REVISTA DE ECONOMÍA Y ESTADÍSTICA
INSTITUTO DE ECONOMÍA Y FINANZAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
ISSN 0034-8066

OPEN ACCESS

ARTÍCULOS

Determinación de la población óptima a través de la variación del ingreso/habitante en una economía cerrada, manteniendo constantes la tecnología, el capital y recursos naturales disponibles

Raúl Conde

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 11, No. 1-2 (1967): 1º y 2º Trimestre, pp. 77-100.

http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3619

DETERMINACION DE LA POBLACION OPTIMA A TRAVES DE LA VARIACION DEL INGRESO/HABITANTE EN UNA ECONOMIA CERRADA, MANTENIENDO CONSTANTES LA TECNOLOGIA, EL CAPITAL Y RECURSOS NATURALES DISPONIBLES

Raúl Conde

Se desea ver cómo cambia el ingreso/habitante en un país al aumentar la población manteniendo constantes la tecnología, el capital y recursos naturales disponibles. En particular se desea determinar la población óptima.

Definiremos como población óptima a aquélla para la cual el ingreso nacional por habitante es máximo.

El ingreso nacional será función del tipo de tecnología y de los recursos disponibles. Mediante el empleo del método de programación lineal podremos maximizar el ingreso nacional para una determinada tecnología y recursos, pero dado que la función: Ingreso/habitante, no es lineal, para calcular el máximo ingreso/habitante, lo haremos por aproximaciones sucesivas, manteniendo constante la tecnología y todos los recursos salvo el número de habitantes que se hará variar.

Para cada diferente número de habitantes que consideremos calcularemos, por programación lineal, el máximo ingreso, y por aproximaciones sucesivas llegaremos a la población para la cual el ingreso/habitante es máximo.

Veamos un ejemplo. Consideraremos una economía cerrada, con dos tipos de actividades económicas y una determinada tecnología, que se presentará según el modelo de Leontief. Supondremos además que hay tres factores de la producción: recursos naturales, capital y fuerza de trabajo, de los cuales se disponen cantidades limitadas. Asimismo supondremos que la relación fuerza de trabajo/población; es constante y es por ello que en lo que sigue se hablará únicamente de fuerza de trabajo en el entendido de que maximizando la relación ingreso/fuerza de trabajo, resultará de inmediato el máximo buscado: (ingreso nacional/población) máximo.

A continuación resolveremos un ejemplo numérico tomando para ello el modelo que se presenta y está resuelto gráficamente en la página 92 del libro "Interindustry Economics", por Hollis B. Chenery y Paul G. Clark (John Wiley and Sons Inc., New York, 1959).

Se trata del caso de una economía cerrada con un sistema productivo constituido por dos actividades: se da la matriz de coeficientes técnicos y además los coeficientes técnicos referentes a la utilización de los factores primarios, o sea que el caso coincide con los supuestos del enunciado de nuestro problema. Los coeficientes técnicos son:

Rama de Actividad Económica y Factores Primarios de la Producción	*Coeficientes Técnicos por rama de Actividad Económica*	
	Rama 1	Rama 2
Actividad económica		
Rama 1	$a_{11} = 0$	$a_{12} = 0{,}5$
Rama 2	$a_{21} = 0{,}25$	$a_{22} = 0$
Factores primarios		
3. Fuerza de trabajo	$l_{31} = 7{,}5$	$l_{32} = 5$
4. Capital	$k_{41} = 1{,}25$	$k_{42} = 2{,}5$
5. Recursos naturales	$n_{51} = 1$	$n_{52} = 0$

CUADRO 1. — Coeficientes técnicos.

En este ejemplo no hay requerimientos para la producción final en cada una de las actividades económicas. Para cada una de éstas la producción final está representada por Y_1 e Y_2.

Los factores primarios tienen restricciones que representan la cantidad total disponible de cada recurso.

Las restricciones son las siguientes: hay disponibles 2.000 unidades de fuerza de trabajo, 600 unidades de capital y 180 unidades de recursos naturales.

Se supone que la producción de la rama de actividad 1 se avalúa en 1,25 millones de pesos/unidad de producción final de la rama de actividad 1, y la de la rama de actividad 2 en 1,0 millones de pesos/unidad de producción final de la rama de actividad 2.

La función objetivo será el valor del ingreso nacional:

$$z = 1{,}25\ Y_1 + 1{,}0\ Y_2$$

Por ser una economía cerrada el valor de la producción con destino final, coincide con el valor del ingreso nacional.

Planteando el problema para resolverlo por el método Simplex tendremos:

$$\begin{cases} \text{Máx} = z = 1{,}25\ Y_1 + 1{,}0\ Y_2 \\ \\ \text{Sujeto a las siguientes restricciones:} \\ \\ (1 - a_{11})\ X_1 - a_{12} X_2 - Y_1 = 0 \\ - a_{21}\ X_1 + \ (1 - a_{22})\ X_2 - Y_2 = 0 \\ l_{31}\ X_1 + l_{32}\ X_2 \leqslant 2.000 \\ k_{41}\ X_1 + k_{42}\ X_2 \leqslant 600 \\ n_{51}\ X_1 + n_{52}\ X_2 \leqslant 180 \\ \text{y además } X_1 \geqslant 0\ ;\ X_2 \geqslant 0\ ;\ Y_1 \geqslant 0\ ;\ Y_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

lo que podemos escribir así; reemplazando valores:

$$\begin{cases} \text{Máx} = z = 1{,}25\ Y_1 + 1{,}0\ Y_2 \\ \qquad 0 = 1\ X_1 - 0{,}5\ X_2 - Y_1 \\ \qquad 0 = - 0{,}25\ X_1 + X_2 - Y_2 \\ 2000 \geqslant 7{,}5\ X_1 + 5\ X_2 \\ \ 600 \geqslant 1{,}25\ X_1 + 2{,}5\ X_2 \\ \ 180 \geqslant 1\ X_1 + 0\ X_2 \\ \text{y además } X_1 \geqslant 0\ ;\ X_2 \geqslant 0\ ;\ Y_1 \geqslant 0\ ;\ Y_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Agregando variables de holgura a las desigualdades y variables artificiales a las igualdades, tendremos:

$$
\begin{aligned}
\text{Máx} = z &= -MX''_1 - MX''_2 + OX'_3 + OX'_4 + OX'_5 + OX_1 + OX_2 + 1{,}25\,Y_1 + 1{,}0Y_2 \\
0 &= X''_1 + X_1 - 0{,}5\,X_2 - Y_1 \\
0 &= X''_2 + 0{,}25\,X_1 + X_2 - Y_2 \\
2000 &= X'_3 + 7{,}5\,X_1 + 5\,X_2 \\
600 &= X'_4 + 1{,}25X_1 + 2{,}5X_2 \\
180 &= X'_5 + X_1
\end{aligned}
$$

y además $X_1 \geqslant 0$; $X_2 \geqslant 0$; $Y_1 \geqslant 0$; $Y_2 \geqslant 0$; $X''_1 \geqslant 0$; $X''_2 \geqslant 0$; $X'_3 \geqslant 0$; $X'_4 \geqslant 0$; $X'_5 \geqslant 0$

Con lo que podemos aplicar el método Simplex.

C_j	→		— M	— M	0	0	0	0	0	1,25	1	Suma
↓		P_0	P''_1	P''_2	P'_3	P'_4	P'_5	P_1	P_2	P_{Y1}	P_{Y2}	
← —M	P''_1	0	1	0	0	0	0	1	—0,5	—1	0	0,5
—M	P''_2	0	0	1	0	0	0	—0,25	1	0	—1	0,75
0	P'_3	2.000	0	0	1	0	0	7,5	5	0	0	2013,5
0	P'_4	600	0	0	0	1	0	1,25	2,5	0	0	604,75
0	P'_5	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
Z_j		0	—M	—M	0	0	0	—0,75M	—0,5M	M	M	
Z_j — C_j			0	0	0	0	0	—0,75M	—0,5M	M —1,25	M —1	
→ 0	P_1	0	1	0	0	0	0	1	—0,5	—1	0	0,5
← —M	P''_2	0	0,25	1	0	0	0	0	0,875	—0,25	—1	0,875
0	P'_3	2.000	—7,5	0	1	0	0	0	8,75	7,5	0	2009,75
0	P'_4	600	—1,25	0	0	1	0	0	3,125	1,25	0	604,125
0	P'_5	180	—1	0	0	0	1	0	0,5	1	0	181,5
Z_j		0	—0,25M	—M	0	0	0	0	—0,875M	0,25M	M	
Z_j — C_j			0,75M	0	0	0	0	0	—0,875M	0,25M —1,25	M —1	
0	P_1	0	1,143	0,572	0	0	0	1	0	—1,143	—0,572	1
→ 0	P_2	0	0,286	1,143	0	0	0	0	1	—0,286	—1,143	1
0	P'_3	2.000	—10,003	—10,001	1	0	0	0	0	10,003	10,001	2001
0	P'_4	600	—2,144	—3,572	0	1	0	0	0	2,144	3,572	601
← 0	P'_5	180	—1,143	—0,572	0	0	1	0	0	—1,143	0,572	181
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Z_j — C_j			M	M	0	0	0	0	0	—1,25	—1	
0	P_1	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
0	P_2	45,04	0	1	0	0	0,25	0	1	0	—1	46,29
← 0	P'_3	424,728	0	—5	1	0	—8,753	0	0	0	5	416,975
0	P'_4	262,363	0	—2,5	0	1	—1,876	0	0	0	2,5	261,487
→ 1,25	P_{Y1}	157,48	—1	—0,5	0	0	0,875	0	0	1	0,5	158,355
Z_j		196,85	—1,25	—0,625	0	0	1,094	0	0	1,25	0,625	
Z_j — C_j			M —1,25	M —0,625	0	0	1,094	0	0	0	—0,375	
0	P_1	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
0	P_2	129,986	0	0	0,2	0	—1,501	0	1	0	0	129,685
→ 1	P_{Y2}	84,946	0	—1	0,2	0	—1,751	0	0	0	1	83,395
0	P'_4	49,998	0	0	—0,5	1	2,502	0	0	0	0	53
1,25	P_{Y1}	115,007	—1	0	—0,1	0	1,75	0	0	1	0	116,677
Z_j		228,704	—1,25	—1	0,075	0	0,437	0	0	1,25	1	
Z_j — C_j			M —1,25	M —1	0,075	0	0,437	0	0	0	0	

CUADRO 2. — Solución por el Método Simplex, caso de una fuerza de trabajo igual a 2.000.

Como vemos el máximo es igual a z_j = millones de \$ 228,704 = 1 \$(millones)/unidad de producción final de 1 × 84,946 unidades de producción final de 1 + 1,25 \$(millones)/unidad de producción final de 2 × 118,007 unidades de producción final de 2, y corresponde al valor del ingreso nacional, que se obtiene con las siguientes producciones brutas para las ramas de actividad 1 y 2; $X_1 = 180$ y $X_2 = 129{,}986$.

Además, vemos que del capital no se han utilizado 49,998 unidades. Se comprueba que habiendo capital no utilizado el precio sombra del mismo (o productividad marginal del capital) es igual a cero.

El valor de la productividad marginal del trabajo es 0,075 millones de \$/unidades de fuerza de trabajo y el de los recursos naturales 0,437 millones de \$/unidad de recursos naturales.

Con esa información podemos recalcular el ingreso nacional Y = 0,075 millones de \$/unidad de fuerza de trabajo × 2.000 unidades de fuerza de trabajo + 0,43 millones de \$/unidad de recursos naturales × 180 unidades de recursos naturales = millones de \$ 227,660 este valor debiera coincidir con \$ 228,704 (no lo hace por errores de redondeo en los precios de sombra).

Con el valor del ingreso nacional y el de la fuerza de trabajo calculamos la relación

$$\frac{\text{Ingreso nacional}}{\text{Fuerza de trabajo}} = \frac{228{,}704}{2.000} = 0{,}1143\,\frac{\text{millones de pesos}}{\text{Unidad de fuerza trab.}}$$

Veamos cuál será la situación si la fuerza de trabajo es por ejemplo, de 2.100 y después calcularemos el caso en que la fuerza de trabajo es de 10.000 y manteniendo constantes, como habíamos dicho, la tecnología y el capital y los recursos naturales disponibles. Los cálculos figuran en los cuadros 3 y 4 respectivamente.

C_j		→	—M	—M	0	0	0	0	0	1,25	1	Suma
↓		P_0	P''_1	P''_2	P'_3	P'_4	P'_5	P_1	P_2	P_{Y1}	P_{Y2}	
← —M	P''_1	0	1	0	0	0	0	1	—0,5	—1	0	0,5
—M	P''_2	0	0	1	0	0	0	—0,25	1	0	—1	0,75
0	P'_3	2.100	0	0	1	0	0	7,5	5	0	0	2.113,5
0	P'_4	600	0	0	0	1	0	1,25	2,5	0	0	604,75
0	P'_5	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
Z_j		0	—M	—M	0	0	0	—0,75M	—0,5M	M	M	
Z_j — C_j			0	0	0	0	0	—0,75M	—0,5M	M —1,25	M —1	
→ 0	P_1	0	1	0	0	0	0	1	—0,5	—1	0	0,5
← —M	P''_2	0	0,25	1	0	0	0	0	0,875	—0,25	—1	0,875
0	P'_3	2.100	—7,5	0	1	0	0	0	8,75	7,5	0	2.109,75
0	P'_4	600	—1,25	0	0	1	0	0	3,125	1,25	0	604,125
0	P'_5	180	—1	0	0	0	1	0	0,5	1	0	181,5
Z_j		0	—0,25M	—M	0	0	0	0	—0,875M	0,25M	M	
Z_j — C_j			0,75M	0	0	0	0	0	—0,875M	0,25M —1,25	M —1	
0	P_1	0	1,143	0,572	0	0	0	1	0	—1,143	—0,572	1
→ 0	P_2	0	0,286	1,143	0	0	0	0	1	—0,286	—1,143	1
0	P'_3	2.100	—10,003	—10,001	1	0	0	0	0	10,003	10,001	2.101
0	P'_4	600	—2,144	—3,572	0	1	0	0	0	2,144	3,572	601
← 0	P'_5	180	—1,143	—0,572	0	0	1	0	0	1,143	0,572	181
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Z_j — C_j			M	M	0	0	0	0	0	—1,25	1	
0	P_1	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
0	P_2	45,04	0	1	0	0	0,25	0	1	0	—1	46,29
0	P'_3	524,728	0	—5	1	0	—8,753	0	0	0	5	516,975
← 0	P'_4	262,363	0	—2,5	0	1	—1,876	0	0	0	2,5	261,487
→ 1,25	P_{Y1}	157,48	—1	—0,5	0	0	0,875	0	0	1	0,5	158,355
Z_j		196,85	—1,25	—0,625	0	0	1,094	0	0	1,25	0,625	
Z_j — C_j			M —1,25	M —0,625	0	0	1,094	0	0	0	—0,375	
0	P_1	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
0	P_2	149,985	0	0	0	0,4	—0,5	0	1	0	0	150,885
0	P'_3	0,003	0	0	1	—2	—5,003	0	0	0	0	—6
→ 1	P_{Y2}	104.945	0	—1	0	0,4	—0,75	0	0	0	1	104,595
→ 1,25	P_{Y1}	105,010	—1	0	0	—0,2	1,25	0	0	1	0	106,057
		236,204	—1,25	—1	0	0,15	0,813	0	0	1,25	1	
			M —1,25	M —1	0	0,15	0,813	0	0	0	0	

CUADRO 3. — Solución por el Método Simplex, caso de una fuerza de trabajo igual a 2.100.

C_j	→		—M	—M	0	0	0	0	0	1,25	1	Suma
↓		P_0	P''_1	P''_2	P'_3	P'_4	P'_5	P_1	P_2	P_{Y1}	P_{Y2}	
← —M	P''_1	0	1	0	0	0	0	1	—0,5	—1	0	0,5
—M	P''_2	0	0	1	0	0	0	—0,25	1	0	—1	0,75
0	P'_3	10.000	0	0	1	0	0	7,5	5	0	0	10.013,5
0	P'_4	600	0	0	0	1	0	1,25	2,5	0	0	604,75
0	P'_5	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
Z_j		0	—M	—M	0	0	0	—0,75M	—0,5M	M	M	
$Z_j — C_j$			0	0	0	0	0	—0,75M	—0,5M	M —1,25	M —1	
→ 0	P_1	0	1	0	0	0	0	1	—0,5	—1	0	0,5
← —M	P''_2	0	0,25	1	0	0	0	0	0,875	—0,25	—1	0,875
0	P'_3	10.000	—7,5	0	1	0	0	0	8,75	7,5	0	10.009,75
0	P'_4	600	—1,25	0	0	1	0	0	3,125	1,25	0	604,125
0	P'_5	180	—1	0	0	0	1	0	0,5	1	0	181,5
Z_j		0	—0,25M	—M	0	0	0	0	—0,875M	0,25M	M	
$Z_j — C_j$			0,75M	0	0	0	0	0	—0,875M	0,25M —1,25	M —1	
0	P_1	0	1,143	0,572	0	0	0	0	0	—1,143	—0,572	1
→ 0	P_2	0	0,286	1,143	0	0	0	1	1	—0,286	—1,143	1
0	P'_3	10.000	—10,003	—10,001	1	0	0	0	0	10,003	10,001	10.001
0	P'_4	600	—2,144	—3,572	0	1	0	0	0	2,144	3,572	601
← 0	P'_5	180	—1,143	—0,572	0	0	1	0	0	1,143	0,572	181
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$Z_j — C_j$			M	M	0	0	0	0	0	—1,25	—1	
0	P_1	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
0	P_2	45,04	0	1	0	0	0,25	0	1	0	—1	46,29
0	P'_3	8.424,728	0	—4,999	1	0	—8,753	0	0	0	4,999	8.416,975
← 0	P'_4	262,363	0	—2,5	0	1	—1,876	0	0	0	2,5	261,487
→ 1,25	P_{Y1}	157,48	—1	—0,5	0	0	0,875	0	0	1	0,5	158,355
Z_j		196,85	—1,25	—0,625	0	0	1,094	0	0	1,25	0,625	
$Z_j — C_j$			M —1,25	M —0,625	0	0	1,094	0	0	0	—0,375	
0	P_1	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
0	P_2	149,985	0	0	0	0,4	—0,5	0	1	0	0	150,885
0	P'_3	7.900,108	0	0	1	—2,0	—5,004	0	0	0	0	7.894,105
→ 1	P_{Y2}	104,945	0	—1	0	0,4	—0,75	0	0	0	1	104,595
1,25	P_{Y1}	105,010	—1	0	0	—0,2	1,25	0	0	1	0	106,057
Z_j		236,204	—1,25	—1	0	0,15	0,813	0	0	1,25	1	
$Z_j — C_j$			M —1,25	M —1	0	0,15	0,813	0	0	0	0	

CUADRO 4. — Solución por el Método Simplex, caso en que la fuerza de trabajo es igual a 10.000

En los dos casos el ingreso nacional es igual a

$$z_j = 1{,}25 \times 105{,}010 + 1{,}0 \times 104{,}945 = 236{,}204$$

quedando en el caso de una fuerza de trabajo de 2100 un excedente de la misma de 0,003 unidades y en el que se consideraba una fuerza de trabajo de 10.000 queda un exceso de 7.900,108 unidades. En ambos casos, por lo tanto, la productividad marginal del trabajo es cero. Se ve que una vez que sobra fuerza de trabajo nada gana la economía aumentándola.

Los valores de las productividades marginales del capital y de los recursos naturales son, en ambos casos, de 0,15 y 0,813 respectivamente, de donde el ingreso nacional es: =
$Y = 0{,}15 \times 600 + 0{,}813 \times 180 = 236{,}340$, la diferencia se debe a errores de redondeo.

Calculando la relación: $\dfrac{\text{Ingreso}}{\text{Fuerza de trabajo}}$, tendremos para los dos casos: $\dfrac{236{,}204}{2100} = 0{,}1124$ y $\dfrac{236{,}204}{10.000} = 0{,}0236$, respectivamente.

O sea, que de los tres casos tratados el que da una mayor relación de $\dfrac{\text{Ingreso nacional}}{\text{Fuerza de trabajo}}$ es el que corresponde a la fuerza de trabajo de 2.000 unidades.

Por lo tanto la disminuiremos a 1.900 unidades, manteniendo como siempre constantes la tecnología empleada y al resto de los factores de la producción. En el cuadro Nº 5 figuran los cálculos realizados para maximizar el ingreso nacional en esta situación.

C_j	→		—M	—M	0	0	0	0	0	1,25	1	Suma
↓		P_0	P''_1	P''_2	P'_3	P'_4	P'_5	P_1	P_2	P_1	P_2	
← —M	P''_1	0	1	0	0	0	0	1	—0,5	—1	0	0,5
—M	P''_2	0	0	1	0	0	0	—0,25	1	0	—1	0,75
0	P'_3	1.900	0	0	1	0	0	7,5	5	0	0	1.913,5
0	P'_4	600	0	0	0	1	0	1,25	2,5	0	0	604,75
0	P'_5	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
Z_j		0	—M	—M	0	0	0	—0,75M	—0,5M	M	M	
$Z_j - C_j$			0	0	0	0	0	—0,75M	—0,5M	M —1,25	M —1	
→ 0	P_1	0	1	0	0	0	0	1	—0,5	—1	0	0,5
← —M	P''_2	0	0,25	1	0	0	0	0	0,875	—0,25	—1	0,875
0	P'_3	1.900	—7,5	0	1	0	0	0	8,75	7,5	0	1.909,75
0	P'_4	600	—1,25	0	0	1	0	0	3,125	1,25	0	604,125
0	P'_5	180	—1	0	0	0	1	0	0,5	1	0	181,5
Z_j		0	—0,25M	—M	0	0	0	0	—0,875M	0,25M	M	
$Z_j - C_j$			0,75M	0	0	0	0	0	—0,875M	0,25M —1,25	M —1	
0	P_1	0	1,143	0,572	0	0	0	1	0	—1,143	0,572	1
→ 0	P_2	0	0,286	1,143	0	0	0	0	1	—0,286	—1,143	1
0	P'_3	1.900	—10,003	—10,001	1	0	0	0	0	10,003	10,001	1.901
0	P'_4	600	—2,144	—3,572	0	1	0	0	0	2,144	3,572	601
← 0	P'_5	180	—1,143	—0,572	0	0	1	0	0	—1,143	0,572	181
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$Z_j - C_j$			M	M	0	0	0	0	0	—1,25	—1	
0	P_1	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
0	P_2	45,04	0	1	0	0	0,25	0	1	0	—1	46,29
← 0	P'_3	324,728	0	—5	1	0	—8,753	0	0	0	5	316,975
0	P'_4	262,363	0	—2,5	0	1	—1,876	0	0	0	2,5	261,487
→ 1,25	P_{Y1}	157,48	—1	—0,5	0	0	0,875	0	0	1	0,5	158,355
Z_j		196,85	—1,25	—0,625	0	0	1,094	0	0	1,25	0,625	
$Z_j - C_j$			M —1,25	M —0,625	0	0	1,094	0	0	0	—0,375	
0	P_1	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
0	P_2	109,986	0	0	0,2	0	—1,501	0	1	0	0	109,685
→ 1	P_{Y2}	64,946	0	—1	0,2	0	—1,751	0	0	0	1	63,395
0	P'_4	99,998	0	0	—0,5	1	2,502	0	0	0	0	102,999
1,25	P_{Y1}	125,007	—1	0	—0,1	0	1,750	0	0	1	0	126,657
Z_j		221,205	—1,25	—1	0,075	0	0,437	0	0	1,25	1	
$Z_j - C_j$			M —1,25	M —1	0,075	0	0,437	0	0	0	0	

CUADRO 5. — Solución por el Método Simplex, caso en que la fuerza de trabajo es igual a 1.900.

El máximo ingreso nacional, en las condiciones expuestas es:

$$Y = 1 \times 64{,}946 + 1{,}25 \times 125{,}007 = 221{,}205,$$

de donde el ingreso/fuerza de trabajo, en esta situación es de:

221.205/1900 = 0,11642 \$/unidad de fuerza de trabajo, que se obtiene para las siguientes producciones brutas de las industrias 1 y 2 =

$$X_1 = 180 \text{ y } X_2 = 109{,}986$$

Además vemos que se han utilizado totalmente la fuerza de trabajo y los recursos naturales, quedando un exceso de 99,998 unidades de capital. Por consiguiente la productividad marginal del capital es cero, como se comprueba en el resultado del problema. Los valores de las productividades marginales de la fuerza de trabajo y de los recursos naturales son 0,075 y 0,437, de donde podemos recalcular el ingreso nacional =

$$Y = 0{,}075 \times 1900 + 0{,}437 \times 180 = 221{,}160$$

la diferencia con el cálculo anterior se debe a errores de redondeo.

A pesar de haber disminuido el ingreso nacional, respecto a los casos de fuerzas de trabajo de 10.000, 2.100 y 2.000 vemos que el ingreso/fuerza de trabajo sigue aumentando. O sea, que hasta este momento a medida que disminuye la fuerza de trabajo aumenta el ingreso/fuerza de trabajo.

Supongamos ahora que la fuerza de trabajo disponible fuese de 1.600 unidades, manteniéndose como siempre, constantes la tecnología y el resto de los factores de la producción disponibles.

En el cuadro 6, hemos maximizado el ingreso nacional, en base a esos supuestos.

C_j	→		—M	—M	0	0	0	0	0	1,25	1	Suma
↓		P_0	P''_1	P''_2	P'_3	P'_4	P'_5	P_1	P_2	P_{Y1}	P_{Y2}	
← —M	P''_1	0	1	0	0	0	0	1	—0,5	—1	0	0,5
—M	P''_2	0	0	1	0	0	0	—0,25	1	0	—1	0,75
0	P'_3	1.600	0	0	1	0	0	7,5	5	0	0	1.613,5
0	P'_4	600	0	0	0	1	0	1,25	2,5	0	0	604,75
0	P'_5	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
Z_j		0	—M	—M	0	0	0	—0,75M	—0,5M	M	M	
Z_j — C_j			0	0	0	0	0	—0,75M	—0,5M	M —1,25	M —1	
0	P_1	0	1	0	0	0	0	1	—0,5	—1	0	0,5
← —M	P''_2	0	0,25	1	0	0	0	0	0,875	—0,25	—1	0,875
0	P'_3	1.600	—7,5	0	1	0	0	0	8,75	7,5	0	1.609,75
0	P'_4	600	—1,25	0	0	1	0	0	3,125	1,25	0	604,125
0	P'_5	180	—1	0	0	0	1	0	0,5	1	0	181,5
Z_j		0	—0,25M	—M	0	0	0	0	—0,875	0,25M	M	
Z_j — C_j			0,75M	0	0	0	0	0	—0,875	0,25M —1,25	M —1	
0	P_1	0	1,143	0,572	0	0	0	1	0	—1,143	0,572	1
→ 0	P_2	0	0,286	1,143	0	0	0	0	1	—0,286	—1,143	1
0	P'_3	1.600	—10,003	—10,001	1	0	0	0	0	10,003	10,001	1.601
0	P'_4	600	—2,144	—3,572	0	1	0	0	0	2,144	3,572	601
0	P'_5	180	—1,143	—0,572	0	0	1	0	0	1,143	0,572	181
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Z_j — C_j			M	M	0	0	0	0	0	—1,25	—1	
0	P_1	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
0	P_2	45,04	0	1	0	0	0,25	0	1	0	—1	46,29
← 0	P'_3	24,728	0	—5	1	0	—8,753	0	0	0	5	16,975
0	P'_4	262,363	0	—2,5	0	1	—1,876	0	0	0	2,5	261,487
→ 1,25	P_{Y1}	157,48	—1	—0,5	0	0	0,875	0	0	1	0,5	158,355
Z_j		196,85	—1,25	—0,625	0	0	1,094	0	0	1,25	0,625	
Z_j — C_j			M —1,25	M —0,625	0	0	1,094	0	0	0	—0,375	
0	P_1	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
0	P_2	49,986	0	0	0,2	0	—1,501	0	1	0	0	49,685
→ 1	P_{Y2}	4,946	0	—1	0,2	0	—1,751	0	0	0	1	3,395
0	P'_4	249,998	0	0	—0,5	1	2,502	0	0	0	0	252,999
1,25	P_{Y1}	155,007	—1	0	—0,1	0	1,750	0	0	1	0	156,657
Z_j		198,705	—1,25	—1	0,075	0	0,437	0	0	1,25	1	
Z_j — C_j			M —1,25	M —1	0,075	0	0,437	0	0	0	0	

CUADRO 6. — Solución por el Método Simplex, caso en que la fuerza de trabajo es igual a 1.600.

Se ha llegado a un ingreso nacional máximo de

$$Y = 1 \times 4{,}946 + 1{,}25 \times 155{,}007 = 198{,}705,$$

con lo que se obtiene la siguiente relación:

$$\text{Ingreso nacional/fuerza de trabajo} = \frac{198{,}705}{1.600} = 0{,}12419$$

y como vemos éste todavía sigue aumentando.

El máximo ha sido obtenido con las siguientes producciones brutas:

$$X_1 = 180 \text{ y } X_2 = 49{,}986$$

Hay un exceso de capital de 249,986 unidades y la productividad marginal del capital es cero. Los valores de las productividades marginales de la fuerza de trabajo y de los recursos naturales, que se utilizan plenamente siguen siendo 0,075 y 0,437, con lo que podremos recalcular

$$Y = 0{,}075 \times 1.600 + 0{,}437 \times 180 = 198{,}660$$

Dado que la relación Ingreso nacional/fuerza de trabajo ha seguido aumentando con la disminución de la fuerza de trabajo, calcularemos cuál será dicha relación para una fuerza de trabajo igual a 1.000.

Esto está hecho en el cuadro Nº 7 a continuación:

C_j	→		—M	—M	0	0	0	0	0	1,25	1	Suma
↓		P_0	P''_1	P''_2	P'_3	P'_4	P'_5	P_1	P_2	P_{Y1}	P_{Y2}	
← —M	P''_1	0	1	0	0	0	0	1	—0,5	—1	0	0,5
—M	P''_2	0	0	1	0	0	0	—0,25	1	0	—1	0,75
0	P'_3	1.000	0	0	1	0	0	7,5	5	0	0	1.113,5
0	P'_4	600	0	0	0	1	0	1,25	2,5	0	0	604,75
0	P'_5	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
Z_j		0	—M	—M	0	0	0	—0,75M	—0,5M	M	M	
$Z_j — C_j$			0	0	0	0	0	—0,75M	—0,5M	M —1,25	M —1	
→ 0	P_1	0	1	0	0	0	0	1	—0,5	—1	0	0,5
← —M	P''_2	0	0,25	1	0	0	0	0	0,875	—0,25	—1	0,875
0	P'_3	1,000	—7,5	0	1	0	0	0	8,75	7,5	0	1.109,75
0	P'_4	600	—1,25	0	0	1	0	0	3,125	1,25	0	604,125
0	P'_5	180	—1	0	0	0	1	0	0,5	1	0	181,5
Z_j		0	—0,25M	—M	0	0	0	0	—0,875M	0,25M	M	
$Z_j — C_j$			0,75M	0	0	0	0	0	—0,875M	0,25M —1,25	M —1	
0	P_1	0	1,143	0,572	0	0	0	1	0	—1,143	—0,572	1
→ 0	P_2	0	0,286	1,143	0	0	0	0	1	—0,286	—1,143	1
← 0	P'_3	1.000	—10,003	—10,001	1	0	0	0	0	10,003	10,001	1.001
0	P'_4	600	—2,144	—3,572	0	1	0	0	0	2,144	3,572	601
0	P'_5	180	—1,143	—0,572	0	0	1	0	0	1,143	0,572	181
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$Z_j — C_j$			M	M	0	0	0	0	0	—1,25	—1	
0	P_1	114,266	0	—0,571	0,114	0	0	1	0	0	0,571	115,380
0	P_2	28,591	0	0,857	0,029	0	0	0	1	0	—0,857	29,620
1,25	P_{Y1}	99,97	—1	—1	0,1	0	0	0	0	1	1	100,07
0	P'_4	385,664	0	—1,428	—0,214	1	0	0	0	0	1,428	386,450
0	P'_5	65,734	0	0,571	—0,114	0	1	0	0	0	—0,571	66,620
Z_j		124,963	—1,25	—1,25	0,125	0	0	0	0	1,25	1,25	
$Z_j — C_j$			M —1,25	M —1,25	0,125	0	0	0	0	0	0,25	

CUADRO 7. — Solución por el Método Simplex, caso en que la fuerza de trabajo es igual a 1.000.

En el caso tratado en el cuadro Nº 7 vemos que el ingreso nacional máximo es

$$Y = 1{,}25 \times 99{,}97 = 124{,}963$$

que se ha obtenido mediante las siguientes producciones brutas: $X_1 = 114{,}266$ y $X_2 = 28{,}591$, se utilizó totalmente la fuerza de trabajo y el valor de su productividad marginal es 0,125 \$/unidad de fuerza de trabajo, con lo que podemos recalcular

$$Y = 0{,}125 \times 1000 = 125{,}0$$

Hay un excedente de 385,664 unidades de capital y de 65,734 unidades de recursos naturales, y sus productividades marginales son cero.

La relación: ingreso nacional/fuerza de trabajo =

$$\frac{124{,}963}{1000} = 0{,}124963$$

En este caso se ha anulado la producción con destino a uso final de la industria 2.

Dado que respecto a los casos anteriores la relación ingreso nacional/fuerza de trabajo, ha aumentado, haremos un nuevo cálculo con una fuerza de trabajo igual a 900. Como en los casos anteriores mantendremos invariable a la tecnología: Las restricciones impuestas a los restantes factores de la producción seguirán siendo las mismas.

El caso está resuelto en el cuadro Nº 8.

En el caso resuelto en el cuadro Nº 8 el máximo ingreso nacional será: $Y = 1{,}25 \times 89{,}973 = 112{,}46625$ que se obtiene mediante las siguientes producciones brutas =

$$X_1 = 114{,}266 \text{ y } X_2 = 28{,}581$$

C_j →			—M	—M	0	0	0	0	0	1,25	1	Suma
↓		P_0	P''_1	P''_2	P'_3	P'_4	P'_5	P_1	P_2	P_{Y1}	P_{Y2}	
← —M	P''_1	0	1	0	0	0	0	1	—0,5	—1	0	0,5
—M	P''_2	0	0	1	0	0	0	—0,25	1	0	—1	0,75
0	P'_3	900	0	0	1	0	0	7,5	5	0	0	913,5
0	P'_4	600	0	0	0	1	0	1,25	2,5	0	0	604,75
0	P'_5	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
Z_j		0	—M	—M	0	0	0	—0,75M	—0,5M	M	M	
Z_j — C_j			0	0	0	0	0	—0,75M	—0,5M	M —1,25	M —1	
→ 0	P_1	0	1	0	0	0	0	1	—0,5	—1	0	0,5
← —M	P''_2	0	0,25	1	0	0	0	0	0,875	—0,25	—1	0,875
0	P'_3	900	—7,5	0	1	0	0	0	8,75	7,5	0	909,75
0	P'_4	600	—1,25	0	0	1	0	0	3,125	1,25	0	604,125
0	P'_5	180	—1	0	0	0	1	0	0,5	1	0	181,5
Z_j		0	—0,25M	—M	0	0	0	0	—0,875M	0,25M	M	
Z_j — C_j			0,75M	0	0	0	0	0	—0,875M	0,25M —1,25	M —1	
0	P_1	0	1,143	0,572	0	0	0	1	0	—1,143	—0,572	1
→ 0	P_2	0	0,286	1,143	0	0	0	0	1	—0,286	—1,143	1
← 0	P'_3	900	—10,003	—10,001	1	0	0	0	0	10,003	10,001	901
0	P'_4	600	—2,144	—3,572	0	1	0	0	0	2,144	3,572	601
0	P'_5	180	—1,143	—0,572	0	0	1	0	0	1,143	0,572	181
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Z_j — C_j			M	M	0	0	0	0	0	—1,25	—1	
0	P_1	102,839	0	—0,571	0,114	0	0	1	0	0	0,571	103,953
0	P_2	25,732	0	0,857	0,029	0	0	0	1	0	—0,857	26,761
1,25	P_{Y1}	89,973	—1	—1	0,1	0	0	0	0	1	1	90,073
0	P'_4	407,098	0	—1,428	—0,214	1	0	0	0	0	1,428	407,883
0	P'_5	77,161	0	0,571	—0,114	0	1	0	0	0	—0,571	78,047
Z_j		112,46625	—1,25	—1,25	0,125	0	0	0	0	1,25	1,25	
Z_j — C_j			M —1,25	M —1,25	0,125	0	0	0	0	0	0,25	

CUADRO 8. — Solución por el Método Simplex, caso en que la fuerza de trabajo es igual a 900.

Se ha utilizado toda la fuerza de trabajo y el valor de su productividad es de 0,125 con lo que recalculamos el ingreso nacional:

$$Y = 0{,}125 \times 900 = 112{,}5$$

Hay un exceso de 385,664 unidades de capital y de 65,734 unidades de recursos naturales, y sus productividades marginales serán cero.

Como en el caso anterior no hay producción para uso final en la industria 2.

La relación: ingreso nacional/fuerza de trabajo:

$$\frac{112{,}46625}{900} = 0{,}124963$$

es igual a la obtenida en el caso anterior. Por lo tanto vemos que esa relación se mantiene constante hasta un punto en que empieza a disminuir. Nos interesa localizar ese punto.

La relación empezará a disminuir en el momento en que la industria 2 empiece a producir bienes con destino a uso final. En base a ello podremos localizar el punto buscado.

Si estudiamos la tercera etapa del cuadro 8 y aplicamos el criterio para elegir la fila que deba salir tendremos 180/1,143 = 157,48; por lo tanto, si elegimos una fuerza de trabajo igual a $157{,}48 \times 10{,}003 = 1575{,}263$, estaremos en ese límite. Aplicando el criterio para elegir la fila que sale tendremos (redondeando la fuerza de trabajo a 1575)

$\frac{1575}{10{,}003} = 157{,}453$ que es menor que 157,48 y por supuesto que la relación que da la otra posible fila $\frac{600}{2{,}144} = 279{,}851$

Calcularemos entonces el máximo ingreso nacional que se obtiene con una fuerza de trabajo igual a 1575 unidades, manteniendo como siempre, de acuerdo al enunciado del problema, constante a la tecnología y a las cantidades disponibles de capital y de recursos naturales.

Este caso está resuelto en el cuadro Nº 9.

C_j	→
↓	
$-M$	P''_1
$-M$	P''_2
0	P'_3
0	P'_4
0	P'_5
Z_j	
$Z_j - C_j$	
→ 0	P_1
$-M$	P''_2
0	P'_3
0	P'_4
0	P'_5
Z_j	
$Z_j - C_j$	
0	P_1
→ 0	P_2
← 0	P'_3
0	P'_4
0	P'_5
Z_j	
$Z_j - C_j$	
0	P_1
0	P_2
1,25	P_{Y1}
0	P'_4
0	P'_5

CUADRO 9.—

C_j	→		—M	—M	0	0	0	0	0	1,25	1	Suma
↓		P_0	P''_1	P''_2	P'_3	P'_4	P'_5	P_1	P_2	P_{Y1}	P_{Y2}	
—M	P''_1	0	1	0	0	0	0	1	—0,5	—1	0	0,5
—M	P''_2	0	0	1	0	0	0	—0,25	1	0	—1	0,75
0	P'_3	1.575	0	0	1	0	0	7,5	5	0	0	1.588,5
0	P'_4	600	0	0	0	1	0	1,25	2,5	0	0	604,75
0	P'_5	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
Z_j		0	—M	—M	0	0	0	—0,75M	—0,5M	M	M	
Z_j — C_j			0	0	0	0	0	—0,75M	—0,5M	M	M	
										—1,25	—1	
→ 0	P_1	0	1	0	0	0	0	1	—0,5	—1	0	0,5
—M	P''_2	0	0,25	1	0	0	0	0	0,875	—0,25	—1	0,875
0	P'_3	1.575	—7,5	0	1	0	0	0	8,75	7,5	0	1.584,75
0	P'_4	600	—1,25	0	0	1	0	0	3,125	1,25	0	604,125
0	P'_5	180	—1	0	0	0	1	0	0,5	1	0	181,5
Z_j		0	—0,25M	—M	0	0	0	0	—0,875	0,25M	M	
Z_j — C_j			0,75M	0	0	0	0	0	—0,875M	0,25M	M	
										—1,25	—1	
0	P_1	0	1,143	0,572	0	0	0	1	0	—1,143	—0,572	1
→ 0	P_2	0	0,286	1,143	0	0	0	0	1	—0,286	—1,143	1
← 0	P'_3	1.575	—10,003	—10,001	1	0	0	0	0	10,003	10,001	1.576
0	P'_4	600	—2,144	—3,572	0	1	0	0	0	2,144	3,572	601
0	P'_5	180	—1,143	—0,572	0	0	1	0	0	1,143	0,572	181
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Z_j — C_j			M	M	0	0	0	0	0	—1,25	—1	
0	P_1	179,969	0	—0,571	0,114	0	0	1	0	0	0,571	181,083
0	P_2	45,032	0	0,857	0,029	0	0	0	1	0	—0,857	46,060
1,25	P_{Y1}	157,453	—1	—1	0,1	0	0	0	0	1	1	157,553
0	P'_4	262,421	0	—1,428	—0,214	1	0	0	0	0	1,428	263,206
0	P'_5	0,031	0	0,571	—0,114	0	1	0	0	0	—0,571	0,917
		196,816	—1,25	—1,25	0,125	0	0	0	0	1,25	1,25	
			M	M								
			—1,25	—1,25	0,125	0	0	0	0	0	0,25	

CUADRO 9. — Solución por el Método Simplex, caso en que la fuerza de trabajo es igual a 1.575.

Se obtiene el siguiente ingreso nacional máximo

$$Y = 1{,}25 \times 157{,}453 = 196{,}816$$

para $\quad X_1 = 179{,}969$ y $X_2 = 45{,}032$

Se tiene un excedente de 262,421 unidades de capital y de 0,031 unidades de recursos naturales, siendo sus productividades marginales iguales a cero. Se utiliza completamente a la fuerza de trabajo y el valor de su productividad marginal es 0,125, de donde podemos recalcular al ingreso nacional máximo.

$$Y = 0{,}125 \times 1{,}575 = 196{,}875$$

Calculemos la relación: ingreso nacional/fuerza de trabajo

$$= \frac{196{,}816}{1575} = 0{,}124963$$

o sea que se mantiene igual que los casos estudiados para una fuerza de trabajo inferior a 1.575 unidades. Podemos observar que en este caso la productividad marginal del trabajo es igual al ingreso/unidad de fuerza de trabajo.

De acuerdo a nuestro razonamiento, si aumentamos una unidad de fuerza de trabajo, o sea 1576 unidades, y como de costumbre mantenemos invariable la tecnología y las cantidades disponibles de capital y recursos naturales, deberá disminuir la relación ingreso nacional/fuerza de trabajo, con la que llegaríamos a que una fuerza de trabajo de 1575 unidades es la máxima fuerza de trabajo para la cual la relación ingreso nacional/fuerza de trabajo, es un máximo.

En el cuadro 10 está resuelto dicho caso, o sea, considerando una fuerza de trabajo de 1576 unidades.

C_j	→
↓	
← —M	P''_1
—M	P''_2
0	P'_3
0	P'_4
0	P'_5
Z_j	
$Z_j - C_j$	
→ 0	P_1
← —M	P''_2
0	P'_3
0	P'_4
0	P'_5
Z_j	
$Z_j - C_j$	
0	P_1
→ 0	P_2
0	P'_3
0	P'_4
← 0	P'_5
Z_j	
$Z_j - C_j$	
0	P_1
0	P_2
← 0	P'_3
0	P'_4
→ 1,25	P_{Y1}
Z_j	
$Z_j - C_j$	
0	P_1
0	P_2
→ 1	P_{Y2}
0	P'_4
1,25	P_{Y1}
Z_j	
$Z_j - C_j$	

CUADRO 10.—

C_j	→		—M	—M	0	0	0	0	0	1,25	1	Suma
↓		P_0	P''_1	P''_2	P'_3	P'_4	P'_5	P_1	P_2	P_{Y1}	P_{Y2}	
← —M	P''_1	0	1	0	0	0	0	1	—0,5	—1	0	0,5
—M	P''_2	0	0	1	0	0	0	—0,25	1	0	—1	0,75
0	P'_3	1.576	0	0	1	0	0	7,5	5	0	0	1.589,5
0	P'_4	600	0	0	0	1	0	1,25	2,5	0	0	604,75
0	P'_5	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
Z_j		0	—M	—M	0	0	0	—0,75M	—0,5M	M	M	
Z_j — C_j			0	0	0	0	0	—0,75M	—0,5M	M —1,25	M —1	
→ 0	P_1	0	1	0	0	0	0	1	—0,5	—1	0	0,5
← —M	P''_2	0	0,25	1	0	0	0	0	0,875	—0,25	—1	0,875
0	P'_3	1.576	—7,5	0	1	0	0	0	8,75	7,5	0	1.585,75
0	P'_4	600	—1,25	0	0	1	0	0	3,125	1,25	0	604,125
0	P'_5	180	—1	0	0	0	1	0	0,5	1	0	181,5
Z_j		0	—0,25M	—M	0	0	0	0	—0,875M	0,25M	M	
Z_j — C_j			0,75M	0	0	0	0	0	—0,875M	0,25M —1,25	M —1	
0	P_1	0	1,143	0,572	0	0	0	1	0	—1,143	—0,572	1
→ 0	P_2	0	0,286	1,143	0	0	0	0	1	—0,286	—1,143	1
0	P'_3	1.576	—10,003	—10,001	1	0	0	0	0	10,003	10,001	1.577
0	P'_4	600	—2,144	—3,572	0	1	0	0	0	2,144	3,572	601
← 0	P'_5	180	—1,143	—0,572	0	0	1	0	0	1,143	0,572	181
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Z_j — C_j			M	M	0	0	0	0	0	—1,25	—1	
0	P_1	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
0	P_2	45,04	0	1	0	0	0,25	0	1	0	—1	46,29
← 0	P'_3	0,728	0	—5	1	0	—8,753	0	0	0	5	—7,025
0	P'_4	262,363	0	—2,5	0	1	—1,876	0	0	0	2,5	261,487
→ 1,25	P_{Y1}	157,48	—1	—0,5	0	0	0,875	0	0	1	0,5	158,355
Z_j		196,85	—1,25	—0,625	0	0	1,094	0	0	1,25	0,625	
Z_j — C_j			M —1,25	M —0,625	0	0	1,094	0	0	0	—0,375	
0	P_1	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
0	P_2	45,186	0	0	—0,2	0	—1,501	0	1	0	0	44,885
→ 1	P_{Y2}	0,146	0	—1	0,2	0	—1,751	0	0	0	1	—1,405
0	P'_4	261,998	0	0	—0,5	1	2,502	0	0	0	0	265
1,25	P_{Y1}	157,407	—1	0	—0,1	0	1,751	0	0	1	0	159,058
Z_j		196,905	—1,25	—1	0,075	0	0,438	0	0	1,25	1	
Z_j — C_j			M —1,25	M —1	0,075	0	0,438	0	0	0	0	

CUADRO 10. — Solución por el Método Simplex, caso en que la fuerza de trabajo es igual a 1.576.

En este caso obtendremos el siguiente ingreso nacional máximo:

$$Y = 1 \times 0{,}146 + 1{,}25 \times 157{,}407 = 196{,}905$$

que se logra mediante:

$$X_1 = 180 \text{ y } X_2 = 45{,}186$$

Además se comprueba que no se han utilizado 261,998 unidades de capital y que la productividad marginal del capital es cero.

Se ha utilizado completamente la fuerza de trabajo y los recursos naturales y los valores de sus productividades marginales son 0,075 y 0,438 respectivamente.

Con esto podemos recalcular el ingreso nacional =

$$Y = 0{,}075 \times 1.576 + 0{,}438 \times 180 = 197{,}040$$

La relación ingreso nacional/fuerza de trabajo =

$$196{,}905 \,/\, 1576 = 0{,}124940$$

que es menor que la que se obtenía para una fuerza de trabajo de 1.575 unidades. Con esto queda comprobada nuestra suposición.

Se ve que al pasar de una fuerza de trabajo de 1575 unidades a una de 1576 ha disminuido la productividad marginal del trabajo 0,125 a 0,075. Por lo tanto, este último trabajador ha producido menos del ingreso/unidades de fuerza de trabajo y por lo tanto el ingreso promedio de todos los habitantes ha disminuido.

La disminución de esta productividad marginal se debe a que ha entrado a producir la rama 2.

Veamos ahora lo que sucede si suponemos una fuerza de trabajo igual a 1574 unidades. Como siempre mantendremos constante la tecnología y las cantidades disponibles del resto de los factores de producción.

Esperamos que el ingreso nacional sea igual al que se obtenía para una fuerza de trabajo igual a 1575 menos el ingreso marginal correspondiente a la fuerza de trabajo que es el único factor productivo que se utiliza totalmente.

Los cálculos están efectuados en el cuadro Nº 11.

C_j	→		—M	—M	0	0	0	0	0	1,25	1	Suma
↓		P_0	P''_1	P''_2	P'_3	P'_4	P'_5	P_1	P_2	P_{Y1}	P_{Y2}	
← —M	P''_1	0	1	0	0	0	0	1	—0,5	—1	0	0,5
—M	P''_2	0	0	1	0	0	0	—0,25	1	0	—1	0,75
0	P'_3	1.574	0	0	1	0	0	7,5	5	0	0	1.587,5
0	P'_4	600	0	0	0	1	0	1,25	2,5	0	0	604,75
0	P'_5	180	0	0	0	0	1	1	0	0	0	182
Z_j		0	—M	—M	0	0	0	—0,75M	—0,5M	M	M	
Z_j — C_j			0	0	0	0	0	—0,75M	—0,5M	M —1,25	M —1	
→ 0	P'	0	1	0	0	0	0	1	—0,5	—1	0	0,5
← —M	P''_2	0	0,25	1	0	0	0	0	0,875	—0,25	—1	0,875
0	P'_3	1.574	—7,5	0	1	0	0	0	8,75	7,5	0	1.583,75
0	P'_4	600	—1,25	0	0	1	0	0	3,125	1,25	0	604,125
0	P'_5	180	—1	0	0	0	1	0	0,5	1	0	181,5
Z_j		0	—0,25M	—M	0	0	0	0	—0,875	0,25M	M	
Z_j — C_j			0,75M	0	0	0	0	0	—0,875	0,25M —1,25	M —1	
0	P_1	0	1,143	0,572	0	0	0	1	0	—1,143	—0,572	1
→ 0	P_2	0	0,286	1,143	0	0	0	0	1	—0,286	—1,143	1
← 0	P'_3	1.574	—10,003	—10,001	1	0	0	0	0	10,003	10,001	1.575
0	P'_4	600	—2,144	—3,572	0	1	0	0	0	2,144	3,572	601
0	P'_5	180	—1,143	—0,572	0	0	1	0	0	1,143	0,572	181
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Z_j — C_j			M	M	0	0	0	0	0	0	0	
0	P_1	179,854	0	—0,571	0,114	0	0	1	0	0	0,571	180,969
0	P_2	45,003	0	0,857	0,029	0	0	0	1	0	—0,857	46,032
1,25	P_{Y1}	157,353	—1	—1	0,1	0	0	0	0	1	1	157,453
0	P'_4	262,635	0	—1,428	—0,214	1	0	0	0	0	1,428	263,421
0	P'_5	0,146	0	0,571	—0,114	0	1	0	0	0	—0,571	1,031
Z_j		196,691	—1,25	—1,25	0,125	0	0	0	0	1,25	1,25	
Z_j — C_j			M —1,25	M —1,25	0,125	0	0	0	0	0	0,25	

CUADRO 11. — Solución por el Método Simplex. caso en que la fuerza de trabajo es igual a 1.574.

Vemos que se obtiene un ingreso nacional máximo de 196,691.

Vemos que: $196{,}691 + 0{,}125 = 196{,}816$ que es precisamente el valor del ingreso nacional máximo calculado para una fuerza de trabajo de 1.575 unidades.

En el cuadro Nº 12 a continuación se da el detalle de las relaciones obtenidas en el Ingreso nacional/unidad de fuerza de trabajo.

Se ve que la relación máxima, que es igual a 0,124963 millones de pesos/unidad de fuerza de trabajo, se obtiene para una fuerza de trabajo de 1.575 unidades. O sea que ésa es la población óptima.

Fuerza de Trabajo	Ingreso Nacional	Ingreso Nacional / Fuerza de Trabajo
900	112,466	0,124963
1.000	124,963	0,124963
1.574	196,691	0,124963
1.575	196,816	0,124963
1.576	196,905	0,124940
1.900	221,205	0,116424
2.000	228,704	0,114352
2.100	236,204	0,112478
10.000	236,204	0,023620

CUADRO 12. — Relaciones de Ingreso nacional/unidad de fuerza de trabajo obtenidas en base al ingreso nacional máximo que resulta de hacer variar la fuerza de trabajo manteniendo constante la tecnología y las cantidades disponibles de capital y de recursos naturales.