estratificación ocurriría cuando todas las unidades primarias provienen del mismo estrato.

Como resultado de este procedimiento, el total *a* de estrato se reduce a a/2, cada uno con dos selecciones primarias sin reemplazo y con probabilidades proporcionales al tamaño del agregado de unidades monetarias.

Desafortunadamente, las ventajas que se obtienen al seleccionar sin reemplazo —a veces no muy significativas— no pueden ser adecuadamente reflejadas por las fórmulas de los estimadores, ya que éstas han sido deducidas partiendo del supuesto de selección con reemplazo.

Para el cálculo de la varianza del total y_{h1} corresponde utilizar las siguientes fórmulas:

$$\frac{(1-f_h)}{a_h-1} \sum_{i=1}^{a_h} (y_{hi}-\overline{y}_h)^2$$

en la cual f_h es la recíproca de F_h

a_h es el número de unidades

$\overline{y}_h$ es la medida de a_h unidades en el estrato de *h*

Para la suma de a_h unidades primarias,

$$y_h = \sum_{i=1}^{a_h} y_{hi},$$

la fórmula anterior se convierte en la varianza de la suma de a_h elementos primarios.

$$\text{Var}\ (y_h) = \text{Var}\ (\Sigma\, Y_{hi}) = \frac{1-f_h}{a_h-1}\, a_h \sum_{i=1}^{a_h} (y_{hi}-\overline{y}_h)^2$$

y puesto que en este caso $a_h = 2$, para todo $h = 1, 2 \ldots H$

$$\text{Var}\ (y_h) = 2\,(1-f_h) \sum_{i=1}^{2} (y_{hi}-\overline{y}_h)^2$$

$$= 2\,(1-f_h)\ [(y_{h1}-\overline{y}_h)^2 + (y_{h2}-\overline{y}_h)^2]$$

$$= (1-f_h)\ (y_{h1}-y_{h2})^2$$

Igualmente, para la variable aleatoria x_h' las fórmulas serán

$$\mathrm{Var}\ (x_h) = (1 - f_h)\ (x_{h1} - x_{h2})^2\ ,\ y$$

$$\mathrm{Cov}\ (y_h\ x_h) = (1 - f_h)\ (x_{h1} - x_{12})\ (y_{h1} - y_{h2})$$

De la fórmula básica para la estimación de la varianza de la razón

$$\mathrm{Var}\ (r) \doteq \frac{1}{x^2}\ (\mathrm{Var}\ (y) + r^2\ \mathrm{Var}\ (x)\ -2\ \mathrm{Cov}\ (x\,y)).$$ Se llega a

$$\mathrm{Var}\ (r) \doteq \frac{1}{(\Sigma x_h)^2}\ \Big(\mathrm{Var}\,(\sum_h y_h) + r^2\ \mathrm{Var}\ (\sum_h x_h)\ -2\,r\ \mathrm{Cov}\ (\sum_h x_h\, y_h)\Big)$$

dado que $r = \dfrac{\Sigma\, y_h}{\Sigma\, x_h} = \dfrac{y}{x}$ y siendo las selecciones probabilísticamente

independiente entre estratos, es decir,

$$\mathrm{Cov}\ (y_h'\ y_{h+s}) = 0 \text{ para } s \neq 0,$$

luego

$$\mathrm{Var}\ (r) \doteq \frac{1}{x^2}\ [\Sigma\ \mathrm{var}\ (y_h) + r^2\ \Sigma\ \mathrm{var}\ (x_h) - 2r\ \Sigma\ \mathrm{cov}\ (x_h\, y_h)]$$

$$\doteq \frac{1}{x^2}\ [\sum_h\ [(1 - f_h)(y_{h1} - y_{h2})^2 + r^2\ (x_{h1} - x_{h2})^2 -$$

$$-2r(x_{h1} - x_h^2)\ x\ (y_{h1} - y_{h2})]]$$

$$\doteq \frac{1}{x^2} \sum_h (1 - f_h)\ [(y_{h1} - y_{h2}) - r\,(x_{h1} - x_{h2})]^2$$

$$\doteq \frac{(1-f)}{x^2} \sum_{h=1}^{H}\ [(y_{h1} - y_{h2}) - r\,(x_{h1} - x_{h2})]^2, \text{ si } f_h = f$$

$$\doteq \frac{(1-f)}{x^2} \sum_{h=1} (y_{h1} - y_{h2})^2 \text{ en caso que } x_{h1} = x_{h2}, \text{ para todo } h.$$

La condición $f_h = f$ es consecuencia lógica del carácter autoponderado del modelo; la segunda, $x_{h1} = x_{h2}$, es más difícil de cumplir, razón por la cual en lo que sigue no se la considerará.

Estas fórmulas son válidas tanto para la variable principal (depreciación de la unidad monetaria) como cualquier otra variable que se desee investigar, habida cuenta de los cambios que sean necesarios introducir en la base x.

Asimismo para cualquier otra característica, medida por la razón $r' = \dfrac{y'}{x'}$, la varianza de la diferencia $r—r'$ (que puede referirse a comparaciones entre tasas de depreciación correspondientes a dos grupos de artículos distintos), será

$$\text{var}\,(r - r') = \text{var}\,(r) + \text{var}\,(r') - 2\,\text{cov}\,(r, r'),\ \text{donde}$$

$$\text{cov}\,(r,r') = \frac{1}{x\,x'}(r\,r'\,\text{cov}\,(xx') - r\,\text{cov}\,(xy') - r'\,\text{cov}\,(x'y) + \text{cov}\,yy'))$$

término que se anulará en caso que ambas razones hayan sido computadas de selecciones independientes, pero en la medida que ambas proporciones son computadas a partir del mismo conjunto, $\text{cov}\,(r,r') \neq 0$.

Para las estimaciones de agregados totales y sus respectivos errores se presentan dos alternativas: a) inflar los totales observados con el intervalo global, o bien, b) corregir la razón estimada con un dato independiente del total poblacional de la base X.

En la primera alternativa, sea z una determinada característica cuyo agregado total en la población se desea estimar.
$(z = \sum_h, \sum_i, \sum_j, \sum_k z_{hijk})$ y F el intervalo global de selección, luego el estimador insesgado de z, agregado total en la población, será $F.z$, es decir $E(F.z) = Z$, en tanto que $E(F\,z_h) = Z_h$. La varianza del estimador estará dada por

$$\text{var}\,(F.z_h) = F^2\,\text{var}\,(z_h) = F^2\,(1 - f)\,(z_{h1} - z_{h2})^2,\ y$$

$$\text{var}\,(F.z) = F^2 \sum_h \text{var}\,(z_h) = F^2\,(1 - f) \sum_h (z_{h1} - z_{h2})^2$$

supuesto que cov $(z_{h1} z_{h2}) = 0$, ya que las selecciones en cada estrato son independientes de los restantes.

En la segunda alternativa se puede utilizar la razón estimada,

$$r' = \frac{z}{x} = \frac{\Sigma_i z_h}{\Sigma_i x_h},$$

corregida por un factor X, bien sea conocido de antemano o estimado de alguna fuente independiente. De esta forma, el factor $X.r'$ es un estimador aproximadamente insesgado del total poblacional Z, dado que

$$X\, r' = X \frac{z}{x} = X \frac{Fz}{Fx} = \frac{X}{Fx} . Fz$$

y siendo r' un estimador aproximadamente insesgado de $R' = \dfrac{Z}{X}$

que se simboliza por $E(r') \doteq R'$, luego

$$E(X.r') = X\,E(r') \doteq X \frac{Z}{X} = Z; \text{ es decir, } E(X r') \doteq Z$$

con una varianza dada por

$$\text{var } (x.r') = X^2 \text{ var } (r')$$

$$\doteq X^2 \frac{1}{x^2} (\text{var } (z) + r'^2 \text{ var}(x) - 2 r' \text{ cov } (z x)\ ).$$

Igualmente, para la media $\overline{Z}$, el estimador $\overline{X} r'$ será también aproximadamente insesgado, pues

$$F(\overline{X} r') = \overline{X}\, E(r') \doteq \overline{X} \frac{\overline{Z}}{\overline{X}} = \overline{X} \frac{\overline{Z}}{\overline{X}} = \overline{Z},$$

por

$$\text{var } (\overline{X}.r') \doteq \frac{\overline{X}^2}{x^2} (\text{var } (z) + r^2 \text{ var } (x) - 2 r' \text{ cov } (x z)\ ).$$

Este procedimiento particularmente útil cuando se quieren estimar agregados totales de una variable cualquiera que ha sido previamente registrada en cada unidad de observación (z). Sea por ejemplo, z, el total observado de las cantidades transadas de un cierto artículo o grupo de artículos; la estimación del agregado total, z, puede entonces ser calibrada con el total X, que se conoce o se estima independientemente. En los casos anteriores se ha supuesto que el total X, aun cuando sea estimado, no es una variable aleatoria y puede, por lo tanto, quedar fuera del operador E.

2.3. *Estimaciones de variación entre períodos*

Uno de los aspectos más salientes del método propuesto es de que para comparaciones con el período $t-k$ o con el período base, no es en modo alguno necesario que el conjunto de bienes y servicios del año base sea mantenido a través de años sucesivos. El encadenamiento de razones hace posible que las razones relativas al año base puedan calcularse con independencia de bienes y servicios.

Considérese, por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
&(\textit{base año } 0)\\
&V_1 = r_1\\
&V_2 = r_2\, r_1\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&V_t = r_t\, r_{t-1}\, r_{t-2} \ldots\ldots r_1
\end{aligned}
$$

El cálculo de estos índices sólo requiere que los bienes y servicios se mantengan de un año a otro, sin necesidad de permanecer por más de un período.

De las relaciones anteriores se desprende que $V_t = r_t\, V_{t-1}$, calculando las varianzas del segundo miembro, año a año y a partir del primero, la estimación del error del índice se simplificará considerablemente.

$$
\text{Siendo} \quad V_{t-1} = \frac{\overset{\pi}{j=1}\ y_{t-j}}{\overset{\pi}{j=1}\ x_{t-j}} = \frac{y'_{t-1}}{x'_{t-1}}\,, \quad V_t = \frac{y_t\, y'_{t-1}}{x_t\, x'_{t-1}}
$$

la estimación de errores en las comparaciones referidas al año base seguirán las mismas pautas ya indicadas en esta misma sección.

La investigación del sesgo de V_t asume en este caso especial importancia. Uno de los reparos más importantes que se opusieron contra los índices tradicionales era el carácter incontrolable de los errores sistemáticos que aparecían como función de las aproximaciones de los pesos estimados. Al igual que en el caso anterior, las razones de depreciación no están exentas de sesgos, pero la magnitud y composición de los mismos puede ser fácilmente controlable e incluso se los puede mantener por debajo de un nivel especificado de antemano si se tiene cuidado de observar ciertas precauciones en el diseño original. Controlando el coeficiente de variación del error de selección en la razón estimada, r_t, como también el coeficiente de variación del número de selecciones por conglomerado primario, ayudará enormemente a mantener el sesgo de V_t a un nivel prácticamente insignificante.

Conviene, no obstante, hallar un límite superior para la varianza V_t y luego investigar el sesgo de V_t, ya que de lo primero derivarán importantes indicaciones acerca de las modalidades de selección entre períodos.

Tal como se explicará más adelante, un valor máximo para la varianza de r_t no excederá la cantidad 0.50×10^{-3} (suponiendo un número de selecciones finales igual a 1.000 y un efecto de diseño no mayor de dos).

Sin afectar la validez de la generalización, se supondrá que la tasa de depreciación es constante, o sea que la unidad monetaria se deprecia en una misma medida en cada período, $r_t = r$ ($t = 1, 2, 3, \ldots\ldots$). También como consecuencia del supuesto anterior, se supondrá que var $(r_t) =$ var (r), o, en la notación que se usará en adelante, $S^2_{rt} = S^2_r$, supuesto que no es en manera alguna irreal puesto que en la práctica si las razones son iguales, si se mantiene el mismo número de selecciones finales y el mismo diseño original, las varianzas de las razones tendrán por fuerza que ser aproximadamente iguales. De modo que,

$$\mathrm{var}\,(r_2 r_1) = r_2^2\,\mathrm{var}\,(r_1) + r_1^2\,\mathrm{var}\,(r_2) + 2r_1 r_2\,\mathrm{cov}\,(r_1 r_2)$$

$$\leqslant r_2^2\,\mathrm{var}\,(r_1) + r_1^2\,\mathrm{var}\,(r_2) + 2r_1 r_2\,(\mathrm{var}\,(r_1)\,\mathrm{var}\,(r_2))^{1/2}$$ [7]

y conforme a los supuestos,

$$\mathrm{var}\,(r_2 r_1) \leqslant 4r^2 S_r^2$$

$$\mathrm{var}\,(r_3 r'_2) = r_3^2\,\mathrm{var}\,(r'_2) + (r'_2)^2\,\mathrm{var}\,(r_3) + 2r'_2 r_3\,\mathrm{cov}(r_3 r'_2)\quad (r'_2 = r_2 r_1)$$

$$\leqslant r^4 S_r^2\, 4 + r^4 S_r^2 + 2r^3\,(S_r^2 .\, 4r^2 S_r^2)^{1/2}$$

$$\leqslant 9r^4 S_r^2$$ y, finalmente,

$\mathrm{var.}\,(r_t r'_{t-1}) \leqslant t^2 r^{2(t-1)} S_r^2$, a lo cual se llega por el método de inducción

$\mathrm{var}\,(r_t r_{t-1}) \leqslant t^2 r^{2(t-1)} S_r^2$ es obviamente cierta para $t = 1$, suponiendo que también lo sea para $t-1$, es decir,

$\mathrm{var}\,(r_{t-1} r'_{t-2}) \leqslant (t-1)^2 r^{2(t-2)} S_r^2$ hay que demostrar, entonces, que también lo es para el valor *t*. En efecto,

$$\mathrm{var}\,(r_t r'_{t-1}) = r_t^2\,\mathrm{var}\,(r'_{t-1}) + (r'_{t-1})^2\,\mathrm{var}\,(r_t) + 2r_t r'_{t-1}\,\mathrm{cov}\,(r_t r'_{t-1})$$

$$\leqslant r^{2(t-1)}\,(t-1)^2 S_r^2 + r^{2(t-1)} S_r^2 + 2r^t\,(S_r^2\,(t-1)^2 S_r^2 r^{2(1-2)})^{1/2}$$

$$\leqslant r^{2(t-1)} S_r^2\,(\,(t-1)^2 + 1 + 2\,(t-1)\,)$$

$$\leqslant t^2 r^{2(t-1)} S_r^2,$$ luego también es cierto para *t*

Teniendo ahora en cuenta la varianza relativa de la razón, esto es,

$$\mathrm{var.\ rel.}\,(r_t r'_{t-1}) = \frac{\mathrm{var}\,(r_t r'_{t-1})}{(r_t r'_{t-1})^2}$$

$$\mathrm{var\ rel.}\,(r_t r'_{t-1}) = \frac{t^2 S_r^2}{r^2}$$

y el coeficiente de variación

$\mathrm{c.\,v.}\,(r_t r'_{t-1}) = \dfrac{t\,S_r}{r}$ se comprobará que la sucesión de términos generados por $t=1, 2, 3 \ldots\ldots$ crecerán conforme a una progresión aritmética de razón s_r / r. Y puesto que se esperaba

[7] Siendo $\mathrm{cov}\,(r_1 r_2) = Pr_1 r_2 Sr_1 Sr_2$, $|\,\mathrm{cov}\,(r_1 r_2)\,| \leqslant S_{r1} S_{r2}$

una varianza de r inferior a la cantidad 0.50 10^{-3}, que implica a su vez un coeficiente de variación de r inferior a 0.0224 dividido por 0,50[8], o sea c. v. (r) $\leqslant$ 0.05, ello traerá aparejado que al cabo del cuarto período ($t = 4$), el coeficiente de variación tendrá como límite superior el valor 0.20 (bajo los supuestos ya enunciados, claro está). Sin embargo, un error standard que llegue a ser un cuarto de la media, es desde luego una cantidad demasiado grande. Hasta qué punto esta afirmación depende de los supuestos iniciales es algo que puede intuirse modificando los valores relativos al número de selecciones y al efecto de diseño. Si se parte, por ejemplo, de $X = 16000$ y de un efecto diseño inferior a 1,5, el límite superior para el coeficiente de variación será 0.01, en cuyo caso serán necesarios 20 años antes que dicho coeficiente pueda llegar a constituir un valor tan alto como 0.20[9]. Un resultado semejante se obtendría con $x = 12000$ y un efecto diseño igual a 1, 2.

Todas estas consideraciones aconsejan partir de un número de selecciones inicialmente grande y cuidando al máximo todos los aspectos relacionados con la eficiencia del diseño a los efectos de obtener una varianza de estimación tan pequeña como sea posible.

Un procedimiento mucho más viable, por cuanto no implicaría aumentar sustancialmente el número de selecciones finales, consistiría en realizar las selecciones en cada período en forma independiente a fin de anular el término de la covarianza.

Por un procedimiento similar al anterior, se puede comprobar que al anularse las covarianzas,

$\text{var}\,(r_t r'_{t-1}) \leqslant t\, r^{2(t-1)} S^2_r$, en tanto que el coeficiente de variación,

c. v. $(r_t r'_{t-1}) \leqslant t^{1/2} \dfrac{S_r}{r}$ y en la hipótesis de que $\dfrac{S_r}{r}$ sea menor que 0.01,

---

[8] Se supone también que el término covarianza es positivo, por tratarse de observaciones de un mismo fenómeno en dos ocasiones diferentes. El valor $r = 0.50$ ha sido adoptado en razón de que hace máxima la cota superior, aun cuando no tenga efecto sobre c. v.

[9] si $\text{var}\,(r) \;/\; \dfrac{r(1-r)}{x} \leqslant 1{,}5$ y $x = 16000$, $\text{var}\,(r) \leqslant 0.37\ 10^{-3}/16$

c. v. (r) $\leqslant$ 0.01.

el límite superior del coeficiente se podría llegar a 0.20 sólo cuando $t^{1/2} = 20$, es decir cuando $t = 400$; se necesitarían 400 períodos antes de que el coeficiente de variación quede sujeto a una cota superior de 0.20.

Nótese además que el límite de la expresión var $(r_t r'_{t-1})$ cuando t tiende a infinito, es cero si $(0 \leqslant r \leqslant 1)$.

Toca ahora investigar el sesgo de la razón V_t. Tal como se demuestra en el apéndice, el sesgo de r_t, $B(r_t)$, tiene una cota superior en el producto del error standard de r_t por el coeficiente de variación de x_t. Simbólicamente,

$$
\begin{aligned}
B(r_t) = E(r_t) - R_t = \operatorname{cov}(r_t, x_t) \\
\leqslant \frac{Sr_t \, Sx_t}{X_t} \\
\leqslant Sr_t \text{ c. v. } (x_t)
\end{aligned}
$$

Si el coeficiente de variación del número de observaciones no excede de 0 - 20, lo cual por otra parte es una condición del diseño, y siendo Sr_t menor que $(0.50 \; 10^{-3})^{1/2}$, el valor del sesgo para una razón estimada no excederá de un quinto de esta última cantidad.

Sin embargo, cuando se consideran variaciones con relación al año base, las razones de cada período se componen sucesivamente multiplicando el factorial del período anterior por la razón correspondiente. Al igual que en el caso de la varianza de V_t, las dificultades se presentan en la última de las alternativas mencionadas.

Para ello se considerarán los mismos supuestos anteriores, constancia de las razones, igualdad de varianzas, etc. Si se parte de un valor provisorio para la razón $r_t = 0.50$ (al solo efecto de maximizar el valor de la cota de la varianza) y un efecto de diseño igual o menor que 2, la desigualdad

var $(r_t) \leqslant 0.50 \; 10^{-3}$ surge de la relación

$\dfrac{\text{var}(r_t)}{r(1-r)/x} \leqslant 2$ que mide la ineficiencia relativa de una selección por conglomerados con relación a una selección simple al azar;

circunstancia que deriva de la correlación intraclásica de las unidades primarias.

Partiendo de las razones de depreciación correspondientes a los dos primeros períodos y desechando por el momento los sesgos en cada una de las razones,

$$E\,(r_1 - E(r_1)\;(r_2 - E(r_2) = \mathrm{cov}\,(r_1 r_2)$$

$$E\,(r_1 r_2) \doteq Pr_1 r_2\; Sr_1\; Sr_2 + R_1 R_2$$

$$E\,(r_1 r_2) - R_2 R_1 = B\,(r_2 r_1) = B\,(r'_2) \doteq Pr_1 r_2\; S_1 S_2\,,$$

$$B\,(r'_2) \doteq |\mathrm{cov}\,(r_1 r_2)| \leqslant Sr_1\, Sr'_2$$

pero habiendo partido del supuesto de covarianza positiva,

$$B\,(r'_2) \doteq \mathrm{cov}\,(r_1 r_2) \leqslant Sr_1 Sr_2$$

El límite superior así hallado ha prescindido deliberadamente de las aproximaciones implícitas en $E(r_1)$ y $E(r_2)$ dada la escasa significación del término representado por cov $(r_1 r_2)$.

No obstante, para valores de *t* mayores de dos hay que tomar en cuenta especificamente estas aproximaciones, con lo cual la expresión para el sesgo del producto de razones se convierte en

$$E\,(r_1 r_2) = \mathrm{cov}\,(r_1 r_2) + (\,R_1 + B(r_1))\,(R_2\, B(r_2))$$

$$E\,(r_1 r_2) - R_1 R_2 = \mathrm{cov}\,(r_1 r_2) + R_1 B(r_2) + R_2 B(r_1) + B(r_1)\, B(r_2),$$

$B(r_2 r_1) \leqslant Sr_1 Sr_2 + R_1 B(r_2) + R_2 B\,(r_1) + B(r_1)\, B(r_2)$, puesto que $E\,(r_1) - R_1 = B(r_1), E(r_2) - R_2 = B(r_2)$ y $\mathrm{cov}\,(r_2 r_1) \leqslant Sr_1\, Sr_2$

Del mismo modo,

$$B\,(r_3 r_2 r_1) = B(r_3 r'_2) \leqslant Sr_3 Sr'_2 + R_3 B(r'_2) + R'_2\, B(r_3) + B(r_3)\, B('_2),$$

donde $r'_2 = r_2 r_1,\; R'_2 = R_2 R_1,$

y en general,

$$B(r_t\, r'_{t-1}) \leqslant Sr_t\, Sr'_{t-1} + R_t\, B(r'_{t-1}) + R'_{t-1}\, B(r_t) + B(r'_{t-1})\, B(r_t)$$

Introduciendo ahora los supuestos anteriores, esto es, $R_t = R$, para todo *t*, $r_t = r$, para todo *t*, y, como consecuencia lógica, $Sr_t = Sr$,

$R'_{t-1} = R^{t-1}$; además ya se ha demostrado que $Sr'_{t-1} = (t-1)\, r^{t-2}\, Sr$, luego

$$B(r_t r'_{t-1}) \leqslant S^2_r\,(t-1)\, r^{t-2} + RB(r_{t-1}) + R^{t-1} B(r) + B(r'_{t-1})\, B(r)$$

$$\leqslant S^2_r\,(t-1)\, r^{t-2} + (R+B(r))\, B(r'_{t-1}) + R^{t-1} B(r)$$

$$\leqslant S^2_r\,(t-1)\, r^{t-2} + b\, B(r'_{t-1}) + a\, R^{t-1}$$

donde $b = R + B(r)$ y $a = B(r)$

Del mismo modo que se hizo en el caso de la varianza, cabe ahora indagar qué magnitud asume el límite superior de $B(r_t r'_{t-1})$ cuando las selecciones se realizan de forma tal que resultan probabilísticamente independiente de un año a otro. Es únicamente en estas circunstancias que el estimador propuesto pone de relieve sus propiedades.

Cuando las selecciones son independientes, ya se demostró que

$\mathrm{var}\,(r_t r'_{t-1}) \leqslant t\; r^{2(t-1)}\, S^2_r$; igualmente se puede comprobar que

$B(r_t r'_{t-1}) = B(r'_{t-1})\,(R + B(r) + R^{t-1} B(r)$ haciendo $b = R + B(r)$ y $a = B(r)$,

$B(r_t r'_{t-1}) = b\, B(r'_{t-1}) + aR^{t-1}$ y por un razonamiento similar al anterior (reemplazando sucesivamente) se llega a

$$B(r_t r'_{t-1}) = b^{t-1}\, a + a \sum_{j=0} b^{t-j-2}\, R^{j+1} \text{ donde}$$

$$\sum_{j=0} b^{t-j-2}\, R^{j+1} = \frac{R^t - Rb^{t-1}}{R-b} \text{ por consiguiente}$$

$$B(r_t r'_{t-1}) = ab^{t-1} + a\,\frac{R^t - Rb^{t-1}}{R-b}$$

Nuevamente, para $0 \leqslant b < 1$, $0 \leqslant r < 1$ y $R - b \neq 0$, cuando *t* tiende a infinito,

$\mathrm{Lim}\, B(r_t r'_{t-1}) = 0$, inclusive el cuadrado de esta última expresión,

$$\lim_{t\to\infty} (B(r_t r'_{t-1}))^2 = \lim_{t\to\infty} \left(a^2 b^{2(t-1)} + 2a^2 b^{t-1} \frac{R^t - Rb^{t-1}}{R-b} + a^2 \left(\frac{R^t - Rb^{t-1}}{R-b}\right)^2\right) = 0$$

En resumen, cuando las selecciones entre años son probabilísticamente independientes,

$$\text{Lim var } (r_t r_{t-1}) = 0,$$

ya que a este valor tiende el límite superior de la varianza *t* (que por otra parte es una cantidad positiva) y también el cuadrado del sesgo de $r_t r'_{t-1}$, o sea $(B(r_t r'_{t-1}))^2$.

Ahora bien, si se considera una noción de consistencia en el tiempo, puede afirmarse que el estimador $r_t r'_{t-1}$ es *consistente,* es decir

$$\lim_{t\to\infty} E_t (r_t r'_{t-1} - R_t R'_{t-1}) = 0$$

Pero además $\lim_{t\to\infty} \text{var } (r_t r'_{t-1}) = 0$, por lo que el desvío cuadrático medio,

$$E_t (r_t r'_{t-1} - R_t R'_{t-1})^2 = E_t (r_t r'_{t-1} - E(r_t r'_{t-1}))^2 + $$
$$+ (E_t (r_t r'_{t-1}) - R_t R'_{t-1})^2 = \text{var } (r_t r'_{t-1}) + (B(r_t r'_{t-1}))^2$$

tiende a cero a medida que *t* tiende a infinito.

La convergencia al valor cero en desvío medio cuadrático implica que el estimador de la razón de depreciación tiene también la propiedad de *consistencia en error cuadrático,* en función de la longitud del período de comparación; propiedad ésta que no es muy frecuente encontrar en todo estimador. La única condición para la existencia de tal propiedad es de que las selecciones sean probabilísticamente independientes entre años sucesivos. Los supuestos sobre constancia de las razones y de las varianzas afectan a la simplicidad de la demostración, mas no a la existencia de la mencionada propiedad.

La cualidad de consistencia en error cuadrático, que es un tipo de consistencia fuerte, sirve para poner de relieve otra de las ventajas del método propuesto. Como se recordará, en el capítulo I quedó establecido de qué forma los sesgos en los índices tradicionales se convierten en una función de la longitud del período fijado como base, mayor es la frontera superior del sesgo, sin que exista la posibilidad de obviar tal inconveniente por medio de cambios de base o elaboración de nuevos índices. Es una especie de deformación ingénita que cuando se presenta no hay forma posible de controlarla.

La única alternativa es utilizar otro tipo de índices que tengan, si no la propiedad de consistencia en cuadrado medio, la cualidad de consistencia simple que por lo menos asegura la ventaja de estimaciones progresivamente insesgadas a medida que se alejan de la base.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. Banerjee, K. S., "A generalization of Stuvel's index number formula"; *Econometrica,* Vol. 27, nº 4, octubre 1959, p. 676.
2. Bureau of the Census, "The Current Population Survey"; *Technical Paper,* nº 7, 1963.
3. Cochran, W. G., *Sampling Techniques,* Segunda edición; New York, John Wiley & Sons, 1963.
4. Delanius, T., "The problem of optimum stratification"; *Skandinavisk Aktuarietidskrift.* 34, 1957.
5. Deming, W. E., *Sample Design in Business Research*; New York, John Wiley & Sons, 1960.
6. Ericson, W. A., *Optimal sample design with Nonresponse;* University of Michigan, (mimeo), 1966.
7. Fisher, Irving, *The Making of Index Numbers*; New York: Houghton Miffin Co., tercera edición, 1927.
8. Goodman, R. and Kish, L., "Controlled Selection, a technique in probability sampling"; *JASA, 45,* pp. 350-372, 1950.
9. Hansen, M. H., Hurwitz, W. N., and Madow, W. G., *Sample Survey Methods,* Vol. I and II; New York: John Wiley & Sons, 1953.
10. Hess, I., Sethi, V. K. and Balakrishan, T. R., *Stratification, a practical investigation;* Survey Research Center, Univ. of Mich.
11. Hess, I., *The Controlled Selection Technique;* Survey Research Center, Univ. of Mich., 1963.
12. Kish, L., *Survey Sampling;* New York: John Wiley & Sons, 1965.
13. Kish. L., and Hess, I., *On variances of ratios and their differences in multistage sampling*; *JASA, 54,* pp. 416-446, 1959.
14. Kish, L., "Variance for indexes from complex samples"; *Proceedings of the Social Statistics Section,* ASA, 190-199, 1962.
15. Raiffa, H. and Schlaifer, R., *Applied Statistical Decision Theory;* Grad. School of Business Administration, Boston, 1961.
16. Stuvel, G., "A new index number formula"; *Econometrica,* Vol. 25, nº 1, enero, 1957, p. 154.
17. Sukhatme, P. V., *Sampling Theory of Surveys with Applications;* Ames, Iowa: Iowa State College Press, 1954.