REVISTA DE ECONOMÍA Y ESTADÍSTICA
INSTITUTO DE ECONOMÍA Y FINANZAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
ISSN 0034-8066

OPEN ACCESS

ARTÍCULOS

Introducción a la teoría de la información y sus aplicaciones (Parte II)

José María Fernández Pirla

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 8, No. 1 (1964): 1º Trimestre, pp. 7 - 17.

http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3563

ARTICULOS

INTRODUCCION A LA TEORIA DE LA INFORMACION Y SUS APLICACIONES (II Parte) (*)

UN TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA TEORIA DE LA INFORMACION

El último ejemplo expuesto en el artículo anterior nos sitúa en condiciones de comprender un teorema fundamental de la teoría de la información, que se enuncia diciendo *que la indeterminación* o *entropía* de un sistema, es tanto mayor cuanto más equiprobables son los eventos o circunstancias que definen el colectivo, o dicho en otros términos, la indeterminación se reduce cuando la probabilidad de una determinada circunstancia o evento del colectivo se hace más pequeña, y a "sensu contrario" la de las circunstancias o eventos contrarios aumenta.

Así habíamos visto en el ejemplo considerado, que cuando la probabilidad de que un individuo tomado al azar resulte ser de raza negra, es muy pequeña, o la de que sea de raza blanca es muy grande, la indeterminación en cuanto a color del colectivo considerado se aproxima a cero, es decir, tiende a desaparecer. En cambio cuando la probabilidad de que un individuo tomado al azar resulte blanco sea sensiblemente igual a la de que resulte negro, porque existe aproximadamente la misma cantidad de individuos de raza blanca que de raza negra en el colectivo, la indeterminación de dicho colectivo en cuanto

(*) La Primera Parte de este artículo se publicó en la "Revista de Economía y Estadística", Nueva Serie, Año VII, Nº 2, Segundo Trimestre de 1963.

a color alcanza su valor máximo que es precisamente el de un *bit* para el caso de dos circunstancias que se oponen.

Este teorema se comprende intuitivamente con gran facilidad, puesto que claramente se ve que la mayor indeterminación en cuanto al color de la piel en un colectivo formado por blancos y negros resulta cuando el número de blancos es sensiblemente igual al número de negros, ya que en tal supuesto es cuando precisamente no podemos afirmar que la población considerada en su conjunto sea blanca o negra [1].

---

(1) El teorema enunciado es de la mayor importancia en la teoría de la información, pero su demostración rigurosa es algo complicada, por lo que vamos a limitarnos a probarlo en el caso de que la indeterminación del colectivo provenga de dos circunstancias opuestas.

Se trata en definitiva de ver cómo la función

$$y = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$$

en la que x puede variar entre cero y 1, adquiere valor máximo cuando x recibe precisamente el valor $\frac{1}{2}$

La función considerada es la que expresa el valor de la entropía en el caso de que la misma provenga de dos circunstancias o hechos contrarios, de tal forma que si la probabilidad de uno de los mismos se designa por X, siendo $O < x < 1$, la del otro será $1-X$. (Respecto a la fórmula de la entropía o medida de la indeterminación, véase nuestro artículo anterior).

En efecto, si derivamos la mencionada expresión resultará

$$y'(x) = -\log_2 x - \log_2 e + \log_2 (1-x) + \log_2 e$$

y simplificando, reduciendo e igualando a cero (condición necesaria de máximo) tendremos

$$y'(x) = \log_2 \frac{1-x}{x} = O$$

expresión que, según la definición de logaritmo de un número, puede darse así

$$2^o = \frac{1-x}{x}$$

pero como sabemos que $2^o = 1$ la anterior expresión puede formularse de esta manera

CANTIDAD DE INFORMACION DE UN MENSAJE

La relación entre los problemas de comunicación y la teoría de la información se evidencian al considerar las formas de comunicación y su valor informativo.

Entendemos por mensaje cualquier forma de comunicación o noticia que, aportándonos información acerca de un hecho o evento de un colectivo o de un sistema en general, contribuye a disminuir la indeterminación que el mismo presenta a nuestra consideración.

En el mundo de la naturaleza podemos encontrar ejemplos: Así, si la indeterminación acerca de las posibles consecuencias de la aplicación de cierto producto químico para la curación de una determinada enfermedad puede quedar reducida al realizar una experiencia con dicho producto químico en un conejo de indias, se dice que la práctica de dicha experiencia constituye un mensaje.

El valor informativo del mensaje se mide por la diferencia entre la indeterminación o entropía anterior a la recepción del mensaje, y la que existe después de recibido el mismo, y se representa así:

$$M(\beta,\alpha) = I(\alpha) - I_\beta(\alpha)$$

que se lee, el valor informativo de un mensaje β al objeto de determinar un sistema α viene dado por la indeterminación o

---

$$1 = \frac{1-x}{x}$$

que se cumple para $x = \frac{1}{2}$

valor de x para el que la segunda derivada adopta valores negativos, por lo que la función adquiere para el mismo, el valor máximo.

Queda pues claro que para el caso analizado (dos circunstancias opuestas que definían la indeterminación) la mayor indeterminación se produce cuando ambas circunstancias tienen la misma probabilidad (equiprobabilidad).

entropía del sistema en cuestión $I(\alpha)$ antes de recibir el mensaje, y la que éste presenta $I_\beta(\alpha)$ después de recibir dicho mensaje. El valor informativo de un mensaje viene dado, pues, en *bits*, que de esta manera son indistintamente unidades de *indeterminación* o de *información*.

El valor práctico de la definición formulada exige de dos condiciones:

a) Necesidad de objetivización de la entropía o grado de indeterminación, problema éste que resolvemos mediante las expresiones cuantitativas de la indeterminación ya estudiadas.

b) Que el mensaje considerado aporte información en relación con las cuestiones tratadas. Si el mensaje no tiene ningún valor informativo, podemos afirmar que

$$I_\beta(\alpha) = I(\alpha)$$

es decir, que la indeterminación del sistema es la misma antes y después de recibir el mensaje.

Supongamos ahora que el mensaje en cuestión consiste precisamente en la práctica total de la prueba a la que la indeterminación se refiere (*self-information*) (2). En tal caso la fórmula expresiva del valor informativo del mensaje sería de la forma

$$M(\alpha, \alpha) = I(\alpha) - I_\alpha(a)$$

pudiendo demostrarse que $I_\alpha(\alpha) = 0$ es decir que la indeterminación después de recibido un mensaje consistente en la práctica de la propia experiencia que condiciona la indeterminación es cero, (3), por lo que

$$M(\alpha,\alpha) = I(\alpha)$$

es decir, que el valor informativo de un mensaje —o cantidad

(2) Véase, por ejemplo, Bierman, Fouraker y Jaedicke *Quantitative Analysis for business decisions*. Irwin, Homewood (Illinois), 1961, págs. 307 y sgtes.

(3) Fácilmente se comprende lo dicho prosiguiendo en el ejemplo ya iniciado: Existe indeterminación respecto a los resultados

de información del mismo— consistente en la práctica de la experiencia a la que la indeterminación se refiere viene medida por la entropía o indeterminación de la experiencia en cuestión. Resultaría por consiguiente que cuanto mayor sea $I(\alpha)$ mayor valor informativo tendrá el mensaje consistente en la realización de la experiencia α (*self-information*).

Si tenemos en cuenta el teorema expuesto anteriormente, llegaremos a la conclusión de que los mensajes con mayor valor informativo, o que aportan mayor cantidad de información, son los que se basan en la práctica de experiencias sobre sistemas de indeterminación, en los que se dan situaciones de equiprobabilidad o muy cercanas a las mismas, entre las circunstancias, factores o elementos que definen la indeterminación.

UN EJEMPLO ELEMENTAL

Para ayudar a comprender al lector el sentido que tiene la indeterminación de un conjunto de circunstancias que nosotros llamamos *sistema* para destacar su carácter autónomo, y el valor informativo de un mensaje o experiencia realizado en orden a reducir o eliminar dicha indeterminación, vamos a plantear un elemental problema que pese a su simplicidad arroja evidente luz sobre los conceptos hasta ahora tratados. Este

---

que se siguen de la aplicación de cierto producto químico a la curación de una determinada enfermedad en el hombre, porque se desconocen los efectos que dicho producto puede tener sobre los distintos aspectos del funcionamiento del cuerpo humano, por ejemplo sobre su sistema nervioso, digestivo, sensorial o genético. Evidentemente, un mensaje consistente en la experimentación de dicho producto con un cobaya, reduce la indeterminación en tanto en cuanto pueden asimilarse algunos aspectos del cobayo a los del hombre; pero la indeterminación, aunque en menor grado, subsiste por la imposibilidad de la identificación total de ambos. Es cierto, sin embargo, que una práctica de dicho producto sobre hombres normales, despejaría totalmente la indeterminación, pudiendo afirmarse al conocer los resultados de dicha experiencia, que la indeterminación respecto a la aplicación de dicho producto al cuerpo humano, queda reducida a cero.

problema suele plantearse como de acertijo o adivinanza, encomendándose al sentido común y a la habilidad mental su solución. Pero nosotros vamos a ver cómo en su aspecto cuantitativo puede ser planteado y resuelto con ayuda de la técnica operatoria que nos ofrece la Teoría de la Información hasta ahora estudiada[4].

Se supone que una persona llega a determinada ciudad, ignorando por falta de señalización, si se trata de la ciudad A o de la B (*indeterminación*), sin que tenga motivo alguno para considerar que es más probable, que se halle en una ciudad o en otra; o dicho en otros términos, que es igualmente probable que en su excursión haya alcanzado la ciudad A o la ciudad B (equiprobabilidad).

Evidentemente podrá conocer en qué ciudad se halla preguntando a cualquier transeúnte con el que tropiece en su camino, pero esta persona sabe además que los naturales de A siempre dicen la verdad, mientras que los de B tienen tal vocación por la mentira que a cualquier pregunta responden siempre contrariamente a la verdad; además las respuestas serán simplemente con monosílabos de *sí* o *no*, por lo que las preguntas tienen que ser de tal naturaleza que puedan ser respondidas de dicha forma.

Como cualquier persona de A (que dice la verdad), puede desplazarse a B, y análogamente, cualquier persona de B puede encontrarse en A, resultará que ante la dificultad de identificar a los ciudadanos de una u otra por signos externos, cabrá siempre la duda de si una respuesta, por ejemplo, afirmativa a la pregunta *¿esta ciudad es A?* será verdadera o falsa, de suerte tal que después de haber hecho tal pregunta y obtenido

(4) Sobre este problema y otros muy curiosos puede verse la obra ya citada en nuestro artículo anterior *"Probabilité et Information"* de Yaglom, y la de P. Puig Adam (Publicaciones del Ministerio de Educación Nacional de España) *"La matemática y su enseñanza actual"*, págs. 59 y sigtes. (Madrid, 1959).

respuesta, habrá que formular otra de contestación ya conocida, para, por la respuesta que se obtenga a la misma, llegar a la conclusión de si la persona consultada es o no embustera. Así, si se pregunta *¿esta ciudad es A?* y se obtiene por respuesta: *sí,* se preguntará seguidamente *si es de día,* sabiendo que evidentemente lo es; para en el caso de obtener respuesta afirmativa deducir que nuestro interlocutor dice la verdad, y la ciudad en que nos hallamos es evidentemente A. Si a la segunda pregunta hubiéramos obtenido respuesta negativa, deduciríamos que nuestro interlocutor era un embustero y que por consiguiente, no nos hallábamos en A sino en B.

En resumen, pues, que para salir de dudas tenemos que formular *dos preguntas* cuyas respuestas nos dan más información de la que necesitamos, pues nos aclaran, no solamente si estamos en A o en B, sino también si nuestro interlocutor es de A o de B (embustero o verdadero, respectivamente), cuestión esta segunda que no nos interesa en si.

Si planteamos el problema en términos cuantitativos con arreglo al conocimiento que ya tenemos de Teoría de la Información, la indeterminación del mismo vendrá dada por la expresión

$$I = \log_2 2 = 1$$

es decir, una unidad de indeterminación, ya que los hechos que configuran la misma son dos: hallarse en A o hallarse en B, y ambos son equiprobables por definición. Parece pues lógico que una experiencia o mensaje que tenga un *bit* de información resolverá la indeterminación existente, y una experiencia consistente en hacer una pregunta que pueda ser respondida con *si* o *no* (dos circunstancias) puede reportar precisamente un bit de información con tal de que la respuesta afirmativa tenga la misma probabilidad de ser obtenida que la respuesta negativa.

Si la pregunta hecha es la de *¿esta ciudad es A?* la probabilidad de obtener un *sí* no es equiprobable con obtener un *no,* pues la primera respuesta se logra tanto si encontrándose el turista en A su interlocutor dice la verdad, como si habiendo llegado a B su interlocutor fuera un embustero, mientras que la respuesta negativa tanto puede obtenerse por haber llegado a B y encontrarse con una persona de A (verdadera) como por encontrarse en A y hallarse frente a una persona de B que a su pregunta contesta con mentira, y evidentemente ambos hechos, respuesta de un sí o un no en los dos supuestos, no tienen la misma probabilidad, por lo que la cantidad de información obtenida en la respuesta es inferior a 1 *bit*. Ha de formularse, pues, otra pregunta distinta cuya respuesta nos asegure la obtención de un bit de información —por resultar equiprobable la contestación negativa y afirmativa— que es la cantidad de información que necesitamos. Esta pregunta puede ser por ejemplo: *¿usted es de aquí?*

En efecto, la respuesta afirmativa se obtiene necesariamente en A, ya que preguntado en A un sujeto natural de A, dirá que sí, y un sujeto natural de B también contestará afirmativamente. El primero porque dice la verdad, y el segundo porque dice la mentira.

La misma pregunta formulada en B obtendrá necesariamente respuesta negativa, ya que si contestara un sujeto de A, al decir verdad dirá *que no es de allí,* mientras que si el interviuvado es un sujeto de B, por mentir siempre, dirá *que no es de allí.*

Resulta entonces que la probabilidad de obtener un *sí* a la pregunta *¿es usted de aquí?* queda reducida en definitiva a la de haber llegado a A, y la de obtener un *no,* a la de haber llegado a B, y hemos dicho desde el comienzo, que el hecho de llegar a una u otra ciudad tenía la misma probabilidad.

Este ejemplo pone de manifiesto que la Teoría matemática de la información resuelve solamente un problema cuantitativo, ya que nos dice, en primer lugar, que con una sola pregunta resolvemos el problema, y en segundo término que dicha pregunta se debe formular de tal manera que la respuesta de *sí* y la de *no* sean equiprobables, es decir, nos da el criterio de obtención del mensaje, pero no nos dice cuál ha de ser la pregunta. Existe, pues, un aspecto cualitativo que no resuelve la teoría de la información como teoría matemática que es, aunque nos pone en camino de su solución.

ELECCION DE MENSAJES

Ya hemos visto que el mayor valor informativo de un mensaje se obtiene cuando la indeterminación del colectivo sobre el que se realiza la experiencia es mayor, y ya sabemos también que la mayor indeterminación corresponde a situaciones de equiprobabilidad entre las circunstancias que configuran la misma.

Lo ya expuesto nos ofrece el criterio de elección de mensajes para obtener una determinada información: preferiremos aquellos mensajes que por su naturaleza nos den el mayor valor informativo. Un ejemplo aclarará la idea expuesta.

Supongamos que se trata de adivinar un número pensado por un interlocutor y comprendido entre 1 y 16, a base de hacerle preguntas que serán respondidas indefectiblemente con un sí o un no. Interesa, evidentemente, hacer el menor número posible de preguntas, para lo cual se ha de procurar que las respuestas (*mensajes*) contengan la mayor cantidad posible de información, es decir, tengan el mayor valor informativo. Pero como la respuesta será siempre de *sí* o *no*, el valor informativo de la misma dependerá de cómo nosotros hagamos la pregunta. Si formulamos las preguntas de modo que las respuestas afirmativas sean equiprobables con las respuestas negativas, obtendremos la mayor cantidad posible de información, con lo cual podemos asegurar que descubriremos el número pensado con el menor número de preguntas.

La equiprobabilidad de las respuestas la obtenemos a base de dividir la gama de los posibles números pensados (16 en nuestro caso) en conjuntos de igual número de elementos. La primera pregunta podría ser, por ejemplo: *¿El número pensado es mayor que* 8? o bien, *¿El número pensado es par?* ([5]). Al obtener una respuesta, por ejemplo, afirmativa a dicha pregunta, sabemos que el número pensado podrá ser cualquiera de los números 9 al 16, ambos incluidos, con lo que procedemos a preguntar en forma idéntica, *¿El número pensado es mayor de* 12?, y así sucesivamente.

Se puede afirmar que al cabo de cuatro preguntas como máximo, habremos descubierto el número pensado, mientras que si las preguntas se hubieran hecho de suerte tal que la respuesta afirmativa no fuera equiprobable con la negativa —tal sucedería, por ejemplo, si preguntásemos abiertamente si el número pensado era uno determinado([6])— podría suceder que por casualidad y al margen de toda objetividad descubriremos el número pensado antes de la cuarta pregunta, pero también

---

(5) El hecho contrario a que el número pensado sea mayor que 8 es que el mismo sea 8 o inferior; en ambos casos juegan ocho posibilidades contra ocho, sobre un total de dieciséis; es decir, que la probabilidad de que el número pensado sea mayor que ocho, es $\frac{1}{2}$ análogo a la probabilidad de que el número en cuestión sea 8 o menor que 8. Lo mismo podemos decir de los números pares en relación con los impares.

(6) Si nuestra pregunta es si el número pensado es el 7, la probabilidad de obtener respuesta afirmativa es $\frac{1}{16}$, mientras la de obtener respuesta negativa es $\frac{15}{16}$.

podría acontecer que lo descubriéramos después de haber formulado quince preguntas.

El planteamiento del problema expuesto en la teoría de la información sería el siguiente:

La indeterminación frente al número pensado (uno entre dieciséis posibles) es

$$I = \log_2 16 = 4 \text{ bits}$$

ya que todos los números pueden ser pensados con la misma probabilidad. Se trata, pues, de una experiencia con indeterminación de cuatro *bits,* por lo que resulta evidente que si se obtienen cuatro mensajes cada uno de los cuales tenga *un bit* de información, habremos resuelto con toda seguridad la indeterminación propuesta, y dada la naturaleza del mensaje (pregunta que se contesta exclusivamente con *sí* o *no*) para obtener un bit de información habrá que lograr que las respuestas afirmativas y las negativas tengan $\frac{1}{2}$ de probabilidad, lo cual se consigue formulando las preguntas en la forma propuesta, de tal suerte que el número quedará descubierto a la cuarta pregunta, como es fácil que compruebe el lector.

En un artículo posterior desarrollaremos lo referente a la elección de fuentes de información y determinación del grado de empleo de las mismas en función de su coste y de la necesidad de información que se tiene para dar un determinado nivel de seguridad (prefijado) a los resultados esperados de la decisión que se adopte.

José María Fernández Pirla

Catedrático de Economía
de la Empresa de la
Universidad de Madrid