REVISTA DE ECONOMÍA Y ESTADÍSTICA
INSTITUTO DE ECONOMÍA Y FINANZAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
ISSN 0034-8066



ARTÍCULOS

# La combinación lineal de los errores, como método para analizar las series cronológicas

José Barral-Souto

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 11, No. 1-2 (1967): 1º y 2º Trimestre, pp. 69-76.

http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3618

# LA COMBINACION LINEAL DE LOS ERRORES, COMO METODO PARA ANALIZAR LAS SERIES CRONOLOGICAS *

José Barral-Souto
Profesor de Biometría y de Análisis Numérico en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires

Síntesis

*Se sugiere una metodología adecuada para tratar las series cronológicas cuando, entre las componentes funcionales de sus términos, rige una dependencia lineal. El procedimiento comprende, como caso particular, al "Método de las diferencias finitas de los errores" (The Variate Difference Method) que es teóricamente adecuado sólo en el caso de que la componente funcional de los términos de la serie pertenezca a un polinomio.*

1. Para el análisis probabilístico de las series cronológicas (por otros nombres, series temporales o históricas) se comienza comúnmente por admitir que el término $u_t$ de la serie, es expresable como suma de dos componentes,

$$.1 \qquad u_t = \bar{u}_t + \varepsilon_t$$

indicando con $\bar{u}_t$ a la componente *sistemática* (denominada también funcional o matemática) y otra $\varepsilon_t$ componente *errática* (aleatoria, "estocástica" o casual).

---

* Comunicación hecha en el V Coloquio Argentino de Estadística realizado en la ciudad de Rosario, el 14 de octubre de 1965.

El "Método de las diferencias finitas de los errores" (The Variate Difference Method) es correcto cuando la componente sistemática se identifica con los valores de un polinomio, $P_m(t)$ de grado m,

$$.2 \qquad \bar{u}_t \equiv P_m(t)$$

pues en ese caso, si se toman diferencias finitas de los términos $u_t$ de orden s,

$$.3 \qquad \Delta^s u_t = \Delta^s P_m(t) + \Delta^s \varepsilon_t$$

cuando el orden supera al grado del polinomio, se tiene

$$.4 \qquad \Delta^s P_m(t) = 0 \qquad \text{si} \quad s > m$$

quedando los términos $\Delta^s u_t$ de la serie de diferencias exentos de influencia de la componente sistemática

$$.5 \qquad \Delta^s u_t = \Delta^s \varepsilon_t$$

e identificados con las diferencias finitas de la componente errática.

Atribuyendo a las componentes erráticas $\varepsilon_t$, valor medio nulo, varianza $\sigma^2$, e independencia estocástica, es decir

$$.6 \qquad E(\varepsilon_t) = 0 \; ; \; E(\varepsilon^2_t) = \sigma^2 \; ; \; E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0 \qquad \text{si} \quad t \neq s$$

se tienen entonces por (.5) estos otros valores medios (o esperanzas matemáticas, indicadas con el operador E).

$$.7 \quad E(\Delta^{m+s} u_t)^2 = E\left[\sum_{n=o}^{m+s} \binom{m+r}{s} (-1)^r u_{m+s-t}\right]^2 = \sigma^2 \binom{2m+2s}{m+s}$$

y por lo tanto

$$.8 \qquad V_{m+s} = \frac{E(\Delta^{m+s} u_t)^2}{\binom{2m+2s}{m+s}} = \sigma^2 \qquad \text{para} \quad s > 0$$

2. En el caso de que la componente funcional no pertenezca a un polinomio puede aun ser utilizable el procedimiento, en cuanto es admisible para intervalos reducidos de la variable t, reemplazar a una función continua por un polinomio de aproximación aceptable; pero si no lo es, resulta necesario recurrir a otros procedimientos.

Mayores ventajas teóricas ofrece el "Método de combinación lineal de los errores" (correlativo del "Método de las diferencias finitas de los errores") que describimos a continuación.

Se mantiene también el supuesto de que cada término de la serie cronológica $u_t$ es suma de dos componentes, la sistemática o funcional $\overline{u}_t$ más la errática o aleatoria $\varepsilon_t$,

$$.1 \qquad u_t = \overline{u}_t + \varepsilon_t$$

Respecto de la componente errática, se supone también

$$.2 \qquad E(\varepsilon_t) = 0 \ ; \ E(\varepsilon^2_t) = \sigma^2 \ ; \ E(\varepsilon_t \varepsilon_r) = 0 \qquad \text{si} \quad t \neq r$$

Vamos a considerar el caso en que las componentes sistemáticas están linealmente vinculadas escribiendo, v. g.,

$$.3 \qquad \overline{u}_t = a_1 . u_{t-1} + a_2 . u_{t-2} + a_3 . u_{t-3} \ ; \ t = 4, 5, \ldots, n.$$

Nuestro problema consiste en determinar las constantes $a_1$, $a_2$, $a_3$, a partir de los valores empíricos (.1), $u_t$ .

Evidentemente, si dispusiéramos de las componentes sistemáticas $\overline{u}_t$, bastarían tres ecuaciones de las indicadas en (.3) para determinar esas constantes o lo que es equivalente, disponer del sistema de ecuaciones

$$.4 \qquad \begin{aligned} \Sigma p_t' . \overline{u}_t &= a_1 \Sigma p_t' . \overline{u}_{t-1} + a_2 \Sigma p_t' . \overline{u}_{t-2} + a_3 \Sigma p_t' . \overline{u}_{t-3} \\ \Sigma p_t'' . \overline{u}_t &= a_1 \Sigma p_t'' . \overline{u}_{t-1} + a_2 \Sigma p_t'' . \overline{u}_{t-2} + a_3 \Sigma p_t'' . \overline{u}_{t-3} \\ \Sigma p_t''' . \overline{u}_t &= a_1 \Sigma p_t''' . \overline{u}_{t-1} + a_2 \Sigma p_t''' . \overline{u}_{t-2} + a_3 \Sigma p_t''' . \overline{u}_{t-3} \end{aligned}$$

donde con $p_t'$, $p_t''$, $p_t'''$, para $t = 4,5, \ldots, n$ se representa a tres juegos de factores de ponderación diferentes, elegidos convenientemente de manera que las ecuaciones (.4) sean independientes.

Como desconocemos los términos $\bar{u}_t$ y por lo tanto las combinaciones lineales de la forma $\Sigma p_t \bar{u}_t$, debemos sustituirlas por estimaciones a través de los valores empíricos $\Sigma p_t u_t$.

Si los factores de ponderación, $p_t$, se los elige independientes de los errores $\varepsilon_t$, sustituyendo en (.4) las componentes $\bar{u}_r$, por los valores empíricos $u_r$, será posible determinar $a_1, a_2, a_3$, basándose en estimaciones no-viciadas, pues se tendrá,

$$E(\Sigma\, p_t'.u_t) = \Sigma\, p_t'.E(u_t) = \Sigma\, p_t'.\bar{u}_t + \Sigma\, p_t'.E(\varepsilon_t) = \Sigma\, p_t'\,\bar{u}_t$$

Es decir, que el valor medio de los valores empíricos coincide con los coeficientes de las incógnitas y términos independientes, de las ecuaciones (.4).

3. Si no obstante estar las componentes sistemáticas $\bar{u}_t$ ligadas por una relación lineal de orden tres, (.2.3), se las presenta como una combinación lineal de orden cuatro,

$$.1 \qquad \bar{u}_t = b_1.\bar{u}_{t-1} + b_2.\bar{u}_{t-2} + b_3.\bar{u}_{t-3} + b_4.\bar{u}_{t-4}\ ;\ t = 5,6,..,n$$

el sistema de cuatro ecuaciones construido con factores de ponderación $p_t'$, $p_t''$, $p_t'''$, $p_t''''$ $(t = 5, 6, \ldots, n)$ diferentes para respetar la posible independencia del tipo señalado en (2.4), no lo sería en realidad pues resultaría nulo el determinante de los coeficientes de $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$. No obstante, como se desconocen los valores $\bar{u}_t$, las ecuaciones se construyen sustituyendo las expresiones de la forma $\Sigma p_t.\bar{u}_t$, por sus valores estimados empíricos $\Sigma p_t.u_t$ y en ese caso el sistema

$$.2 \qquad \Sigma p_t'\,u_t = b_1\,\Sigma p_t'\,.\,u_{t-1} + b_2\,\Sigma p_t'\,u_{t-2} + b_3\,\Sigma p_t'\,u_{t-3} + b_4\,\Sigma p_t'\,u_{t-4}$$

$$\Sigma p_t''\,u_t =$$

$$\Sigma p_t'''\,u_t =$$

$$\Sigma p_t''''\,u_t =$$

por el juego de las componentes erráticas, nos definen constantes $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$, que ligan tales elementos aleatorios.

Una combinación lineal de 4º orden, con términos ligados por una dependencia lineal de tercer orden, solamente es posible si los coeficientes satisfacen ciertas relaciones; v.g., si restamos (2.3) de (3.1) tendremos

$$.3 \qquad 0 = (b_1 - a_1)\, \bar{u}_{t-1} + (b_2 - a_2)\, \bar{u}_{t-2} + (b_3 - a_3)\, \bar{u}_{t-3} + b_4\, \bar{u}_{t-4}$$

y siendo $b_1 - a_1 \neq 0$ resulta

$$.4 \qquad \bar{u}_{t-1} = \frac{b_2 - a_2}{a_1 - b_1}\, \bar{u}_{t-2} + \frac{b_3 - a_3}{a_1 - b_1}\, \bar{u}_{t-3} + \frac{b_4}{a_1 - b_1}\, \bar{u}_{t-4}$$

Como esta relación es la misma (2.3) debe verificarse

$$.5 \qquad a_1 = \frac{b_2 - a_2}{a_1 - b_1} \; ; \; a_2 = \frac{b_3 - a_3}{a_1 - b_1} \; ; \; a_3 = \frac{b_4}{a_1 - b_1}$$

La intervención del elemento errático solamente permite esperar un cumplimiento aproximado de tales relaciones.

4. El problema práctico consiste en averiguar la dependencia lineal de *menor orden* que liga los términos de la serie cronológica $u_1, u_2, \ldots, u_n$, mediante las hipótesis (2.1) y (2.2).

En el supuesto que tal dependencia fuera la señalada en (2.3) y hubiéramos determinado $a_1$, $a_2$, $a_3$, estaríamos en condiciones de calcular

$$.1 \qquad S_3 = \frac{1}{n-3} \Sigma (u_t - a_1 . u_{t-1} - a_2 . u_{t-2} - a_3 . u_{t-3})^2 \quad ; \; t = 4, 5, \ldots, n$$

que puede también escribirse en función de las componentes erráticas,

$$.2 \qquad S_3 = \frac{1}{n-3} \Sigma (\varepsilon_t - a_1 . \epsilon_{t-1} - a_2 . \varepsilon_{t-2} - a_3 . \varepsilon_{t-3})^2 = \frac{1}{n-3} \Sigma e^2_t$$

Pero de acuerdo con los supuestos (2.2) respecto de la componente errática, la esperanza matemática de la expresión que antecede es

.3 $$E(S_3) = \frac{1}{n-3} E[\Sigma(\varepsilon_t - a_1 . \varepsilon_{t-1} - a_2 . \varepsilon_{t-2} - a_3 . \varepsilon_{t-3})^2] =$$

$$= \frac{1}{n-3} \Sigma E(e_t)^2 = \frac{1}{n-3} \Sigma (1 + a^2_1 + a^2_2 + a^2_3) . \sigma^2 =$$

$$= (1 + a^2_1 + a^2_2 + a^2_3) . \sigma^2$$

Luego, identificando $E(S_3)$ con su valor conjectural $S_3$,

.4 $$V_3 = \frac{E(S_3)}{1 + a^2_1 + a^2_2 + a^2_3} = \sigma^2 = \frac{S_3}{1 + a^2_1 + a^2_2 + a^2_3}$$

Por otra parte como $e_t = \varepsilon_t - a_1 . \varepsilon_{t-1} - a_2 . \varepsilon_{t-2} - a_3 . \varepsilon_{t-3}$ es un elemento puramente aleatorio,

$$E(e_t) = 0 \;;\; E(e^2_t) = (1 + a^2_1 + a^2_2 + a^2_3) . E(\varepsilon^2)$$

puede aplicársele el método de las diferencias de los errores y calcular

$$\Delta e_t = e_{t+1} - e_t$$

.5 $$E\left[\frac{1}{n-4} \Sigma (\Delta e_t)^2\right] = \frac{1}{n-4} \Sigma E (e_{t+1} - e_t)^2 =$$

$$= \frac{1}{n-4} \Sigma E(\varepsilon_{t+1} - (1 + a_1) \varepsilon_t + (a_1 - a_2) \varepsilon_{t-1} +$$

$$+ (a_2 - a_3) \varepsilon_{t-2} + a_3 . \varepsilon_{t-3})^2$$

Por lo tanto

$$.6 \qquad E\left[\frac{1}{n-4}\Sigma(\Delta e_t)^2\right] =$$

$$= \left[1+(1+a_1)^2+(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+a_3^2\right] . \sigma^2$$

$$.7 \qquad V_4 = \frac{E\left[\dfrac{1}{n-4}\Sigma(\Delta e_t)^2\right]}{1+(1+a_1)^2+(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+a_3^2} = \sigma^2$$

En vez de la simple diferencia $e_{t+1}-e_t$ que equivale a una particular relación lineal de las componentes erráticas

$$.8 \qquad \Delta e_t = \epsilon_{t+1}-(1+a_1) . \varepsilon_t+(a_1-a_2) . \varepsilon_{t-1}+$$
$$+(a_2-a_3) . \varepsilon_{t-2}+a_3 . \varepsilon_{t-3} ,$$

podríase utilizar para los mismos efectos, una combinación lineal como

$$.9 \qquad p.e_{t+1}+q.e_t = p.\varepsilon_{t+1}-(q-a_1p) . \varepsilon_t -$$
$$-(a_1 q+a_2 p)\,\varepsilon_{t-1}-(q\,a_2-p\,a_3)\,\varepsilon_{t-2}-q\,a_3.\epsilon_{t-3}$$

que nos conduciría a

$$.10 \quad V_4 = \frac{E\left[\dfrac{1}{n-4}\Sigma(p.e_{t+1}+q.e_t)^2\right]}{p^2+(q-a_1p)^2+(a_1q+a_2p)^2+(qa_2+pa_3)^2+(qa_3)^2} = \sigma^2$$

Pero en esta etapa nos encontramos ya, con la posibilidad de aplicar las pruebas de significación y consideraciones válidas en el

"Método de las diferencias finitas de los errores" remitiéndonos para ello en particular, a los textos de Gerhard Tintner:

"The Variate Difference Method" (edit. Cowles Commission Bloomington, Indiana 1940.

"Econometrics" (edit. John Wiley & Sons, New York, 1952-2d. ed. 1954).