



TRANSCRIPCIONES

Límite al empleo de las Matemáticas en la ciencia económica

Oskar Morgenstern

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 8, No. 3-4 (1964): 3º y 4º Trimestre, pp. 81-104.

<http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3582>



La Revista de Economía y Estadística, se edita desde el año 1939. Es una publicación semestral del Instituto de Economía y Finanzas (IEF), Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Valparaíso s/n, Ciudad Universitaria. X5000HRV, Córdoba, Argentina.

Teléfono: 00 - 54 - 351 - 4437300 interno 253.

Contacto: rev_eco_estad@eco.unc.edu.ar

Dirección web <http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/index>

Cómo citar este documento:

Morgenstern, O. (1964). Límite al empleo de las Matemáticas en la ciencia económica. *Revista de Economía y Estadística*, Tercera Época, Vol. 8, No. 3-4: 3º y 4º Trimestre, pp. 81-104.

Disponible en: <http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3582>

El Portal de Revistas de la Universidad Nacional de Córdoba es un espacio destinado a la difusión de las investigaciones realizadas por los miembros de la Universidad y a los contenidos académicos y culturales desarrollados en las revistas electrónicas de la Universidad Nacional de Córdoba. Considerando que la Ciencia es un recurso público, es que la Universidad ofrece a toda la comunidad, el acceso libre de su producción científica, académica y cultural.

<http://revistas.unc.edu.ar/index.php/index>

TRANSCRIPCIONES

LIMITE AL EMPLEO DE LAS MATEMATICAS EN LA CIENCIA ECONOMICA

P O R

OSKAR MORGENSTERN

I - El autor es profesor de Economía Política y Director del Programa de Investigación Econométrica en la Universidad de Princeton. Es también miembro correspondiente del Institut de Science Economique Appliquée, París; asesor de RAND Corporation, Santa Mónica, California; coeditor, Naval Research Logistics Quarterly; coeditor, Zeitschrift für Nationalökonomie; asesor Sandia Corporation, Albuquerque, Nuevo Méjico; miembro del Advisory Panel to the Military Applications Subcommittee of the Joint Committee on Atomic Energy, Congreso de los EE. UU. Ha ocupado otros muchos cargos académicos, gubernamentales y comerciales, y es autor de numerosos libros y artículos.

II - El presente artículo fue publicado con el título de "Limits to the Uses of Mathematics in Economics", en el volumen que en junio de 1963 publicó la American Academy of Political and Social Science bajo el título de Mathematics and the Social Science. La publicación de dicho volumen, que contiene otros artículos sobre la utilización de las Matemáticas en la ciencia política y en la sociología, se efectuó bajo la dirección del profesor James C. Charlesworth. El estudio de O. Morgenstern fue subvencionado por la Office of Naval Research en virtud del contrato NR 047 086, y se publicó aquí, en versión española de Juan Manuel Silvela y Sangro, por cortesía del autor y del editor. (Pedro MAYOR MAYOR. *La Economía en 1963*, Ed. Aguilar, Madrid, 1964).

AGRADECIMIENTO

Agradezco muy sinceramente la generosa aceptación del Profesor Oskar MORGENSTERN para la publicación de su magnífico análisis sobre los límites del empleo de las matemáticas en la ciencia económica. Agradezco también muy sinceramente la desinteresada colaboración de Editorial AGUILAR y del señor Pedro MAYOR MAYOR, quienes no sólo aceptaron gentilmente su publicación en las páginas de esta Revista, sino que pusieron a mi disposición el texto de la versión española de Juan Manuel SILVELA Y SANGRO efectuada para el volumen "La Economía en 1963", y que se publica ahora en este número. El empleo de la

matemática en la ciencia económica sigue siendo objeto de controversias. Por ello esta esclarecedora contribución del Profesor O. MORGENTERN merece la más amplia difusión. Constituye una exposición admirable por el rigor intelectual, la fuerza de sus argumentaciones y la sencillez y accesibilidad de su contenido. Es sin duda un lúcido mensaje de uno de los economistas contemporáneos de más autoridad científica, dirigido tanto a los economistas matemáticos, como a los economistas no matemáticos y también a los matemáticos profesionales.

CAMILO DAGUM
Decano de la Facultad de
Ciencias Económicas

Si bien alguna de las intuiciones más penetrantes a las que haya llegado el espíritu del hombre se expresan mejor en forma negativa, es muy arriesgado hablar de manera categórica de las limitaciones. Entre esas intuiciones podemos citar la de que no puede haber un *perpetuum mobile*, la de que no se puede rebasar la velocidad de la luz, la de que la cuadratura del círculo es imposible sólo con ayuda de regla y compás, la de que, análogamente, tampoco se puede hacer la trisección del ángulo, etc. Cada una de estas afirmaciones es el resultado de un importante esfuerzo intelectual. Están basadas en siglos de investigaciones y en una observación empírica muy amplia o en el perfeccionamiento de las matemáticas, o en ambas cosas a la vez. Aunque estén enunciados de manera negativa, estos descubrimientos y otros análogos constituyen resultados positivos, así como una contribución importante al conocimiento humano. Implican todos un razonamiento matemático y algunos proceden de la esfera de las matemáticas puras, que abundan en enunciados prohibitivos y en imposibilidades.

De esta observación resulta que es una tentativa útil el intentar formular una parte de nuestros conocimientos en forma de negaciones. Las que acabamos de mencionar son, en la medida en que se puede juzgar de ellas, categóricas; esto quiere decir que si una de ellas fuese un día invalidada, resultaría una revolución fundamental en el conjunto de nuestros conocimientos científicos. Si se llegase a demostrar que la velocidad de un objeto puede sobrepasar el valor constante de la velocidad de la luz, tal como la conocemos en la hora actual, se derrumbaría la teoría de la relatividad, y con ella, la mayor parte de la Física moderna. Lo mismo sucedería con las leyes de la Termodinámica, expresadas en la afirmación de que el *perpetuum mobile* es imposible. En cuanto a las imposibilidades matemáticas, la situación es tal que probablemente nadie espera que estos teoremas sean refutados. En Matemáticas habíamos supuesto, de

manera general, que un problema puede ser resuelto o no resuelto, pudiendo significar esto último que el problema todavía no está resuelto o que no es susceptible de solución en principio (con medios dados). Sin embargo, el gran descubrimiento de Kurt Gödel en 1931 destruyó esta creencia. Gödel ha probado, en grandes líneas, que, bajo ciertas condiciones, existen teoremas matemáticos de los cuales se puede demostrar que no podrán ser ni probados ni no probados. No puede uno pronunciarse sobre su verdad en un sistema dado. El problema es, por consiguiente, muy complicado y debe considerarse como tal.

A la luz de estas observaciones preliminares, es preciso abordar con cautela la cuestión de los límites del uso de las matemáticas en la ciencia económica. Se ve uno tentado en rechazar la cuestión a limine. En efecto, examinando los empleos que se han hecho de las Matemáticas en Economía, se pueden advertir limitaciones cuyas características pueden ser descritas en cierta medida. La mayor parte de las veces estas limitaciones han aparecido al adoptar un modelo económico defectuoso y al analizarlo después con ayuda de las Matemáticas, o al utilizar las Matemáticas de una manera incorrecta, por no decir incompetente. Pero es virtualmente imposible deducir de los errores pasados que las Matemáticas sean inútiles o —si ahora han encontrado cierto empleo— que sus límites puedan ser previstos en la actualidad. Siento grandes deseos de dejar aquí esta cuestión diciendo que la prueba de la existencia de un pastel está en comerlo, lo cual significa —aplicado a nuestro problema— que no hay método más juicioso que dejar que se utilicen las Matemáticas en la medida que sea posible y observar los resultados de ello. En otros términos, dejemos que el problema, si es que existe, sea descubierto por evolución y que los hechos digan si ya no queda sitio para las Matemáticas en la Economía. Si se considera el problema desde este ángulo, —inatacable con toda evidencia— nada se puede decir; yo añadiría, de todos modos, que ese problema no existe, puesto que tanto las Matemáticas como la Economía continuarán sufriendo profundos cambios y perfeccionamientos. Estos estarán, por otra parte, entrelazados en gran medida, como veremos más adelante (Desarro-

llos futuros). Necesitamos prever la evolución futura de las Matemáticas y de la Economía para dar sentido a nuestra cuestión. Ninguna de estas disciplinas ha alcanzado ese estadio a partir del cual ya no habría nada que decir. Sería, pues, absurdo seguir esta línea de pensamiento.

La cuestión está también enunciada de manera imprecisa; ella misma es demasiado limitada. ¿De qué empleo de las Matemáticas se trata? ¿Dónde empiezan las Matemáticas? ¿Dónde terminan? ¿Engloban la aritmética, el cálculo infinitesimal o la topología? Algunas de estas ramas de las Matemáticas son totalmente distintas entre sí, y si una de ellas no sirve ya, puede ser que otra continúe siendo útil o —lo que es más importante— tal vez haya que inventar unas Matemáticas completamente nuevas para hacer frente a los aspectos múltiples de los problemas económicos. Si tal fuera el caso —y en mi opinión la Historia así lo mostrará— no se podría decir nada en tanto en cuanto dicha evolución no se haya realizado y, por consiguiente, no se podría decir nada de las limitaciones. Sin embargo, este punto de vista suministra ya una primera indicación sobre cierto género de limitaciones en el uso de las Matemáticas: no es probable que la ciencia económica pueda progresar de manera notable si se basa en las Matemáticas actualmente “disponibles”. Aunque esto haya ocurrido, unas cuantas veces, en la Física, no hay seguridad ninguna de que este fenómeno se repita en el dominio de la Física o en el de las ciencias sociales. Por el contrario, todas las indicaciones apuntan en sentido opuesto.

ENUNCIADO POSITIVO DEL PROBLEMA

Para eliminar algunos obstáculos aparentes al uso de las Matemáticas que todavía se mencionan con frecuencia, definiré por inducción algunas propiedades de las Matemáticas: no existe ninguna limitación basada en que la Economía estudia entidades psicológicas, a veces con datos no cuantitativos, con expectativas, o con una mezcla de datos cuantitativos y no cuantitativos en un mismo razonamiento. Las Matemáticas no son solamente una ciencia de las canti-

dades, y tampoco exigen la medida; no hay diferencia fundamental entre una simple adición de números enteros y la expresada por una integral. Las Matemáticas no necesitan de modo absoluto símbolos distintos de las palabras, que, hasta cierto grado de complejidad, pueden expresar de manera adecuada las ideas matemáticas, enunciar los teoremas o formular las pruebas. Las Matemáticas no son solamente una ciencia deductiva, pues utilizan igualmente la inducción (lógica) con el fin de afianzar las pruebas.

No procede, por tanto, ocuparse de las pretendidas limitaciones que se derivan de una concepción errónea de la naturaleza y, por ende, del poder de las Matemáticas, de una parte, y del carácter específico o de las particularidades de la Economía, por otra. Sin embargo, se encuentran en la literatura numerosos argumentos contra el uso de las Matemáticas, fundados precisamente en ese género de concepciones erróneas o en ideas análogas. Entre ellas está la idea de que no pueden utilizarse las Matemáticas para analizar los factores psicológicos en la teoría del valor; de que la naturaleza humana no se puede describir de manera matemática por ser "demasiado rica" para ser representada; de que, si bien las curvas u otros gráficos pueden ser apropiados, el uso de los mismos datos en forma de ecuaciones carece de garantías; de que no hay divisibilidad infinita de los bienes y, "por consiguiente", no es posible el cálculo diferencial; de que la utilidad no es mensurable; de que la gente no se comporta de manera racional, etc. Todas estas "objeciones" conducen a afirmaciones totalmente erróneas que no necesitan refutarse, puesto que no nos enseñan nada sobre el asunto en cuestión. Muestran, simplemente, que sus autores no saben lo que son las Matemáticas ni cómo hay que construir un modelo matemático sobre los fenómenos económicos.

Es muy fácil confundir las limitaciones de uno mismo con las del método o asunto a tratar. Esas concepciones son menos frecuentes en la literatura de estos últimos años, pero cuando reaparecen —como p. ej., en ciertas críticas corrientes a la teoría de los juegos— siguen estando fuera de lugar. Durante varios decenios han contri-

buido a retardar considerablemente el ritmo de progreso de la economía matemática.

En cuanto se ha comprendido la naturaleza y el poder de las Matemáticas, la única constatación posible es que no hay nada en la naturaleza de esta ciencia —en la medida en que la entendemos actualmente— que pueda excluir su uso decisivo en Economía debido a ciertas particularidades de esta última que las matemáticas no puedan superar en principio. Si preguntáramos hoy cuáles son las limitaciones al uso de las Matemáticas en la Física, tanto los matemáticos como los físicos se sorprenderían de la pregunta, la rechazarían como carente de sentido y continuarían su trabajo. Este no podría hacerse sin un empleo cada vez más amplio de las Matemáticas. El hecho de que esa cuestión haya dejado de plantearse es un signo de la madurez de la Física y una consecuencia del enorme éxito de las Matemáticas en la evolución de esa ciencia (o más bien en la evolución concomitante de ambas).

Mas si no hay nada en las Matemáticas que pueda impedir su empleo en Economía —y de manera general en las ciencias sociales—, tal vez haya una particularidad profunda y oculta en estas últimas que deje sin esperanzas al matrimonio entre las dos disciplinas. Es menester, por consiguiente, examinar brevemente la evolución histórica con el fin de dar una significación apropiada a nuestra cuestión fundamental.

LA EXPERIENCIA HISTORICA

Sería sorprendente que el uso de las Matemáticas en una disciplina nueva fuese un brillante éxito desde el principio. Los comienzos tardíos de la Economía coincidieron con una ciencia de la mecánica bien desarrollada; en efecto, la gran obra de Newton estaba ya terminada antes que los fisiócratas hubiesen empezado a escribir. Por tanto, no puede extrañar que los primeros economistas matemáticos considerasen la mecánica y el análisis (es decir, el cálculo diferencial e integral) como el modelo y el instrumento aplicable a los problemas económicos. Ahora bien: los matemáticos profesionales

ridiculizaron por lo general —hasta hace aproximadamente unos treinta años— el carácter trivial de esas aplicaciones matemáticas, trivial sobre todo en comparación con lo que se hacía en la Física y en comparación también con lo que se podía decir en simples palabras. Sobre este punto, los matemáticos estaban en parte equivocados; en lugar de distanciarse hubieran debido interesarse en esta materia y ver el gran interés que tenía para las Matemáticas. Pero hasta época reciente no ha sucedido así, lo cual ha producido unas consecuencias que examinaremos más adelante. Ha ocurrido, pues, que durante siglos los más grandes matemáticos han colaborado estrechamente con los astrónomos y los físicos, y recíprocamente. Sin embargo, y hasta un período reciente, aparte de la disgresión sobre la utilidad de D. Bernouilli en la Paradoja de San Petersburgo (1730) y de una breve observación de Leibniz (1710), ningún matemático de la categoría de los Laplace, Lagrange, Gauss, Riemann y otros se había consagrado a fondo a las ciencias sociales.

Comparado con estos gigantes, A. A. Cournot, aunque muy importante por sus trabajos como economista, ha sido menos brillante en cuanto a matemático. Esto no debe considerarse como una actitud despectiva ante los trabajos de hombres como Thünen, Edgeworth, Fisher, Slutsky, Evans y otros. Sin embargo, sigue siendo cierto que hasta fecha muy reciente los matemáticos profesionales se mantenían al margen de la Economía.

Como una matematización auténtica de la Economía no es asunto fácil (lo cual es aplicable a fortiori a todas las ciencias sociales, advertencia que, de aquí en adelante, consideraremos sobrentendida), apenas podía esperarse que investigadores no profesionales, que simplemente “aplican” las Matemáticas, alcanzasen resultados notables. Y así ha ocurrido realmente. Por lo general, han traducido en fórmulas lo que podría haberse expresado en el llano lenguaje de las palabras; que yo sepa, no han establecido teoremas nuevos de cierta importancia para las Matemáticas. Esto es cierto respecto a todos los trabajos de economía matemática hasta la década 1930-40. Tal es la constatación hecha por los matemáticos profesionales, que han examinado los trabajos de economía matemática

y han hallado que éstos carecían de interés, desde el punto de vista matemático, por dos razones: a) falta de teoremas nuevos; b) falta de problemas que merezcan ser abordados. Pero, mientras la primera parece justificada, la segunda no lo es si se formula adecuadamente el problema económico, en cuyo caso éste ofrece apasionantes ocasiones de investigación.

Incluso cuando el problema fue debidamente enunciado, como en los sistemas de Walras o de Pareto, había algunas cuestiones matemáticas más profundas escondidas bajo las aseveraciones —no probadas— de la existencia de soluciones únicas y económicamente significativas, así como de la estabilidad de esos sistemas. No se ha recurrido a los matemáticos ni lo bastante pronto ni lo suficientemente de cerca, en relación con esos aspectos, para poder dar al conjunto de la disciplina el estímulo que merecía.

Los primeros investigadores han tenido el mérito de reunir las variables y de agruparlas en ecuaciones aparentemente plausibles; sin embargo, carecían de formación matemática suficiente para resolver los problemas, suponiendo que los hubiesen visto. Así, se contentaron con afirmar la existencia de soluciones, generalmente contando el número de ecuaciones y el de incógnitas. Habiendo encontrado un número igual de ambas, pensaron, equivocadamente, que este hecho aseguraba la existencia de una solución. Por curiosa ironía, aun cuando hubiesen evitado el error de la igualdad de esos números —error que hubiera sido posible evitar ya en aquella época— probablemente no habrían estado en condiciones de resolver dichas ecuaciones, por faltarles instrumentos matemáticos no disponibles entonces (y ello aunque hubieran hecho simplificaciones drásticas en algunas de las hipótesis básicas). Esa tarea no se llevó a cabo hasta los escritos de A. Wald en 1934. Si los economistas se hubieran limitado a enunciar los problemas, a ver las dificultades y a llamar en su ayuda a los matemáticos, éstos habrían podido sentir mucho antes la necesidad de dedicarse a inventar las matemáticas apropiadas. (Expondremos con más amplitud este punto en la sección dedicada a los Desarrollos futuros).

El objetivo de la economía matemática es, ante todo, hacer progresar la ciencia económica; no es aplicar simplemente las Matemáticas porque las Matemáticas existen y porque se hayan adquirido de ellas nociones más o menos avanzadas. Su finalidad no es tampoco encontrar nuevos teoremas matemáticos per se. Pero es posible, e incluso cierto, que la Economía no podrá progresar de manera decisiva sin encontrar teoremas matemáticos completamente nuevos. Me refiero a "la Economía" y no a "la Economía matemática". En otras palabras: a un cierto nivel de desarrollo y de abstracción teórica, las dos pueden hacerse sinónimas.

Por lo que concierne al uso de las Matemáticas en Economía, hay una gran cantidad de fórmulas que se emplean innecesariamente. A menudo se tiene la impresión de que sólo se introducen para impresionar. Cuanto más difícil es el teorema matemático y más esotérico es el nombre del matemático citado, tanto mejor. Así se da la impresión de que uno está "enterado". Sucede, por consiguiente, que los argumentos se prueban —cosa loable si se hace correctamente— por medio de razonamientos complicados y de mecanismos artificiosos cuando pueden probarse igualmente bien por procedimientos elementales.

Pero hay, por el contrario, otro proceso verdaderamente significativo: a veces es excesivamente difícil probar un teorema. En el curso de los años la prueba puede simplificarse progresivamente, obteniéndose al final (y para ello son necesarias, a menudo, varias décadas) unas pruebas elementales. Pero tal evolución corresponde a un progreso auténtico y muy importante en las Matemáticas —cosa que siempre debe esperarse—. Esto ocurre tanto en las Matemáticas puras como en las ciencias aplicadas: pueden citarse numerosos ejemplos. Por esta razón, en lugar de utilizar argumentos rebuscados —pour épater le bourgeois— habría que tratar los problemas económicos a su nivel analítico más simple, lo que no es tarea desdéniable, sino que exige a menudo un importante esfuerzo intelectual.

La teoría de la utilidad nos ofrece un ejemplo del esfuerzo desarrollado en una dirección falsa. Los autores de los años 1870-80 supusieron ingenuamente que la utilidad podía expresarse en cifras,

de forma que permitiera ciertas operaciones aritméticas: admitieron la hipótesis de la llamada "utilidad cardinal". Más tarde se vio que esta hipótesis era dudosa y que sólo se podían emplear los calificativos de "mayor", "menor" o "igual" para determinar el grado de dos utilidades o de dos preferencias de un mismo individuo: nos encontramos así ante la llamada "utilidad ordinal". A partir de esta última idea, más convincente, se ha elaborado una complicada teoría: la de las "curvas de indiferencia". De esta forma, la utilidad ha sido expresada en forma matemática y ha dado lugar a una abundante literatura, que sigue aumentando. La teoría es complicada, densa y presenta algunas dificultades desde el punto de vista matemático. ¿No es, quizá, también torpe? En 1944, Neumann y Morgenstern demostraron que, considerando el problema de la utilidad de manera más realista y, particularmente, dándose cuenta de que las preferencias individuales debían determinarse frente a perspectivas inciertas (en lugar de ciertas, como venían haciéndose hasta entonces), se podía definir un número (sujeto a transformación lineal) para "la utilidad". Esta propiedad numérica fue deducida de una serie de axiomas simples, aceptados muy ampliamente como susceptibles de describir la noción intuitiva de los actos de preferencia. Las ventajas de poder tratar numéricamente la utilidad son importantes: puede uno prescindir de una serie de análisis inaplicables o inapropiados, simplificar la exposición, consagrarse a situaciones más realistas y afrontar los problemas que permanecen inabordable con los instrumentos más primitivos de la teoría de las curvas de indiferencia. Incidentalmente ha habido que enfrentarse con la cuestión de la verificación experimental y con el método para realizar dichos experimentos, precisamente en un campo en el que el uso de los métodos exactos se consideraba a menudo imposible.

El método de las curvas de indiferencia, siendo más antiguo, no ha dado lugar a un trabajo de experimentación comparable. A través de la experimentación es como se espera obtener la confirmación y nuevas ideas para formular teorías mejores. Esta investigación combinada es, pues, lo que constituye la evolución más deseable.

El significado de esta breve observación es que la tarea primordial consiste en descubrir la verdadera naturaleza del fenómeno económico fundamental y concentrar los esfuerzos en esa dirección, en lugar de pararse repentinamente y lanzarse al análisis matemático de un fenómeno mal definido y descrito de manera vaga. Se sabe, por las otras ciencias, lo importante que es poseer un número. Hubiera estado, pues, justificado realizar un gran esfuerzo con miras a encontrar dicho número. El paralelismo con la calorimetría es verdaderamente ilustrativo: la teoría del calor no ha podido tomar cuerpo sino cuando se han establecido los métodos apropiados de medición física de los diferentes fenómenos de temperatura. Sólo después se ha pasado al análisis matemático profundo, con contribuciones iniciales tan importantes como los análisis de Fourier.

Aplicando el mismo procedimiento a la Economía, no es imposible (puesto que la noción fundamental de utilidad está ya dotada de un número) formular en el futuro otras definiciones de las diferentes clases de utilidad. Se puede esperar que esto vaya seguido de progresos matemáticos correspondientes en la teoría de la utilidad.

Vemos así cómo el valor limitado del análisis matemático de las curvas de indiferencia no se deriva del empleo de las Matemáticas, sino del conocimiento limitado del problema económico subyacente.

EL PROBLEMA ECONOMICO REAL

El ejemplo de la utilidad tiene una significación más amplia. Ya hemos dicho que, en otras disciplinas, la matematización era inseparable de la evolución de la teoría física correspondiente. Conviene explorar este fenómeno un poco más a fondo.

La invención del cálculo infinitesimal ha tenido lugar simultáneamente con los progresos de la mecánica, y viceversa. Este es el ejemplo más contundente y mejor conocido, pero hay muchos otros. Lo que de ellos se aprende es que el economista, orientado o no hacia las Matemáticas, debe examinar ante todo el problema económico, tal como éste se manifiesta empíricamente; debe evitar todas las abs-

tracciones y generalizaciones que deforman la esencia de la realidad; debe describir la realidad con ayuda de modelos que no sean ni demasiado simples (que no corresponderían a la realidad) ni demasiado complicados (que escaparían a nuestro poder analítico). Esta regla es difícil de seguir cuando la realidad sólo puede describirse de manera adecuada mediante una teoría potente y compleja y cuando, al mismo tiempo, los conceptos lógicos y matemáticos, así como los técnicos, han de crearse y ponerse a punto, en lugar de hacer uso de aquéllos que se han aplicado con éxito en otros sectores. Así, el eminente Walras y su sucesor Pareto, igualmente insigne, han definido el problema económico como aquél en que las empresas y los consumidores en una economía de mercado tienen que resolver problemas ordinarios de "máximos". En consecuencia, se aplicó el cálculo diferencial para analizar este problema, cálculo que constituye el medio apropiado para resolver una gran variedad de problemas de máximos y de mínimos. Según Walras, Pareto y sus sucesores, las empresas y los individuos se encuentran frente a condiciones fijas (precios, cantidades, etc.), y el resultado de sus actividades depende únicamente de sus propias acciones (ni siquiera el azar interviene!). En términos técnicos: los individuos ejercen un control completo sobre todas las variables de las que depende el máximo buscado (utilidad, beneficio, crecimiento, etc.). Sobre esta hipótesis descansa virtualmente toda la economía moderna, bien sea en su formulación matemática, conocida por el nombre de escuela de Lausana, o bien expresada, por otras formulaciones, en palabras o gráficos. La teoría resultante es la de un equilibrio económico general, en el que las fuerzas de la demanda y de la oferta se equilibran mutuamente y en el que las perturbaciones conducen de nuevo el sistema económico —por medio de los precios adecuados y de las cantidades producidas— al equilibrio. Este representa una situación en la que no hay ni ganancias ni pérdidas y en la que ningún individuo ni empresa podrían mejorar su posición. Ciertamente, es preciso advertir que se ha establecido aquí una condición oculta y fundamental: ni los individuos ni las empresas deben cooperar, for-

mar coaliciones, efectuar pagos no controlados, etc. Es precisamente esta limitación la que tanto aleja el modelo de la realidad, ya que ese género de cooperación es esencial en la vida económica. Walras y sus sucesores no analizan, pues, los problemas económicos reales.

La ausencia de correspondencia de ese modelo con la realidad aparece en un plano fundamental: el hecho es que los individuos no controlan todas las variables de las que depende el resultado. La intervención del azar tiene relativamente poca importancia⁽¹⁾, porque las variables estocásticas pueden tratarse de manera convencional, es decir, estadísticamente, y el problema del máximo podría mantenerse, aunque haciéndose entonces técnicamente mucho más difícil. Pero la dificultad va más lejos, es de orden conceptual: el resultado de una acción no depende solamente del que actúa, sino también de las acciones de los demás, que a veces están dispuestos a cooperar y a veces se muestran hostiles. Desde el momento en que una sola variable no depende ya de nuestro control, sino del de otra voluntad, no se puede decir que tal situación corresponde a un problema de máximos, cualesquiera que sean, por otra parte, los esfuerzos del individuo con miras a alcanzar un máximo. Así, el problema económico es conceptualmente diferente por completo del concebido por Walras y, en realidad, por todos los sucesores de éste. Las personas y las empresas no tienen que habérselas con condiciones fijas. Actúan unas sobre otras y no se podría encontrar, para esta situación, una analogía con la mecánica, como proclama la explicación clásica. No se pudo dar una formulación precisa a este problema económico mientras no se desarrolló la teoría de los juegos de estrategia, al tiempo que se desarrollaba un conocimiento más preciso de la naturaleza del problema.

La creación de la teoría de los juegos abre una brecha profunda en la evolución del pensamiento económico, que llega hasta las

(1) Sin embargo, el azar no se ha introducido en el modelo walrasiano clásico sino muy recientemente y de una manera superficial, aunque haya podido aportar modificaciones notables. Cf. K. Borch: "Equilibrium in a Reinsurance Market" (Econometría, vol. 30, julio 1962, págs. 424 y sgts.), donde ese fenómeno se examina a fondo y se extiende más allá de la formulación clásica.

raíces mismas de esta ciencia⁽²⁾. Es evidente que el reconocimiento de esta modificación conceptual exige el empleo de instrumentos analíticos susceptibles de formular y de resolver el problema planteado. Estos instrumentos pueden ser matemáticos o no y se los puede encontrar o no dentro del repertorio de nuestros conocimientos. En realidad, no había instrumento prefabricado; ha habido que crearlo y ha sido de carácter necesariamente matemático, habiendo adoptado la forma del célebre teorema minimax, de Von Neumann, y de la teoría matemática que se ha construido sobre este fundamento. La estructura de esta teoría es, pues, totalmente diferente de la teoría neoclásica corriente del equilibrio económico general. En ausencia de un nuevo cálculo específico, es preciso volver a los elementos fundamentales del razonamiento matemático. Pero tal vez sea necesario inventar o descubrir un cálculo nuevo que se adapte particularmente a los problemas económicos y sociales, al igual que se adaptaba el cálculo diferencial a la mecánica clásica.

La nueva teoría contiene igualmente un aspecto con el que hay que contar en toda matematización auténtica: la teoría matemática debe proporcionar ante todo las mismas perspectivas que podrían obtenerse con el sentido común. Después proporcionará resultados que irán mucho más allá del sentido común, resultados que este sentido común no podría imaginar. Cuando esto sucede, alguno de los nuevos resultados pueden ser traducidos al lenguaje ordinario, pero otros no pueden serlo. En tal caso, se quedan en el plano del simbolismo matemático. Pasado este punto, se habrá alcanzado un grado de desarrollo superior de la ciencia, el cual no puede alcanzarse más que por medio de las Matemáticas. La teoría de los juegos ya ha entrado en esa fase de evolución, mientras que no hay ejemplos similares para la teoría clásica o neoclásica. Esto es otra indicación de las posibilidades del empleo apropiado de las Matemáticas. Por el contrario, si éstas se emplean para construir un modelo que no

(2) Cf. J. von Neumann y O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior* (Princeton, 1944, 3ª ed., 1953) y la bibliografía posterior. Entre las obras más recientes: R. J. Aumann y M. Maschler (directores de edición): *Recent Advances in Game Theory* (Princeton, 1962).

corresponde a la realidad, aparecen rápidamente las limitaciones en el empleo de las Matemáticas. Pero estas limitaciones no pueden interesar a nadie, ya que no se trata de limitaciones inherentes a las Matemáticas, sino de limitaciones del modelo que las Matemáticas deben ayudar a desarrollar. Ciertamente, el análisis del sistema walrasiano puede llevarse hasta un grado muy alto de finura matemática —lo que, por otra parte, ha sucedido en realidad⁽³⁾—, pero el valor de esta proeza depende en definitiva del valor de su contenido económico.

TEORIA INTUITIVA Y TEORIA AXIOMATICA

La evolución matemática de cualquier ciencia culmina en la formulación axiomática de su objeto. El método axiomático moderno se apuntó un éxito notable, precisamente en las Matemáticas, cuando David Hilbert formuló los axiomas de la Geometría en la década 1890-1900. La idea de un axioma y la posibilidad de extraer deducciones de él es, evidentemente, mucho más antigua. El método ya había sido empleado por Euclides. Pero sólo a partir de Hilbert se llegó a la comprensión total de este método. Desde entonces se ha utilizado muy ampliamente, y no sólo en las Matemáticas. Algunas ramas de la Física están actualmente formuladas de manera axiomática, aunque no todas. Esto encierra una enseñanza.

El método axiomático consiste en formular una serie de proposiciones que deben cumplir ciertas condiciones. En particular, deben estar desprovistas de contradicciones, y las deducciones que obtenemos deben comprender nuestro conocimiento de la realidad estudiada y llevarnos más allá, hacia nuevas perspectivas. Si se hace axiomática una parte de las Matemáticas, los axiomas serán proposiciones matemáticas, como, p. ej., la de que sobre una superficie plana una única línea recta puede unir dos puntos, etc. Si se trata de una disciplina empírica, los axiomas serán afirmaciones sobre

(3) Pensamos particularmente en la obra de G. Debreu, *Theory of Value* (Nueva York, 1959), donde se encuentran igualmente referencias a los trabajos de Arrow, Gale, Uzawa, etc.

una parte del mundo real; p. ej., que la velocidad de la luz es constante. En ningún caso son los axiomas más verdaderos que sus implicaciones, pues éstas se derivan de las deducciones basadas en los axiomas. Estos últimos son elegidos por razones de comodidad, porque son intuitivamente aceptables y porque expresan de manera adecuada, y quizá estéticamente satisfactoria, conocimientos fundamentales sobre la realidad en cuestión. Pero no constituyen verdades evidentes, como quería la concepción antigua, hoy superada, del axioma. El método axiomático es simplemente una excelente técnica para resumir nuestros conocimientos en un determinado campo y para deducir de ellos conocimientos nuevos. Esto implica inevitablemente operaciones lógico-matemáticas, a veces de gran complejidad. Cuando se ha llegado al estadio de axiomatización de una realidad empírica, lo cual representa un perfeccionamiento cierto, las Matemáticas se hacen indispensables.

Esta última observación muestra claramente que el método axiomático se adaptará particularmente a las fases y a las ramas de una ciencia en la que se ha llegado a la comprensión exacta de los conceptos fundamentales. El método axiomático no se presenta en un escenario vacío. Es preciso desarrollar en él una larga exploración preparatoria y un gran esfuerzo de pensamiento, en gran parte experimental y fragmentario. Algunos trabajos adoptarán una forma matemática y otros no.

La condición esencial del progreso de la ciencia económica continúa siendo el mejoramiento del fundamento empírico de esta ciencia. A pesar de las montañas de cifras que nos suministra todos los días el sistema económico, “nuestro conocimiento de los hechos esenciales de la vida económica es incomparablemente más pobre de lo que era el exigido por la Física en la época en que se consumó la matematización de esta disciplina. En efecto, el progreso decisivo de la Física en el siglo XVII, particularmente en el campo de la mecánica, sólo fue posible gracias al desarrollo anterior de la Astronomía. Había sido preparado por varios milenios de observación astronómica científica y sistemática, que culminaron en un obser-

vador fuera de serie: Tycho de Brahe. Nada semejante ha sucedido en Economía" (4).

Este trabajo preparatorio deja mucho espacio a la intuición, sin la cual no habría ciencia. La teoría intuitiva existe por propio derecho. Es el paso que conduce de la investigación histórico-estadístico-experimental a las primeras etapas de la interpretación teórica. Incluso en esta fase puede ser necesario un empleo extenso de las Matemáticas (en Economía, ciertamente, un empleo considerable de la Estadística, disciplina en la cual el uso de las Matemáticas se ha expandido de forma totalmente imprevisible, sin que se prevean por ahora limitaciones). Una teoría de este género adolecerá, a menudo, de falta de precisión en sus comienzos, a pesar de la formulación matemática.

Las dificultades de formulación son verdaderamente muy importantes. Se ha dicho con mucha frecuencia, y es bien sabido, que la formulación de un problema entraña a menudo la garantía de su solución. La actividad científica consiste, en gran medida, en plantear adecuadamente el problema. Llegamos a un punto en que los economistas y los matemáticos deben aunar sus esfuerzos para conseguir esto a fin de hacer avanzar nuestros conocimientos.

Esta última observación nos brinda la ocasión de señalar un malentendido frecuente a propósito de las teorías formuladas con ayuda de las Matemáticas. Se ha dicho que "las Matemáticas no tienen símbolos para ideas confusas". Esto no es necesariamente cierto. En realidad, muchas ideas confusas se han representado mediante símbolos —tanto en palabras como fórmulas—, y esta práctica se prosigue sin interrupción en todos los dominios de la actividad humana. Las Matemáticas no son una excepción, lo cual puede apreciarse si se piensa en el tiempo que se ha tardado en establecer nociones precisas sobre la prueba matemática rigurosa, sin hablar de que durante generaciones las ideas "de lo infinitamente pequeño" socavaron los fundamentos mismos del cálculo integral y del

(4) Cf. *Theory of Games*, op. cit., pág. 4.

cálculo diferencial. Incluso la propia noción de "variable" vuelve a estar sometida a examen, poniéndose en duda el uso habitual de este concepto⁽⁵⁾.

Así, pues, la afirmación de que la economía matemática no es siempre tan clara y transparente como desearía el profano respetuoso hacia el empleo de las Matemáticas, no carece desde luego de fundamento. Es preciso decir con énfasis a todo no-matemático que hay buenas y malas Matemáticas, buenos y malos escritos y presentaciones matemáticas, al igual que sucede en todas las demás ciencias. La aparición de una fórmula en una revista o en un libro no aclara automáticamente un problema difícil ni da más valor a la obra. Antes bien, la fórmula amenaza con embarullar las cosas. Ya he hablado anteriormente del empleo, a menudo inútil, de los símbolos matemáticos cuando éstos no mejoran en absoluto el valor del análisis. Pero esto implicaba que su empleo era correcto, aunque sobrecargara inútilmente la exposición con fórmulas matemáticas. Aquí vemos que, a veces, puede haber pseudo-aplicaciones. Pero con la naciente penetración de las Matemáticas en la Economía, esas pseudo-aplicaciones tenderán a hacerse menos frecuentes.

ESCALA DE VALORES

Se deduce de la sección precedente que es peligroso pretender establecer una jerarquía entre las diferentes ramas de la ciencia económica. Siempre ha sucedido así: a veces dominaban las investigaciones históricas y se miraba a la teoría con desconfianza, otras veces ocurría al revés. En la hora actual hay una tendencia innegable a considerar sólo como valiosas las contribuciones de la economía matemática. De aquí se deriva cierto apresuramiento por condensarlo todo en alguna fórmula matemática, aunque no se trate más que de embellecer un trabajo de investigación, sumamente interesante por

(5) Cf. en particular K. Menger en sus escritos recientes, como "The Idea of Variable and Function", Proceedings of the National Academy of Science, vol. 39, 1953, págs. 956-61, y su libro Calculus: A modern Approach (Boston, 1955).

lo demás. Esto me parece inútil y hasta peligroso. No se podría establecer una escala de valores para las diferentes ramas de una ciencia económica en plena evolución. En realidad, siempre que se abre una perspectiva fundamentalmente nueva, cuando se elabora una teoría nueva que ordena e interpreta grandes cantidades de material empírico, así como los resultados de una experimentación cuidadosamente planeada, estamos ante una gran proeza. Esta puede eclipsar, durante cierto tiempo, los trabajos de aquéllos que contribuyeron aportando sus piedras a la construcción. Todo esto está de acuerdo con la naturaleza del progreso científico, y nunca sucederá de otro modo. En todo caso, tiene poco sentido atribuir un "rango" superior a ciertas formas de la actividad científica frente a otras. Todo intento de establecer tal jerarquía es un signo de falta de madurez: por eso no se advierten esfuerzos semejantes en la Física⁽⁶⁾. En otros tiempos los filósofos intentaban establecer una clasificación jerárquica de las ciencias, pero se vieron irremediabilmente en contradicción con la evolución histórica ulterior.

DESARROLLOS FUTUROS

Estamos ahora en condiciones de hacer unas observaciones finales sobre la relación entre las Matemáticas y la Economía y, por consiguiente, sobre las limitaciones de estas dos disciplinas.

Hasta ahora las Matemáticas han sido estimuladas principalmente por las ciencias naturales. Desde la medición de la tierra—Geometría— hasta los problemas de Arquímedes, desde el estudio de Galileo sobre la mecánica hasta la ley de la gravitación de Newton, la Física y las Matemáticas han evolucionado paralelamente. Este encadenamiento se prosigue con éxito espectacular. Es sorprendente que la raza humana pueda descubrir leyes de la Naturaleza,

(6) Es interesante señalar que el Premio Nobel se concede generalmente por una importante obra de experimentación o por el descubrimiento de nuevos "efectos", pero rara vez por una teoría. Así, por ej., Einstein recibió el Premio Nobel por su trabajo sobre el movimiento browniano y no por la teoría de la relatividad.

que éstas puedan ser definidas con tanta exactitud y que puedan ser descritas por los hombres, cuya existencia sólo es posible entre límites estrictos de temperatura, de luz y de combinación de agua y atmósfera. Sin embargo, el hombre apenas ha comenzado a comprender el funcionamiento de la sociedad, la acción de un hombre sobre otro, de un Estado sobre otro Estado. El problema fundamental es saber si pueden descubrirse — o si ya han sido descubiertas — unas leyes económicas comparables, en cuanto a calidad lógica, a las de la Naturaleza, aunque puedan ser de estructura diferente. Si tales leyes existen, encontrarán formulación matemática. Sobre esto no puede haber la menor duda. Las leyes de la Naturaleza están escritas en el lenguaje de las Matemáticas, como ya comprendieron los antiguos. Las leyes de la sociedad serán descritas en el mismo lenguaje: esto es lo que deberán comprender los modernos.

Todo indica que en el futuro las Matemáticas serán vigorosamente estimuladas por las ciencias sociales. En la hora actual existen indicios claros de esta evolución, siendo interesante observar que un número creciente de matemáticos se interesa por los problemas económicos y sociales. Cada vez son más los jóvenes talentos que vuelven sus ojos hacia la Economía, atraídos por la vitalidad y las perspectivas de esta ciencia, la mayor parte de la cual implica un empleo de las Matemáticas mucho más extenso que nunca.

El período moderno de la economía matemática está estrechamente asociado a los nombres de A. Wald y J. von Neumann. El primero ha suministrado una prueba de existencia de las soluciones del sistema modificado, aunque todavía clásico, del equilibrio general de Walras. El segundo ha tenido una concepción original de una Economía en expansión, de la que ha encontrado su equilibrio dinámico. Además, la teoría de los juegos, basada sobre su teorema fundamental del minimax, ha creado nociones nuevas, de importancia indiscutible tanto desde el punto de vista conceptual como desde el matemático. Estos trabajos y estos métodos han sido continuados y enriquecidos.

Una de las consecuencias más notables ha sido que ciertas partes de la teoría económica han vuelto a adquirir interés práctico. Los economistas aconsejan a las empresas sobre planificación, estrategia de los negocios, control de los stocks, política de precios, gestión de sus haberes en cartera, etc., mientras que antes apenas podían examinar ni siquiera superficialmente estas operaciones. Esta importancia creciente de la Economía para la empresa se debe igualmente al hecho de que los objetivos perseguidos por los negocios se han formulado recientemente de una manera más concreta desde el punto de vista operativo. Así, p. ej., el objetivo puede expresarse como el deseo de maximizar o de optimizar una finalidad económica susceptible de ser enunciada, de manera precisa, en términos matemáticos.

Si bien el carácter pragmático de una teoría no determina necesariamente su valor intrínseco, sus aplicaciones son de gran importancia para su confirmación, y también porque el investigador está llamado inevitablemente a hacer frente a nuevos problemas que dan lugar a nuevas investigaciones científicas. Todo esto resulta favorecido por la enorme potencia de las calculadoras electrónicas, que constituyen en manos de los economistas un instrumento con el que no se podía ni soñar hace solamente una generación⁽⁷⁾. El economista no matemático está desarmado ante este instrumento. Tiene que, o bien adquirir los conocimientos necesarios, o bien aprender a cooperar con sus colegas de formación matemática. Las dos cosas parecen difíciles, pero ambas son necesarias. Así se repite la evolución que ha tenido lugar en la física, en la cual el experimentador debe estar en situación de hablar con el físico matemático, sin poseer por ello la formación de este último, y viceversa. En ciencia económica, la calculadora electrónica suprimirá también las fronteras artificiales entre la investigación histórica y la investigación estadística, puesto que las series cronológicas constituyen su esencia; pero, tratándose de series estadísticas, es necesario un delicado aná-

(7) Cf. O. Morgenstern: "Experiment and Large Scale Computation in Economics", en *Economic Activity Analysis*, O. Morgenstern (director de edición) (Nueva York, 1954).

lisis matemático-estadístico para que nos suministren las informaciones buscadas. En suma, vemos que las Matemáticas penetran cada vez más en los diferentes aspectos de la ciencia económica y no se percibe ningún límite a este proceso.

En realidad, continuamente están naciendo nuevos problemas de carácter matemático. Esto sucede p. ej., con el procesamiento electrónico de la información numérica, a la cual ya no se oponen los economistas. Tal es el caso que se presenta en la solución de vastos sistemas de ecuaciones que resultan p. ej., de la aplicación de la programación lineal a un caso concreto. La única cuestión es saber si las centenas de millares de operaciones ejecutadas fácilmente por la calculadora electrónica suministran un conjunto significativo de cifras que facilite una respuesta, o solamente mucho "ruido", debido a la necesidad de redondear constantemente las cifras. Es este un grave problema, todavía muy descuidado, que plantea numerosas cuestiones nuevas⁽⁸⁾. Aunque éstas no sean particulares de la Economía, el economista debe tratar de hacerlas frente, lo cual le conduce hacia una nueva región de consideraciones matemáticas. Tales preocupaciones no han penetrado todavía en la Economía matemática, aunque se efectúen cálculos electrónicos en gran escala. Este problema no podía ni siquiera plantearse hace sólo una veintena de años. Otros problemas irán surgiendo más adelante.

Se ve claramente cómo este solo ejemplo muestra la imposibilidad de fijar "límites" al empleo de las Matemáticas. Nadie que hubiera escrito antes del advenimiento de las máquinas electrónicas hubiese podido prever tal situación ni la necesidad para los economistas (y para todos los científicos teóricos) de ocuparse ellos mismos de estos complejos problemas. En Matemática pura, tampoco había necesidad de ocuparse de ellos. Las dos evoluciones han ocurrido paralelamente, lo cual prueba una vez más, de manera complementaria, la interdependencia entre la exploración del mundo

(8) Existe también el problema de la naturaleza de los datos utilizados como inputs. Cf. O. Morgenstern: *On the Accuracy of Economic Observations* (2ª ed., revisada, Princeton, 1963).

físico por el hombre y la evolución de las Matemáticas⁽⁹⁾. Así como éstas han obtenido provecho de su relación íntima con las ciencias físicas, en el futuro se beneficiarán de su participación creciente en los problemas del mundo social.

OSKAR MORGENSTERN

(9) Esto ha sido mostrado de manera particularmente clara en el notable estudio de J. von Neumann "The Mathematician", en *The Works of the Mind*, editado por R. B. Heywood (Chicago, 1947), y reeditado en J. von Neumann: "Collected Works", vol. I (Oxford y Nueva York, 1961).