REVISTA DE ECONOMÍA Y ESTADÍSTICA
ISSN 0034-8066
INSTITUTO DE ECONOMÍA Y FINANZAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

OPEN ACCESS

ARTÍCULOS

Determinación de la ley de distribución de la estadística Chi Cuadrado

Guido O. Liserre

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 11, No. 1-2 (1967): 1º y 2º Trimestre, pp. 123-126.

http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3622

DETERMINACION DE LA LEY DE DISTRIBUCION DE LA ESTADISTICA CHI CUADRADO (χ^2)

GUIDO O. LISERRE

Resumen: Con este método no pretendemos dar un método nuevo, sino que partiendo de la Ecuación Diferencial de Karl Pearson (E.D.K.P.) encontramos la función de distribución del χ^2.

Partiendo de la definición de la Estadística χ^2, determinamos la función generatriz (FG) de la misma. Con esa FG calculamos los momentos de la Estadística χ^2, y encontramos una ley de recurrencia. Determinamos así los cinco primeros momentos naturales que pasamos a momentos centrados.

Una vez obtenidos esos momentos centrados estamos en condiciones de calcular los parámetros de la E.D.K.P. y determinar la ley de distribución del χ^2.

I. De un universo gaussiano centrado, de media *cero* y de variancia σ^2 extraemos muestras al azar de extensión n y para cada muestra calculamos la estadística χ^2.

$$G\,(O,\sigma^2) \ni M_n \;:\; \chi^2 = \frac{x^2_1 + x^2_2 + \ldots + x^2_n}{\sigma^2}$$

Determinamos la FG de la variable χ^2:

$$FG_{\chi^2}\,(u) = E\,(e^{\chi^2 u}) = E(e\,\Sigma\frac{x^2_i}{\sigma^2}\,.\,u) = \left[\;E\left(e\frac{x^2_i}{\sigma^2}\,.\,u\right)\right]^n$$

Por provenir x_i de un universo gaussiano se tendrá:

$$FG_{\chi^2}(u) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x_i^2}{\sigma^2} \cdot u} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}} dx \right]^n = (1 - 2u)^{-\frac{n}{2}}$$

Hemos obtenido así la función generatriz de los momentos sin conocer la ley de distribución de la estadística χ^2.

Determinamos a continuación los momentos de la estadística χ^2. Para ello desarrollamos la función generatriz en serie:

$$FG_{\chi^2}(u) = (1 - 2u)^{-\frac{n}{2}} = 1 + nu + \frac{n(n+2)}{2!}u^2 + \frac{n(n+2)(n+4)}{3!}u^3 +$$

$$+ \frac{n(n+2)(n+4)(n+6)}{4!}u^4 + \frac{n(n+2)(n+4)(n+6)(n+8)}{5!}u^5 + \ldots$$

Por otra parte sabemos:

$$FG_{\chi^2}(u) = m_0 + m_1 \frac{u}{1!} + m_2 \frac{u^2}{2!} + m_3 \frac{u^3}{3!} + m_4 \frac{u^4}{4!} + m_5 \frac{u^5}{5!} + \ldots$$

Por comparación sacamos que:

$m_0 = 1$ $\quad$ $m_3 = n(n+2)(n+4)$

$m_1 = n$ $\quad$ $m_4 = n(n+2)(n+4)(n+6)$

$m_2 = n(n+2)$ $\quad$ $m_5 = n(n+2)(n+4)(n+6)(n+8)$

En general:

$$m_s = n(n+2)(n+4) \ldots\ldots (n+(2s-2))$$

Fórmula general que da el momento de orden s.

Observando las fórmulas anteriores podemos escribir:

$$m_s = m_{s-1}\,(n+(2s-2)$$

Los momentos obtenidos son en variable natural, los pasamos a momentos centrados; para ello recordamos que:

$$\mu_s(\chi^2) = \sum_{i=0}^{n} (\chi^2_i - n)^s \, p(\chi^2) = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \binom{s}{i} m^i_1(\chi^2) \, m_{s-i}(\chi^2)$$

Aplicando la fórmula anterior para s = 0,1,2,3 y 4 obtenemos:

$$\mu_0 = 1 \;;\; \mu_1 = 0 \;;\; \mu_2 = 2n \;;\; \mu_3 = 8n \;;\; \mu_4 = 12n(n+4)$$

Calculamos a continuación los coeficientes de simetría y normalidad:

$$\beta_1 = \frac{\mu^2_3}{\mu^3_2} = \frac{8}{n}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu^2_2} = 3 + \frac{12}{n}$$

Los valores encontrados de estos coeficientes nos dicen que cuando la extensión de la muestra es grande $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 = 3$; es decir que la distribución del χ^2 tiende a la normal.

II. Podemos calcular ahora el valor de K, que nos indicará a qué tipo de curva del repertorio de K. Pearson corresponde la ley de distribución del χ^2.

$$K = \frac{\beta_1 (\beta_2 + 3)^2}{4\,(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)\,(4\beta_2 - 3\beta_1)}$$

Y además:

$2\beta_2 = 6 + 3\beta_1$; K tiende a infinito, luego la distribución del χ^2 pertenece al Tipo III de Pearson.

Calculamos a continuación los valores de los parámetros de la E.D.K.P. que están dados por las fórmulas:

$$b_0 = \frac{\mu_2 (4\beta_2 - 3\beta_1)}{18 + 12\beta_1 - 10\beta_2}$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{\mu_2}\,\sqrt{\beta_1}\,(\beta_2 + 3)}{18 + 12\beta_1 - 10\beta_2} = -a$$

$$b_2 = \frac{2\beta_2 - 3\beta_1 - 6}{18 + 12\beta_1 - 10\beta_2}$$

Reemplazando obtenemos:

$$b_0 = -2n \qquad b_2 = 0$$
$$b_1 = -2 \qquad a = 2$$

La E.D.K.P. vendrá así:

$$\frac{p'(\chi^2)}{p(\chi^2)} = \frac{2 + \chi^2}{-2n - 2\chi^2}$$

Integrando y corrigiendo el desplazamiento que se produce al aplicar este método, obtenemos:

$$p(\chi^2) = C\, e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{-\frac{n-2}{2}}$$

Pero:

$$\int_0^\infty p(\chi^2)\, d\chi^2 = 1$$

Obtenemos:

$$C = \frac{1}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{n-2}{2}}\, d\chi^2} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$