



ARTÍCULOS

Determinación de la ley de distribución de la estadística Chi Cuadrado

Guido O. Liserre

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 11, No. 1-2 (1967): 1º y 2º Trimestre, pp. 123-126.

<http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3622>



La Revista de Economía y Estadística, se edita desde el año 1939. Es una publicación semestral del Instituto de Economía y Finanzas (IEF), Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Valparaíso s/n, Ciudad Universitaria. X5000HRV, Córdoba, Argentina.

Teléfono: 00 - 54 - 351 - 4437300 interno 253.

Contacto: rev_eco_estad@eco.unc.edu.ar

Dirección web <http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/index>

Cómo citar este documento:

Liserre, G. (1967). Determinación de la ley de distribución de la estadística Chi Cuadrado. *Revista de Economía y Estadística*, Tercera Época, Vol. 11, No. 1-2: 1º y 2º Trimestre, pp. 123-126.

Disponible en: <http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3622>

El Portal de Revistas de la Universidad Nacional de Córdoba es un espacio destinado a la difusión de las investigaciones realizadas por los miembros de la Universidad y a los contenidos académicos y culturales desarrollados en las revistas electrónicas de la Universidad Nacional de Córdoba. Considerando que la Ciencia es un recurso público, es que la Universidad ofrece a toda la comunidad, el acceso libre de su producción científica, académica y cultural.

<http://revistas.unc.edu.ar/index.php/index>

DETERMINACION DE LA LEY DE DISTRIBUCION DE LA ESTADISTICA CHI CUADRADO (χ^2)

GUIDO O. LISERRE

Resumen: Con este método no pretendemos dar un método nuevo, sino que partiendo de la Ecuación Diferencial de Karl Pearson (E.D.K.P.) encontramos la función de distribución del χ^2 .

Partiendo de la definición de la Estadística χ^2 , determinamos la función generatriz (FG) de la misma. Con esa FG calculamos los momentos de la Estadística χ^2 , y encontramos una ley de recurrencia. Determinamos así los cinco primeros momentos naturales que pasamos a momentos centrados.

Una vez obtenidos esos momentos centrados estamos en condiciones de calcular los parámetros de la E.D.K.P. y determinar la ley de distribución del χ^2 .

I. De un universo gaussiano centrado, de media *cero* y de variancia σ^2 extraemos muestras al azar de extensión n y para cada muestra calculamos la estadística χ^2 .

$$G(O, \sigma^2) \ni M_n : \chi^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{\sigma^2}$$

Determinamos la FG de la variable χ^2 :

$$FG_{\chi^2}(u) = E(e^{\chi^2 u}) = E\left(e^{\sum \frac{x_i^2}{\sigma^2} \cdot u}\right) = \left[E\left(e^{\frac{x_1^2}{\sigma^2} \cdot u}\right) \right]^n$$

Por provenir x_i de un universo gaussiano se tendrá:

$$FG_{\chi^2}(u) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x_i^2}{\sigma^2}} \cdot u \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}} dx \right]^n = (1 - 2u)^{-\frac{n}{2}}$$

Hemos obtenido así la función generatriz de los momentos sin conocer la ley de distribución de la estadística χ^2 .

Determinamos a continuación los momentos de la estadística χ^2 . Para ello desarrollamos la función generatriz en serie:

$$FG_{\chi^2}(u) = (1 - 2u)^{-\frac{n}{2}} = 1 + nu + \frac{n(n+2)}{2!} u^2 + \frac{n(n+2)(n+4)}{3!} u^3 +$$

$$+ \frac{n(n+2)(n+4)(n+6)}{4!} u^4 + \frac{n(n+2)(n+4)(n+6)(n+8)}{5!} u^5 + \dots$$

Por otra parte sabemos:

$$FG_{\chi^2}(u) = m_0 + m_1 \frac{u}{1!} + m_2 \frac{u^2}{2!} + m_3 \frac{u^3}{3!} + m_4 \frac{u^4}{4!} + m_5 \frac{u^5}{5!} + \dots$$

Por comparación sacamos que:

$$\begin{aligned} m_0 &= 1 & m_3 &= n(n+2)(n+4) \\ m_1 &= n & m_4 &= n(n+2)(n+4)(n+6) \\ m_2 &= n(n+2) & m_5 &= n(n+2)(n+4)(n+6)(n+8) \end{aligned}$$

En general:

$$m_s = n(n+2)(n+4) \dots (n+(2s-2))$$

Fórmula general que da el momento de orden s .

Observando las fórmulas anteriores podemos escribir:

$$m_s = m_{s-1} (n + (2s - 2))$$

Los momentos obtenidos son en variable natural, los pasamos a momentos centrados; para ello recordamos que:

$$\mu_s(\chi^2) = \sum_{i=0}^n (\chi_i^2 - n)^s p(\chi^2) = \sum_{i=0}^s (-1)^i \binom{s}{i} m_i^1(\chi^2) m_{s-i}(\chi^2)$$

Aplicando la fórmula anterior para $s = 0, 1, 2, 3$ y 4 obtenemos:

$$\mu_0 = 1 ; \mu_1 = 0 ; \mu_2 = 2n ; \mu_3 = 8n ; \mu_4 = 12n(n+4)$$

Calculamos a continuación los coeficientes de simetría y normalidad:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{8}{n}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3 + \frac{12}{n}$$

Los valores encontrados de estos coeficientes nos dicen que cuando la extensión de la muestra es grande $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 = 3$; es decir que la distribución del χ^2 tiende a la normal.

II. Podemos calcular ahora el valor de K, que nos indicará a qué tipo de curva del repertorio de K. Pearson corresponde la ley de distribución del χ^2 .

$$K = \frac{\beta_1 (\beta_2 + 3)^2}{4 (2\beta_2 - 3\beta_1 - 6) (4\beta_2 - 3\beta_1)}$$

Y además:

$2\beta_2 = 6 + 3\beta_1$; K tiende a infinito, luego la distribución del χ^2 pertenece al Tipo III de Pearson.

Calculamos a continuación los valores de los parámetros de la E.D.K.P. que están dados por las fórmulas:

$$b_0 = \frac{\mu_2 (4\beta_2 - 3\beta_1)}{18 + 12\beta_1 - 10\beta_2}$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{\mu_2} \sqrt{\beta_1} (\beta_2 + 3)}{18 + 12\beta_1 - 10\beta_2} = -a$$

$$b_2 = \frac{2\beta_2 - 3\beta_1 - 6}{18 + 12\beta_1 - 10\beta_2}$$

Reemplazando obtenemos:

$$b_0 = -2n \qquad b_2 = 0$$

$$b_1 = -2 \qquad a = 2$$

La E.D.K.P. vendrá así:

$$\frac{p'(x^2)}{p(x^2)} = \frac{-2 + x^2}{-2n - 2x^2}$$

Integrando y corrigiendo el desplazamiento que se produce al aplicar este método, obtenemos:

$$p(x^2) = C e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2)^{-\frac{n-2}{2}}$$

Pero:

$$\int_0^{\infty} p(x^2) dx^2 = 1$$

Obtenemos:

$$C = \frac{1}{\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{(x^2)^{\frac{n-2}{2}}} dx^2} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$