REVISTA DE ECONOMÍA Y ESTADÍSTICA
INSTITUTO DE ECONOMÍA Y FINANZAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
ISSN 0034-8066

OPEN ACCESS

ARTÍCULOS

# Generalización del concepto de productividad al campo macroeconómico

Fausto Toranzos

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 11, No. 1-2 (1967): 1º y 2º Trimestre, pp. 175-181.

http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3626

# GENERALIZACION DEL CONCEPTO DE PRODUCTIVIDAD AL CAMPO MACROECONOMICO

FAUSTO I. TORANZOS

El objetivo de este trabajo es extender el concepto de productividad, que es notorio en el terreno microeconómico, al nivel macroeconómico, es decir, a toda la economía de un país o región, en su conjunto, o a un sector de ella o a un complejo industrial. Realizaremos este propósito utilizando operaciones entre modelos económicos lineales para conseguir encontrar índices capaces de medir la evolución de la relación entre factores de la actividad de la producción (inputs) y el complejo correspondiente de productos (outputs):

En lo que sigue utilizaremos además de las operaciones comunes entre matrices y vectores, la "multiplicación afín", operación matricial que hemos introducido en un trabajo anterior. *

Dadas las matrices

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots\dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots\dots\dots a_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots\dots\dots\dots a_{mn} \end{Vmatrix} ; \qquad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \dots\dots\dots\dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots\dots\dots\dots b_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{m1} & b_{m2} \dots\dots\dots\dots b_{mn} \end{Vmatrix}$$

* TORANZOS, F. I.: "Modelo lineal de expansión económica equilibrada". (Revista de Ciencias Económicas. Bs. Aires, 1962. Serie IV Nº 18).

ambas del mismo número $m$ de filas y $n$ de columnas; llamaremos multiplicación afín de $A$ por $B$ y la indicaremos con

$$A \wedge B = C$$

a la operación que da como resultado la matriz $C$ del mismo nú mero de filas y columnas que $A$ y $B$, tal que, si llamamos $c_{ij}$ al elemento genérico de ella, sea

$$c_{ij} = a_{ij} \quad b_{ij}$$

La multiplicación afín puede realizarse también entre dos vectores horizontales o dos verticales, siempre que ambos tengan el mismo número de componentes

$$\left\| a_1 , a_2 , \ldots, a_n \right\| \wedge \left\| b_1 , b_2 , \ldots, b_n \right\| = \left\| a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n \right\|$$

y análogamente para verticales.

Esta operación nos permitirá expresar detalladamente las modificaciones cuantitativas y tecnológicas de la producción de un país cuando se comparan dos períodos.

Es conocido que, si una industria al producir el item $j$ en la cantidad $X_j$, utiliza el factor $i$ en la cantidad $X_{ij}$, se llama productividad $\pi_{ij}$ del factor $i$ respecto al producto $j$, al cociente

$$\pi_{ij} = \frac{X_j}{X_{ij}}$$

que significa: $\pi_{ij}$ es la cantidad del producto $j$ que se obtiene utilizando una unidad del factor $i$. Si $X_j$ y $X_{ij}$ vienen medidos en unidades físicas $\pi_{ij}$ suele llamarse *coeficiente técnico de productividad*; si vinieran medidos en unidades monetarias $\pi_{ij}$ suele llamarse *coeficiente económico de productividad.*

De lo dicho resulta inmediatamente que

$$\pi_{ij} = \frac{1}{a_{ij}}$$

siendo $a_{ij}$ el elemento correspondiente de la matriz interindustrial de Leontief.

Procuraremos en lo que sigue, encontrar una expresión generalizada de $\pi$, haciéndolo aplicable al campo macroeconómico.

Primeramente introduciremos la notación necesaria:

Sean $$x(t) = \left\| x_1(t) \;,\; x_2(t) \;,\; \ldots\ldots \;,\; x_n(t) \right\|$$

$$y(t) = \left\| y_1(t) \;,\; y_2(t) \;,\; \ldots\ldots \;,\; y_n(t) \right\|$$

respectivamente, los vectores de producción nacional (sin incluir las importaciones) y demanda final, correspondientes a un país en el año $t$, para una determinada clasificación de los factores y productos en $n$ sectores o industrias. Sea además la matriz interindustrial estructurada según el concepto de Leontief para el mismo país y año:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & & \ldots & \ldots \\ \ldots\ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Indicando con $I$ la matriz unitaria de orden $n$, la relación fundamental de Leontief para el año $t$ es

$$[I - A(t)] \,.\, x(t) = y(t) \quad ; \quad [I - A(t)] \,.\, [x(t)\, \Delta p(t)] = y(t) \qquad (1)$$

según que las componentes de $x(t)$ vengan expresadas en unidades monetarias o físicas.

Indicamos con $J_{mn}$ la matriz con *m* filas y *n* columnas en la cual todos los términos son la unidad. En particular $J'_{1n}$ es el vector

$$\| 1, 1, 1, \ldots, 1. \|$$

En lo que sigue será necesario comparar dos períodos, que llamaremos período *o* y período *t*. La matriz tecnológica y los vectores de producción y de demanda final para el período *t* se expresarán utilizando los correspondientes al período *o* en la siguiente forma

$$A(t) = A(o)\Lambda\Gamma \; ; \; x(t) = x(o)\Lambda s \; ; \; y(t) = y(o)\Lambda r \qquad (2)$$

siendo

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} j_{11} & \ldots & j_{1n} \\ \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ j_{n1} & \ldots & j_{nn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1+\alpha_{11} & \ldots & 1+\alpha_{1n} \\ \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ 1+\alpha_{n1} & \ldots & 1+\alpha_{nn} \end{Vmatrix} = J_{nn} + \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix} = J_{nn} + \Delta$$

$$s = \begin{Vmatrix} s_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1+\sigma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1+\sigma_n \end{Vmatrix} = J_{1n} + \begin{Vmatrix} \sigma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_n \end{Vmatrix} = J_{1n} + \sigma$$

$$r = \begin{Vmatrix} r_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vdots \\ r_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1+\rho_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1+\rho_n \end{Vmatrix} = J_{1n} + \begin{Vmatrix} \rho_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vdots \\ \rho_n \end{Vmatrix}$$

las segundas notaciones son interesantes si se tiene en cuenta que los valores $j_{ij}$, $s_i$, $r_i$ son próximos a la unidad, resultando por lo tanto los $\alpha_{ij}$, $\sigma_i$, $\rho_i$, números pequeños que pueden ser positivos o negativos.

*Concepto de productividad macroeconómica.*

Definiremos el coeficiente macroeconómico de productividad en el año $t$ correspondiente a la economía de un país, a la razón entre el valor del complejo de los "outputs" y el valor del complejo de los correspondientes "inputs", en fórmulas

$$\pi(t) = \frac{p'(t) \, . \, x(t)}{p'(t) \, . \, A(t) \, . \, x(t)} = \frac{\Sigma \, p_i \, x_i}{\Sigma\Sigma \, p_i \, a_{ij} \, x_j} \qquad (3)$$

siendo $p$ el vector de precios, que supondremos fijo. Recordamos que según lo dicho anteriormente, en $x(t)$ no se incluyen las importaciones.

Si el vector $x$ viniera expresado en unidades monetarias, la fórmula correspondiente a los coeficientes de productividad será

$$\pi(t) = \frac{J'_{1,n} \, . \, x(t)}{J'_{1,n} \, . \, A(t) \, . \, x(t)} = \frac{\Sigma \, x_i}{\Sigma\Sigma \, a_{ij} \, x_j} \qquad (4)$$

*Productividad de un factor.*

En particular, podrá establecerse la productividad correspondiente a la utilización de un solo factor. Por ejemplo, si es $w = w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n$ el vector trabajo, el coeficiente correspondiente será, si indicamos con $p_w$ el salario medio en la unidad de tiempo:

$$\pi_w = \frac{p \, . \, x}{p_w \, (J_{nn} \, . \, A \, . \, W)} = \frac{\Sigma \, p_i \, x_i}{p_w \, \Sigma \, a_{ij} \, w_j}$$

Análogamente para capital y otros factores.

También es posible establecer coeficientes de productividad correspondientes a la producción de un grupo de factores y productos.

*Indices de productividad.*

Conocidos los coeficientes de productividad, es posible construir *índices macroeconómicos de productividad* que describan la evolución en el tiempo de la productividad macroeconómica. Para ello tomamos un período $o$ como base, y construimos el índice correspondiente a un período cualquiera $t$ mediante la siguiente fórmula

$$I_p(t) = \frac{\pi(t)}{\pi(o)} \times 100 = \frac{p' . (x(o) \Lambda s)}{p' . x(o)} . \frac{p' . A(o) . x(o)}{p' . (A(o) \Lambda \Gamma) (x(o) \Lambda s)} \times$$

$$\times 100 = \frac{(\Sigma p_i x_i(o) s_i) . (\Sigma\Sigma p_i a_{ij} x_j(o))}{(\Sigma p_i x_i(o)) . (\Sigma\Sigma p_i a_{ij} j_{ij} x_j(o) s_j} \times 100$$

la evolución en el tiempo de este índice nos proporcionará una medida de la evolución tecnológica de un país.

*Productividad y expansión económica.*

La variación (expansión o contracción) económica puede provenir de la variación del volumen de los factores o de la variación de la productividad. A la variación proveniente de la primera causa llamaremos *expansión* (o contracción) *del nivel de la actividad industrial;* a la variación proveniente de la segunda causa llamaremos, *mejoramiento* (o retraso) *tecnológico.* Nuestro estudio tiende a construir índices que puedan medir, separadamente, cada una de estas dos componentes del desarrollo económico.

Siendo $\delta_{ij}$ el símbolo de Kronecker, es decir,

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{si } i = j \quad ; \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

es, $$Y(o) = p' . (I - A) . x(o) = \Sigma\Sigma p_i (\delta_{ij} - a_{ij}) x_j(o) \qquad (5)$$

el producto bruto nacional (p.b.n.) en el año $o$. Análogamente es

$$Y(t) = p' . [I - (A \Lambda \Gamma)] . (x(o) \Lambda s) =$$
$$= \Sigma\Sigma p_i (\delta_{ij} - a_{ij} \gamma_{ij}) . (x_j s_j) \qquad (6)$$

el correspondiente al año $t$, suponiendo los precios constantes.

Teniendo en cuenta (1), (2), (5) y (6):

$$\Delta Y = Y(t) - Y(o) = p' . [I - (A \Lambda \Gamma)] \ . \ (x(o)\Lambda s) -$$

$$- p'(I - A) \ . \ x(o) = p'(A \Lambda \Delta) \ . \ x(o) +$$

$$+ p'(I - A) \ (x(o) \Lambda \sigma) - p' \ . \ (A \Lambda \Delta) \ . \ (x(o) \Lambda \sigma)$$

de allí resulta la variación relativa del p.b.n.:

$$\frac{\Delta Y}{Y(o)} = \frac{p'(A \Lambda \Delta . x(o)}{p'(I - A) . x(o)} + \frac{p' . (I - A) . (x(o) \Lambda \sigma)}{p'(I - A) . x(o)} - \frac{p' . (A \Lambda \Delta) . (x(o) \Lambda \sigma)}{p' . (I - A) . x(o)} =$$

$$= \quad V_T \quad + \quad V_N \quad + \quad V_{TN}$$

El término $V_T$ proviene de la variación de la productividad. $V_N$ proviene de las variaciones de nivel. $V_{TN}$ proviene de la influencia combinada de ambas variaciones. Debe tenerse en cuenta que en el tercer término figuran como factores en cada término $\alpha_{ij}$, y $\sigma_j$ y que ambos son pequeños, por lo cual el término $V_{TN}$ es en general pequeño respecto a los otros dos.

Resumiendo lo anterior, podemos afirmar que la influencia de la variación tecnológica viene medida en su parte fundamental por $V_T$ y la variación de nivel por $V_N$.