REVISTA DE ECONOMÍA Y ESTADÍSTICA
INSTITUTO DE ECONOMÍA Y FINANZAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
ISSN 0034-8066

ARTÍCULOS

Introducción a la teoría de la información y sus aplicaciones

José María Fernández Pirla

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 7, No. 2 (1963): 2º Trimestre, pp. 107- 116.

http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3547

La Revista de Economía y Estadística, se edita desde el año 1939. Es una publicación semestral del Instituto de Economía y Finanzas (IEF), Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Valparaíso s/n, Ciudad Universitaria. X5000HRV, Córdoba, Argentina.
Teléfono: 00 - 54 - 351 - 4437300 interno 253.
Contacto: rev_eco_estad@eco.unc.edu.ar
Dirección web http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/index

INTRODUCCION A LA TEORIA DE LA INFORMACION Y SUS APLICACIONES

ANTECEDENTES

La Teoría Matemática de la Información constituye una de las ramas de la llamada Investigación Operativa que ha sido desarrollada fundamentalmente durante la Segunda Guerra Mundial a propósito de problemas militares de comunicación y transmisiones. Sin embargo, los estudios teóricos fueron iniciados hace ya más tiempo fundamentalmente por Hartley y proseguidos más tarde por Shannon, Wiener, Gabor, Brillovin, etc., etc.

Hoy la Teoría de la Información ofrece un prometedor campo a la investigación en el orden de las aplicaciones económicas, ya que, en definitiva, en el fondo de los problemas de información late la cuestión económica de buscar la adecuada disposición o utilización de los medios de que se dispone para conseguir el máximo rendimiento informativo o bien obtener la información necesaria al mínimo coste o empleo de los factores.

Pero la Teoría de la Información rebasa, a nuestro modesto juicio, el ámbito relativamente estrecho de una técnica para el más eficaz planteamiento y resolución de problemas de fondo económico bajo cuya concepción se encuentra integrada la Investigación Operativa. El lector podrá apreciar que el desarrollo de la Teoría de la Información aporta los fundamentos de una nueva dirección del razonamiento lógico matemático en el que las magnitudes manejadas, las unidades de medida de las mismas y aun la propia técnica de análisis empleada son radicalmente distintas de las utilizadas hasta ahora en el tratamiento de los problemas económicos.

En este trabajo vamos a exponer los fundamentos de la Teoría Matemática de la Información a un nivel elemental con el propósito de lograr su mayor difusión, buscando además formulaciones intuitivas conseguidas a base de ejemplos que faciliten la comprensión de las cuestiones tratadas y que familiaricen al lector con el significado de esta nueva teoría. Un problema fundamental que como aplicación nos plantearemos, será el de determinar el nivel de empleo de diversas fuentes de información de modo que se garanticen ciertos resultados de una decisión sobre la base de un mínimo gasto en la obtención de información. Con el análisis de esta cuestión pondremos de manifiesto el enorme interés que tiene el conocimiento de la Teoría de la Información en la elaboración, con un criterio económico, de decisiones objetivas.

El concepto de indeterminación de un sistema de probabilidad

La probabilidad teórica de obtener bola blanca en una urna que contiene cuatro bolas blancas y una negra es, como sabemos, 1/5, y análogo valor tiene la probabilidad de obtener bola blanca en otra urna que contuviera una bola blanca y cuatro bolas más de distintos colores, por ejemplo, negro, azul, amarillo y rojo. Pero en este segundo caso afirmamos que, pese a tener el mismo valor la probabilidad de alcanzar bola blanca en una tirada realizada al azar, la indeterminación en cuanto a color de la bola, es mayor que en el caso anterior, ya que frente a la eventualidad de obtener bola blanca, en la primera urna sólo se opone la de obtener bola negra, mientras que en la segunda las alternativas a una bola blanca son cuatro: bola negra, azul, amarilla o roja.

Surge así a nuestra consideración la noción de indeterminación de un sistema de probabilidad que en principio podemos hacer depender del número de circunstancias diversas (en nuestro caso los colores de las bolas) que puede darse en el mismo.

REPRESENTACION FUNCIONAL DE LA INDETERMINACION

Así como a partir del concepto intuitivo de la contingencia (con frecuencia se oye afirmar a personas que no tienen ningún conocimiento del Cálculo de probabilidades que un determinado hecho es más o menos probable) el hombre se las ingenió para expresar convencionalmente la medida de la probabilidad y poder así hacer afirmaciones cuantitativas respecto a la naturaleza probable de los hechos y las oportunas comparaciones, hoy se ha sentido la necesidad de encontrar una medida para la consiguiente representación cuantitativa de la indeterminación.

De existir una función de representación de la indeterminación, podemos en principio afirmar que ésta dependerá del número de hechos o circunstancias, que designaremos genéricamente por n (número de colores en nuestro ejemplo), que condicionan o definen tal indeterminación. Podemos admitir que la función de indeterminación podrá darse de esta forma:

$$I = f(n)$$

ignorando, de momento, cuál es la característica funcional que relaciona la expresión de la indeterminación con el número de eventos o circunstancias de las que depende.

En el intento de describir dicha función podemos hacer las siguientes afirmaciones axiomáticas:

Primera: La indeterminación crece al crecer el número de elementos o circunstancias que la definen. Se trata, pues, de una función $I = f(n)$ que es creciente respecto de n, pudiendo admitirse que cuando n tiende a infinito la indeterminación se hace también infinita.

Segunda: Cuando $n = 1$, el valor de la función ha de ser cero, ya que la indeterminación respecto de una sola circunstancia, no es tal indeterminación. Por ejemplo, la indeterminación en cuanto a color de una urna que contiene tan sólo bolas blancas es evidentemente cero, es decir, no hay indeterminación. En términos algebraicos diríamos que $f(1) = 0$.

La configuración más completa de la función de representación de la indeterminación exige ver cómo se cumple que la indeterminación del producto de dos colectivos viene dada por la suma de las indeterminaciones correspondientes a los factores, esto es que:

$$I(\alpha.\beta) = I(\alpha) + I(\beta)$$

Supongamos que tenemos un grupo formado por α mujeres de diferente nacionalidad cada una —siendo esta circunstancia la que define la indeterminación del grupo— y por otra parte un grupo formado por β hombres también de distinta nacionalidad, que, a su vez, tampoco tienen la nacionalidad de ninguna de las mujeres del grupo anterior. El número posible de matrimonios diferentes que podrían formarse entre los diferentes grupos sería de α, β.

Pues bien, si suponemos que cada matrimonio acepta la nacionalidad de uno de los cónyuges, siendo indiferente que sea la del marido o la de la mujer, la indeterminación en cuanto a nacionalidad del conjunto de todas las posibles parejas que pueden formarse $I(\alpha, \beta)$ será la indeterminación que afecta a la nacionalidad del marido $I(\beta)$ ya que éste puede dar su nacionalidad al matrimonio, más la indeterminación respecto a la nacionalidad de la mujer I (α), por análoga razón.

Podemos entonces afirmar que:

$$I(\alpha.\beta) = I(\alpha) + I(\beta)$$

lo cual es lógico, ya que si no admitimos que las parejas de posible formación puedan adoptar una nacionalidad distinta de la de los cónyuges, la indeterminación del colectivo de α, β elementos (1) que pueden resultar de la combinación de los dos anteriores no será distinta de la indeterminación que afecta a cada uno de los colectivos considerados separadamente.

Con esta deducción realizada hemos descubierto otra característica de la función expresiva de la indeterminación, a saber, que la *indeterminación del producto es igual a la suma de la indeterminación de los factores.*

Si repasamos nuestros conocimientos de matemáticas elementales, recordaremos que la función logarítmica cumple con las tres condiciones que hemos visto que habrá de satisfacer la función que expresa la indeterminación. Podemos, pues, admitir en principio que la función logarítmica podía ser una función aceptable para la expresión de la indeterminación, esto es

$$I\ (n) = \log_a n$$

restándonos únicamente por concretar la elección de la base de los logaritmos, problema que como vamos a ver a continuación nos lo resuelve la fijación de la unidad de medida de la indeterminación.

MEDIDA DE LA INDETERMINACION

Medir una cantidad es apreciar cuántas veces la misma contiene a otra cantidad de la misma especie o magnitud, que

(1) Cada posible pareja se considera como elemento distinto.

por su sencillez o elementaridad se puede tomar como referencia para la comparación o los cálculos; así, por ejemplo, una vez definido convencionalmente el metro cuadrado como un cuadrado de determinada extensión, podemos expresar en relación con el mismo la medida de cualquier superficie, indicando el número de veces que aquél se encuentra contenido en ésta. Pues bien, proceso análogo se sigue en la medida de la indeterminación. Para ello se adopta como unidad de medida una indeterminación que por su sencillez o elementaridad hemos estimado que puede servir como referencia para las comparaciones y los cálculos de otras indeterminaciones más amplias, las cuales podemos expresarlas entonces —y darnos más perfecta cuenta de su importancia— diciendo el número de veces que contienen a la indeterminación más simple adoptada como unidad de medida.

Esta indeterminación elemental que nos va a servir para medir otras indeterminaciones mayores, es la indeterminación menos compleja que puede presentarse a los humanos; la que afecta a una alternativa de dos hechos que se presentan como contradictorios y excluyentes, el "sí o no", "blanco o negro", "muerto o vivo", etc.

La indeterminación correspondiente a una alternativa de dos hechos que se oponen mutuamente, o de dos circunstancias de las que una ha de darse necesariamente pero con exclusión de la otra, es la que adoptaremos como unidad de medida. En términos algebraicos diremos que la unidad de medida es el valor que adquiere la función de indeterminación $I = f(n)$ cuando n vale 2, ya que dos son los hechos o circunstancias que definen la indeterminación, es decir, que I (2) ha de ser igual a la unidad, o sea

$$I(2) = 1$$

o bien, utilizando la función logarítmica para dicha representación, la unidad de medida tendría la expresión

$$\log_a 2 = 1$$

igualdad que sólo se consigue cuando a tiene el valor 2, esto es, cuando adoptamos como función representativa de la indeterminación la función logarítmica binaria.

La unidad de medida de la indeterminación se llama *bit*, palabra inglesa que designa el concepto de trozo o pequeña porción, esto es

$$\log_a 2 = 1 \text{ bit}$$

Bastará pues, cambiar la base de los logaritmos en la función de la representación de la indeterminación para que se haya cambiado la unidad de medida de la misma.

Probabilidad e indeterminación.

Hasta ahora hemos prescindido de la consideración de la probabilidad en la medida de la indeterminación, tal como lo hiciera Hartley en 1928 (2); pero con posterioridad Shannon demostró que lo incompleto de la formulación de Hartley hacía que la expresión matemática de la indeterminación no estuviera en consonancia con las apreciaciones del buen sentido común respecto a dicha magnitud como vamos a ver a continuación en un ejemplo, proponiendo entonces la introducción del concepto de probabilidad para la más completa y precisa formulación de la indeterminación.

Supóngase que se contemplan dos poblaciones compuestas ambas de blancos y negros, pero en distintas proporciones. En la población A existen 999.000 blancos y 1.000 negros, mientras que en la población B, también con un millón de personas, hay

(2) Yaglom: *Probabilité et Information*, traducido del ruso por Ed. Dunod. París, 1959, pág. 40.

500.000 blancos y 500.000 negros. Evidentemente nadie diría que ambas poblaciones son igualmente indeterminadas en cuanto al color de sus habitantes como resultaría, sin embargo, de la estricta aplicación de la función de medida de la indeterminación, según Hartley, ya que en ambos casos, por ser dos los colores que causan la indeterminación, la medida de ésta sería $\log_2 2 = 1$ bit. Por el contrario, cualquier persona de mediano sentido común afirmaría que la población B es mucho más indeterminada en cuanto al color de sus habitantes que la población A, ya que en ésta casi todos los habitantes son blancos por lo exiguo de la minoría negra, por lo que prácticamente el color de la población se halla determinado.

Shannon propuso, pues, la introducción del concepto de probabilidad para perfilar mejor la expresión de la indeterminación. Comprenderemos más fácilmente la introducción del concepto de la probabilidad en la medida de la información si a partir de la indeterminación de un colectivo I (n) pasamos a considerar la indeterminación que afecta a cada sujeto o circunstancia que integra el colectivo —que designaremos por $^{i}/_{k}$ — y que se obtendrá dividiendo la indeterminación del colectivo por el número de individualidades que lo integran, esto es:

$$i_k = \frac{I(n)}{n} = \frac{1}{n} I(n)$$

En la hipótesis de que cada uno de ellos haya contribuído por igual a la indeterminación del colectivo (supuesto por ejemplo que las bolas de la urna son todas de diferentes colores) y si utilizamos la función logarítmica

$$i_k = \frac{1}{n} \log_2 n$$

o bien:

$$i_K = -\frac{1}{n}\log_2\frac{1}{n} \quad (^*)$$

Pero en tal hipótesis, 1/n es la probabilidad de obtención de cualquiera de los sujetos con características distintas que configuran la indeterminación; podemos afirmar entonces que la indeterminación de un cierto sujeto o circunstancia sería en función de la indeterminación de un colectivo formado por n sujetos o circunstancias diferentes

$$i_K = -p_k \log_2 p_k$$

en la que p_k es la probabilidad que afecta a cualquiera de los sujetos o circunstancias que integran y definen el colectivo, *y que, generalizando, podemos suponer que no es necesariamente la misma para todos.* A la expresión anterior se le llama *entropía* del sistema o colectivo por analogía con la expresión formal de la medida de la entropía con el mundo físico (3).

Conocida la indeterminación de todos los sujetos o circunstancias, podemos pasar mediante sumación a la medida de la indeterminación del colectivo que los agrupa y ya con toda generalidad, es decir, suponiendo que cada una de las circunstancias o sujetos no tengan la misma probabilidad, podemos formular:

$$I(n) = \sum_1^n i_K = \sum_1^n - p_k \log_2 p_k$$

(*) Ya que $\log_2 n = -\log_2\frac{1}{n}$ como fácilmente se demuestra.

(3) La expresión de la entropía formulada por Boltzmann es S = K log P donde S es la entropía en ergios por grado centigrado. K es la constante de Boltzmann igual a $1{,}38 \times 10^{-16}$ ergios por grado centígrado y P el número de componentes elementales desconocidos del sistema físico considerado, siendo neperiana la base de los logaritmos. (Puede verse Revista del Instituto de Racionalización del Trabajo. Madrid, mayo-junio 1958, pág. 271).

que en el caso particular de que todos los elementos del colectivo estén afectados de la misma probabilidad, será igual a la expresión de Hartley ($\log_2 n$).

Si aplicamos la nueva expresión de medida de la indeterminación al ejemplo expuesto, tendremos que la indeterminación en cuanto a color de la población A se aproximará mucho a cero, (prácticamente no habrá indeterminación como ya habíamos juzgado) mientras que en la población B es igual a 1 bit.

En artículos posteriores nos ocuparemos de analizar el valor informativo de un mensaje —después de definir este nuevo concepto— para reducir el grado de indeterminación de un sujeto respecto a una cierta realidad que se ofrece a su consideración, la medida de la información de los mensajes, la economía en los códigos de transmisión y las aplicaciones económicas entre las que se halla la de selección de fuentes informativas y fijación de su nivel de empleo en función del valor informativo de las mismas y de su coste de utilización.

DR. JOSÉ M. FERNÁNDEZ PIRLA
Catedrático de Economía de la Empresa de la Universidad de Madrid.