REVISTA DE ECONOMÍA Y ESTADÍSTICA
INSTITUTO DE ECONOMÍA Y FINANZAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
ISSN 0034-8066

ARTÍCULOS

Visión panorámica de las ecuaciones integrales y sus aplicaciones a las disciplinas económicas

Elías A. De Cesare

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 11, No. 1-2 (1967): 1º y 2º Trimestre, pp. 111-122.

http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3621

Instituto de Economía y Finanzas

La Revista de Economía y Estadística, se edita desde el año 1939. Es una publicación semestral del Instituto de Economía y Finanzas (IEF), Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Valparaíso s/n, Ciudad Universitaria. X5000HRV, Córdoba, Argentina.
Teléfono: 00 - 54 - 351 - 4437300 interno 253.
Contacto: rev_eco_estad@eco.unc.edu.ar
Dirección web http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/index

VISION PANORAMICA DE LAS ECUACIONES INTEGRALES Y SUS APLICACIONES A LAS DISCIPLINAS ECONOMICAS

Prof. Dr. E. A. De Cesare

(1) — Una ecuación integral respecto de una función incógnita $y = \varphi(x)$ de una variable real x, es una ecuación que contiene a dicha función incógnita, bajo el signo de integración. Por ejemplo la expresión:

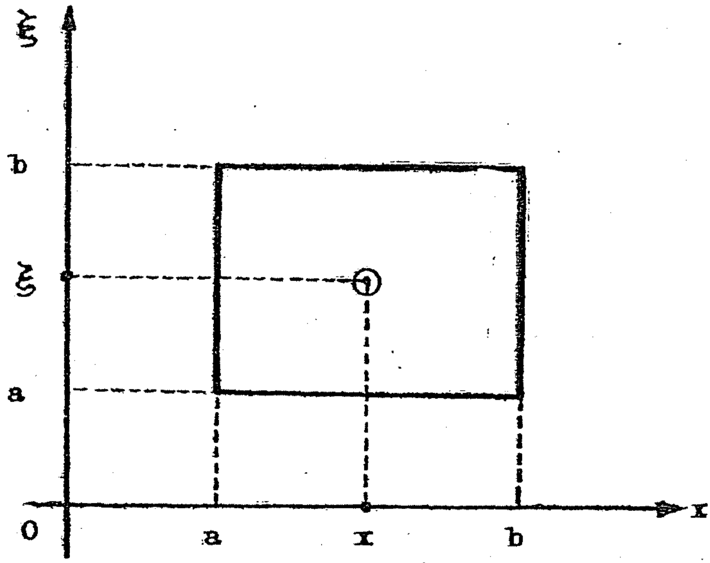
$$(1) \qquad \varphi(x) - \frac{1}{3} \int_0^1 (x + \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = \frac{5}{6} x - \frac{1}{9}$$

es una ecuación integral lineal, donde la función incógnita es $y = \varphi(x)$.

Como expresión general de la anterior ecuación puede escribirse:

$$(2) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = f(x)$$

donde se supone que las funciones: $K(x; \xi)$ y $f(x)$ definidas la primera en el cuadrado $a \leqq x \leqq b$; $a \leqq \xi \leqq b$; y la segunda $f(x)$ en el intervalo $a \leqq x \leqq b$,



son funciones conocidas, lo mismo que el parámetro λ, siendo φ (x) la función incógnita.

El nombre de "ecuaciones integrales" se debe a *Paul Du Bois-Reymond,* de la Universidad de Berlín, que aparece por primera vez en un trabajo publicado en el año 1887 (Journal für reine und andgewandte Mathematik) en relación con la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales.

Como se verá ulteriormente al estudiar en forma sistemática la teoría de las ecuaciones integrales, éstas pueden presentarse bajo forma diversa, dando así motivo para que *David Hilbert,* las dividiera en ecuaciones integrales de 1ª, 2ª y 3ª especie.

Si en la ecuación (2) suponemos que el parámetro λ queda indeterminado, la ecuación (2) en realidad, define una "familia" de ecuaciones integrales. Se debe precisamente a *Henry Poincaré,* la introducción de este parámetro que como se verá oportunamente, desempeña un rol importante en las consideraciones de orden teórico.

(2) — a) *Laplace* introdujo en 1782, para dar solución a una ecuación diferencial de la forma:

$$(3) \qquad \sum_{i=0}^{n} (a_i x + b_i)\, y^{(n-i)}(x) \qquad (a_i \; ; \; b_i \equiv \text{constantes})$$

o también:

$$(3^*) \qquad (a_0 x + b_0)\, y^{(n)} + (a_1 x + b_1)\, y^{(n-1)} + \dots + (a_{n-1} x + b_{n-1})\, y + (a_n x + b_n) = 0$$

la expresión:

$$(4) \qquad y\,(x) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{x\xi} .\, z\,(\xi)\, d\,\xi$$

como solución de las ecuaciones (3), es decir la función incógnita $y = f(x)$ se expresa como la transformada de otra función incógnita $Z\,(x)$, demostrando luego que si la función $y = y\,(x)$ es una solución de la (3) que puede escribirse en la forma (4), entonces la función $Z\,(x)$ resulta ser una solución de la *ecuación integral*.

$$(5) \qquad x \int_{\alpha}^{\beta} e^{x\xi} .\, Z(\xi) .\varphi(\xi)\, d\,\xi + \int_{\alpha}^{\beta} e^{x\xi} .\, Z\,(\xi) .\psi\,(\xi)\, d\,\xi = 0$$

donde las funciones: $\varphi\,(\xi)$ y $\psi\,(\xi)$ son funciones conocidas definidas por las igualdades:

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi(\xi) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i\, \xi^{n-i} = a_0\, \xi^{n} + a_1\, \xi^{n-1} + \dots + a_{n-1}\, \xi + a_n \\ \psi(\xi) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i\, \xi^{n-i} = b_0\, \xi^{n} + b_1\, \xi^{n-1} + \dots + b_{n-1}\, \xi + b_n \end{cases}$$

siendo: a_i ; b_i $(i = 0, 1, \dots n)$ los coeficientes constantes que figuran en la ecuación (3).

(2) — b) Una investigación sistemática de las ecuaciones integrales comenzó recién a fines del siglo XIX, pues anteriormente las investigaciones tuvieron un carácter accidental. Uno de los primeros resultados que puede considerarse en relación con las ecua-

ciones integrales, son las conocidas "fórmulas de inversión" de *Fourier* (1811).

$$(7) \qquad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(\xi) \, . \cos (x . \xi) \, d \xi$$

$$(8) \qquad g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(\xi) \, . \cos (x . \xi) \, d \xi$$

donde la ecuación (8) puede considerarse como la solución de la ecuación integral (7) si en ésta se considera a g(x) como la función incógnita y a f(x) como una función conocida.

(2) — c) Algún tiempo después (1823), en conexión con un problema de mecánica, *N. Abel,* fue conducido a la ecuación integral:

$$(9) \qquad \int_0^x \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} \, d \xi = f(x)$$

encontrando como solución, la expresión:

$$(10) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{f'(\xi) \, d \xi}{\sqrt{x-\xi}}$$

En una carta enviada por *Abel* a Holmboe, el 4 de agosto de 1823, le comunica a éste que había encontrado la solución general de la ecuación:

$$\int_0^x F(x, \xi) \, . \, \varphi(\xi) \, . \, d \xi = f(x)$$

donde $F(x, \xi)$ es una función arbitraria. Infelizmente toda traza de la mencionada solución ha desaparecido.

(2) — d) *Liouville* y *Sturm* (1836-1837) estudiaron igualmente una ecuación integral que apareció en el curso de sus investigaciones sobre ecuaciones diferenciales, encontrando un método importante para resolverla. En el trabajo publicado por estos autores,

se asigna importancia fundamental a la teoría de las funciones ortogonales, apareciendo por primera vez el método de resolución de una ecuación integral que posteriormente ha recibido el nombre de: método de *Liouville-Neümann*.

Debe observarse como hecho interesante que las ecuaciones estudiadas por *Liouville* y *Sturm*, son precisamente del tipo de las ecuaciones de *Vito Volterra*.

(2) — e) Muy posteriormente (1884) el matemático ruso *N. Sonine*, logró sacar partido del artificio de cálculo empleado por *Abel* y estudió una ecuación de la misma forma que la de *Abel*, pero de un carácter más general.

(3) — Dice *T. Lalesco* (Théorie des Équations Intégrales. Ed. A. Hermann et Fils - Paris: 1912 - Introduction).

'*Sonine* agotó, por así decirlo, todas las consecuencias del artificio de cálculo empleado por *Abel* y la cuestión parecía terminada, cuando *Vito Volterra* (1896) abordó con todo éxito y mediante un método directo, el estudio general de la ecuación integral:

$$(1) \qquad \int_a^x K\ (x,\xi)\,.\,\varphi(\xi)\ d\,\xi = f(x)\,.$$

en una serie de notas enviadas a las Academias de Ciencia de Turín y de Roma''.

Vito Volterra, estudió y resolvió igualmente ecuaciones de la forma:

$$(12) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_a^x K\ (x;\xi)\,.\,\varphi(\xi)\ .\ d\,\xi = f(x)\,.$$

por cuya razón las ecuaciones de la forma (11) y (12) reciben el nombre de ecuaciones de *Volterra* de 1ª y de 2ª especie, respectivamente.

(4) — Cierta dificultad existía en investigar las ecuaciones integrales de la forma:

$$(13) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_a^b K\ (x,\xi)\ .\ \varphi(\xi)\ d\,\xi = f(x)\,. \quad \begin{bmatrix} a \leqq x \leqq b \\ a \leqq \xi \leqq b \end{bmatrix}$$

que sólo difiere de la ecuación (12) de *Volterra* en que el límite superior de integración, en lugar de ser la variable x, es una constante b. Una ecuación de la forma (13) se llama ecuación de *Freedholm* de 2ª especie.

Como se dijo anteriormente, tanto *Liouville* como *Neumann*, habían investigado ecuaciones de la forma (5) empleando el método de las aproximaciones sucesivas.

Mediante este método, la solución de una ecuación integral se obtenía bajo la forma de una serie de potencias en λ, llamada ahora: serie de *Neumann*. Esta serie es generalmente convergente para valores del parámetro λ suficientemente pequeños, pero para algunas ecuaciones de *Freedholm*, la convergencia vale en condiciones mucho más generales.

Ivar Freedholm en 1900 en una poderosa memoria aparecida en la *Revista de la Real Academia de Estocolmo,* tuvo el mérito de investigar ecuaciones del tipo (13) admitiendo la continuidad de las funciones f(x) y K (x, ξ), para cualquier valor de λ.

Al referirse a la Memoria de *Freedholm* dice *Emile Picard* en el prólogo del libro de *T. Lalesco* más arriba citado: "On vit rarement un travail devenir aussi rapidement classique que la mémoire où le professeur de Stockholm développait sa première note. Les résultats essentiels de *Freedholm* avaient la beauté des choses simples et définitives...".

El método de *Freedholm* da la solución de la función φ (x) como cociente de dos funciones enteras en λ, es decir como una función meromorfa en λ, tal como lo había intuido *H. Poincaré* en una memoria (1896) al estudiar la convergencia de la serie de *Neumann* y donde demuestra que la condición de convergencia enunciada por *Neumann,* no era de ningún modo necesaria.

Conviene al respecto recordar las propias palabras de *Freedholm*: "En réfléchissant sur ces résultats je me suis demandé si le fait que φ (x) est une fonction méromorfhe de λ, n'est pas une conséquence de la forme lineaire de l'équation fonctionnelle définissant φ (x). Le fait que le développement de φ (x) suivant les puissances croissantes de λ converge pour toute valeur de λ dans les cas des équations traitées par *M. Volterra* a donné un fort appui à penser que la Théorie de l'équation fonctionnelle (13) devrait être un cas limite de la théorie ordinaire des équations lineaires. Cette idée une fois acquise, les travaux de mon collège *M. V. Koch* sur les déterminants infinis ont beaucoup facilité mes recherches dont le résultat principal est exposé dans une note présentée à l'Académie des sciences suédoise en janvier 1900" (Ver: *Ivar Freedholm*: Les *Équations intégrales linéaires* en Compte Rendu du Congrès des Mathématiciens - Tenu à Stockholm depuis le 22 - 25 Septembre 1909. Ed.: B. G. Teubner - Leipzig - Berlin; 1910).

(5) — A partir de los descubrimientos de *Freedholm*, las ecuaciones integrales han suscitado numerosas investigaciones. Su estudio se ha ampliado por la introducción de tipos cada vez más generales.

Numerosos matemáticos han contribuido con sus investigaciones para que esta teoría matemática alcanzara un brillante desarrollo. Citemos entre otros a *E. Picard* que introdujo nuevos tipos de ecuaciones; las contribuciones de J. *Hadamard*, cuyo conocido teorema sobre el valor máximo de un determinante desempeña un rol esencial en la resolución de las ecuaciones de *Freedholm*: la noción de *núcleos ortogonales* introducida por *E. Goursat*, lo mismo que las contribuciones de *Heywood, Frechet, Roux* y otros.

Una ecuación integral puede reemplazar a una ecuación en derivadas parciales juntamente con sus condiciones de contorno. De este modo dichas ecuaciones se introducen de un modo natural en variadas cuestiones de física matemática, dando así satisfacción a lo que *Paul du Bois-Reymond* había anticipado en su trabajo (1887) arriba enunciado, donde se expresaba en los términos siguientes: "Las ecuaciones integrales me han surgido tan a menudo en la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales, que estoy plenamente convencido de que los progresos en ésta, han de estar ligados con el avance de aquéllas, sobre lo cual hoy por hoy (1887) todo nos es desconocido".

La integración de las ecuaciones integrales ha suministrado la solución rigurosa de problemas célebres, en particular el problema de la determinación de las potenciales, es decir, la determinación de una función armónica que satisface a ciertas condiciones de contorno. Según sean las condiciones impuestas, se obtiene ya sea el problema de *Dirichlet*, o el problema de *Neumann*, o el problema del calor, el problema de la hidrodinámica, etc., etc. (Ver: *H. B. Heywood* y *M. Frechet*: Les Équations de Freedholm et ses applications à la Physique Mathématique. Ed.: A. Hermannet Fils - Paris: 1912).

Es posible igualmente estudiar problemas más generales como ser el problema de una función armónica que satisface (por ejemplo) a una de las ecuaciones en derivadas parciales que siguen:

$$\Delta U = \varphi (P)$$

$$\Delta U = \varphi (P) \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$\Delta U = \varphi (P) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

donde P representa un punto o más bien, las coordenadas de dicho punto y donde U representa el potencial.

Merece recordarse en este sentido que *E. Picard* lo mismo que *H. Poincaré*, han hecho numerosas aplicaciones de las ecuaciones integrales a los grandes problemas que plantea la física matemática *H. Poincaré* ha aplicado en particular, incluso a la teoría de las mareas, consiguiendo integrar completamente las ecuaciones fundamentales que se presentan en el estudio de estos fenómenos. Cabe todavía y en el mismo sentido citar a otros investigadores como *Boggio*, *Lauricella*, *E. E. Levi*, *Plemelj* y muchos otros.

(6) —*Freedohlm* ha encontrado como solución de la ecuación

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x;\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = f(x) \tag{13}$$

la expresión:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x;\xi\,|\,\lambda)\,f(\xi)\,d\xi \tag{14}$$

donde la función $\Gamma\ (x, \xi \mid \lambda)$ que es de la forma:

$$\Gamma\ (x; \xi \mid \lambda) = \frac{D\left(\begin{array}{c} x \\ \xi \end{array} \middle| \ \lambda \right)}{D\ (\lambda)} \qquad (D(\lambda) \neq 0)$$

recibe el nombre de: *núcleo resolvente de Freedholm* y las expresiones: $D\left(\begin{array}{c} x \\ \xi \end{array} \middle| \ \lambda \right)$; $D(\lambda)$; son funciones enteras en λ llamadas: series de *Freedholm*.

El análisis de la solución en la forma (14) ha conducido al importante resultado de que los teoremas del álgebra lineal son válidos para las ecuaciones del tipo por él consideradas, esto es, para las llamadas: ecuaciones de *Freedholm*.

(7) — Investigaciones posteriores sobre las ecuaciones integrales se han orientado en tres direcciones fundamentales, a saber:

1º) En primer lugar se han encontrado nuevas clases de ecuaciones para las cuales siguen siendo válidos los teoremas fundamentales del álgebra lineal. Se ha demostrado igualmente que no es necesario suponer la continuidad del núcleo, siendo suficiente admitir la hipótesis de que exista la integral doble:

$$(15) \qquad \int_a^b \int_a^b |\ K\ (x, \xi)\ |^2\, d\, x\ .\ d\, \xi\ .$$

En este sentido *Carleman* ha encontrado que admitida la condición (15), la descomposición de *Freedholm*, según las series: $D\ (\lambda)$; $D\left(\begin{array}{c} x \\ \xi \end{array} \middle| \ \lambda \right)$ siguen valiendo, al mismo tiempo que estas funciones permanecen enteras, igualmente.

Para el caso de que el intervalo (a, b) es infinito, *S. G. Mikhlin*, ha demostrado del mismo modo la validez de los teoremas fundamentales. Como consecuencia de ello, los teoremas fundamentales de *Freedholm*, lo mismo que la fórmula para las series: $D\ (\lambda)$; $D\left(\begin{array}{c} x \\ \xi \end{array} \middle| \ \lambda \right)$ fueron extendidas a nuevas clases de ecuaciones integrales.

Un paso ulterior ha sido realizado por *F. Riesz* quien ha probado que esta teoría permanece en general válida para las ecuaciones en las cuales el operador integral de *Freedholm,* es decir el operador:

$$\int_a^b K(x, \xi) \cdot \varphi(\xi) \cdot d\xi .$$

es reemplazado arbitrariamente por lo que se llama: *operador completamente continuo,* cuyo campo de aplicación es un espacio de *Banach* y donde la función $f_{(x)}$ y la función incógnita $\varphi(x)$ son elementos de dicho espacio.

Los resultados de *Riesz,* fueron posteriormente completados por *I. S. Schauder* que extendió la teoría de *Freedholm* para ecuaciones con operadores completamente continuos.

2º) La segunda dirección seguida en la investigación de las ecuaciones integrales lineales, se relaciona con la teoría de la descomposición en funciones ortogonales que conduce a la solución de las ecuaciones integrales con *núcleo simétrico,* es decir, núcleos que satisfacen a la condición:

$$K(x; \xi) = K(\xi; x)$$

Los resultados fundamentales obtenidos en esta dirección se deben a *David Hilbert* (1904-1910) y a su discípulo *E. Schmidt* (1907).

En una serie de comunicaciones presentadas a la Sociedad Científica de Göttingen, *D. Hilbert* parte de la resolución de cierta clase de ecuaciones lineales con infinitas incógnitas, poniendo en evidencia el rol fundamental desempeñado por la simetría del núcleo.

E. Schmidt (1907) estudió y obtuvo muchos de los resultados de *D. Hilbert,* por un método directo, ocupándose más particularmente de los núcleos simétricos.

Resultados posteriores lo constituyen los trabajos de *Courant,* quien empleó en sus investigaciones los métodos del Cálculo de Variaciones. La solución que se obtiene para la función incógnita es la de una serie de *funciones fundamentales* (o funciones propias).

Digamos al pasar que se debe a *H. Poincaré* la introducción del término: *funciones fundamentales*, quien por otra parte ha publicado varias y profundas memorias en las cuales estudia cuestiones relativas a la teoría del potencial, mediante estas funciones.

Estas funciones propias son (cuando existen) las soluciones de la ecuación homogénea:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) \,.\, \varphi(\xi)\, d\xi = 0$$

En general esta ecuación es satisfecha únicamente por la solución:

$$\varphi(x) \equiv 0$$

pero existe una sucesión de números: *constantes característicos* (o valores propios):

$$\lambda_1;\ \lambda_2;\ \ldots;\ \lambda_n;\ \ldots$$

para cada uno de los cuales, la ecuación admite en correspondencia una solución finita:

$$\varphi_1(x);\ \varphi_2(x);\ \ldots;\ \varphi_n(x);\ \ldots$$

que son las antes citadas funciones fundamentales. La solución de la ecuación no homogénea:

$$\varphi(x) - \lambda \,.\, \int_a^b K(x, \xi) \,.\, \varphi(\xi)\, d\xi = f(x)$$

se expresa entonces en la forma de una serie:

$$\varphi(x) = \sum_0^{\infty} a_n \,.\, \varphi_n(x)\ .$$

método que se aplica más particularmente cuando el núcleo es simétrico.

Desarrollos posteriores de las ideas de *D. Hilbert*, fueron aprovechadas en sus trabajos por *F. Carleman* e *I. Neumann*, que ulteriormente condujeron a la teoría de los operadores en un espacio de *Hilbert*, que como se sabe desempeñan un rol fundamental en el campo del análisis matemático y en el estudio de la física teórica.

3º) Una tercera dirección se refiere a una importantísima clase de ecuaciones integrales, a saber: *las ecuaciones integrales singulares*. Estas ecuaciones se caracterizan por el hecho de que la integral que en ellos figura es impropia en el sentido usual del análisis y su convergencia se considera en el sentido del valor principal de acuerdo con el concepto introducido por *Cauchy*. Un estudio exhaustivo, con numerosas aplicaciones a la mecánica y a la física teórica puede estudiarse en el magistral tratado de *N. I. Muskhelishvili* (Ver: Singular Integral Equations - Translation from Russian edited by J. R. Rado K. - Ed.: P. Nordhoff Groningen - Holland, 1953). Los antecedentes de esta teoría figuran ya en los trabajos de *Hilbert, Poincaré, Carleman* y *Neter*.

Digamos todavía a título informativo que la teoría de las ecuaciones integrales no lineales ha recibido modernamente un notable impulso por obra de los trabajos de *A. M. Liapunov; E. Schwarz; P. S. Uryson* y *Hammerstein*. Para mayor información es sumamente provechosa la lectura de "Bibliographical Notes" contenidos al final del libro de *M. A. Krasnosel'skii* and *B. Rustickii*: Convex Functions and Orlicz Spaces. Translated from the first Russian edition by Leo F. Boron Ed.: P. Nordholf - Groningen: 1961.

Puede consultarse igualmente el notable libro de *M. A. Krasnosel'skii*: Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations. Translated by A. H. Armstrong. Ed.: The Macmillian Company - New York 1964 (A Pergamon Press Book).