REVISTA DE ECONOMÍA Y ESTADÍSTICA
INSTITUTO DE ECONOMÍA Y FINANZAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
ISSN 0034-8066

OPEN ACCESS

ARTÍCULOS

Introducción a la teoría de la información y sus aplicaciones (Parte III)

José María Fernández Pirla

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 8, No. 3-4 (1964): 3º y 4º Trimestre, pp. 21-33.

http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3580

INTRODUCCION A LA TEORIA DE LA INFORMACION Y SUS APLICACIONES (III parte) (*)

La Economía de las Comunicaciones.

En el artículo anterior hemos analizado el criterio de selección de mensajes dentro de una forma de comunicación dada al objeto de obtener la mayor cantidad posible de información, pero con frecuencia puede plantearse el problema de elegir no el mensaje, sino la propia forma de comunicación, canal o línea.

En el ejemplo ya estudiado la estructura de la comunicación venía dada por la forma de plantear las cuestiones y la naturaleza de las respuestas dadas a las mismas, y el problema que exponíamos y resolvíamos, consistía, en términos económicos, en ver cómo se lograba un rendimiento óptimo de dicha *estructura de comunicación.*

Entramos ahora en la consideración de un problema más profundo, que consiste precisamente en elegir la forma de comunicación. La diferencia con la cuestión anteriormente tratada la comprenderemos fácilmente con un sencillo ejemplo que vamos a referir en este caso a la supuesta adivinación de una carta de baraja pensada entre varias.

Supongamos que se dispone de 27 cartas y nuestro interlocutor piensa una de ellas, teniendo nosotros que ''descubrir'' la misma de la forma más impresionante para aquél [1].

(*) Las Partes I y II de este artículo se publicaron, respectivamente, en los números Año VII, Nº 2 de 1963 y Año VIII, Nº 1 de 1964 de la "Revista de Economía y Estadística".

(1) Este problema aparece expuesto en la obra de Mc Closkey y Trefethen "Introduction a la Recherche Opérationelle" (Dunod, París, 1958), pág. 131.

Evidentemente podíamos seguir la línea o forma de comunicación que nos es familiar, consistente en hacer preguntas que puedan ser contestadas afirmativa o negativamente. Como la indeterminación del problema es

$$I = \log_2 27$$

cuyo valor es algo más de 4, resultará que con cinco preguntas formuladas con la preocupación de que las respuestas de *sí* y de *no* sean equiprobables, habremos descubierto la carta pensada.

Pero en lugar de seguir este camino, que creemos no impresionaría demasiado a la persona que se había prestado a la experiencia del juego, podríamos, dada la naturaleza del mismo, seguir otro distinto, obteniendo la información necesaria para resolverlo a través de un planteamiento diferente de la estructura de la comunicación, camino éste que va a responder al siguiente razonamiento previo.

La indeterminación del problema $I = \log_2 27$ puede darse también así:

$$I = \log_2 3^3$$

expresión que es igual a la siguiente:

$$I = 3\log_2 3$$

en virtud de la definición de logaritmo de una potencia.

Esta última expresión nos viene a decir que si realizamos tres experiencias sobre el asunto en cuestión, cada una de las cuales nos proporcione una cantidad de información $\log_2 3$ (lo que es evidentemente algo más de un *bit*), habremos resuelto el problema.

¿Cabe que, dada la forma de presentarse la cuestión tratada, podamos hacer un planteamiento de la estructura de la comunicación para la que cada mensaje traiga precisamente esa cantidad de información, de tal suerte que al acabar la recepción de tres mensajes hayamos obtenido toda la información necesaria? Si así sucede y no hay, atendida a la naturaleza del problema, otra estructura de comunicación más ventajosa, podremos afirmar que hemos hallado el óptimo en la elección de la estructura de la comunicación, sin perjuicio de que los mensajes que recibamos sobre dicha estructura respondan también al principio de economía que nos garantiza la máxima cantidad de información en cada uno

En el juego planteado podemos, en efecto, distribuir las veintisiete cartas en tres columnas, cada una de nueve, y preguntar al interlocutor en qué grupo o columna se halla la carta pensada.

Repitamos la experiencia agrupando previamente todas las cartas y distribuyéndolas de nuevo, pero haciendo que ocupen el primer lugar las cartas que se hallaban en la columna designada por el interlocutor, lo cual no es difícil poniendo éstas, al recogerlas, encima o debajo del resto de la baraja. De esta forma dichas cartas ocuparán ahora los tres primeros lugares de las tres nuevas columnas formadas.

Preguntando de nuevo al interlocutor en qué columna se encuentra la carta por él pensada, volveremos a repetir idéntica operación, con lo que tres cartas de la primitiva columna, entre las que está la carta pensada, quedarán ocupando el primer lugar de las tres columnas últimamente formadas. Bastará, por consiguiente, que preguntemos por último a nuestro interlocutor en qué columna se halla la carta, para que automáticamente descubramos que es la primera de la columna.

Ciertamente que la teoría matemática de la información no puede explicar la habilidad en la colocación de las cartas para resolver el juego, aunque nosotros lo hemos hecho dando un criterio sencillo que permitirá practicar la experiencia a cualquier lector. Pero la teoría de la información nos dice "a priori" que con tres experiencias cada una de las cuales nos traiga una cantidad de información igual a $\log_2 3$ bits —lo que se consigue a base de que la probabilidad de los tres acontecimientos sea la misma—, la indeterminación quedará resuelta. En la habilidad de quien plantee el problema está la elección de la forma de realizarlo de modo que obtenga los mejores resultados perseguidos, que en el juego por nosotros expuesto consiste en hacerlo como hemos indicado [2].

(2) Hablando en términos más precisos diríamos que de no realizar el juego en la forma habilidosa propuesta, obtendríamos información repetida. Tal sucedería si distribuyéramos las cartas en cada prueba al azar.

Queremos destacar en relación con el juego expuesto, cómo con tres experiencias lo hemos resuelto, en lugar de las cinco que hubiéramos necesitado si utilizásemos el método de hacer preguntas que habrían de ser respondidas con sí o no. Por la naturaleza del juego expuesto ha sido mejor —diríamos más económico— cambiar el sistema de comunicación utilizando en este caso distribuciones ternarias de las cartas.

Sin entrar con más rigor en esta cuestión, queda esbozado el contenido de un interesante campo para la investigación de las formas de comunicación más aconsejables a la naturaleza del problema sobre el que se requiere información.

Redundancia: su medida.

Constituye la redundancia informativa la cantidad de información repetida. Puede haber redundancia en las fuentes y así sucede cuando la misma información se transmite por distintos medios para asegurar su recepción, o en los mensajes cuando se repite todo o parte del contenido informativo del mismo durante la comunicación. Nos referimos fundamentalmente en este apartado a esta segunda forma de la redundancia.

El conocimiento de la redundancia de una fuente considerada autónomamente (redundancia referida a los mensajes, por consiguiente) es importante cuando la obtención de información tiene un precio, ya que en principio no son deseables aquellas formas de comunicación que aparentemente aportan gran cantidad de información, pero que, depurada la misma, resultan de un escaso valor informativo real. El proceso de depuración de la información recibida, librándola de la redundancia que tiene se llama *filtraje* (3).

El estudio de la redundancia de una fuente es otro de los ámbitos que se presentan a la investigación actual en materia de teoría de la información y comunicaciones. El estudio matemático de la redundancia presenta complejidades que no nos interesa desarrollar

(3) Mc Closkey et Coppinger: "Recherche opérationelle: cas pratiques et méthodes" (Dunod, París, 1959), pág. 210 y sgtes.

en este modesto trabajo, en el que solamente vamos a ver el significado que la redundancia tiene por medio del análisis de un caso concreto que se suele presentar como ejemplo típico: el idioma.

Un idioma es un conjunto de símbolos o de sonidos (según nos refiramos a su forma escrita o a la verbal) relacionado por reglas que definen el trabazón lógico o estructura gráfica o fonética del mismo.

Un idioma podemos concebirlo como una línea o canal de comunicación para transmitir ideas. La misma idea puede ser comunicada, evidentemente, en varios idiomas.

Las letras o los sonidos se combinan en el idioma para formar las palabras, y éstas, según las reglas gramaticales adecuadas, se integran en las oraciones. La transmisión de cualquier idea da lugar entonces a la emisión de un conjunto de símbolos o sonidos debidamente ordenados, que determinan, según las reglas del idioma, una cierta frecuencia estadística en su empleo. La consideración de tal frecuencia estadística nos da una versión meramente cuantitativa del idioma cuando el texto sobre el que dicho estudio se realiza es lo suficientemente amplio.

La versión estadística del idioma puede referirse no solamente a la frecuencia relativa de las letras, sino de los enlaces entre éstas (grupos de letras), y aun de las relaciones entre palabras.

Un estudio de esta naturaleza acerca de cualquier idioma, con tal de que sea suficientemente amplio, nos ofrece, por consiguiente, una visión de la que podemos calificar como *estructura estadística* del mismo, lo que permite en primer lugar descubrir el idioma en el que figura escrito un texto desconocido por la simple verificación de las frecuencias estadísticas de sus símbolos y en segundo lugar llegar a reconocer las expresiones formuladas en idiomas hoy ignorados o revelar textos escritos en clave, lo que constituye el objeto de la Criptografía.

Pues bien; si un idioma determinado consta, por ejemplo de 27 símbolos o letras, la cantidad de información que cabe afectar, por término medio, a cada uno de los mismos será:

$$I = \log_2 27 \text{ bits} = 4{,}75 \text{ bits}$$

con tal, naturalmente, de que fuera equiprobable el uso de cada uno de ellos.

Pero sabemos que en los idiomas utilizados por nosotros tal equiprobabilidad no se da. Así, por ejemplo, en la lengua castellana es mucho más frecuente la letra *a* que la letra *f*, y a su vez ésta lo es más que la letra *z*.

En efecto, si se hacen experiencias aleatorias consistentes en obtener al azar letras de una bolsa en que se han colocado las mismas en igual número, se obtiene un llamado mensaje aleatorio que no tiene ningún vestigio idiomático. Pero a medida que el mensaje aleatorio se forma considerando ya la probabilidad que las letras tienen en el idioma, de acuerdo con sus reglas de estructura ortográfica y aun las probabilidades de los pares o ternas de letras, va adquiriendo sentido.

La entropía del idioma inglés (4) que nos dice la información media contenida en una letra de dicho idioma es de un bit aproximadamente (se ha calculado hallando la suma de los productos de las probabilidades que las letras tienen en dicho idioma por los logaritmos binarios de dichas probabilidades), mientras que si todas las letras se utilizaran con igual probabilidad, el valor informativo medio de cada una de ellas sería:

$$\log_2 27 = 4{,}75 \text{ bits}$$

Ello quiere decir, que el idioma inglés, como cualquier otro, tiene fuerte redundancia que se mide por la diferencia entre la entropía máxima y la entropía real que corresponden a los símbolos que el idioma tiene (5).

(4) Mc Closkey y Trefethen, ob. cit., pág. 131 y Yaglow, ob. cit., páginas 120 y 121.

(5) Obsérvese que una fuente de comunicación tiene su forma o estructura que le caracteriza y que no puede alterarse de ordinario sin perjuicio de perturbar la fuente. Así, por ejemplo, el idioma inglés ha de aceptarse con sus peculiares reglas que determinan una cierta frecuencia en el empleo de sus símbolos. Alterar dicha frecuencia buscando un mayor valor informativo es renunciar al idioma. Puede ser de interés, ciertamente, crear un idioma buscando unas reglas de estructura que garanticen un máximo valor informativo en el empleo de los símbolos: tal es la taquigrafía.

El significado de la redundancia es bien claro en este caso: si el idioma analizado tuviera unas reglas gramaticales que permitieran las mismas frecuencias de uso para todas las letras, sería posible obtener la misma cantidad de información con menos letras o mayor información con un número de letras dado. El idioma sería entonces mucho más económico.

La diferencia entre el máximo valor informativo que correspondería a cada símbolo, y el que realmente tienen en el idioma, constituye una medida del que podemos llamar defectuoso empleo de los símbolos de comunicación, es decir, la redundancia, aunque ello sea inevitable porque viene determinado por las reglas del idioma.

La redundancia suele expresarse por dicha diferencia, pero medida precisamente en términos de la entropía máxima, en cuyo caso la fórmula de dicha medida sería:

$$R = \frac{H_{max}(\alpha) - H_R(\alpha)}{H_{max}(\alpha)} = 1 - \frac{H_R(\alpha)}{H_{max}(\alpha)}$$

siendo α el número de símbolos o letras empleados en el idioma.

A la vista de cualquier fuente informativa interesa medir su redundancia para saber cuál es el contenido real de información de la misma, sobre todo cuando la información se ha de considerar con un criterio económico que ha de conjugar, no solamente el precio de la información obtenida, sino los gastos del proceso de filtraje o depuración de ella.

SELECCIÓN DE FUENTES INFORMATIVAS.

Llegado a este punto, hemos desembocado en la esencia del problema económico, que en relación con la teoría matemática de la información nos hemos de plantear en la economía de la empresa.

Quien ha de tomar decisiones fundamentadas, sabe que tiene a su alcance distintas fuentes de información, las cuales tienen su forma peculiar o estructura informativa, que le aportará referencias y datos sobre una multitud de cuestiones que afectan a la decisión compleja que ha de adoptarse: la prensa, la radio, los registros públicos, etc., etc. Estas fuentes tienen su precio, y su valor informativo aparente y real, esto es, también tienen redundancia. Las fuentes menos redundantes, es decir, con mayor riqueza de información, serán normalmente más caras, porque aportan una información de mejor calidad. Quien con un criterio económico ha de servirse de varias fuentes de información, procurará encontrar su equilibrio de utilización de las mismas, logrando la combinación de ellas que, proporcionándole la cantidad de información necesaria para asegurar las realizaciones de su actuación al nivel deseado, le resulte menos costosa [6].

Si se conoce el valor informativo real (después del filtraje del mensaje) de todas las fuentes en relación con la totalidad de las cuestiones acerca de las cuales se requiere información, y se conoce asimismo cuál es el coste del empleo de dichas fuentes, cabe plantearse el problema de selección de las fuentes como una aplicación de la programación lineal [7].

UN CURIOSO EJEMPLO DE APLICACION DE LA TEORIA DE LA INFORMACION

Como final de nuestras colaboraciones en esta materia, vamos a brindar al lector un entretenimiento que suele presentarse como de "descubrimiento" de un número pensado indicando al intérprete solamente las columnas de un cuadro de números en las que dicho número se encuentra. La localización del número pensado es muy

(6) Las relaciones entre el nivel de información y el nivel de seguridad de las posibles realizaciones de las decisiones adoptadas, constituye un interesante problema de estadística matemática.

(7) Sobre esta cuestión y bajo el título *"Los problemas de decisión y la valoración de la información"* presentaron a las Reuniones Nacionales de Investigación Operativa celebradas en Madrid en 1962, una comunicación el Catedrático de Estadística Angel Vegas y el autor de este trabajo. Dicho trabajo está editado por el Instituto de Racionalización del Trabajo juntamente con otras comunicaciones.

sencilla, ya que el cuadro de números en cuestión aparece ordenado en columnas que comprenden todos los números de mayor a menor. Las personas que son objeto de esta experiencia o juego forman a primera vista la idea que quien interpreta dicha habilidad conoce de memoria la tabla y posee una gran capacidad de reflejo mental que le permite localizar el referido número entre un grupo numeroso de ellos al saber en qué columnas del cuadro figura.

Hemos elaborado la tabla de los primeros 60 números, y encabezamos las columnas de la misma con las potencias de 2 a que su formación responde, tal como explicamos a continuación.

La tabla es la siguiente:

$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$
1	2				
3	3	4	8	16	32
5	6	5	9	17	33
7	7	6	10	18	34
9	10	7	11	19	35
11	11	12	12	20	36
13	14	13	13	21	37
15	15	14	14	22	38
17	18	15	15	23	39
19	19	20	24	24	40
21	22	21	25	25	41
23	23	22	26	26	42
25	26	23	27	27	43
27	27	28	28	28	44
29	30	29	29	29	45
31	31	30	30	30	46
33	34	31	31	31	47
35	35	36	40	48	48
37	38	37	41	49	49
39	39	38	42	50	50
41	42	39	43	51	51
43	43	44	44	52	52
45	46	45	45	53	53
47	47	46	46	54	54
49	50	47	47	55	55
51	51	52	56	56	56
53	52	53	57	57	57
55	55	54	58	58	58
57	58	55	59	59	59
59	59	60	60	60	60

Para la formación de la tabla ha de expresarse cada número en el sistema binario; así por ejemplo, el número 7 vendrá dado como potencias consecutivas de 2 de la forma siguiente:

$$1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

o bien expresado en base binaria por 111 (8) y se le hará figurar en las columnas correspondientes a las potencias de dos que lo integran.

Al ser el número 7 la suma de las tres primeras potencias consecutivas de 2, lo haremos figurar en las columnas primera, segunda y tercera, que son las que corresponden respectivamente a dichas potencias.

---

(8) Quizás convenga repasar un poco los fundamentos o bases de un sistema de numeración, ya que con frecuencia el uso rutinario del mismo nos hace olvidar su origen, considerando el sistema decimal como algo consustancial con nuestra existencia, ignorando que el mismo fue creación del hombre y que análogamente puede haber otros sistemas de numeración de distinta base.

En el sistema decimal cualquier número es el resultado de la suma de potencias consecutivas de 10 afectadas con distintos coeficientes, también del 1 al 10, que expresan el número de veces que ha de tomarse la respectiva potencia para alcanzar el número deseado.

Así, por ejemplo, el número 527 es el resultado abreviado de la suma de cinco centenas, dos decenas y siete unidades, esto es la suma de las siguientes potencias de 10

$$5 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

Si la base de la numeración se constituyera en lugar de con los guarismos de nuestro sistema usual (del 0 al 9) nada más que con dos símbolos, como sucedería en el sistema binario, el mismo número sólo habría de venir expresado como resultado de las siguientes potencias de dos afectadas cada una del número de veces (una o ninguna, ya que la base de la numeración es 2) que las mismas habrían de tomarse para formar el número deseado

$$1 \times 2^9 + 0 \times 2^8 + 0 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 +$$
$$+ 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

o bien en forma abreviada, tomando sólo los coeficientes de las potencias y al igual que usamos en la expresión decimal.

1000001111

que sería la expresión en el sistema binario del número 52 en el sistema decimal.

Análogamente el número 53, que sería en base decimal vendría compuesto en base binaria de la siguiente forma

$$1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

o bien designado en forma reducida y sobre la base de emplear sólo dos guarismos que corresponden al sistema binario, por la cifra 110.101, por lo que al estar integrado dicho número por la suma de las potencias 5ª, 4ª, 2ª y 0 del número 2 (base de la numeración) habría de figurar en las columnas 6, 5, 3 y 1 de la tabla, que son las que corresponden respectivamente a dichas potencias.

Utilización de la Tabla.

Para "descubrir" un número pensado, basta que nuestro interlocutor lo localice, y así nos lo comunique, en las distintas columnas de que consta la tabla.

El número pensado estará comprendido, naturalmente, dentro de los límites en que la tabla se ha confeccionado, es decir, en nuestro caso, entre los números 1 y 60. La indeterminación pues del número pensado es $\log_2 60$ ya que partimos de la hipótesis de que la probabilidad de pensar cualquier número es la misma. Bastará, por consiguiente, que nuestro interlocutor nos transmita una información que tenga tal contenido informativo para resolver el problema, y dicha cantidad de información es la que precisamente recibimos cuando nuestro interlocutor nos indica en qué columnas se halla el número pensado. En efecto, al decirnos, por ejemplo, que el número pensado se halla en la primera, cuarta y quinta columna, nos está transmitiendo, de hecho, seis mensajes binarios, que son los siguientes:

Sí	a	la	pregunta	¿está	en	la	primera	columna	?
No	,,	,,	,,	,,	,,	,,	segunda	,,	?
No	,,	,,	,,	,,	,,	,,	tercera	,,	?
Sí	,,	,,	,,	,,	,,	,,	cuarta	,,	?
Sí	,,	,,	,,	,,	,,	,,	quinta	,,	?
No	,,	,,	,,	,,	,,	,,	sexta	,,	?

equivalentes, por tanto, a seis respuestas formuladas por nosotros respecto a si el número cuestión se hallaba en la 1ª, 2ª, 3ª, 4ª y 5ª columnas, y como sabemos, las respuestas a cada una de tales preguntas, pueden traer como máximo un *bit* de información.

La máxima información en mensajes de esta naturaleza se obtiene, como ya sabemos, cuando las respuestas positiva y negativa son equiprobables, y así sucede en el ejemplo considerado, ya que, como observamos, cada columna consta de 30 números [9] por tanto, la indicación de nuestro interlocutor, acerca de las columnas en que el número pensado se halla, nos trae, precisamente la cantidad de información necesaria para resolver la indeterminación $\log_2 60$ ya que $\log_2 60 \sim 6$ bits.

Alguien que ignorase la teoría de la información, pero con espíritu matemático para penetrar en el fondo del problema tratado, nos diría acertadamente que al comunicar nuestro interlocutor en qué columnas de la tabla se hallaba el número pensado, nos comunica de hecho el número, puesto que nos expone el mismo en forma de potencias de dos, limitándonos nosotros a traducirlo al sistema decimal.

Así es, en efecto: bastará que sumemos las potencias sucesivas de dos, según las columnas en que el número se halle, para descubrir éste, dando la impresión al público de sabernos de memoria la tabla.

Como el valor de tales potencias se halla precisamente en cabecera de las columnas, bastará ir sumando mentalmente tales números a medida que el interlocutor nos informa de las columnas en que el número se encuentra, para al final decir el número pensado.

En nuestro ejemplo, al hallarse el número pensado en las columnas primera, cuarta y quinta, será

$$2^0 + 2^3 + 2^4 = 25$$

(9) La 3ª, 4ª y 5ª, tienen un número menos, pero ello no afecta sustancialmente al problema, ya que tampoco son necesarios exactamente 6 bits de información.

Con lo expuesto hemos terminado nuestra modesta divulgación de la teoría de la información, expuesta en forma poco rigurosa, pero —creemos— que puesta al alcance de cualquier lector por escasa preparación matemática que tenga.

José M. Fernández Pirla
Catedrático de Economía de la Empresa de la Universidad de Madrid
(España)