REVISTA DE ECONOMÍA Y ESTADÍSTICA
ISSN 0034-8066
INSTITUTO DE ECONOMÍA Y FINANZAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

ARTÍCULOS

Desarrollo de un determinante por los elementos de la diagonal principal

Rolando F. Orban

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 11, No. 1-2 (1967): 1º y 2º Trimestre, pp. 147-154.

http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3624

DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL PRINCIPAL

ROLANDO F. ORBAN

Nos proponemos obtener un desarrollo de un determinante en el que se destaquen los elementos pertenecientes a la diagonal principal. Para ello necesitamos estudiar previamente los siguientes puntos:

a) Número de permutaciones que pueden formarse con los elementos 1, 2, ..., n con la condición de que un elemento cualquiera r no ocupe el lugar r°. O sea que el 1 no debe ocupar el primer lugar, el 2 no debe ocupar el segundo lugar, ..., n no debe ocupar el n° lugar. El número de permutaciones así formadas será simbolizado por P'_n.

Para facilitar la exposición supondremos siempre que se trata de permutaciones formadas con los primeros n números naturales, aunque puede tratarse de n elementos cualesquiera, entre los cuales se establece un determinado orden de sucesión.

Determinaremos P'_n por diferencia entre el número total de permutaciones de n elementos, $P_n = n!$, y el de permutaciones de n elementos con la condición de que por lo menos uno de ellos ocupe su lugar.

Veamos en primer lugar el número $P_n^{(1)}$ de permutaciones de los elementos 1, 2, ..., n con la condición de que uno de ellos y sólo uno ocupe su lugar. Si colocamos el 1 en el primer lugar y los restantes elementos 2, 3, ..., n en todas las posiciones posibles de modo que ninguno de ellos ocupe su lugar, tendremos P'_{n-1} permutaciones en las cuales el 1 y sólo el 1 ocupa su lugar. Del mismo modo, tendremos P'_{n-1} permutaciones en las cuales el 2 y sólo el 2 ocupa su lugar, ..., P'_{n-1} permutaciones en las cuales n y sólo n ocupa su lugar.

En consecuencia: $P_n^{(1)} = C^1_n \; P'_{n-1}$.

Ahora determinaremos el número $P_n^{(2)}$ de permutaciones de los elementos 1, 2, ..., n con la condición de que dos de ellos y sólo dos ocupen su lugar. Si colocamos 1 y 2 en sus respectivos lugares y los restantes elementos en todas las posiciones posibles de modo que ninguno de ellos ocupe su lugar, tendremos P'_{n-2} permutaciones de n elementos en las cuales 1 y 2 y sólo ellos ocupan su lugar. Cada una de las restantes combinaciones binarias de los n elementos 1, 2, ..., n también dan origen a P'_{n-2} permutaciones de n elementos en las cuales dos de ellos y sólo dos ocupan su lugar.

Por lo tanto: $P_n^{(2)} = C^2_n \; P'_{n-2}$.

Con idéntico razonamiento se demuestra que: $P_n^{(3)} = C^3_n \, P'_{n-3}$.

Así sucesivamente llegaremos a: $P_n^{(n-2)} = C_n^{n-2} \; P'_2$.

No existe ninguna permutación en la cual $n - 1$ elementos y sólo $n - 1$ ocupen su lugar, porque si $n - 1$ elementos ocupan su lugar, el restante también deberá ocupar su lugar. Luego: $P_n^{(n-1)} = 0$.

Por último, el número de permutaciones de los n elementos 1, 2, ..., n de modo que todos ellos ocupen su lugar es evidentemente una sola: $P_n^{(n)} = 1$.

La suma:

$$P_n^{(1)} + P_n^{(2)} + \ldots + P_n^{(n)} = C^1_n \; P'_{n-1} + C^2_n \; P'_{n-2} + \ldots + 1 \quad (1)$$

nos da el número de permutaciones de los n elementos 1, 2, ..., n con la condición de que uno de ellos por lo menos ocupe su lugar.

En consecuencia, P'_n está dada por:

$$P'_n = P_n - C^1_n \; P'_{n-1} - C^2_n \; P'_{n-2} - \ldots - 1 \quad (2)$$

Como se ve, hemos obtenido una fórmula recurrente. Como no hay ninguna permutación de un elemento en la cual éste no ocupe su lugar, tenemos: $P'_1 = 0$. Sin dificultad se ve que: $P'_2 = 1$. Aplicando la fórmula (2) deducimos:

$$P'_3 = 2 \;\; ; \; P'_4 = 9 \;\; ; \; P'_5 = 44 \;\; ; \; \ldots\ldots$$

b) Si en una permutación cualquiera se suprimen los elementos que ocupan su lugar, se obtiene una permutación de la misma clase que la dada.

Sea una permutación p formada con los primeros n números naturales en la cual r ocupa su lugar, es decir el lugar r°. Supongamos que en p hay s elementos menores que r situados a su derecha; en consecuencia, habrá s elementos mayores que r situados a su izquierda, porque cada vez que se traslada un elemento menor que r de su izquierda a su derecha, forzosamente habrá que trasladar uno mayor que r de su derecha a su izquierda. Tendremos entonces s inversiones que r forma con los elementos menores que él situados a su derecha, y otras s inversiones que forman con r los elementos mayores que éste situados a su izquierda. Si es v el número de inversiones de la permutación p, al quitar de ésta el elemento r, obtenemos una permutación p′, de n—1 elementos, que tiene v — 2s inversiones. Luego, p y p′ son de la misma clase.

c) Determinante cuya diagonal principal está formada por ceros. Símbolo y número de términos.

El determinante

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \ldots\ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & 0 \end{vmatrix}$$

puede simbolizarse en la siguiente forma:

$$D = \sum (-1)^v a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots\ldots a_{ni_n} \quad ; \quad i_r \neq r \qquad (3)$$

extendiéndose la suma a las permutaciones $i_1 i_2 \ldots\ldots i_n$ de los números 1, 2, ..., n para las cuales sea $i_1 \neq 1$, $i_2 \neq 2, \ldots\ldots$, $i_n \neq n$. Es decir, que no hay en la suma (3) ningún término que tenga uno o más factores con subíndices iguales. En consecuencia D tiene tantos términos como permutaciones pueden formarse con los elementos 1, 2, ..., n con la condición que 1 no ocupe el primer lugar, 2 no ocupe el segundo lugar, ..., n no ocupe el nº lugar; o sea P'_n términos.

En la fórmula (3), v designa el número de inversiones que presentan los segundos subíndices.

Con estos elementos, estamos en condiciones de estudiar el:

Desarrollo de un determinante por los elementos de la diagonal principal.

Consideremos el determinante:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot \ldots\ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot \ldots\ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^v a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots\cdots a_{ni_n}$$

En el polinomio A consideramos todos los términos que contienen el elemento a_{11}, siempre que los demás factores tengan subíndices distintos, es decir, los términos de la forma:

$$(-1)^v a_{11} a_{2i_2} \cdots\cdots a_{ni_n} \quad , \quad i_r \neq r$$

siendo v el número de inversiones de la permutación $1 i_2 \ldots\ldots i_n$ y también el de la permutación $i_2 \ldots\ldots i_n$ porque 1 no forma ninguna inversión. En todos estos términos extraemos a_{11} como factor común y obtenemos:

$$a_{11} \sum (-1)^v a_{2i_2} \cdots\cdots a_{ni_n} \quad ; \quad i_r \neq r$$

De acuerdo a la fórmula (3), esta expresión es igual a:

$$a_{11} \begin{vmatrix} 0 & a_{23} \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{32} & 0 \ldots\ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot \ldots\ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot \ldots\ldots & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} \ldots\ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Si en A consideramos ahora todos los términos de la forma

$$(-1)^{v}\, a_{1i_1} a_{22} a_{3i_3} \ldots\ldots a_{ni_n} \quad ; \quad i_r \neq r$$

y en todos ellos extraemos el factor común a_{22}, tenemos:

$$a_{22} \sum (-1)^{v}\, a_{1i_1} a_{3i_3} \ldots\ldots a_{ni_n} \quad ; \quad i_r \neq r$$

porque según hemos visto en el punto b), las permutaciones $i_1\, 2 i_3 \ldots\ldots i_n$ y $i_1 i_3 \ldots\ldots i_n$ son de la misma clase pues la segunda se obtiene de la primera suprimiendo en ésta un elemento que ocupa su lugar. De acuerdo a la fórmula (3), esta suma es igual a:

$$a_{22} \begin{vmatrix} 0 & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{31} & 0 & \ldots\ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n3} & \ldots\ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Así sucesivamente llegaremos a:

$$a_{nn} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & 0 & \ldots\ldots & a_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots\ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Luego, siempre en el desarrollo de A, consideramos todos los términos que contienen a_{11} y a_{22}, siempre que los demás elementos tengan subíndices distintos, es decir, los términos de la forma:

$$(-1)^{v}\, a_{11} a_{22} a_{3i_3} \ldots\ldots a_{ni_n} \quad ; \quad i_r \neq r$$

y en ellos extraemos los factores comunes a_{11} y a_{22} :

$$a_{11}a_{22} \sum (-1)^v a_{3i_3} \ldots\ldots a_{ni_n} \quad ; \quad i_r \neq r$$

pues, según b), las permutaciones $12i_3 \ldots\ldots i_n$ y $i_3 \ldots\ldots i_n$ son de la misma clase. Esta suma es igual, según la fórmula (3), a:

$$a_{11}\, a_{22} \begin{vmatrix} 0 & a_{34} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ a_{43} & 0 & \ldots\ldots & a_{4n} \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n3} & a_{n4} & \ldots\ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Continuaremos destacando del mismo modo los productos binarios de los elementos que constituyen la diagonal principal de A, hasta llegar a:

$$a_{n-1,n-1}\ a_{nn} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1,n-2} \\ a_{21} & 0 & \ldots\ldots & a_{2,n-2} \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \ldots\ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Luego haremos el mismo trabajo con los productos ternarios, ..., (n — 2)-arios, n-arios de los elementos que constituyen la diagonal principal de A. No escribimos (n — 1)-arios porque en el desarrollo de A no existe ningún término que tenga n — 1 factores de la diagonal principal y el factor restante no perteneciente a ella, por definición de determinante. El único producto n-ario es: $a_{11}\, a_{22} \ldots\ldots a_{nn}$.

Quedan por último los términos cuyos factores son elementos de subíndices distintos, es decir, los de la forma:

$$(-1)^v a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots\ldots a_{ni_n} \quad ; \quad i_r \neq r$$

La suma de estos términos, según (3), constituye el desarrollo del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots\dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & 0 \end{vmatrix}$$

En consecuencia, podemos escribir en definitiva, el determinante A descompuesto en la siguiente forma:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 0 & a_{23} & \dots\dots & a_{2n} \\ a_{32} & 0 & \dots\dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots\dots & 0 \end{vmatrix} + \dots\dots +$$

$$+ a_{nn} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots\dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & 0 & \dots\dots & a_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots\dots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & a_{34} & \dots\dots & a_{3n} \\ a_{43} & 0 & \dots\dots & a_{4n} \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ a_{n3} & a_{n4} & \dots\dots & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots\dots + \begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots\dots & a_{1,n-2} \\ a_{21} & 0 & \dots\dots & a_{2,n-2} \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \dots\dots & 0 \end{vmatrix} + \dots\dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots\dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots\dots & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & a_{n-1,n} \\ a_{n,n-1} & 0 \end{vmatrix} + \dots\dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & a_{44} & \dots\dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots\dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$
+ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \ldots\ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & 0 \end{vmatrix}
$$

Le damos forma de determinante a los productos binarios, ..., n-arios de los elementos que constituyen la diagonal principal de A con el objeto de poder enunciar la siguiente regla:

Un determinante A es igual a la suma de todos sus menores principales posibles, en los que se reemplazan todas las a_{ij}, para $i \neq j$, por ceros, multiplicados por sus respectivos menores complementarios, en los cuales se reemplazan todas las a_{ij}, para $i = j$, por ceros, más el determinante que se obtiene al reemplazar en A todas las a_{ij} para $i \neq j$, por ceros, más el determinante que se obtiene al reemplazar en A todos las a_{ij}, para $i = j$, por ceros.