

ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS DE HORMIGÓN ARMADO

(Cálculo de estructuras hiperestáticas con o sin acartelamientos y sesgos)

POR EL

Ing. Civil Luis Sobrino Aranda

Profesor de matemáticas en el Liceo Nacional de Señoritas de Rosario (Sta. Fe)
Profesor suplente por concurso de: "Estabilidad de Construcciones" y "Construcciones de Hormigón Armado" en la Universidad Nacional de Córdoba. —

(Conclusión)

IV PARTE

Pórticos a vértices desplazables

CAPITULO X

Cargas exteriores

- 1°.) **Vértices a desplazamientos obligados** — Centros instantáneos de rotación.
- 2°.) **Cargas exteriores aplicadas al dintel** —
 - a) Caso general — condiciones de continuidad y aportamiento doble.
 - b) Caso de piés derechos paralelos — idem simplificados.
 - c) Aplicaciones a sistemas más corrientes — ejemplos.
 - d) Pórticos simples biarticulados — ejemplos.
- 3°.) **Cargas exteriores aplicadas a los piés derechos** —
 - a) Caso general — condiciones de aportamiento doble y continuidad.
 - b) Casos de piés derechos paralelos — idem simplificados.
 - c) Pórticos simples bi-articulados — ejemplos.

1°.) **Vértices a desplazamientos obligados — Centros instantáneos de rotación.**—

Los pórticos a vértices desplazables pueden dividirse en dos grandes grupos a su vez, según que sus vértices sufran o no desplazamientos obligados.

Sea (fig. N° 93) la estructura ADEB.

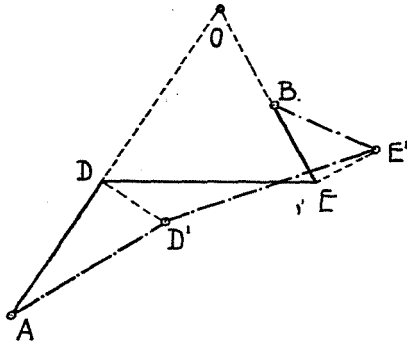


Figura N° 93

Si articulamos las uniones rígidas D y E₂ el único movimiento o desplazamiento de que es capaz el vértice D es una rotación alrededor de A, pues está unido a la articulación de pié mediante la barra DA. En la misma forma el punto E no puede tener capacidad de movimiento sino sobre el arco de círculo de centro B. y radio BE. A estos pórticos los denominaremos a vértices a desplazamientos obligados por oposición al representado en la fig. N° 94,

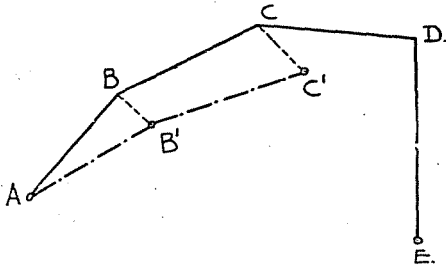


Figura N° 94

en el cual si articulamos igualmente las uniones rígidas B, C y D nos encontramos que el desplazamiento C—C' del vértice C no puede determinarse, por cuanto es desconocida la nueva posición de B en B'

Como estas rotaciones son elementales, los arcos (fig. N° 95) D—D' y E—E' pueden confundirse con los perpendiculares D—D' y E—E' a las direcciones DA y BE en D y E respectivamente. Si prolongamos DA y BE hasta su encuentro (fig. N°. 95) en C, se-

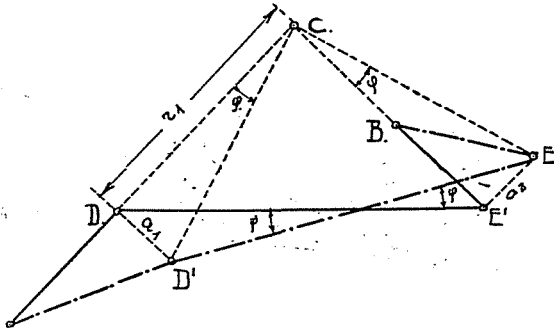


Figura N°. 95

rá éste evidentemente el centro instantáneo de rotación correspondiente a la barra \overline{DE} . Denominando r_1 y r_2 a los radios \overline{CD} y \overline{CE} y a_1 y a_2 los desplazamientos de D y E, podemos escribir:

$$\frac{a_1}{r_1} = \frac{a_2}{r_2} = \varphi \quad (180)$$

Siendo φ la rotación del conjunto DE alrededor de C hasta su nueva posición $D_1 E_1 C$, formará también \overline{DE} con $\overline{D' E'}$ el ángulo φ , tal como indica la figura arriba nombrada.

Si se conoce el desplazamiento a_1 quedará, en consecuencia, determinado a_2 en función del primero y de las características geométricas de la estructura.

Si ésta fuera múltiple, determinado o conocido el desplazamiento a_1 de B, puede, operándose en igual forma, para el caso de

estructuras a vértices a desplazamientos obligados, conocerse la nueva posición de los ejes de que consta. (Previa articulación de todos los vértices rígidos). Para ello, después de reemplazar los vértices rígidos A-B-E, etc., por articulaciones, hallamos los centros instantáneos de rotación $c_1-c_2-c_3$, etc.

Conocidos, por ser datos del problema, los radios r_1, r_2, r_3 , etc., puede hallarse en la forma indicada en la fig. N°. 96, que al respecto es sumamente clara, las nuevas posiciones D', E', F' etc. de los vértices.

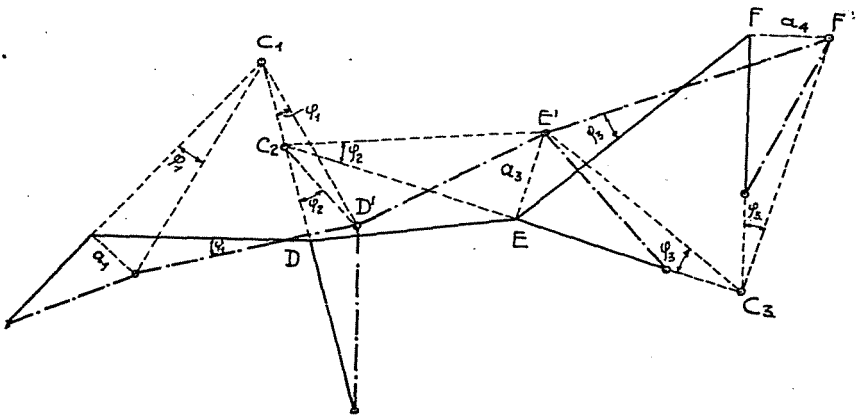


Figura N°. 96

En lo que sigue veremos únicamente los pórticos a vértices con desplazamientos obligados por cuanto éstos pueden resolverse, como demostraremos a continuación, para el caso de piés derechos paralelos, con las mismas expresiones deducidas y empleadas al tratar los pórticos con vértices fijos.

2.) Cargas exteriores aplicadas al dintel. —

a) Caso general — Condición de continuidad.

La deducción de las condiciones de continuidad, y de aportamiento doble, puede hacerse en igual forma que la empleada al tratar los pórticos a vértices fijos, sin más que tener en cuenta los ángulos suplementarios

$$\frac{a_1}{h_1} ; \frac{a_2}{h_2} ; \frac{a_3}{h_3} ; \text{etc.}$$

originados por el desplazamiento del dintel.

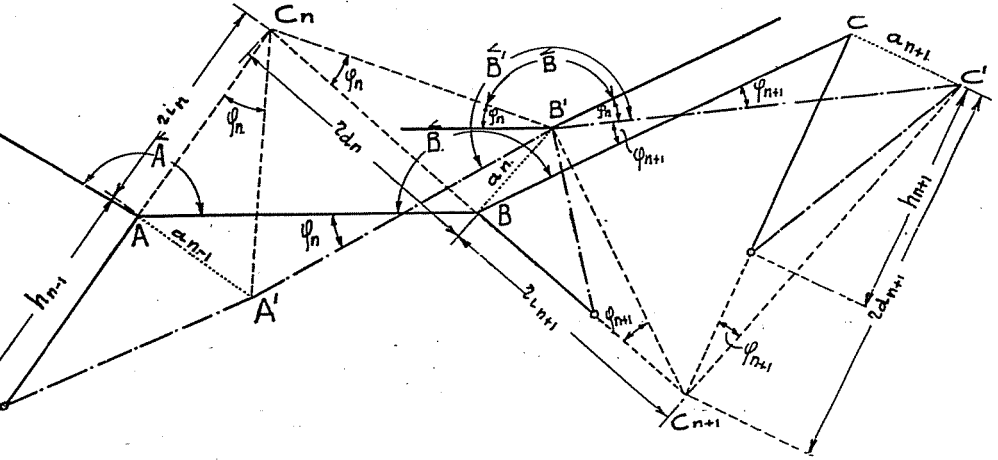


Figura N° 97

Separando del conjunto los tramos l_n y l_{n-1} en la forma que indica la fig. 98, articulando los ángulos rígidos A, B y C, encontrando los centros instantáneos de rotación C_n ; C_{n-1} de los dinteles AB y BC, suponiendo conocido el desplazamiento a de A, se tiene

$$\frac{a_{n-1}}{ri(n)} = \varphi_n = \frac{a_n}{rd(n)} \quad \frac{a_n}{ri(n+1)} = \varphi_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{rd(n+1)} \quad (181)$$

$$a_n = a_{(n-1)} \cdot \left[\frac{rd(n)}{ri(n)} \right] \quad \text{y} \quad a_{(n+1)} = a_n \cdot \frac{rd(n+1)}{ri(n+1)} \quad \text{o:} \quad (182)$$

$$a_{(n+1)} = a_{(n+1)} \cdot \left[\frac{rd(n)}{ri(n)} \right] \cdot \left[\frac{rd(n+1)}{ri(n+1)} \right] \quad (183)$$

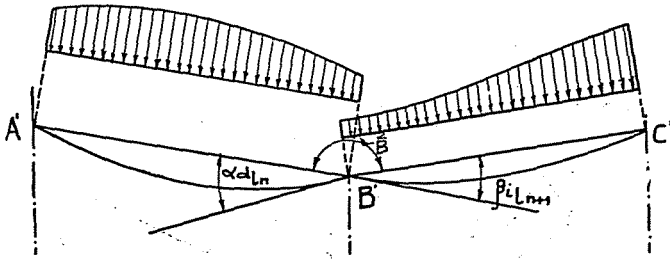


Figura N° 98

La nueva posición del dintel es la A'B'C' habiendo sido alterado el valor del ángulo B. Esta variación angular puede determinarse trazando por B' las paralelas a AB y a BC, que permite establecer:

$$\angle B' = \angle B + \varphi_n + \varphi_{(n+1)}$$

La acción de las cargas engendra en concordancia de B' las siguientes variaciones angulares:

$$\alpha_{d,l_n} = \frac{Kd}{6.E} \cdot \left(\frac{l_n}{I_{(l_n)}} \right)$$

$$\beta_{i,l_{(n+1)}} = \frac{Ki}{6.E} \cdot \left(\frac{l_{(n+1)}}{I_{(l_{n+1})}} \right)$$

El ángulo que primitivamente valía B° vale ahora:

$$B. + \varphi_{(l_n)} + \varphi_{(n+1)} + \frac{Kd}{6.E} \cdot \left(\frac{l_n}{I_{(l_n)}} \right) + \frac{Ki}{6.E} \cdot \left(\frac{l_{(n+1)}}{I_{(l_{n+1})}} \right)$$

Para restituir la continuidad deben aplicarse los momentos extremos $M_{i(l_n)}$; $M_{d(l_n)}$; $M_{i(l_{n+1})}$; y $M_{d(l_{n+1})}$ en tal forma que las deformaciones angulares que engendran el mayor valor del B dado por la expresión anterior hasta el inicial B.

Las deformaciones angulares engendradas por $M_{i(l_n)}$ y $M_{d(l_n)}$ en B son:

$$a'd_{(1n)} + a''d_{(1n)} = \frac{Mi_{(1n)} \cdot I_{(n)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{Md_{(1n)} \cdot I_{(n)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{I_{(n)}}{I_{(1n)}}$$

y las originadas por $Mi_{(1n+1)}$ y $Md_{(1n+1)}$ en igual lugar:

$$\beta'i_{(1n+1)} + \beta''i_{(1n+1)} = \frac{Mi_{(1n+1)} \cdot I_{n+1}}{3 \cdot E} \cdot \frac{Md_{(1n+1)} \cdot I_{(n+1)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{I_{(n+1)}}{I_{(1n+1)}}$$

por cuanto todos los momentos de acuerdo a la convención de signos son negativos.

La constancia del B estará cumplida cuando:

$$\begin{aligned} B + \varphi_n + \varphi_{(n+1)} + \frac{Kd_{(1n)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{I_n}{I_{(1n)}} + \frac{Ki_{(1n+1)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{I_{n+1}}{I_{(1n+1)}} \left[\frac{Mi_{(1n)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{I_n}{I_{(1n)}} - \right. \\ \left. - \frac{Md_{(1n)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{I_n}{I_{(1n)}} - \frac{Mi_{(1n+1)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{I_{n+1}}{I_{(1n+1)}} - \frac{Md_{(1n+1)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{I_{n+1}}{I_{(1n+1)}} \right] = B. \end{aligned}$$

relacionando con respecto al aI_0/I_0 , multiplicando por $6 \cdot E$, y reemplazando a φ_n y φ_{n+1} por sus valores dados por las expresiones (181), se tiene:

$\begin{aligned} & Mi_{(1n)} \cdot x_{(1n)+2} + Md_{(1n)} \cdot x_{(1n)+2} + Mi_{(1n+1)} \cdot x_{(1n+1)} + Md_{(1n+1)} \cdot x_{(1n+1)} = \\ & = - \left[6 \cdot E \cdot \frac{a_{(n-1)}}{ri_{(n)}} + 6 \cdot E \cdot \frac{a_{(n)}}{ri_{(n+1)}} + Kd_{(1n)} \cdot x_{(1n)} + Ki_{(1n+1)} \cdot x_{(1n+1)} \right] \end{aligned}$

(184)

que es la relación de 4 momentos para cuando los apoyos del dintel experimentan los desplazamientos a_{n-1} ; a_n y a_{n+1} en la forma analizada.

a) Aportamiento doble — La deducción de la condición de aportamiento doble no presenta tampoco ninguna dificultad, pudiéndola obtener en una forma análoga.

Separando del resto de la estructura un complejo formado por

un dintel y los dos pies derechos que le son adyacentes y articulando sus uniones rígidas, se obtiene que el desplazamiento a_{n-1} del vértice A obliga al a_n del B (fig. N° 99) mediante una rotación φ_n de AB alrededor del centro instantáneo Cn.

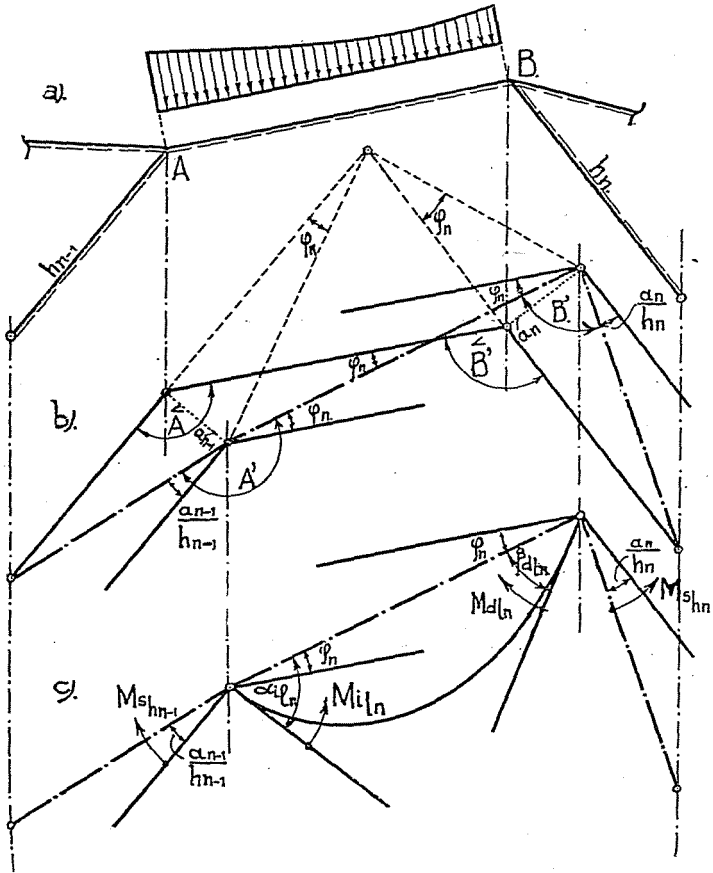


Figura N° 99

Trazando por A' las paralelas a h_{n-1} y a l_n y por B' a l_n y a h_n , los ángulos A y B se han transformado en:

$$\begin{matrix} < < \\ A' = A + \varphi_n + \frac{a_{n-1}}{h_{n-1}} \end{matrix} \quad (185)$$

$$\begin{matrix} < < \\ B' = B - \varphi_n - \frac{a_n}{h_n} \end{matrix} \quad (186)$$

Las cargas exteriores engendran las variaciones angulares siguientes:

$$a_{i(1n)} = \frac{K_i}{6.E} \cdot \frac{l_{(n)}}{I_{(1n)}} \quad y \quad \beta d_{(1n)} = \frac{K_d}{6.E} \cdot \frac{l_n}{I_{(1n)}}$$

Por consiguiente los ángulos A y B tienen un valor actual de:

$$\begin{matrix} < < \\ A' - a_{i(1n)} = A + \varphi_n + \frac{a_{(n-1)}}{h_{(n-1)}} \cdot \frac{K_i}{6.E} \cdot \frac{l_n}{I_{(1n)}} \end{matrix} \quad (187)$$

$$\begin{matrix} < < \\ B' - \beta d_{(1n)} = B - \varphi_n - \frac{a_{(n)}}{h_{(n)}} \cdot \frac{K_d}{6.E} \cdot \frac{l_n}{I_{(n)}} \end{matrix} \quad (188)$$

Como consecuencia del desplazamiento a_{n-1} de A y de las cargas aplicadas

Para restituirlos a sus valores iniciales, debemos aplicar los momentos $M_{s_{(hn-1)}}$; $M_{s_{(uq)}}$; $M_{i_{(1n)}}$ y $M_{s_{(hn)}}$; con sentidos adecuados.

Para establecer los correspondientes a $M_{d_{(1n)}}$ y a $M_{s_{(hn)}}$, no se presentan dificultades desde que $\overset{<}{B'} - \beta d_{(1n)}$ es menor que B, pero no pasa lo mismo con el $\overset{<}{A'} - a_{i(1n)}$ que puede ser mayor o menor que el

$$B \text{ según sea } \varphi_n + \frac{a_{(n-1)}}{h_{(n-1)}} \cdot \frac{K_i}{6.E} \cdot \frac{l_n}{I_{(1n)}} \text{ mayor o menor que cero.}$$

Suponiendo que los sentidos de los momentos sean los indicados en el croquis C, las variaciones angulares en concordancia de A son: en el pié derecho:

$$\gamma_{(hn-1)} = \frac{Ms_{(hn-1)} \cdot h_{(n-1)}}{3 \cdot E \cdot I_{(hn-1)}}$$

en el dintel:

$$\alpha'_{(ln)} = \frac{Mi_{(ln)} \cdot ln}{3 \cdot E \cdot I_{(ln)}}$$

$$\alpha''_{(ln)} = \frac{Md_{(ln)} \cdot ln}{6 \cdot E \cdot I_{(ln)}}$$

y en concordancia de B:

en el pié derecho:

$$\gamma_{(hn)} = + \frac{Vs_{(hn)} \cdot hn}{3 \cdot E \cdot I_{(hn)}}$$

en el dintel:

$$\beta'_{(ln)} = \frac{Md_{(ln)} \cdot ln}{3 \cdot E \cdot I_{(ln)}}$$

$$\beta''_{(ln)} = \frac{Mi_{(ln)} \cdot ln}{6 \cdot E \cdot I_{(ln)}}$$

La indeformabilidad de los ángulos A y B se conseguirá cuando:
 Angulo A:

$$A + \varphi_n + \frac{a_{(n-1)}}{h_{(n-1)}} \cdot \frac{Ki}{6 \cdot E} \cdot \frac{ln}{I_{(ln)}} + \left[\frac{Ms_{(hn-1)} \cdot h_{n-1}}{3 \cdot E \cdot I_{(hn-1)}} - \frac{Mi \cdot ln}{3 \cdot E \cdot I_{(ln)}} - \frac{Md_{(ln)} \cdot ln}{6 \cdot E \cdot I_{(ln)}} \right] = A \quad (189)$$

ángulo B:

$$B - \varphi_n = \frac{a_n}{h_n} - \frac{Kd}{6.E} \cdot \frac{l_n}{I_{(ln)}} + \frac{Ms_{(hn)}}{3.E} \cdot \frac{h_n}{I_{(hn)}} - \frac{Md_{(ln)}}{3.E} \cdot \frac{l_n}{I_{(ln)}} =$$

$$= \frac{Mi_{(ln)}}{6.E} \cdot \frac{l_n}{I_{(ln)}} = B \quad (190)$$

de ambas se deducen las siguientes simplificando, relacionando al

cociente $\frac{I_0}{I_0}$, y multiplicando por 6 E:

$$(191). \quad 6.E. \varphi_n + 6.E \frac{a_{n-1}}{h_{n-1}} = Ki \cdot x_{(ln)} + 2.Ms_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} +$$

$$+ 2.Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)}$$

$$(192). \quad -6.E. \varphi_n - 6.E. \frac{a_n}{h_n} = Kd \cdot x_{(ln)} - 2.Ms_{(hn)} \cdot x_{(hn)} +$$

$$+ 2.Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)}$$

recordando las (181):

$$6.E \frac{a_{(n-1)}}{ri_{(n)}} + 6.E \cdot \frac{a_{(n-1)}}{h_{(n-1)}} = 6.E \cdot a_{(n-1)} \cdot \left[\frac{1}{ri_{(n)}} + \frac{1}{h_{(n-1)}} \right] =$$

$$= Ki \cdot x_{(ln)} + 2.Ms_{(hn-1)} + 2.Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} \quad (193)$$

$$-6.E \frac{a}{rd_{(ln)}} - 6.E \cdot \frac{a_n}{h_n} = -6.E \cdot a_n \cdot \left[\frac{1}{rd_{(ln)}} + \frac{1}{h_{(n)}} \right] =$$

$$= Kd \cdot x_{(ln)} - 2.Ms_{(hn)} \cdot x_{(hn)} + 2.Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} \quad (194)$$

poniendo a a_n en función de a_{n-1} ; (exp. 182) la (194) se transforma en la siguiente:

$$-6.E.a_{(n-1)} \cdot \left[\frac{r_{d(n)}}{r_{i(n)}} \cdot \frac{1}{r_{d(n)}} + \frac{r_{d(n)}}{r_{i(n)}} \cdot \frac{1}{h_n} \right] =$$

$$= Kd \cdot x_{(ln)} - 2.Ms_{(hn)} \cdot x_{(hn)} + 2.Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} \quad (195)$$

Las (193) y (195) pueden escribirse también así:

$$6.E.a_{(n-1)} \cdot \frac{1}{r_{i(n)}} \cdot \left[1 + \frac{r_{i(n)}}{h_{(n-1)}} \right] = Ki \cdot x_{(ln)} + 2.Ms_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} +$$

$$+ 2.Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Md_{(in)} \cdot x_{(ln)} \quad (196)$$

$$-6.E.a_{(n-1)} \cdot \frac{1}{r_{i(n)}} \cdot \left[1 + \frac{r_{d(ln)}}{h_{(n)}} \right] = Kd \cdot x_{(ln)} - 2.Ms_{(hn)} \cdot x_{(ln)} +$$

$$= + 2.Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} \quad (197)$$

la relación de ambas:

$$\frac{1 + \frac{r_{i(n)}}{h_{(n-1)}}}{1 + \frac{r_{d(n)}}{h_n}} = \frac{Ki \cdot x_{(ln)} + 2.Ms_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} + 2.Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)}}{Kd \cdot x_{(ln)} - 2.Ms_{(hn)} \cdot x_{(hn)} + 2.Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)}} \quad (198)$$

la denominaremos de aportamiento doble, pues en ella se encuentra expresada (al igual que la del N°. 83) la condición de rigidez de los ángulos A y B.

b) Casos de piés derechos verticales — pórticos simples o múltiples — condiciones de continuidad y aportamiento doble simplificadas.

Las expresiones (184) y 198) que respectivamente representan las condiciones de continuidad y aportamiento doble permiten resolver todos los problemas que puedan presentarse para los casos en que los piés derechos son paralelos, con toda sencillez. La (198)

séla, en cambio, permite la resolución de cualquier pórtico simple con o sin la restricción antedicha.

Para el caso en que los piés derechos sean paralelos las (184) y (198) admiten simplificaciones notables.

En este caso los centros instantáneos de rotación se desplazan todos al punto impropio de esa dirección, con lo que el movimiento del dintel se transforma en una traslación. Para este caso y más precisamente para cuando los piés derechos son verticales, las fórmulas arriba mencionadas se transforman en las siguientes:

a) Condición de continuidad:

como $r_{i(n)} = r_{i(n+1)} = \infty$ la (184) se transforma en la:

$$\begin{aligned} Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + 2 \cdot Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + 2 \cdot Mi_{(ln+1)} \cdot x_{(ln+1)} + Md_{(ln+1)} \cdot x_{(ln+1)} = \\ = - [Kd_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Ki_{(ln+1)} \cdot x_{(ln+1)}] \end{aligned}$$

idéntica a la ecuación de cuatro momentos o condición de continuidad tratada en el caso de pórticos a vértices fijos.

b) Condición de aporticamiento doble: Como:

$$a_n = a_{n-1} = a_{n+1} = \dots \dots a$$

$$\text{y } r_{i(n)} = r_{d(n)} = r_{i(n+1)} = \text{etc.} = \infty$$

las (193) y (194) se simplifican:

$$\boxed{6 \cdot E \cdot a \cdot \left[\frac{1}{h_{(n-1)}} \right] = Kd \cdot x_{(ln)} + 2 \cdot Ms_{(ln-1)} \cdot x_{(ln-1)} + 2 \cdot Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)}} \quad (200)$$

$$\boxed{-6 \cdot E \cdot a \cdot \left[\frac{1}{h_{(n)}} \right] = Kd \cdot x_{(ln)} - 2 \cdot Ms_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + 2 \cdot Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)}} \quad (201)$$

y la (198) se reduce a:

$$\frac{h_{(n)} \left[K_{i(l_n)} \cdot X_{(l_n)} + 2 \cdot M_{S(h_{n-1})} \cdot X_{(h_{n-1})} + 2 \cdot M_{i(l_n)} \cdot X_{(l_n)} + M_{d(l_n)} \cdot X_{(l_n)} \right]}{h_{(n-1)} \left[K_{d(l_n)} \cdot X_{(l_n)} - 2 \cdot M_{S(h_n)} \cdot X_{(h_n)} + 2 \cdot M_{d(l_n)} \cdot X_{(l_n)} + M_{i(l_n)} \cdot X_{(l_n)} \right]} \quad (202)$$

que a su vez, para el caso en que $h_1 = h_2 \dots h_n = h$ se transforma en la (83) ya analizada al tratar las estructuras a vértices fijos.

c) Aplicaciones a sistemas más corrientes — Ejemplos.

Como veremos enseguida no tenemos necesidad de recurrir a las expresiones (200) y (201) aún para el caso en que la estructura en estudio termine en semipóticamente.

Debemos tener presente que adoptando como incógnitas los momentos extremos en la forma que lo hacemos, el total de ellas puede resultar igual o mayor que el número que mide su indeterminación hiperestática. De aquí se deduce que dentro del número de ecuaciones que las ligan están implícita o explícitamente incluidas simples relaciones estáticas.

En el caso presente, v. gr.: el equilibrio del conjunto para cuando los pies derechos son verticales exige que:

$$\sum H = 0$$

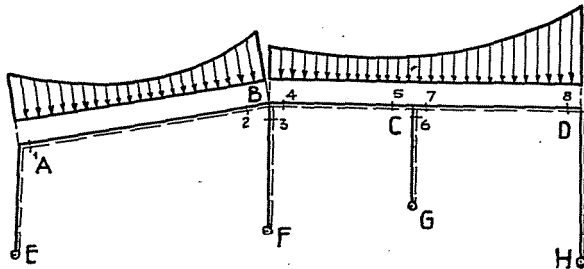


Figura N°. 100

Así, para la resolución del caso presentado en la fig. N°. 100, se tiene que el número de momentos extremos incógnitos es 8 y el de ecuaciones que las ligan:

1°) Condiciones de continuidad en B y C	2 exp.
2°) De aporcamiento doble en los recorridos EA, BF, FBCG y GCDH	3 „
3°) Equilibrios nudos B y C	2 „
4°) $\Sigma H = 0$	1 „
	TOTAL 8 exp.

número igual al anterior, siendo el problema, por lo tanto, soluble en la forma planteada.

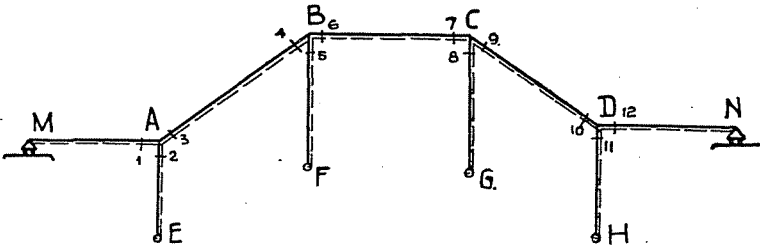


Figura N°. 101

Para el caso representado en la fig. N°. 101, que tiene cuatro momentos extremos incógnitos más que el anterior; puede hacerse extensiva la condición de continuidad a los puntos A y D, y escribirse también para ellos las condiciones de $\Sigma H = 0$, con lo que el número de ecuaciones que las ligan serán también dos.

El desplazamiento del dintel "a" conocidos los momentos extremos pueden determinarse mediante cualquiera de las (200) y (201).

En los ejemplos que siguen puede observarse la sencillez del procedimiento expuesto para la resolución de casos concretos.

Ejercicio N°. 19. — Pórtico isostático representado en la fig. N°. 102 sometido a una carga vertical cualquiera.

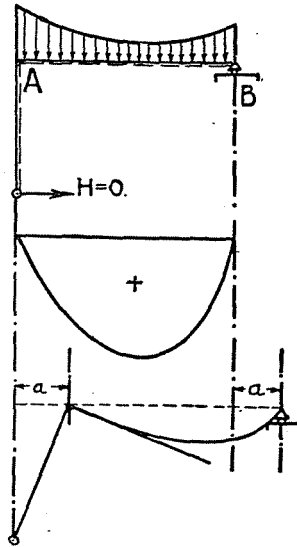


Figura N°. 102

La condición $\sum H = 0$.

desde que en B no puede existir empuje da:

$$H = 0$$

con lo que tampoco puede existir momentos en el pié derecho y en consecuencia en B. El diagrama de momentos en el dintel se reduce al correspondiente al sistema isostático AB. El desplazamiento "a" del dintel es (200):

$$6 \cdot E \cdot a \cdot \frac{1}{h} = K_i \cdot x_{(1n)}$$

de donde:

$$a = \frac{K_i \cdot l}{6 \cdot E \cdot I} \cdot h$$

(203)

Ejercicio N°. 20. — Pórtico bi-articulado con dos pies derechos de diferentes alturas pero verticales.

La $\sum H = 0$ da:

$$H_{\text{izquierda}} = H_{\text{derecha}}$$

o sea que:

$$-\frac{M_{s(nh-1)}}{h_{(n-1)}} = \frac{M_{s(hn)}}{h_n}$$

de donde:

$$M_{s(hn-1)} = -M_{s(hn)} \cdot \frac{h_{n-1}}{h_n}$$

Como:

$$M_{s(hn-1)} = M_{i(hn)} \text{ y } M_{d(hn)} = -M_{s(hn)}$$

resulta:

$$M_{s(hn-1)} = M_{i(hn)} = M_{d(hn)} \cdot \frac{h_{(n-1)}}{h_n} = -M_{s(hn-1)} \cdot \frac{h_{(n-1)}}{h_n} \quad (204)$$

si:

$$\frac{h_n}{h_{(n-1)}} = m \quad ; \quad x_1 = \frac{I_{(ln)}}{I_n} \cdot \frac{h_{(n-1)}}{I_{(hn-1)}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{I_{(ln)}}{I_n} \cdot \frac{h_n}{I_{(hn)}}$$

la condición de aporcamiento doble (202) se transforma en la siguiente expresión previas las transformaciones necesarias.

$$m \cdot Kd_{(ln)} - 2 \cdot m \cdot Ms_{(hn)} \cdot x_2 + 2 \cdot m \cdot Md_{(ln)} + m \cdot Mi_{(ln)} + \\ + Ki + 2 \cdot Ms_{(hn-1)} \cdot x_1 + 2 \cdot Mi_{(ln)} + Md_{(ln)} = 0.$$

teniendo en cuenta la (204):

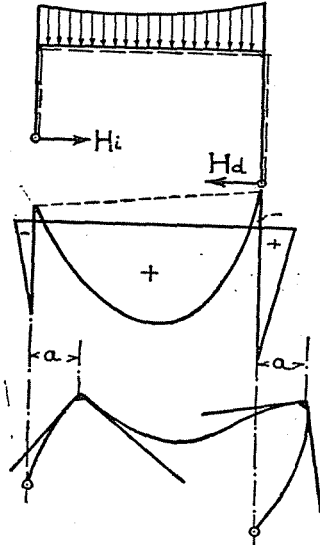


Figura N°. 103

$$- [Ki_{(ln)} + mKd_{(ln)}] = Mi_{(ln)} \cdot [2 \cdot (x_1 + 1) + m] + Md_{(ln)} \cdot [2 \cdot m \cdot (x_2 + 1) + 1]$$

de la que:

$$Mi_{(ln)} = \frac{Ki_{(ln)} + m \cdot Kd_{(ln)}}{[2 \cdot (x_1 + 1) + m] + m \cdot [2 \cdot m \cdot (x_2 + 1) + 1]} \quad (205)$$

Conocido $Mi_{(ln)}$ los demás valores se determinan mediante la (204)

El desplazamiento de "a" del dintel se calcula mediante el empleo de cualquiera de las expresiones (201) o (202):

$$\frac{6 \cdot E \cdot a}{h_{(n-1)} \cdot x_{(ln)}} = Ki_{(ln)} + 2 \cdot Ms_{(hn-1)} \cdot x_1 + 2 \cdot Mi_{(ln)} + Md_{(ln)} =$$

$$= Ki_{(ln)} + 2 \cdot Ms_{(hn-1)} \cdot x_1 + 2 \cdot Mi_{(ln)} + Mi_{(ln)} \cdot m.$$

teniendo presente la (204):

$$\frac{6 \cdot E \cdot I_{(ln)}}{h_{(n-1)} \cdot l_n} \cdot a = Ki_{(ln)} + Ms_{(hn-1)} [2 \cdot (x_1 + 1) + m]$$

reemplazando $Ms_{(hn-1)}$ por su valor dado por la (205), se tiene ya que $Ms_{(hn-1)} = Mi_{(ln)}$:

$$\frac{6 \cdot E \cdot I_{(ln)}}{h_{(n-1)} \cdot l_n} \cdot a = Ki_{(ln)} - \frac{[Ki_{(ln)} + Kd_{(ln)} \cdot m] \cdot [2 \cdot (x_1 + 1) + m]}{P + m \cdot R}$$

en la que

$$P = [2 \cdot (x_1 + 1) + m]$$

$$y \quad R = [2 \cdot m \cdot (x_2 + 1) + 1]$$

después de una serie de transformaciones:

$$a = \frac{h_{n-1}}{6 \cdot E} \cdot \frac{l_n}{I_{(ln)}} \cdot \left[\frac{m \cdot (R \cdot Ki_{(ln)} - m \cdot Kd_{(ln)})}{P + m \cdot R} \right] \quad (206)$$

Ejercicio N°. 21 — Para el caso de forma simétrica pero carga asimétrica, las fórmulas anteriores se simplifican, pues:

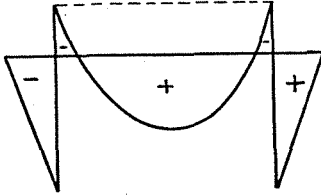


Figura
N°. 104

$$x_1 = x_2$$

y entonces:

$$m = 1$$

$$P = 2 \cdot x + 3$$

$$R = 2 \cdot x + 3$$

Luego las expresiones (205) y (206) se simplifican, transformándose en las siguientes:

$$M_{i(l_n)} = M_{d(l_n)} = \frac{K_i + K_d}{2(2x + 3) \cdot l} \quad (207)$$

y

$$a = \frac{h_{(n-1)}}{12} \cdot \frac{l_n}{E \cdot I_{(l_n)}} \cdot [K_i - K_d] \quad (208)$$

Si el sistema de carga se transforma en una fuerza concentrada P, que actúe a distancia m y n de los extremos izquierdos y derecho del dintel:

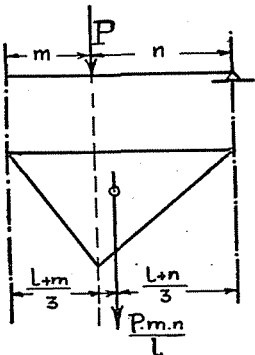


Figura N°. 105

$$\text{Sup. mom.} = \frac{P \cdot m \cdot n \cdot l}{1 \cdot 2} = \frac{P \cdot m \cdot n}{2}$$

y la (208) permite establecer que:

$$a = \frac{n - m}{3} \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{P}{4 \cdot E \cdot I_{(l)}} \cdot m \cdot n$$

(209).

Esta expresión indica que si la fuerza actúa en la mitad izquierda de la viga, el desplazamiento de a , es positivo, es decir, de izquierda a derecha, pues en este caso $n > m$. Si $m > n$, es decir, si la fuerza actúa sobre la mitad derecha del dintel, el desplazamiento es hacia la izquierda a causa de que el valor de "a" dado por la (209) cambia de signo.

Puede investigarse la posición de P que dé el máximo valor a. Como $n = l - m$, la anterior puede escribirse así:

$$a = \frac{h}{12 \cdot l} \cdot \frac{P}{E \cdot I_2} \cdot (l - m) \cdot (l - 2m) \cdot m$$

ó:

$$a = \frac{P}{12 \cdot E \cdot I_2} \cdot \frac{h}{l} \cdot [m \cdot l^2 - 3m^2 \cdot l + 2 \cdot m^3]$$

Si a es máximo:

$$\frac{da}{dm} = 0 = \frac{P}{12 \cdot E \cdot I_2} \cdot \frac{h}{l} \cdot (l^2 - 3 \cdot l \cdot m + 6 \cdot m^2)$$

de donde:

$$l^2 - 3 \cdot l \cdot m + 6 \cdot m^2 = 0 \quad (210)$$

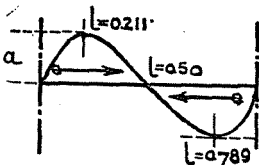


Figura N°. 106

que resuelto da:

$$m = \frac{l}{2} \left[1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \right]$$

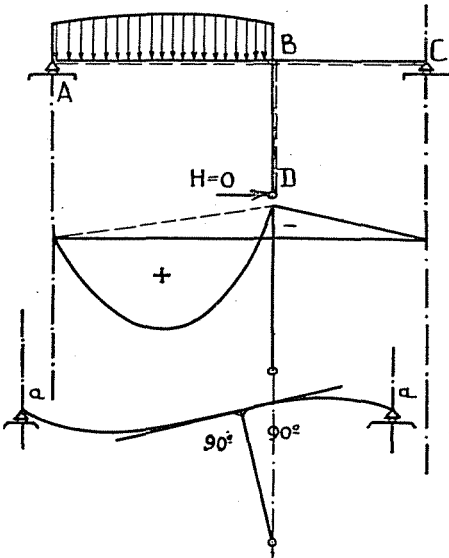
$$\text{de donde: } \frac{m}{l} = \begin{cases} 0.789 \\ 0.211 \end{cases}$$

La ecuación (210) muestra que a es cero para: $\frac{m}{l} = 0, \frac{m}{l} = 1$

y $\frac{M}{l} = 0,50$ y el resultado último que es máximo para $\frac{m}{l} = 0,789$ y 0,211. Si la posición de la fuerza corresponde a $\frac{m}{l} = 0,211$ el desplazamiento es hacia la derecha (positivo) y hacia la izquierda para $m/l = 0,789$. El gráfico correspondiente lo indica la figura núm. 106.

Por aumento de lh hasta valor infinito o disminución de h hasta cero, no puede llegarse (salvo en el caso de simetrías de carga y forma) por degeneración de la estructura a la viga empotrada, precisamente a causa del desplazamiento de "a" que ha obligado a ambos pies derechos a girar alrededor de las articulaciones de apoyo un ángulo $\frac{a}{h}$ contado a partir de su posición primitiva.

Por consiguiente las tangentes extremas a la elástica de deformación del dintel no quedan horizontales sino que forman, v. gr.: a izquierda un ángulo φ (fig. 103) con esa dirección.



Ejemplo N°. 22. — Sea el pórtico representado en la figura 107, cuyo primer tramo se encuentra sometido a la acción de una carga cualquiera.

Figura N°. 107

La condición:

$$\Sigma H = 0$$

ya que no hay otras cargas que no sean verticales, y que las reacciones en A y B no puedan tener componentes horizontales, permite deducir que:

$$H = 0$$

Esta conclusión implica la no existencia de momentos flectores en el pié derecho, luego:

$$M_{s_{(ln)}} = 0$$

Entonces la:

$$\Sigma H = 0$$

aplicada al nudo C da:

$$M_{d_{(ln-1)}} = M_{i_{(ln)}} = M$$

La condición de continuidad se transforma simplificándose:

$$2 \cdot M \cdot x_{(ln-1)} + 2 \cdot M \cdot x_{(ln)} = -Kd_{(ln-1)} \cdot x_{(n-1)}$$

Si denominamos:

$$x_1 = \frac{Ih}{h} \cdot \frac{l_1}{I_{(l_1)}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{Ih}{h} \cdot \frac{l_2}{I_{(l_2)}}$$

la anterior permite deducir M:

$$M = - \frac{Kd_{(ln-1)}}{2} \cdot \frac{x_1}{(x_1 + x_2)} \quad (211)$$

El desplazamiento "a" del dintel podremos determinar con cualquiera de las expresiones 196 y 197.

Si empleamos la primera: ($n = 2$)

$$\frac{6 \cdot E \cdot a}{h} + 2 \cdot M \cdot x_2 = - \frac{Kd \cdot x_1 \cdot x_2}{(x_1 + x_2)}$$

de donde:

$$\boxed{3 = - \frac{Kd}{6 \cdot E} \cdot h \cdot \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2}} \quad (212).$$

que indica que el desplazamiento cualquiera sea la carga aplicada al primer tramo, es de sentido derecha-izquierda.

Si el pié derecho no existiera, sería:

$$I_h = 0$$

con lo que:

$$x_1 = x_2 = 0$$

La expresión 212 da para este caso:

$$a = 0$$

resultado que corresponde, evidentemente, a la viga continua

Ejemplo N° 23. — La condición $\sum Ph = 0$ dá:

$$H_i = H_d = H$$

por consiguiente, si los dos pies derechos son de igual altura, es decir, si $h_1 = h_0$, debe tenerse:

$$M_{s_{(h_0)}} = M_{s_{(h_1)}} \text{ (en valor absoluto)}$$

quedando reducidos los momentos extremos incógnitos a los tres siguientes:

$$M_{i_{(1)}} = M_{s_{(h_0)}} = - M_{s_{(h_1)}}$$

$$M_{d_{(1)}}$$

$$\text{y } M_{i_{(2)}}$$

La condición de nudo da:

$$- Md_{(1)} = - Ms_{(h_1)} - Mi_{(1_2)} \quad (215)$$

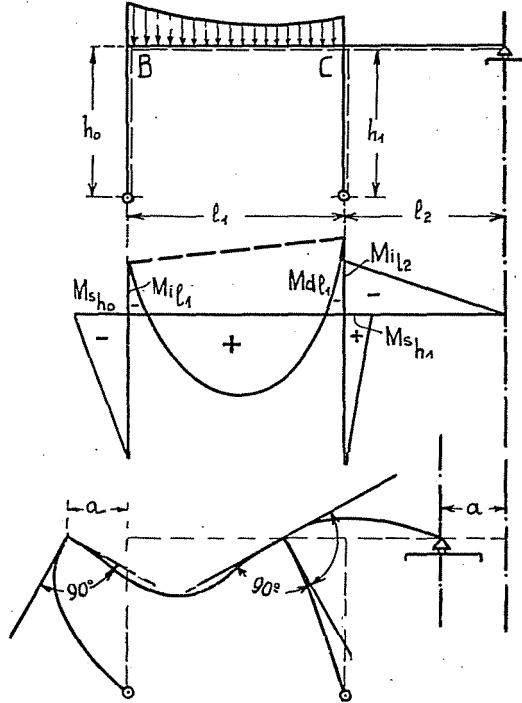


Figura N° 108

La de apertamiento doble para el recorrido h_0 ; l_1 ; h_1 :

$$\begin{aligned} 3 \cdot Mi_{(1_1)} \cdot x_{(1_1)} + 3 \cdot Md_{(1_1)} \cdot x_{(1_1)} + 2 \cdot Ms_{(h_0)} \cdot x_{(h_0)} - 2 \cdot Ms_{(h_1)} \cdot x_{(h_1)} = \\ = - [Kd_{(1_1)} + Kd_{(1_2)}] \cdot x_{(1_1)} \end{aligned}$$

La de continuidad del dintel en C:

$$Mi_{(1_1)} \cdot x_{(1_1)} + 2 \cdot Md_{(1_1)} \cdot x_{(1_1)} + 2 \cdot Mi_{(1_2)} \cdot x_{(1_2)} = - Kd_{(1_1)} \cdot x_{(1_1)}$$

si hacemos:

$$x = \frac{x_{(h_0)}}{x_{(l_1)}} ; \quad x_1 = \frac{x_{(h_1)}}{x_{(l_1)}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{x_{(l_2)}}{x_{(l_1)}}$$

las anteriores se transforman en:

$$Mi_{(l_1)} \cdot [3 + 2 \cdot x + 2 \cdot x_1] + 3 \cdot Md_{(l_1)} = - [Kd_{(l_1)} + Ki_{(l_1)}] \quad (214)$$

$$Mi_{(l_1)} + 3 \cdot Md_{(l_1)} + 2 \cdot Mi_{(l_2)} \cdot x_2 = - - [Kd_{(l_1)}] \quad (215)$$

las ecuaciones (213), (214) y (215), forman un sistema que resuelve el problema:

Si designamos, por abreviar:

$$+ Mi_{(ln)} = + Ms_{(h_0)} = M = - Ms_{(h_1)}$$

$$Md_{(ln)} = M_1$$

y
$$Mi_{(ln+1)} = M_2$$

las anteriores se transforman en:

$$M_1 = M + M_2 \quad (213 \text{ bis})$$

$$M + 2 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 \cdot x_2 = - Kd \quad (214 \text{ bis})$$

$$3 \cdot M + 3 \cdot M_1 + M \cdot x + 2 \cdot M \cdot x_1 = - Ki - Kd \quad (215 \text{ bis})$$

Eliminando M_1 entre la (213 bis) y (214 bis) y despejando M :

$$M = \frac{- Kd - 2 \cdot M_2 \cdot (1 + x_2)}{3} \quad (216)$$

Procediendo en igual forma entre las (213 bis) y (215 bis):

$$M = \frac{- \sigma - 3 \cdot M_2}{(6 + 2 \cdot (x + x_1))} \quad (217)$$

Eliminando M entre las (216) y (217):

$$M_2 = \frac{3 \cdot (Ki + Kd) - 2Ki (3 + x + x_1)}{S}$$

denominando:

$$S = 3 + 12 \cdot x_2 + 4 \cdot x + 4 \cdot x \cdot x_2 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_1 \quad (218)$$

si entre las (213 bis) y (214 bis) eliminamos M_2 queda:

$$M = \frac{-Kd - 2 \cdot M_1 \cdot (1 + x_2)}{1 - 2 \cdot x_2} \quad (218 \text{ bis})$$

se obtiene:

$$M = \frac{-\sigma - 3 \cdot M_1}{3 + 2 \cdot x + 2 \cdot x_1} \quad (219)$$

Las (218 bis) y (219) permiten deducir M :

$$M_2 = \frac{-\sigma \cdot (2 \cdot x_2 - 1) - Kd \cdot (3 + 2 \cdot x + 2 \cdot x_1)}{S} \quad (219 \text{ bis})$$

Mediante la (213) es fácil obtener el valor de M :

$$M = \frac{-2 \cdot \sigma \cdot (x_2 + 1) + 3 \cdot Kd}{S} \quad (220)$$

El desplazamiento puede calcularse, conocidos M , M_1 y M_2 con la expresión 196. en la forma conocida.

d) Pórticos simples, bi-articulados, con vértices a desplazamientos colgados, de forma cualquiera. — Ejemplos.

La expresión (198) permite, con facilidad, resolver cualquier problema de esta índole. Como ejemplo, dada la similitud de las soluciones, veremos únicamente el siguiente, que servirá de guía para otros análogos.

Ejemplo N° 24 — Sea el caso que representa la figura N° 109.

Del croquis b se deduce:

$$\frac{r_{i_n}}{l_u} = \frac{h_{n-1}}{a} \quad \therefore \quad r_{i(n)} = \frac{h_{n-1}}{a} \cdot l_n$$

$$\frac{rd_{(n)}}{l_n} = \frac{h_n}{a} \quad \therefore \quad rd_{(n)} = \frac{h_n}{a} \cdot l_n$$

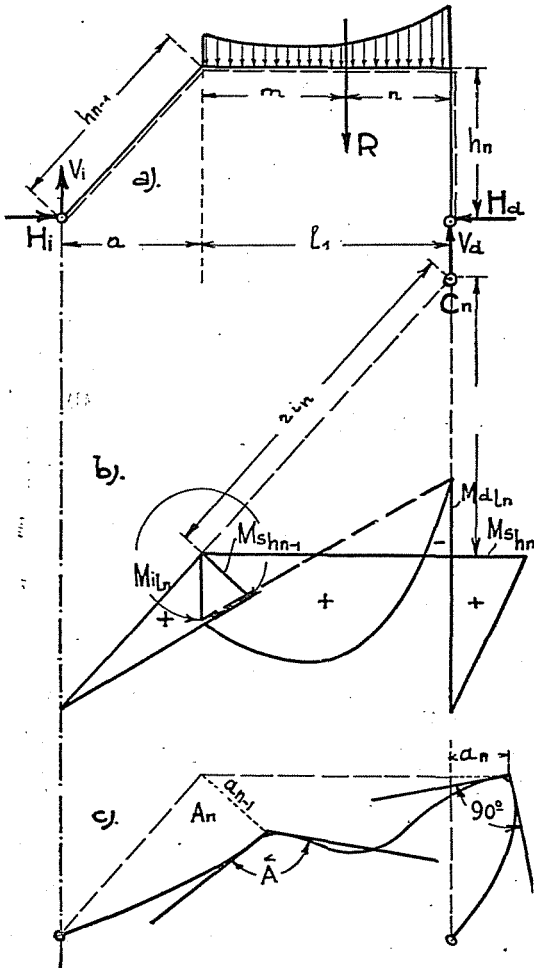


Figura
No. 109

Por consiguiente, el primer miembro de la expresión (198) vale:

$$\frac{1 + \frac{h_{n-1}}{a} \cdot \frac{l_n}{h_{n-1}}}{1 + \frac{h_n}{a} \cdot \frac{l_n}{h_n}} = -1$$

Como: $Ms_{(ln)} = -Md_{(ln)}$ y $Ms_{(ln-1)} = Mi_{(ln)}$

La (198) se transforma en la siguiente:

$$Mi_{(ln)} \cdot [3 \cdot x_{(ln)} + 2 \cdot x_{(ln-1)}] + Md_{(ln)} \cdot [3 \cdot x_{(ln)} + 2 \cdot x_{(ln)}] = - \\ = - [Ki + Kd] \cdot x_{(ln)} \quad (221).$$

denominando:

$$x_1 = \frac{x_{(ln-1)}}{x_{(1)}} \quad y \quad x_2 = \frac{x_{(ln)}}{x_{(1)}} \quad (222).$$

la anterior se reduce a:

$$Mi_{(ln)} \cdot [3 + 2 \cdot x_1] + Md_{(ln)} \cdot [3 + 2 \cdot x_2] = - [Kd + Ki] \quad (223)$$

De la condición $\sum H = 0$
 resulta: $Hi = Hd = 0 \quad (224)$

Además:

$$\left. \begin{aligned} Ms_{(ln-1)} = Mi_{(ln)} = Vi \cdot a - M \cdot h \\ Ms_{(ln)} = -Md_{(ln)} = H \cdot h \end{aligned} \right\} \quad (225).$$

Como:

$$Vi \cdot (a + ln) = R \cdot n \quad \therefore \quad Vi = \frac{R \cdot n}{(a + ln)}$$

$$\text{Vd. } (a + \ln = R \cdot (m + a)) \quad \therefore \quad \text{Vd} = R \frac{R \cdot n}{a + \ln}$$

La (225) se transforma en:

$$\left. \begin{aligned} \text{Mi}_{(\ln)} &= \left[\frac{R \cdot n}{a + \ln} \right] \cdot a - Hh \\ -\text{Md}_{(\ln)} &= H \cdot h \end{aligned} \right\} \quad (226)$$

valores que reemplazados en la (223) dan:

$$\left\{ \left[\frac{R \cdot n}{a + \ln} \right] \cdot a - Hh \right\} (3 + 2x_1) - H \cdot h \cdot (3 + 2x_2) = - [Ki + Kd]$$

Si denominamos:

$$\begin{aligned} 3 + 2x_1 &= \varphi_1 \\ \text{y } 3 + 2x_2 &= \varphi_2 \end{aligned}$$

la anterior se simplifica:

$$\frac{R \cdot n}{a + \ln} \cdot \varepsilon \cdot \varphi_1 - H \cdot h \cdot \varphi_1 - H \cdot h \cdot \varphi_2 = - [Ki + Kd]$$

de la que finalmente:

$$H = \frac{[Ki + Kd] + \frac{R \cdot n \cdot a \cdot \varphi_1}{(a + \ln)}}{h \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (227)$$

determinándose $\text{Mi}_{(\ln)}$ y $\text{Md}_{(\ln)}$, mediante las (226), una vez calculado H .

El diagrama de momentos se ha dibujado en el croquis b) de la figura N°. 109.

Es fácil determinar los desplazamientos a_{n-1} y a_n . Esto lo haremos con cualesquiera de las expresiones (200) a (201).

Empleando la primera de las nombradas:

$$6.E.a_{(n-1)} \cdot \frac{1}{r_{j(n)}} \cdot \left[1 + \frac{r_{j(n)}}{h_{n-1}} \right] = K_i \cdot x_{(ln)} + 2.Ms_{(ln-1)} \cdot x_{(ln-1)} + 2.Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)}$$

teniendo en cuenta las (222) y (226), después de una serie de transformaciones

$$6.E.a_{(n-1)} \cdot \left[\frac{a}{h_{(n-1)} \ln} + \frac{1}{h_{(n-1)}} \right] = 6.E. \frac{a_{(n-1)}}{h_{(n-1)}} \cdot \left[1 + \frac{a}{\ln} \right] =$$

$$\frac{2.R.n}{a + \ln} \cdot a(1 + x_1) - H.h.(3 + 2.x_1)$$

teniendo en cuenta el valor de H dado por la (227) se llega finalmente a:

$$K_i \cdot \varphi_2 - K_d \cdot \varphi_1 + \frac{R.n.a}{(a + \ln)} \cdot [3 + 4.x_1 + 4.x_2 \cdot (1 + x_1)] =$$

$$\frac{6.E \cdot (\varphi_1 + \varphi_2) \left(1 + \frac{a}{\ln}\right)}{h_{(n-1)}}$$

a idéntico resultado puede llegarse partiendo de la (201).

Conocido a_{n-1} , puede determinarse a , para lo cual tendremos en cuenta la (182):

$$a_n = a_{n-1} \cdot \frac{r_{d(n)}}{r_{i(n)}} = a_{n-1} \cdot \frac{h_n}{h_{(n-1)}} \quad (22)$$

La deformación de la estructura está representada en el croquis c) de la fig. N° 109.

En forma análoga pueden calcularse las estructuras representadas en las figuras N° 110 y N° 111.

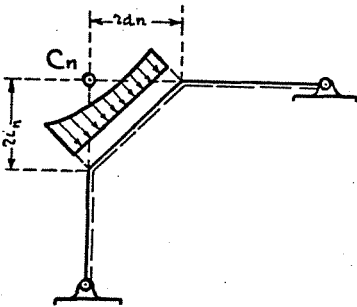


Figura N° 110

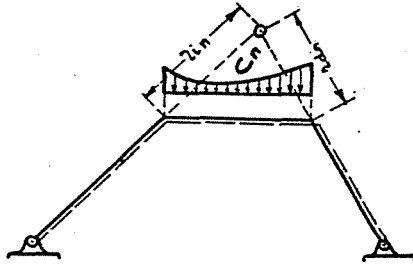


Figura N° 111

Resolución de otros ejemplos — A medida que la estructura es más compleja, aumenta el número de momentos extremos incógnitos y, por consiguiente, la dificultad de su cálculo, perdiendo el método paulatinamente su comodidad y rapidez, siendo preferible para estos casos emplear métodos gráficos.

3° — Cargas exteriores aplicables a los piés derechos

a) **Caso general** — Condiciones de aparcamiento doble y de continuidad.

Supondremos las cargas de dirección izquierda-derecha, debiéndose en caso contrario invertir el signo a los términos de carga en las respectivas ecuaciones. Las hipótesis y el procedimiento analizado en el caso de cargas aplicadas contra las vigas de

dintel, son comunes al que ahora tratamos, de tal manera que las deducciones de las expresiones que correspondan a las condiciones de continuidad y de aporcamiento doble, no presentan ya ninguna dificultad.

Primeramente deduciremos las fórmulas generales para el caso en que los pies derechos y dinteles tengan direcciones cualesquiera, y como hicimos en el capítulo anterior, luego las simplificadas para cuando los pies derechos son verticales.

Caso general — Condición de continuidad. — Es la deducida en el capítulo anterior, dando valor cero a los términos de carga:

$$\begin{aligned}
 & Mi_{(1n)} \cdot x_{(1n)} + 2.Md_{(1n)} \cdot x_{(1n)} + 2.Mi_{(1n+1)} \cdot x_{(1n+1)} + \\
 & + Md_{(1n+1)} \cdot x_{(1n+1)} = - \epsilon \cdot E \cdot \left[\frac{a_{n-1}}{ri_{(n)}} - \frac{a_n}{ri_{(n+1)}} \right]
 \end{aligned}$$

Condiciones de aporcamiento doble. — Separaremos como en el caso de cargas aplicadas contra el dintel, un conjunto formado por un dintel y dos pies derechos que le sean adyacentes. Articulando sus uniones rígidas, y suponiendo el conjunto desplazado a su posición definitiva, tendremos que los ángulos internos de valores iniciales A y B, tendrán otros actuales de:

$$\begin{aligned}
 & \angle < \angle \\
 & A' = A + \varphi_n + \frac{a_{n-1}}{h_{n-1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \angle < \angle \\
 & B' = B - \varphi_n - \frac{a_n}{h_n}
 \end{aligned}$$

Las cargas aplicadas a ambos pies derechos, deformarán a éstos originando en concordancia de sus extremos las siguientes variaciones angulares:

pie derecho h_{n-1} :

parte superior:

$$\gamma_{(hn-1)} = \frac{Kd_{(hn-1)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{h_{n-1}}{I_{(hn-1)}}$$

parte inferior:

$$\delta_{hn-1} = \frac{Ki_{(hn-1)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{h_{n-1}}{I_{(hn-1)}}$$

pie derecho h_n :

parte superior:

$$\gamma_{(hn)} = \frac{Kd_{(hn)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{h_n}{I_{(hn)}}$$

parte inferior:

$$\delta_{(hn)} = \frac{Ki_{(hn)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{h_n}{I_{(hn)}}$$

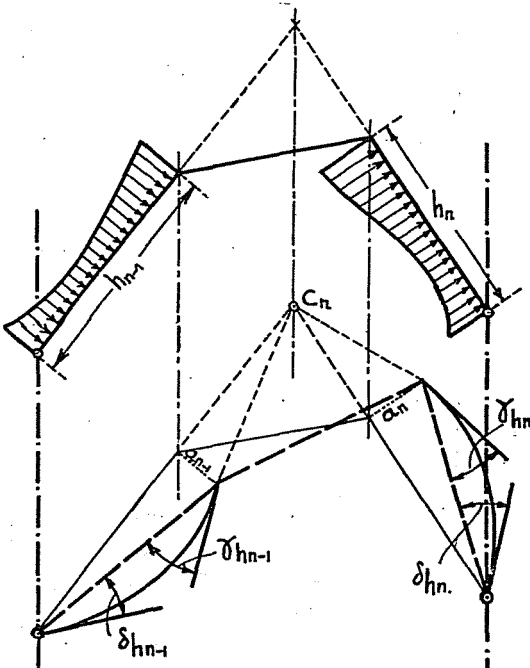


Figura N° 112

Si suponemos que $\gamma_{(ln-1)}$, y $\gamma_{(ln)}$ sean menores que $a_{(n-1)} \div h_{(n-1)}$ y que $a_{(n)} \div h_{(n)}$, respectivamente, los momentos extremos incógnitos: $Ms_{(hn-1)}$; $Ms_{(hn)}$; $Mi_{(ln)}$ y $Md_{(ln)}$ tienen los sentidos siguientes: $Ms_{(hn)}$; $Ms_{(hn-1)}$ y $Mi_{(ln)}$, positivos; y $Md_{(ln)}$ negativo.

Las deformaciones angulares que se originan son:

a) En concordancia de los pies derechos:

1º. en el extremo superior de h_{n-1} :

$$\gamma'_{(hn-1)} = + \frac{Ms_{(hn-1)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{h_{n-1}}{I_{(hn-1)}}$$

2º. en el extremo superior de h_n :

$$\gamma'_{(hn)} = + \frac{Ms_{(hn)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{h_n}{I_{(hn)}}$$

b) En el dintel:

extremo izquierdo	}	originado por $Mi_{(ln)}$: $\alpha'_{(ln)} = + \frac{Mi_{(ln)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{ln}{I_{(ln)}}$
		idem por $Md_{(ln)}$: $\alpha''_{(ln)} = - \frac{Md_{(ln)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{ln}{I_{(ln)}}$
extremo derecho:	}	originado por $Md_{(ln)}$: $\beta'_{(ln)} = - \frac{Md_{(ln)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{ln}{I_{(ln)}}$
		idem por $Mi_{(ln)}$: $\beta''_{(ln)} = + \frac{Mi_{(ln)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{ln}{I_{(ln)}}$

Cuando estos momentos, $Mi_{(ln)}$, $Md_{(ln)}$, etc., tengan simultáneamente valores tales que los ángulos A y B después de todo este proceso adquieran sus medidas iniciales, el problema estará resuelto y darán, por consiguiente, su solución.

Para ello es necesario que:

$$A) : \quad A + \frac{a_{(n-1)}}{h_n} + \varphi_n - \gamma_{(hn-1)} - \gamma'_{(hn-1)} - a'_{(ln)} + a''_{(ln)} = A$$

$$B) : \quad B - \frac{a_{(n-1)}}{h_n} - \varphi_n + \gamma_{(hn)} + \gamma'_{(hn)} + \beta'_{(ln)} - \beta''_{(ln)} = B.$$

Reemplazando valores ya hallados anteriormente, de la primera se obtiene:

$$\frac{a_{(n-1)}}{h_{(n-1)}} + \frac{a_{(n-1)}}{ri_{(n)}} = \frac{Kd_{(hn-1)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{h_{(n-1)}}{I_{(hn-1)}} + \frac{Ms_{(hn-1)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{h_{(n-1)}}{I_{(hn-1)}} + \frac{Mi_{(ln)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{l_{(ln)}}{I_{(ln)}} + \frac{Md_{(ln)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{l_{(ln)}}{I_{(ln)}}$$

de la que

$$6 \cdot E \cdot a_{(n-1)} \cdot \left[\frac{1}{h_{(n-1)}} + \frac{1}{ri_{(n)}} \right] = Kd_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} + 2 \cdot Ms_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} + 2 \cdot Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} \quad (230)$$

operando en forma análoga, de la segunda:

$$6. E. a_n \cdot \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{rd_{(n)}} \right] = Kd_{(hn)} \cdot x_{(hn)} + 2. Ms_{(hn)} \cdot x_{(hn)} - \\ - 2. Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} - Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} \quad (231)$$

relacionando a ambas.

$$\frac{a_{(n-1)}}{h_{(n-1)}} \cdot \left[1 + \frac{h_{(n-1)}}{ri_{(n)}} \right] = \frac{Kd_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} + 2. Ms_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} + 2. Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)}}{\frac{a_n}{h_n} \cdot \left[1 + \frac{h_n}{rd_n} \right]} = -Kd_{(hn)} \cdot x_{(hn)} - 2. Ms_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + 2. Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} \quad (232)$$

que expresa la condición que hemos denominado aporcamiento doble.

El cálculo de los desplazamientos a_{n-1} y a_n puede determinarse mediante las (230) o (231), conocidos previamente los momentos extremos incógnitos.

b) Casos de pies derechos verticales — Idem simplificados. —

En este caso, el centro instantáneo correspondiente a la viga dintel l_n , se traslada al punto impropio de la dirección común de los pies derechos, con lo cual aquel sufre en realidad una traslación, quedando:

$$ri_{(n)} = rd_{(n)} = \infty$$

reduciéndose la (232) a la siguiente:

$$\frac{h_{(n)}}{h_{(n-1)}} = \frac{Kd_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} + 2. Ms_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} + 2. Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)}}{-Kd_{(hn)} \cdot x_{(hn)} - 2. Ms_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + 2. Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)}} \quad (233)$$

La condición de continuidad se reduce a:

$$Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + 2. Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + 2. Mi_{(ln+1)} \cdot x_{(ln+1)} + Md_{(ln+1)} \cdot x_{(ln+1)} = 0. \quad (234)$$

Además quedan subsistentes:

para cada nudo: $\Sigma M = 0$

y la condición de equilibrio estático:

$$\Sigma Ph = 0$$

Ejercicio N°. 25. — Pórtico isostático, representado en la figura N°. 113, sometido a carga horizontal aplicada contra el pie derecho.

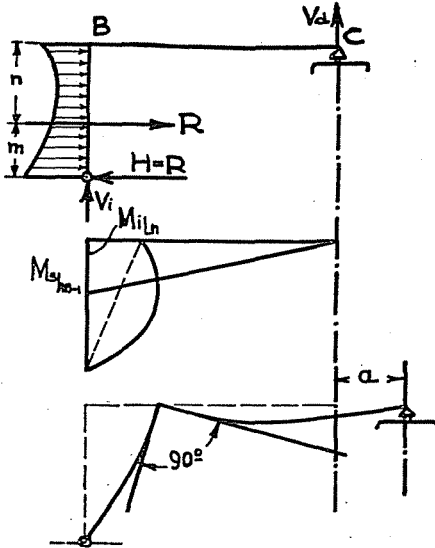


Figura No. 113

La condición:

$$\Sigma Ph = 0$$

desde que en C no puede haber reacción con componente horizontal dá

$$R = H$$

El momento en B, es:

$$M = H \cdot h - R \cdot n = R (m + n) - R \cdot n = R \cdot m$$

$$M = R \cdot m$$

La reacción vertical en C:

$$V = \frac{M}{l} = \frac{R \cdot m}{l}$$

Para calcular el desplazamiento "a", emplazaremos la expresión (230) teniendo en cuenta que:

$$r_{(n)} = \infty ; Md_{(ln)} = 0 \quad \text{y que } Ms_{(ln-1)} = Mi_{(ln)} = M$$

$$6.E. \frac{a_{(n-1)}}{h_{(n-1)}} = Kd_{(ln-1)} \cdot x_{(ln-1)} + 2.M. [x_{(ln-1)} + x_{(l)}]$$

Si hacemos:

$$x = \frac{x_{(n-1)}}{x_{(ln)}}$$

queda:

$$\frac{6.E. a_n}{x_{(ln)} h} = Kd_{(ln)} \cdot x + 2.M. (x + 1)$$

de la que:

$$a = \frac{Kd. x + 2.M. (x + 1)}{6.E} \cdot x_{(ln)} \cdot h$$

o finalmente:

$$a = \frac{Kd. x + 2.R.m. (x + 1)}{6.E} \cdot h \cdot x_{(l)} \quad (237).$$

Ejercicio N° 36. — Pórtico bi-articulado con dintel horizontal y piés derechos de igual altura y diferentes momentos de

inercia. Como la carga está aplicada contra el pié derecho h_n únicamente y con sentido derecha-izquierda, debemos al emplear la expresión (233) anular $Ki_{(hn-1)}$ y cambiar el signo a $Ki_{(hn)}$.

Procediendo como se deja indicado:

$$-1 = \frac{2.Ms_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} + 2.Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)}}{+Kd_{(hn)} \cdot x_{(hn)} - 2.Ms_{(hn)} \cdot x_{(hn)} + 2.Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)}}$$

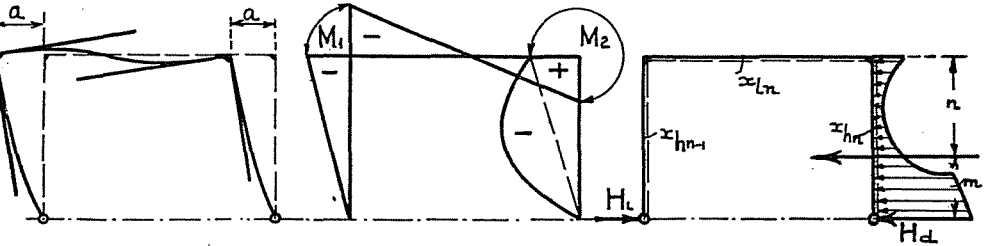


Figura N° . 114

si hacemos

$$x_1 = \frac{x_{(hn-1)}}{x_{(ln)}} \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{x_{(hn)}}{x_{(ln)}}$$

y teniendo en cuenta que:

$$M_1 = Ms_{(hn-1)} = Mi_{(ln)} \quad \text{y} \quad +M_2 = Md_{(ln)} = -Ms_{(ln)}$$

la anterior se transforma en:

$$-1 = \frac{2.M_2 x_1 + 2.M_1 + M_2}{Kd_{(hn)} \cdot x_2 + 2.M_2 \cdot x_2 + 2.M_2 + M_1}$$

de la que:

$$-Kd \cdot x_2 = M_1 \cdot (3 + 2 \cdot x_1) + M_2 \cdot (3 + 2 \cdot x_2) \quad (238)$$

de la condición

$$\sum Ph = 0$$

se deduce:

$$R = Hl + Hd$$

de donde:
$$Hd = R - Hi \quad (239)$$

por consiguiente:

$$M_2 = M_{(hn)} = Hd \cdot h - R \cdot n = (R - Hi) \cdot h - R \cdot n.$$

o:

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= R \cdot m - Hi \cdot h \\ M_1 &= M_{(hn-1)} = -Hi \cdot h \end{aligned} \right\} \quad (240)$$

Reemplazando estos valores en la (238):

$$-Kd \cdot x_2 = (R \cdot m - Hi \cdot h) \cdot (3 + 2 \cdot x_2) - Hi \cdot h \cdot (3 + 2 \cdot x_1)$$

de la que finalmente:

$$\boxed{Hi = \frac{Kd \cdot x_2 + R \cdot M \cdot (3 + 2 \cdot x_2)}{2 \cdot h \cdot (3 + x_1 + x_2)}} \quad (241)$$

Ejemplo N° 27. — Si se tratara de resolver el mismo problema anterior, pero con:

$$I_{(n-1)} = I_{(hn)}$$

se tendría:

$$x_1 = x_2 = x$$

con lo que la (241) se reduce a:

$$\boxed{Hi = \frac{Kd \cdot x}{2 \cdot h \cdot (3 + 2 \cdot x)} + \frac{R \cdot m}{2 \cdot h}} \quad (242)$$

quedando subsistentes las (239) y (240).

El desplazamiento "a" del dintel lo determinaremos con la (230):

$$6. E. \frac{a_{(n-1)}}{h_{(n-1)}} = 2. M_1 \cdot x_{(hn-1)} + 2. M_1 \cdot x_{(ln)} + M_2 \cdot x_{(ln)}$$

dividiendo por $x_{(ln)}$ y teniendo en cuenta la (242) tenemos, finalmente:

$$- a_{(n-1)} = \left[R. m. (1 + 2. x) + Kd. x \right] \cdot \frac{h_{(n-1)} \cdot x_{(l)}}{12. E} \quad (243)$$

Ejemplo N° 28. — Pórtico simple bi-articulado con dintel inclinado y pies derechos de diferentes alturas con sus extremos articulados, situados también a niveles diferentes (fig. 115).

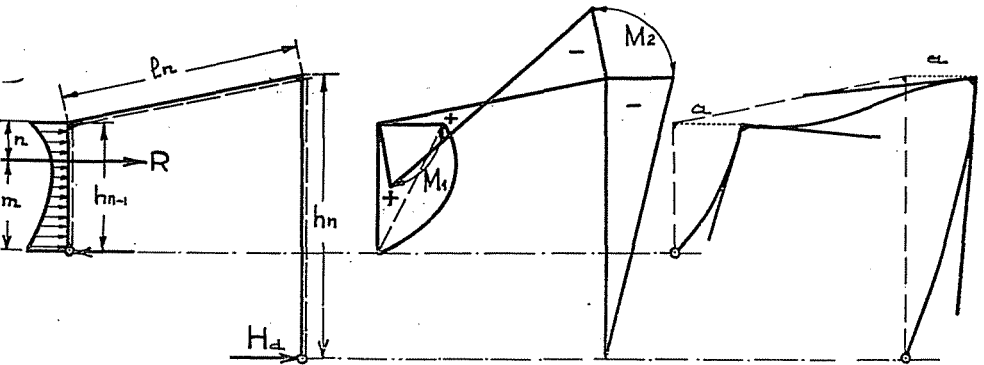


Figura N° 115

En este caso, como en los anteriores:

$$\Sigma Ph = 0$$

de donde: $H_i + H_d = R$

que conduce a: $H_i = R - H_d \quad (245).$

Además:

$$\left. \begin{aligned} -M_2 &= Ms_{(hn)} = Hd \cdot hn \\ M_1 &= Ms_{(hn-1)} = (R - Hd) \cdot (m + n) - R \cdot n \\ &= R \cdot m - Hd \cdot h_{(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (246)$$

La condición de aporticamiento doble (233) permite establecer que:

$$-S = \frac{Kd \cdot h_{(n-1)} \cdot x_{(hn-1)} + 2 \cdot M_1 \cdot x_{(hn-1)} + 2 \cdot M_1 \cdot x_{(ln)} + M_2 \cdot x_{(ln)}}{2 \cdot M_2 \cdot x_{(hn)} + 2 \cdot M_2 \cdot x_{(ln)} + I_1 \cdot h_{(ln)}} \quad (247)$$

en la que

$$S = \frac{h_n}{h_{n-1}}$$

Si dividimos por $x_{(ln)}$ y denominamos

$$x_1 = \frac{x_{(hn-1)}}{x_{(ln)}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{x_{(ln)}}{x_{(ln)}}$$

y hacemos, por abreviar:

$$A = 2 \cdot (x_1 + 1) + S \quad \text{y} \quad B = 2 \cdot S \cdot (1 + x_2) + 1$$

la (247) se transforma en:

$$-Ki_{(hn-1)} \cdot x_{(1)} = A \cdot M_1 + B \cdot M_2$$

Reemplazando M_1 y M_2 por sus valores:

$$-Kd_{(hn-1)} = R \cdot m \cdot A - Hd \cdot h_{(n-1)} \cdot [A + s \cdot B]$$

de la que finalmente:

$$\boxed{Hd = \frac{Kd \cdot h_{(hn-1)} \cdot x_1 + R \cdot m \cdot A}{h_{(n-1)} \cdot [A + s \cdot B]}} \quad (248)$$

El desplazamiento "a" del dintel puede determinarse mediante la (230), recordando que $ri_{(n)} = \infty$

$$6.E \frac{a_{(n-1)}}{h_{(n-1)}} = Kd_{(nn-1)} \cdot x_{(nn-1)} + 2.M_1 \cdot x_{(nn-1)} + 2.M_1 \cdot x_{(ln)} + M_2 \cdot x_{(ln)}$$

multiplicando por x_1 ; reemplazando a M_1 y M_2 por sus valores dados por las expresiones (246) y a Hd por el correspondiente de la (248) se tiene:

$$a_{(n-1)} = \frac{Kd_{(nn-1)} \cdot x_1 + 2 \cdot (x_1 + 1) \cdot R \cdot m - \frac{Kd \cdot h_{(n-1)} \cdot x_1 \cdot A + R \cdot m \cdot A^2}{A + s \cdot B}}{6 \cdot E} \cdot \frac{1}{x_{(ln)} \cdot h_{(n-1)}} \quad (249)$$

si fuera: $x_1 = x_2 = x$

y $h_{(n-1)} = h_n = h$

quedaría: $s = 1$

y: $A = B = (2x + 3)$

con lo que la (249) se reduciría a:

$$a_{(n-1)} = \frac{Kd \cdot h_{(n-1)} \cdot x + (2 \cdot x + 1) \cdot R \cdot m}{12 \cdot E} \cdot x_{(ln)} \cdot h_{n-1}$$

que coincide con la (244) deducida en la página

Ejemplo N° 29. — Pórtico compuesto de un dintel horizontal de dos tramos cuyos dos extremos exteriores están simplemente apoyados y de un pié derecho vertical articulado. (fig. n° 116):

La condición:

$$\sum B_h = 0$$

da:

$$R = H \quad (250)$$

con lo que:

$$M_{S_{(hn)}} = H \cdot h - R \cdot m = R (m+n) - R \cdot m = R \cdot n \quad (251)$$

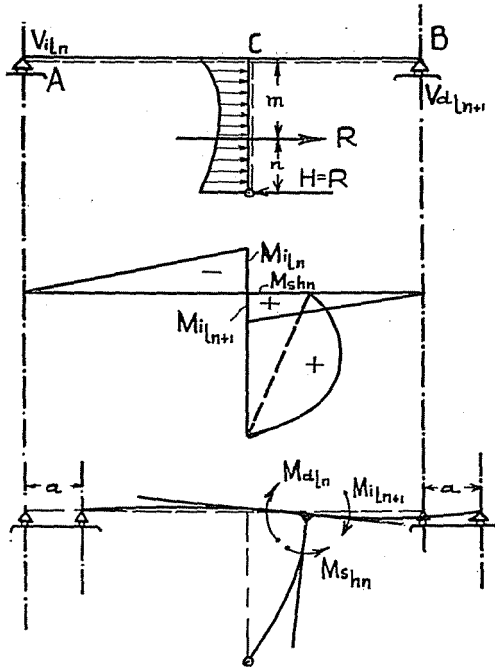


Figura N°. 116

La condición de continuidad en C da:

$$(251 \text{ bis}). \quad M_{d_{(ln)}} \cdot x_{(ln)} + M_{i_{(ln+1)}} \cdot x_{(ln+1)} = 0$$

La de imposibilidad de giro del nudo C:

$$\sum M = 0$$

o:

$$-M_{d_{(ln)}} + M_{i_{(ln+1)}} = M_{s_{ln}} \quad (252)$$

denominando:

$$x_1 = \frac{x_{(1n)}}{x_{(h)}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{x_{(1n+1)}}{x_{(h)}}$$

las (251), (25 bis) y (252), se transforman:

$$R.n = Ms_{(1n)}$$

$$Md_{(1n)} \cdot x_1 + Mi_{(1n+1)} \cdot x_2 = 0.$$

$$-Md_{(1n)} + Mi_{(1n+1)} \cdot x_2 = Ms_{(1n)} = R.n$$

despejando $Mi_{(1n+1)}$:

$$Mi_{(1n+1)} = R.n + Md_{(1n)} = -Md_{(1n)} \cdot \frac{x_1}{x_2}$$

de donde:

$$\boxed{Md_{(1n)} = -R.n \cdot \frac{x_2}{x_1 + x_2}} \quad (253)$$

y por consiguiente:

$$\boxed{Mi_{(1n+1)} = R.n - R.n \cdot \frac{x_2}{x_1 + x_2} = R.n \cdot \frac{x_1}{x_1 + x_2}} \quad (254)$$

El desplazamiento del dintel puede calcularse inmediatamente con la (230) o con la (231).

Aplicando la primera al recorrido h_n ; l_{n+1} :

$$\frac{6.E.a}{h} = Kd \cdot x_{(h)} + 2.Ms_{(h)} \cdot x_{(h)} + 2.Mi_{(1n+1)} \cdot x_{(1n+1)}$$

Reemplazando valores, multiplicando por x_h , y despejando "a" se tiene:

$$a = \left[\text{Kd}_{(h)} + 2. \text{R. n.} \left(1 + \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} \right) \right] \cdot \frac{h \cdot x_h}{6 \cdot E} \quad (255)$$

Ejercicio N°. 30. — El problema que plantea el croquis a) de la figura N° 117, puede resolverse así:

a) Condición $\sum Ph = 0$

$$\begin{aligned} R &= H_{(hn-1)} + H_{(hn)} \\ \dots H_{(hn-1)} &= R - H_{(hn)} \end{aligned} \quad (256)$$

b) La condición $\sum M = 0$ en C:

$$-Md_{(ln)} + Mi_{(ln+1)} = Ms_{(ln)} \quad (257)$$

c) Condición de continuidad en C:

$$Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + 2.Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + 2.Mi_{(ln+1)} \cdot x_{(ln+1)} = 0 \quad (258)$$

d) Condición de aportamiento doble, recorrido $h_{(n+1)}$; $l_{(n)}$; $h_{(n)}$:

$$-1 = \frac{\text{Kd}_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} + 2. Ms_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} + 2. Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)}}{-2. Ms_{(hn)} \cdot x_{(hn)} + 2. Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)}} \quad (259)$$

También podemos escribir:

$$Ms_{(hn)} = H_{(hn)} \cdot h \quad (260)$$

$$Ms_{(hn-1)} = H_{(hn-1)} \cdot h - R \cdot m = R \cdot n - Ms_{(hn)} \quad (261)$$

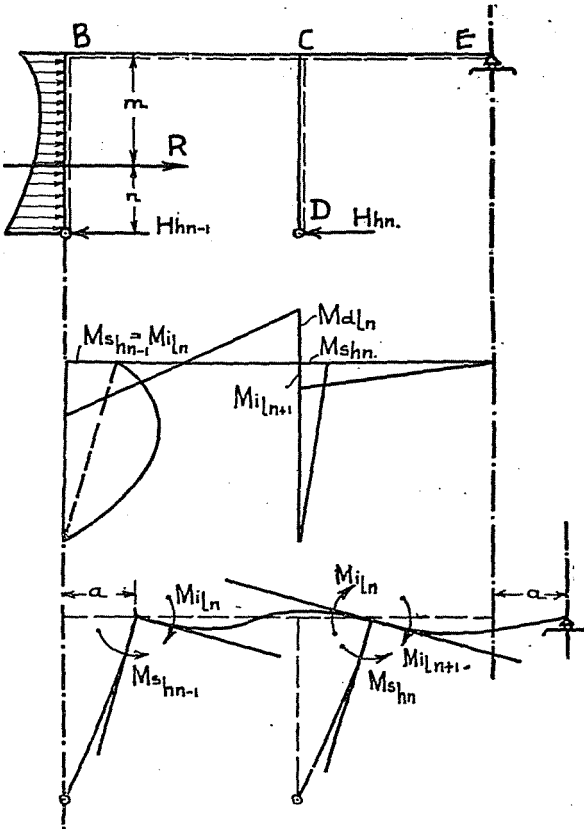


Figura No. 117

El sistema de ecuaciones (257) a (261) resuelve el problema: si hacemos:

$$x = \frac{x_{(hn-1)}}{x_{(ln)}} ; \quad x_1 = \frac{x_{(hn)}}{x_{(ln)}} \quad y \quad x_2 = \frac{x_{(ln+1)}}{x_{(ln)}}$$

el sistema anterior se transforma en el siguiente:

$$-Md_{(ln)} + Mi_{(ln+1)} = Ms_{(hn)} \quad (262).$$

$$Mi_{(ln)} + 2.Md_{(ln)} + 2.Mi_{(ln+1)} \cdot x_2 = 0. \quad (263).$$

$$-Kd_{(hn-1)} \cdot x = 3.Md_{(ln)} + 3.Mi_{(ln)} + 2.Ms_{(hn-1)} - Ms_{(hn)} \cdot x_1 \quad (265)$$

$$Ms_{(hn-1)} = R.n - Ms_{(hn)} \quad (265).$$

La resolución dá:

de la (265):

$$-Ms_{(hn)} = Ms_{(hn-1)} - R.n$$

que reemplazado en la (264):

$$-Kd_{(hn-1)} \cdot x = 3.Md_{(ln)} + 3.Mi_{(ln)} + 2.Ms_{(hn-1)} \cdot x + 2.Ms_{(hn-1)} \cdot x_1 - 2.R.n \cdot x_1$$

cómo:

$$Ms_{(hn-1)} = Mi_{(ln)}$$

la anterior se transforma en:

$$-Kd_{(hn-1)} \cdot x = 3.Md_{(ln)} + Mi_{(ln)} \cdot [3+2 \cdot x+2 \cdot x_1] - 2.R.n \cdot x_1 \quad (266)$$

Eliminando $Mi_{(ln+1)}$ entre las (262) y (263):

$$2.Ms_{(hn)} \cdot x_2 + 2.Md_{(ln)} \cdot x_2 = -Mi_{(ln)} - 2.Md_{(ln)}$$

reemplazando a $Ms_{(hn)}$ por su valor dado por la (265):

$$2 \cdot x_2 \cdot R.n - 2 \cdot x_2 \cdot Ms_{(hn-1)} + 2.Md_{(ln)} \cdot x_2 = -Mi_{(ln)} - 2.Md_{(ln)}$$

y como:

$$Ms_{(hn-1)} = Mi_{(ln)}$$

$$2 \cdot x_2 \cdot R.n + 2.Md_{(ln)} [1+x_2] = Mi_{(ln)} \cdot [2 \cdot x_2 - 1] \quad (267)$$

Eliminando $Md_{(ln)}$ entre las (266) y (267):

$$Md_{(ln)} = \frac{Mi_{(ln)} \cdot [2 \cdot x_2 - 1] - 2 \cdot x_2 \cdot R.n}{2 \cdot (1 + x_2)} = \frac{-Kd \cdot x - Mi_{(ln)} \cdot [3+2 \cdot x+2 \cdot x_1] + 2 \cdot R.n \cdot x_1}{3}$$

de la que, después de una serie de transformaciones, se obtiene:

$$Mi_{(1n)} = \frac{-2.Kd.x.(1+x_2) + 2.R.n.[3.x_2 + 2.x_1 + 2.x_1.x_2]}{3 + 12.x_2 + 4.x + 4.x.x_2 + 4.x_1 + 4.x_1.x_2} \quad (268)$$

En forma análoga pueden deducirse:

$$Md_{(1n)} = \frac{-Kd.x.[2.x_2 - 1] - 2.R.n.[2.x.x_2 + x_1 + 3.x_2]}{3 + 12.x_2 + 4.x + 4.x.x_2 + 4.x_1 + 4.x_1.x_2} \quad (269)$$

$$Mi_{(1n+1)} = \frac{3.Kd.x + R.n.[3 + 4.x - 2.x_1]}{3 + 12.x_2 + 4.x + 4.x.x_2 + 4.x_1 + 4.x_1.x_2} \quad (270)$$

El desplazamiento "a" puede calcularse reemplazando $Md_{(1n)}$ y $Mi_{(1n)} = Ms_{(1n-1)}$ en la (230).

CAPITULO XI

Momentos exteriores

- 1°. — Momentos aplicados a los vértices o nudos.—
 Condiciones de continuidad, de aportamiento doble y de imposibilidad de giro de los nudos. — Desplazamientos de éstos. — Ejemplos.
- 2°. — Momentos aplicados a los vértices o nudos. —
 Idem.

1°. — Momentos aplicados a los vértices o nudos. — Condiciones de continuidad, de aportamiento doble y de la imposibilidad de giro de los nudos. — Desplazamientos de éstos. — Ejemplos.

Como hicimos notar al tratar este punto en el caso de estructuras o vértices fijos, se debe en las expresiones (199) y (202), anular los valores K e incluir el momento exterior M dentro de la condición que exprese la imposibilidad de giro del nudo respectivo.

Por consiguiente, el conjunto de ecuaciones que permiten resolver un problema de esta naturaleza, es:

a) Condición de continuidad:

$$M_i_{(1n)} \cdot x_{(1n)} + 2 \cdot M_d_{(1n)} \cdot x_{(1n)} + 2 \cdot M_i_{(1n+1)} \cdot x_{(1n+1)} + M_d_{(1n+1)} \cdot x_{(1n+1)} = 0 \quad (271).—$$

b) Condición de aporcamiento doble:

$$\frac{h_{(n)}}{h_{(n-1)}} = \frac{2.Ms_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} + 2.Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)}}{-2.Ms_{(hn)} \cdot x_{(hn)} + 2.Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)}} \quad (272)$$

c) Condición de imposibilidad de giro:

$$\Sigma M = 0. \quad (273)$$

en la que, como dijimos, debe considerarse incluido o excluido el momento exterior M, según corresponda a un nudo en el que actúe o no como causa exterior.

d) El desplazamiento "a" del dintel quede determinarse mediante la (200) o la (201) que quedan reducidas a:

$$\frac{6.E.a}{h_{(n-1)}} = 2.Ms_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} + 2.Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} \quad (274)$$

$$\frac{6.E.a}{h_n} = -2.Ms_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + 2.Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} \quad (275)$$

En los ejemplos que siguen podrá apreciarse la sencillez con que puede resolverse cualquier caso que se plantee.

Ejemplo N°. 31. — Pórtico isostático sometido a la acción de un momento M que actúa en su vértice.

Como en B a causa del carro de movimientos horizontales no pueden existir fuerzas de esta dirección, las leyes de equilibrio estático exigen que tampoco existan en A.

Por consiguiente, no existen momentos a lo largo del pie de-

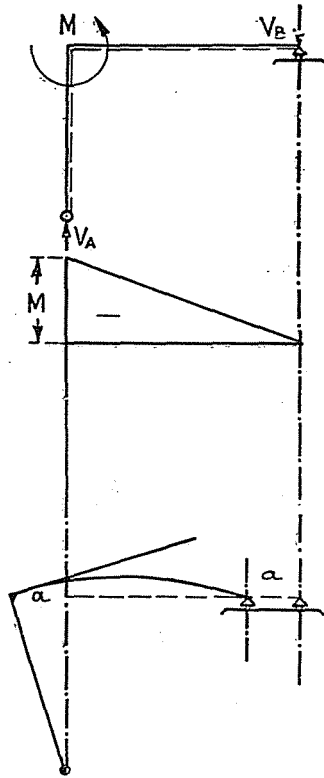


Figura N°. 118

recho, y el momento M deforma únicamente el dintel:

$$V_B = V_A = \frac{M}{l_n}$$

Como $M_{s_{(n-1)}} = M_{d_{(n)}} = 0$, de la (204) se deduce:

$$\frac{6.E.a}{h_{(n-1)}} = 2.Mi_{(in)} \cdot x_{(in)} = 2.M \cdot \frac{l_{(n)}}{I_{(in)}}$$

de donde:

$$a = M \cdot \frac{I_{(n)}}{I_{(1n)}} \cdot \frac{h_{(hn-1)}}{3 \cdot E} \quad (276)$$

Ejemplo N°. 32. — Si se tratara de resolver el caso análogo representado en la figura 119, se tendría:

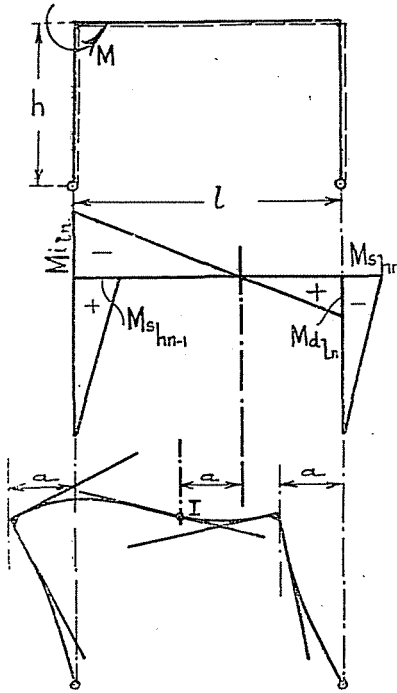


Figura N°. 119

La condición $\sum H = 0$

dá: $M_{s_{(hn-1)}} = -M_{s_{(hn)}}$

y como debe ser:

$$\begin{aligned} Md_{(1n)} = -Ms_{(hn)} \text{ podemos escribir } Ms_{(hn-1)} = Md_{(1n)} = \\ = -Ms_{(hn)} = M_1 \end{aligned}$$

Además denominaremos:

$$M_{i_{ln}} = M_2$$

Con esta nomenclatura y adoptando como coeficiente de flexibilidad:

$$x = \frac{x_{(ln-1)}}{x_{(ln)}}$$

la expresión (272) de aporcamiento doble se reduce a la siguiente:

$$-1 = \frac{2 \cdot M_1 \cdot x + 2 \cdot M_2 + M_1}{2 \cdot M_1 \cdot x + 2 \cdot M_1 + M_2}$$

de la que:

$$-M_1 = \frac{3 \cdot M_2}{3 + 4 \cdot x} \quad (277)$$

La condición del nudo $\sum M = 0$:

$$M_1 + M_2 = M$$

permite con la anterior deducir:

$$(278) \quad M_1 = \frac{3 \cdot M}{2 \cdot (2 \cdot x + 3)} \quad \text{y} \quad M_2 = \frac{3 + 4 \cdot x}{2 \cdot (2 \cdot x + 3)} \cdot M$$

que resuelven el problema.

El valor de "a" puede determinarse en la forma conocida.

2°. — Momentos aplicados en los extremos articulados.

Si el o los momentos M estuvieran aplicados en los extremos articulados, la deducción del diagrama de los momentos flectores tampoco presenta dificultades, pudiéndose recurrir, en forma análoga, a las expresiones que dan las condiciones de aporcamiento simple, doble, de continuidad, etc., que resuelven cualquier problema con sencillez

Además, este caso conjuntamente con los anteriores permite resolver las estructuras cerradas denominadas cuadros y las empotradas que trataremos en otros artículos indicando solamente aquí para las segundas el procedimiento general que seguiremos, ya que para las primeras no se aparta del conocido.

Si el empotramiento no existe, y la estructura se carga de acuerdo al problema a resolver, la tangente que corresponde al extremo empotrado habrá girado un ángulo que sabemos determinar. En este extremo podemos aplicar, supuesta la estructura descargada, un momento M que origine en ella una rotación igual y contraria a la anterior. Si ambos casos son simultáneos, la tangente no gira y M. es la solución del problema.

Este método permite establecer así otra condición, la de empotramiento, que para estructuras a vértices fijos es análoga a la vista en el capítulo correspondiente a vigas bi-empotradas.

Las condiciones de continuidad, para el caso de pies derechos verticales, es igual a las (231):

$$\begin{aligned} & Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + 2 \cdot Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + 2 \cdot Mi_{(ln+1)} \cdot x_{(ln+1)} \{ + \\ & + Md_{(ln+1)} \cdot x_{(ln+1)} = 0 \end{aligned} \quad (271 \text{ bis})$$

La de aperticamiento doble queda semejante a la (233), sin más que permutar los valores K_d por los Mi_h respectivos:

$$\begin{aligned} & \frac{h_n}{h_{(n+1)}} \\ & \frac{Mi_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} + 2 \cdot Ms_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} + 2 \cdot Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} +}{=} \\ & \frac{-Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + 2 \cdot Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} -}{+ Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)}} \\ & \frac{-2 \cdot Ms_{(hn)} \cdot x_{(hn)}}{=} \end{aligned} \quad (279)$$

Sobre las demás condiciones, no hay nada nuevo que agregar.

Ejemplo N° 33. — Calcular el diagrama de momento flectores del pórtico isostático representado en la figura N° 129, para el caso en que un aumento “M” actúe en el extremo A, articulado.

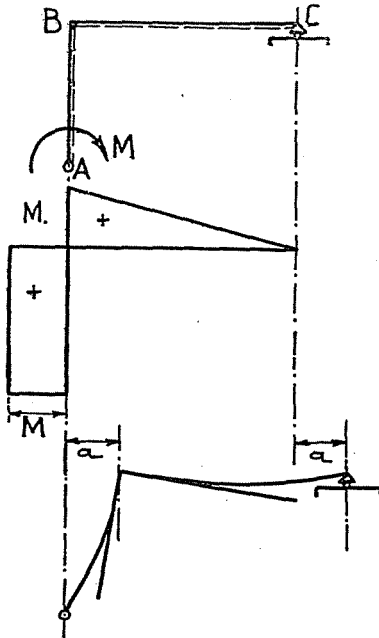


Figura N° 129

No existiendo fuerzas exteriores y no pudiendo haber en C reacciones con componentes horizontales, la condición $\Sigma H = 0$ implica que tampoco puede haberlas en A.

Luego el momento “M” permanece constante a lo largo del pié derecho, y en el dintel varía linealmente desde este valor hasta cero en C.

La reacción V_d vale:

$$V_d = \frac{M}{l}$$

El desplazamiento "a" se calcula mediante la expresión (231).

$$6.E.a.n \frac{1}{h} = M.x_h + 2.Ms_{(h)} . x_h + 2.Mi_{(ln)} x_{(ln)}$$

o;

$$\frac{6.E.a.n}{h} = M.x_h + 2.M.x_h + 2.M.x_l$$

$$\frac{6.E.a}{h} = 3.M.x_h + 2.Mx_l$$

$$a_n = \frac{M.x_h}{2.E} . h + \frac{M.x_l}{3.E} . h$$

$$a_n = \frac{M}{6.E} . h . [3.x_h + 2x_l] \quad (230)$$

Ejemplo N°. 34 — Pórtico bi-articulado cuyo extremo articulado del pié derecho h_{n+1} se encuentra bajo la acción de un momento exterior "M" (figura 121).

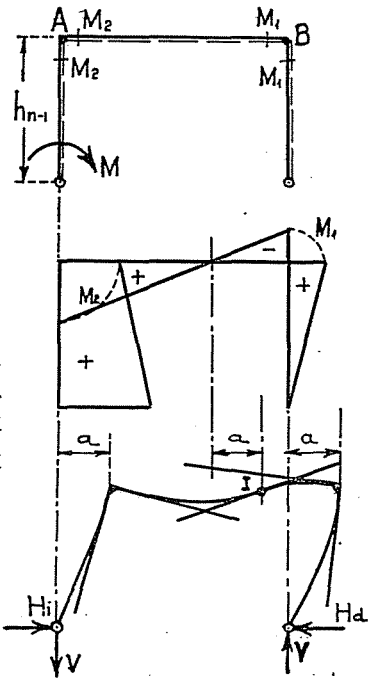


Figura N° 121

Como $\Sigma H = 0$

resulta $H_i = H_d$

El equilibrio del pié derecho $h_{(n-1)}$ permite establecer:

$$Hs_{(hn-1)} = M - H.h \quad (281)$$

y el de h_n :

$$H.h = Ms_{(hn)}$$

Como la condición $\Sigma M = 0$ para el vértice P se reduce a:

$$Ms_{(hn)} = -Md_{(ln)}$$

podemos escribir finalmente:

$$Ms_{(hn)} = -Md_{(ln)} = Ms_{(hn-1)} - M \quad (282)$$

La condición de aporcamiento doble (279) aplicada a este caso:

$$-1 = \frac{Mi_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} + 2 \cdot Ms_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} + 2 \cdot Ms_{(hn-1)} \cdot x_{(ln)} + Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)}}{2 \cdot Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Ms_{(hn-1)} \cdot x_{(ln)} + 2 \cdot Md_{(ln)} \cdot x_{(hn)}}$$

o:

$$-1 = \frac{Mi_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} + 2 \cdot Ms_{(hn-1)} \cdot x + 2 \cdot Ms_{(hn-1)} + Md_{(ln)}}{2 \cdot Md_{(ln)} + Ms_{(hn-1)} + 2 \cdot Md_{(ln)} \cdot x}$$

de la que:

$$(3 + 2 \cdot x) \cdot Md_{(ln)} + (3 + 2 \cdot x) \cdot Ms_{(hn-1)} = -Mi_{(hn-1)} \cdot x$$

Como:

$$Ms_{(hn-1)} = M - Ms_{(hn)} = Mi_{(hn-1)} + Md_{(ln)}$$

resulta:

$$(3 + 2 \cdot x) \cdot Md_{(ln)} + (3 + 2 \cdot x) \cdot [M + Md_{(ln)}] = -Mi_{(hn-1)} \cdot x$$

o finalmente:

$$\boxed{Md_{(ln)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{x+1}{2 \cdot x + 3} \cdot Mi_{(hn-1)}} \quad (283)$$

luego :

$$M_{s_{(ln-1)}} = M_{i_{(ln-1)}} + \frac{3 \cdot (x+1)}{2 \cdot (2x+3)} \cdot M_{i_{(ln-1)}} = \frac{x+3}{2 \cdot (2x+3)} \cdot M_{i_{(ln-1)}} \quad (284)$$

Ejemplo N°. 35. — El momento "M" actúa en el extremo simplemente apoyado del tramo l_1 de la estructura representada en la figura 122.

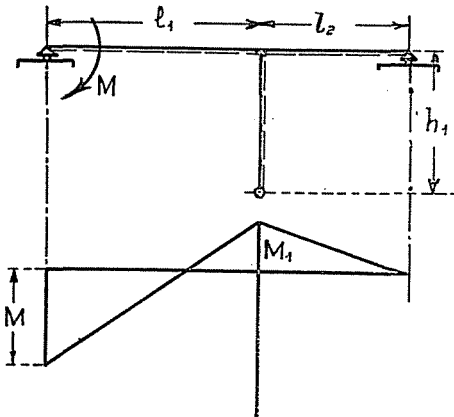


Figura N°. 122

Como: $\Sigma H = 0$

debe ser: $M_2 = 0$

y como en B: $\Sigma M = 0$

debe ser necesariamente también: $M_1 = M_3$

La condición de continuidad, teniendo en cuenta el sentido de M es

$$2 \cdot M_1 \cdot x_{(ln)} + 2 \cdot M_1 \cdot x_{(ln+1)} = -M \cdot x_{(ln)}$$

si:

$$x_1 = \frac{x_{(l_1)}}{x_{(h_1)}} \quad \text{y} \quad x_3 = \frac{x_{(l_2)}}{x_{(h_1)}}$$

la acción se simplifica, llegándose finalmente a :

$$M_1 = -M \cdot \frac{x_1}{2 \cdot (x_1 + x_2)} \quad (286)$$

CAPITULO XII

Pórticos a vértices fijos con acartelamientos y sesgos

- 1°.) Errores derivados de no tener en cuenta el espesor de las piezas, el acartelamiento de los tramos y el sesgo de los piés derechos.
- 2°.) Gráfico para el cálculo de las deformaciones angulares extremos de piés derecho sesgados.
- 3°.) Resolución de ejercicios sobre algunos tipos de estructuras.
- 4°.) Problemas y comparación de resultados. Aplicaciones numéricas.
- 5°.) Otros problemas.

1°.) Errores derivados de no tener en cuenta el espesor de las piezas, el acartelamiento de los tramos y el sesgo de los piés derechos.

En el cálculo de las estructuras aporticadas, tal como las estudiadas en los capítulos anteriores, se suponen constantes los momentos de inercia de los piés derechos y de las vigas-dintel, así como también se prescinde de la influencia de sus respectivos espesores.

Si un pórtico no tiene ni acartelamientos ni sesgos, siempre al emplearse las fórmulas ya deducidas, se comete un error, por cuanto, al establecerse las condiciones de continuidad, de aporticamiento doble, etc., se ha supuesto como de igual momento de inercia todo el pié derecho desde r hasta o (fig. N° 123), cuando en realidad eso se cumple únicamente desde r hasta s , pues entre s y o , debido al espesor del dintel, su momento de inercia puede considerarse infinito. Queda así, el triángulo de superficie de momentos reducidos r , s , q menor que el o , p , r .

Por causa análoga, v. gr.: si la carga que actúa sobre el dintel es únicamente repartida, el diagrama similar a lo largo de éste, no es el m, n, f sino el a, b, f, e, d (fig. N° 123).

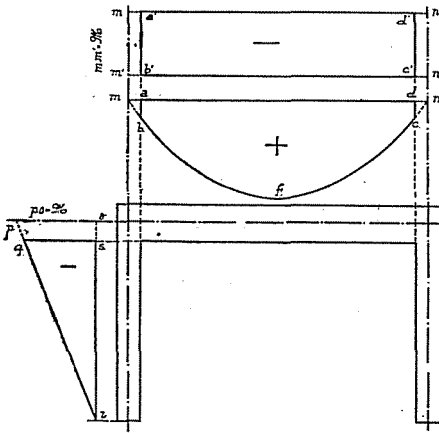


Figura N° 123

Teniendo en cuenta los espesores reales de las piezas deberíamos calcular con los diagramas a. b. f. e. d.; a', b', c', d' y r. q. s., y no con los m. n. f., s. q. r. y, m. m'. n. n', con lo que se introduce, al no hacerlo así, un error, que aunque no es de gran consideración, influye en la exactitud de los resultados. Luego, a continuación veremos como se reduce.

Errores originados por los acartelamientos y sesgos. — Como generalmente los dinteles de las construcciones aporricadas presentan acartelamientos, y sus pies derechos sesgos, el diagrama de momentos reducidos, proporcional a las deformaciones angulares, base del cálculo, sufre alteraciones en su valor, que conviene analizar para valorizar su influencia y su importancia.

El acartelamiento del dintel, disminuye las superficies de momentos reducidos del dintel, la positiva de m. n. e. f. l. m. a la m. n. e'. f. l. b'. m. y la negativa de la m. n. n'. m'. a la m. n. n''. e' f. l. b'. n''. (figura N° 124).

En este caso debe observarse que las superficies a. b. m. y m. m'. b. a., d. e. n. y d. e. n'. n. que analizamos ya como causa de errores, al prescindir del verdadero espesor de las piezas; se han reducido a las m. a. b. y m. a. b'. m'. menores.

Por lo tanto, *al tener en cuenta* en las vigas dintel, los acartelamientos, se reduce también, simultáneamente el error debido al espesor de las piezas.

Refiriéndonos en la figura N°. 125 al sesgo del pié derecho, la primitiva superficie de momentos reducidos r. p. o. que corresponde al caso en que se considera constante al momento de inercia I_m , se transforma en la r. p. o'. s'. t. y r. en el caso

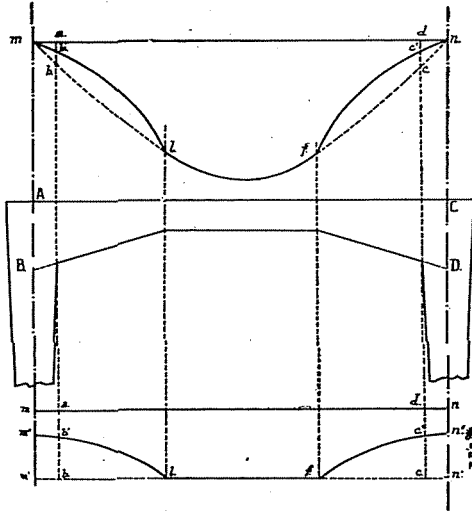


Figura N°. 124

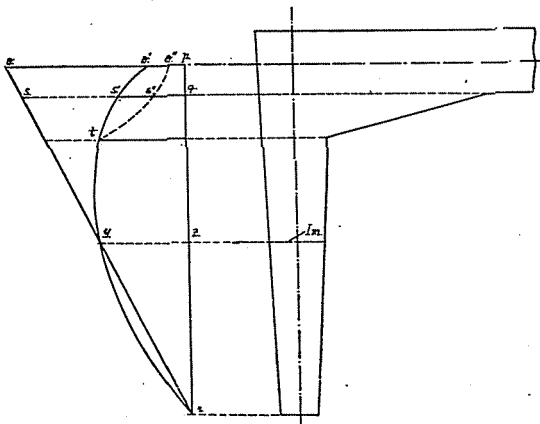


Figura N°. 125

contrario. Se reduce también así, la influencia del error debido al espesor del dintel, desde que la nueva superficie parcial o'. p. q. s'. es menor que la o. p. q. s.

Para valorar, entonces, la influencia de los acartelamientos y sesgos, debemos emplear en la deducción de las fórmulas que dan las condiciones de continuidad, de aportamientos doble y simple, las expresiones que *tengan en cuenta* tales acartelamientos y sesgos y no las que correspondan al momento de inercia constante. En este caso hemos visto que se reduce, también, la importancia del error debido al espesor de las piezas.

Nada varían el sistema y el concepto del cálculo analizado en capítulos anteriores, debiendo al deducirse las nuevas fórmulas que corresponden a las condiciones de continuidad, etc., tener presente que las expresiones que dan las deformaciones angulares extremas, son, para cuando existan acartelamientos, las consignadas en los gráficos 2 a 9, y para cuando hay sesgos en los pies derechos, las incluidas en los gráficos 11 a 14.

2º.) *Gráfico para el cálculo de las deformaciones angulares extremas de pies derechos sesgados.*

Se incluyen los correspondientes a las siguientes causas exteriores, en los gráficos N°. 11 a N°. 14: a) momento M actuando en el extremo superior (gráfico N°. 11); b) carga uniformemente repartida (gráfico N°. 12); c) fuerza P concentrada actuando en la tercera parte superior de h (gráfico N°. 13); y d) idem a las incluidas en los gráficos 11 a 14.

Su empleo es semejante al indicado para incluir los acartelados en el cálculo de las deformaciones extremas de las vigas, por lo que solamente haremos presente que:

c_i^c y c_s^c representan las rotaciones angulares extremas inferior y superior originadas por la causa c (carga).

Y, $c_{a(h_{n-1})}$, $c_{o(h-n)}$, etc., representan las deformaciones angulares extremos en los pies derechos $h_{(n-1)}$ y c_n en los extremos adyacente y opuesto a aquel en que actúa el momento M , como causa exterior, respectivamente.

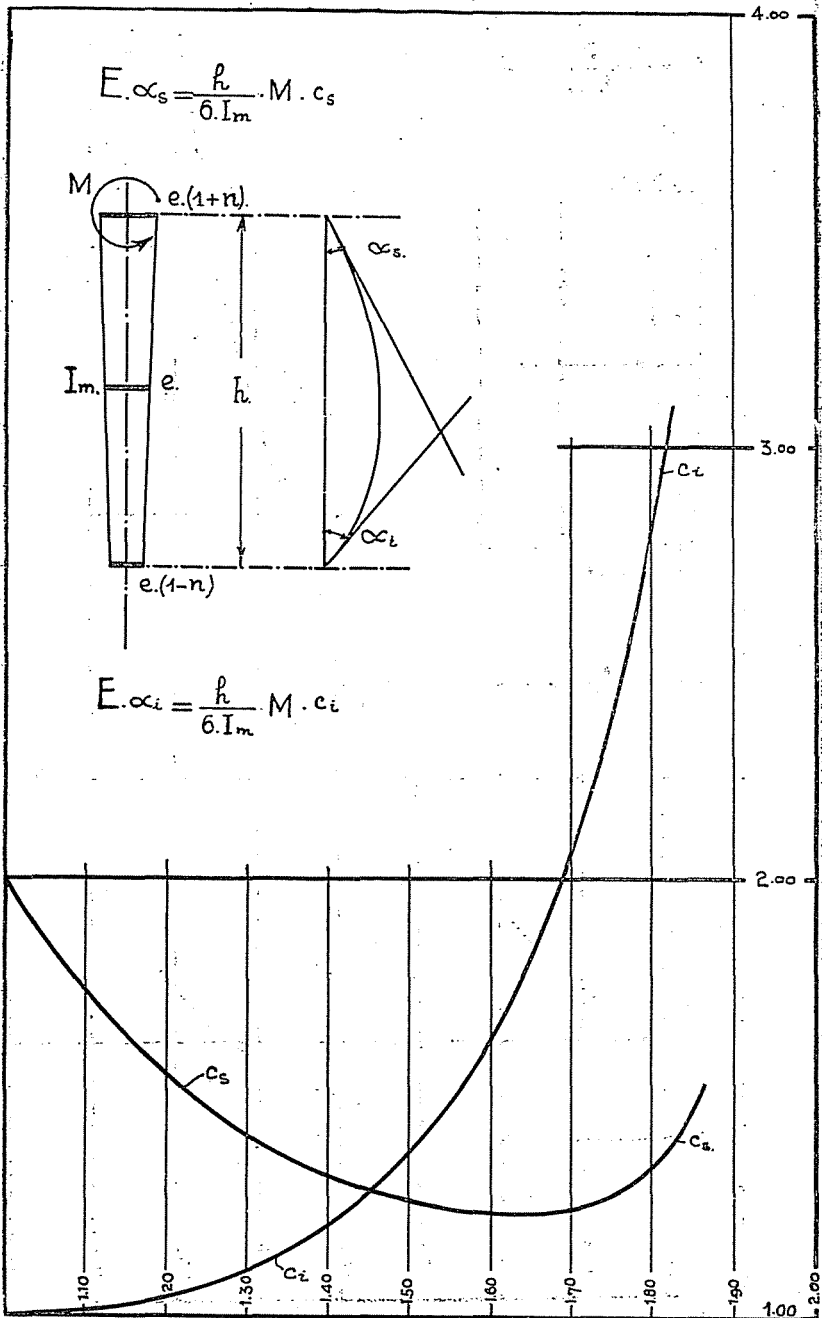


Gráfico N° 11

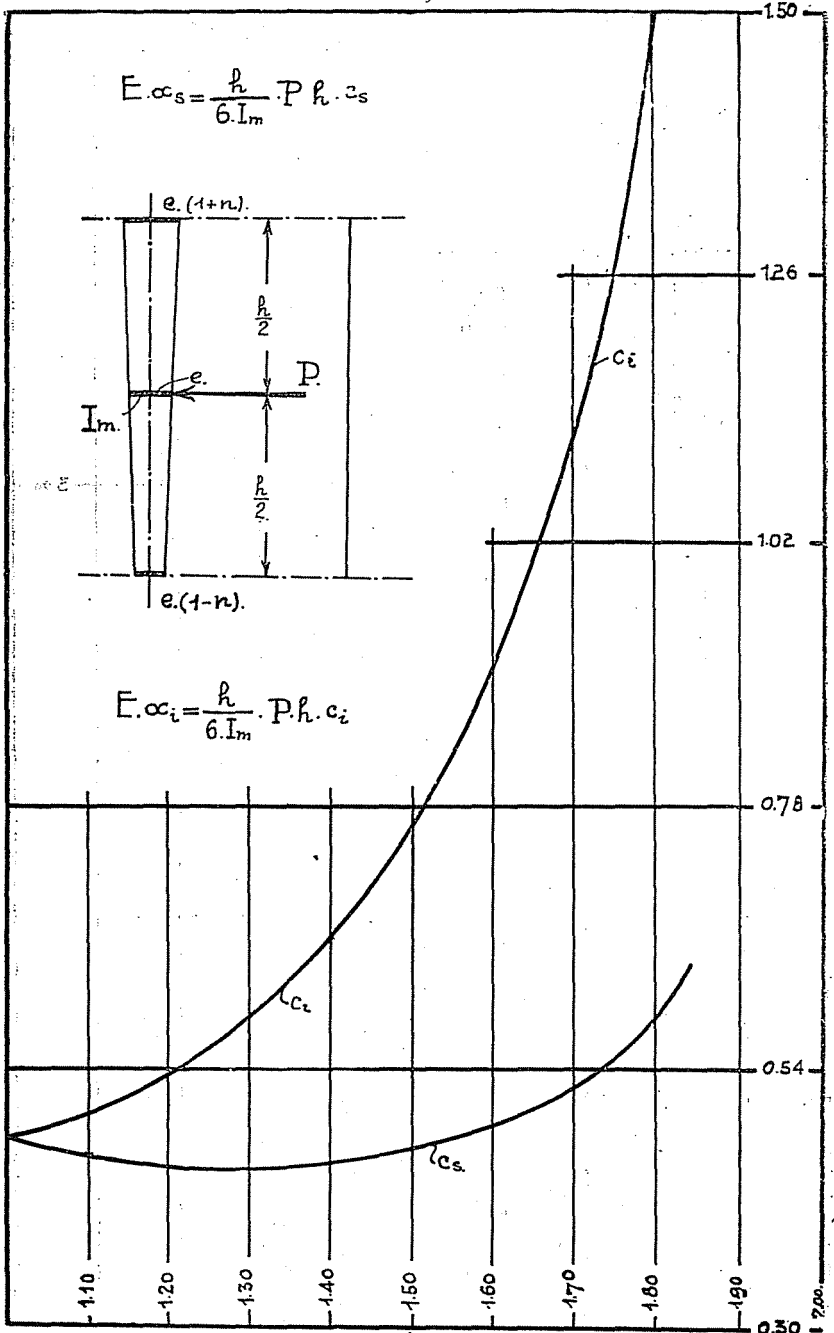


Gráfico N° 12

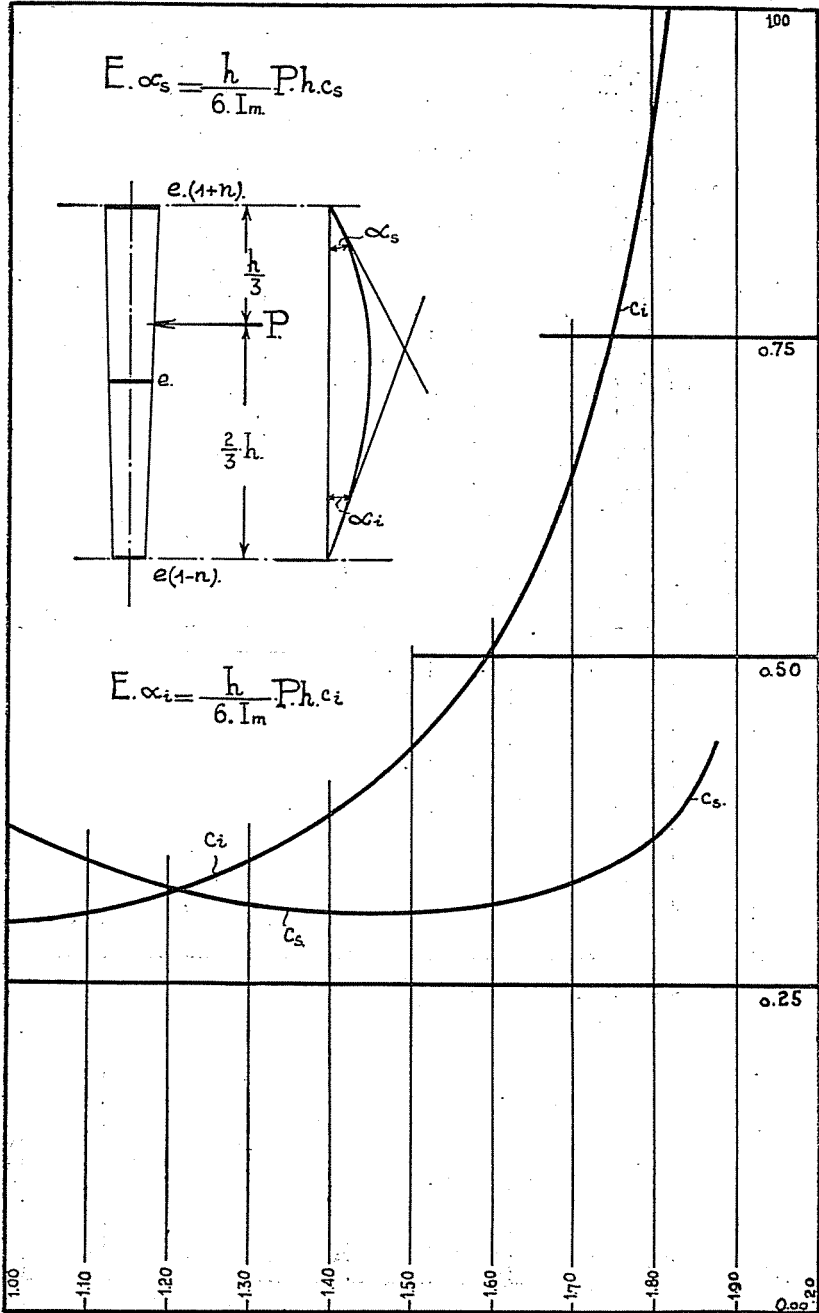


Gráfico N° 13

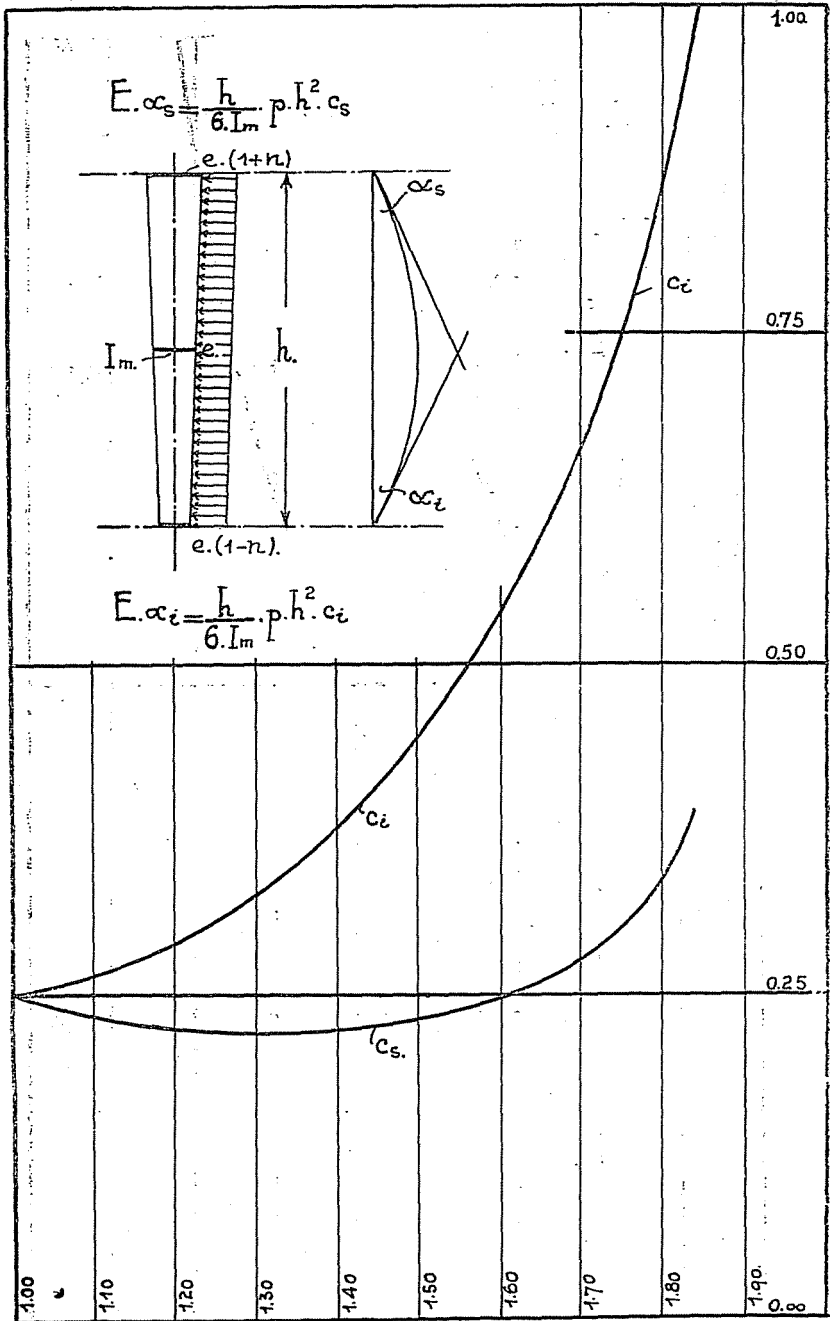


Gráfico N° 14

3°.) *Condiciones de continuidad, de aportamiento doble o simple y de nudo.*

Condición de continuidad — Los ángulos α y β de la expresión 75, son para este caso:

$$\beta'_{(ln)} = -\frac{Mi_{(ln)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{l_n}{I_{(ln)}} = -\frac{Mi_{(ln)}}{6 \cdot E \cdot I_{(ln)}} \cdot l_n \cdot c_{o(ln)}$$

$$\beta''_{(ln)} = -\frac{Md_{(ln)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{l_n}{I_{(ln)}} = -\frac{Md_{(ln)}}{6 \cdot E \cdot I_{(ln)}} \cdot l_n \cdot c_{a(ln)}$$

$$\alpha'_{(ln+1)} = -\frac{Md_{(ln+1)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{l_{(n+1)}}{I_{(ln+1)}} = -\frac{Md_{(ln+1)}}{6 \cdot E \cdot I_{(ln+1)}} \cdot l_{(n+1)} \cdot c_{o(ln+1)}$$

$$\alpha''_{(ln+1)} = -\frac{Mi_{(ln+1)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{l_{(n+1)}}{I_{(ln+1)}} = -\frac{Mi_{(ln+1)}}{6 \cdot E \cdot I_{(ln+1)}} \cdot l_{n+1} \cdot c_{a(ln+1)}$$

$$\beta_{(ln)} = \frac{Kd_{(ln)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{l_n}{I_{(ln)}} = \frac{C_{(ln)}}{6 \cdot E \cdot I_{(ln)}} \cdot l_n \cdot c_{d(ln)}^c$$

$$\alpha_{(ln)} = \frac{Ki_{(ln+1)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{l_{n+1}}{I_{(ln+1)}} = \frac{C_{(ln+1)}}{6 \cdot E \cdot I_{(ln+1)}} \cdot l_{n+1} \cdot c_{i(ln+1)}^c$$

que reemplazadas en la expresión 75 ya mencionada:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{(ln)}}{6 \cdot E \cdot I_{(ln)}} \cdot l_n \cdot c_{d(ln)}^c + \frac{Mi_{(ln)}}{6 \cdot E \cdot I_{(ln)}} \cdot l_n \cdot c_{o(ln)} + \frac{Md_{(ln)}}{6 \cdot E \cdot I_{(ln)}} \cdot l_n \cdot c_{a(ln)} = \\ & = - \left[\frac{C_{(ln+1)}}{6 \cdot E \cdot I_{(ln+1)}} \cdot l_{n+1} \cdot c_{i(ln+1)}^c + \frac{Md_{(ln+1)}}{6 \cdot E \cdot I_{(ln+1)}} \cdot l_{n+1} \cdot c_{o(ln+1)} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{Mi_{(ln)}}{6 \cdot E \cdot I_{(ln+1)}} \cdot l_{n+1} \cdot c_{o(ln+1)} \right] \quad (286) \end{aligned}$$

ficaciones:

$$x_{(ln)} = \frac{I_n}{I_{(ln)}} \cdot \frac{I_0}{I_0} \quad y \quad x_{(ln+1)} = \frac{I_{n+1}}{I_{(ln+1)}} \cdot \frac{I_0}{I_0}$$

la expresión anterior se transforma en la siguiente, previa simplificaciones

$$\begin{aligned} & \frac{Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} \cdot c_{o(l_n)} + 2 \cdot Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} \cdot \frac{c_{a(l_n)}}{2} +}{2} \\ & + \frac{2 \cdot Mi_{(ln+1)} \cdot x_{(ln+1)} \cdot c_{a(l_{n+1})}}{c_{a(l_{n+1})}} + \frac{Md_{(ln+1)} \cdot x_{(ln+1)} \cdot c_{o(l_{n+1})}}{c_{a(l_{n+1})}} = - \\ & - [C_{(ln)} \cdot x_{(ln)} \cdot c_{d(l_n)} + C_{(ln+1)} \cdot I_{n+1} \cdot c_{e(l_{n+1})}] \quad (287) \end{aligned}$$

que es la ecuación de cuatro momentos o condición de continuidad para el caso en que se tenga en cuenta los acartelamientos del diámetro.

Condición de aportamiento doble. -- La indeformabilidad del ángulo formado por h_{n-1} y l_n , exige que: (exp. N.º 80).

$$\alpha_{(ln)} + \gamma_{(ln-1)} = \alpha'_{(ln)} + \alpha''_{(ln)} + \gamma'_{(ln-1)} \quad (288)$$

y la del determinado entre l_n y h_n (ex.: N.º 81)

$$\beta_{(ln)} + \gamma'_{(ln)} = \gamma_{(ln)} + \beta'_{(ln)} + \beta''_{(ln)} \quad (289)$$

valiendo para estos casos:

$$\begin{aligned} \alpha_{(ln)} &= \frac{Ki_{(ln)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{I_n}{I_{(ln)}} = + \frac{C_{(ln)}}{6 \cdot E \cdot J_{(ln)}} \cdot I_n \cdot c_{i(l_n)}^c \\ \gamma_{(ln-1)} &= \frac{Kd_{(ln-1)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{h_{n-1}}{I_{(ln-1)}} = + \frac{C_{(ln-1)}}{6 \cdot E \cdot I_{(ln-1)}} \cdot h_{n-1} \cdot c_{s(l_{n-1})}^c \end{aligned}$$

$$\beta_{(ln)} = \frac{Kd_{(ln)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{I_n}{I_{(ln)}} = + \frac{C_{(ln)}}{6 \cdot E \cdot I_{(ln)}} \cdot I_n \cdot c_d^e{}_{(ln)}$$

$$\gamma_{(hn)} = \frac{Kd_{(hn)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{h_n}{I_{(hn)}} = + \frac{C_{(hn)}}{6 \cdot E \cdot I_{(hn)}} \cdot h_n \cdot c_s^e{}_{(hn)}$$

$$a'_{(ln)} = \frac{Mi_{(ln)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{I_n}{I_{(ln)}} = - \frac{Mi_{(ln)}}{6 \cdot E \cdot I_{(ln)}} \cdot I_n \cdot c_a{}_{(ln)}$$

$$a''_{(ln)} = \frac{Md_{(ln)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{I_n}{I_{(ln)}} = - \frac{M \cdot I_{(ln)}}{6 \cdot E \cdot I_{(ln)}} \cdot I_n \cdot c_o{}_{(ln)}$$

$$\beta'_{(ln)} = \frac{Mi_{(ln)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{I_n}{I_{(ln)}} = - \frac{Mi_{(ln)}}{6 \cdot E \cdot I_{(ln)}} \cdot I_n \cdot c_o{}_{(ln)}$$

$$\beta''_{(ln)} = \frac{Md_{(ln)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{I_n}{I_{(ln)}} = - \frac{Md_{(ln)}}{6 \cdot E \cdot I_{(ln)}} \cdot I_n \cdot c_a{}_{(ln)}$$

$$\gamma'_{(hn-1)} = \frac{Ms_{(hn-1)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{h_{n-1}}{I_{(hn-1)}} = - \frac{Ms_{(hn-1)}}{6 \cdot E \cdot I_{(hn-1)}} \cdot h_{n-1} \cdot c_a{}_{(hn-1)}$$

$$\gamma'_{(ln)} = \frac{Ms_{(ln)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{h_n}{I_{(ln)}} = - \frac{Ms_{(ln)}}{6 \cdot E \cdot I_{(ln)}} \cdot h_n \cdot c_a{}_{(ln)}$$

si reemplazamos estos valores en las 80 y 81, tenemos:

$$\frac{C_{(1n)}}{6.E.I_{(1n)}} \cdot I_n \cdot c_{i(1n)}^c + \frac{C_{(hn-1)}}{6.E.I_{(hn-1)}} \cdot h_{n-1} \cdot c_{s(hn-1)}^c = \frac{Mi_{(1n)}}{6.E.I_{(1n)}}$$

$$I_n \cdot c_{a(1n)} \cdot \frac{Md_{(1n)}}{6.E.I_{(1n)}} \cdot I_n \cdot c_{o(1n)} - \frac{Ms_{(nh-1)}}{6.E.I_{(hn-1)}} \cdot h_{n-1} \cdot c_{a(hn-1)}$$

$$\frac{C_{(1n)}}{6.E.I} \cdot I_n \cdot c_{d(1n)}^c - \frac{Ms_{(hn)}}{6.E.I_{(hn)}} \cdot h_n \cdot c_{a(hn)} = \frac{C_{(hn)}}{6.E.I_{(hn)}} \cdot h_n \cdot c_{s(hn)}^c$$

$$- \frac{Mi_{(1n)}}{6.E.I_{(1n)}} \cdot I_n \cdot c_{o(1n)} - \frac{Md_{(in)}}{6.E.I_{(1n)}} \cdot I_n \cdot c_{a(1n)}$$

multiplicando a ambas por I_0/I_n , simplificando 6.E y haciendo:

$$x_{(1n)} = \frac{I_0}{I_n} \cdot \frac{I_n}{I_{(1n)}} ; \quad x_{(nh-1)} = \frac{I_0}{I_{(hn-1)}} \cdot \frac{h_{n-1}}{I_0} ; \text{ etc.}$$

las anteriores se reducen a:

$$(290) \quad C_{(1n)} \cdot x_{(1n)} \cdot c_{(1n)}^c + C_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} \cdot c_{s(hn-1)}^c =$$

$$- Mi_{(1n)} \cdot x_{(1n)} \cdot c_{a(1n)} - Md_{(in)} \cdot x_{(in)} \cdot c_{o(1n)} - Ms_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} \cdot c_{a(hn-1)}$$

$$(291) \quad C_{(1n)} \cdot x_{(1n)} \cdot c_{d(1n)}^c - Ms_{(hn)} \cdot x_{(hn)} \cdot c_{a(hn)} = C_{(hn)} \cdot x_{(hn)} \cdot c_{s(hn)}^c -$$

$$- Mi_{(1n)} \cdot x_{(1n)} \cdot c_{o(1n)} - Md_{(1n)} \cdot x_{(1n)} \cdot c_{a(1n)}$$

que convenientemente sumadas

$$- Ms_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} \cdot c_{a(hn-1)} - Mi_{(1n)} \cdot x_{(1n)} \cdot [c_{o(1n)} + c_{a(1n)}] -$$

$$- Md_{(in)} \cdot x_{(in)} \cdot [c_{o(1n)} + c_{a(1n)}] + Ms_{(hn)} \cdot x_{(hn)} \cdot c_{a(hn)} =$$

$$= + C_{(1n)} \cdot x_{(1n)} \cdot c_{i(1n)}^c + C_{(1n)} \cdot x_{(1n)} \cdot c_{d(1n)}^c + C_{(hn-1)} \cdot x_{(hn-1)} \cdot c_{s(hn-1)}^c -$$

$$- C_{(hn)} \cdot x_{(hn)} \cdot c_{s(hn)}^c$$

que podemos transformar, teniendo presente que:

$$C_o(1n) + C_a(1n) = C(1n)$$

en la siguiente:

$$\begin{aligned} (292) \quad & 3.Mi(1n) \cdot X(1n) \cdot \frac{C(1n)}{3} + 3.Md(1n) \cdot X(1n) \cdot \frac{C(1n)}{3} + \\ & + 2.Ms_{(hn-1)} \cdot X_{(hn-1)} \cdot \frac{C_{a(1n-1)}}{2} - 2.Ms_{(hn)} \cdot X_{(hn)} \cdot \frac{C_a(hn)}{2} = \\ = & - C(1n) \cdot X(1n) \cdot [C_i^c(1n) + C_d^c(1n)] - [C_{(hn-1)} \cdot X_{(hn-1)} \cdot C_s^c(hn-1) - \\ & - C_{(hn)} \cdot X_{(hn)} \cdot C_s^c(hn)] . \end{aligned}$$

que por analogía denominaremos condición de aparcamiento doble, semejante a la N° 83, y no se diferencia de ella sino en que ésta es más amplia desde que tiene en cuenta los acartelamientos de los dintles y sesgos de los piés derechos.

Condiciones de aparcamientos simples. — Si en la 291 hacemos $n = 1$; simplificando 6. E, y tenemos en cuenta que $M_i(1) = 0$ queda finalmente:

$$\begin{aligned} (293) \quad & 2.Md(1) \cdot X(1) \cdot \frac{C_a(1)}{2} - 2.Ms_{(h_1)} \cdot X_{(h_1)} \cdot \frac{C_a(h_1)}{2} = \\ = & - C(1) \cdot X(1) \cdot C_d^c(1) + C_{(h_1)} \cdot X_{(h_1)} \cdot C_s^c(h_1) . \end{aligned}$$

que es la condición de semi-empotramiento inicial.

Si repetimos reemplazos y simplificaciones, haciendo $n = z$ en la (290) queda:

$$\begin{aligned}
 (294) \quad & 2 \cdot M_i(l_z) \cdot X_{(l_z)} \cdot \frac{c_a(l_z)}{2} + 2 \cdot M_s(h_z - 1) \cdot X_{(h_z - 1)} \cdot \frac{c_a(h_z - 1)}{2} = \\
 & = C_{(l_z)} \cdot X_{(l_z)} \cdot c_d^c(l_z) - C_{(h_z - 1)} \cdot X_{(h_z - 1)} \cdot c_s^c(h_z - 1).
 \end{aligned}$$

que es la condición de semi-aportamiento final.

Condición de nudo L — Quedan inalterables las N° 83, pues son independientes de las rigideces de las piezas.

4°) — *Resolución de ejercicios* — Para los problemas que tengan una, dos o tres incógnitas es preferible deducir las expresiones que dan los momentos extremos en la misma forma que hemos operado anteriormente al tratar los pórticos cuyos momentos de inercia tienen valores constantes a lo largo de cada una de sus piezas; en cambio, cuando el número de incógnitas sea superior conviene establecer para cada caso las condiciones de aportamiento doble, simples, etc., buscando previamente los valores C, y luego recién despejar el valor de las incógnitas.

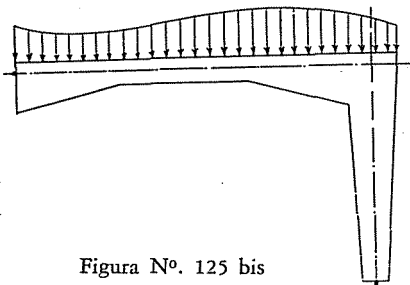


Figura N° 125 bis

Ejercicio N° 36. — Empleando la misma nomenclatura que la usada en el ejemplo N° 1; y recurriendo a la expresión de aportamiento simple generalizada. (293)

$$2 \cdot Md_{(l_1)} \cdot x_{(l_1)} \cdot \frac{c_{a(l_1)}}{2} + 2 \cdot Md_{(h_1)} \cdot x_{(h_1)} \cdot \frac{c_{a(h_1)}}{2} = C_{(l_1)} \cdot x_{(l_1)} \cdot c_{d(l_1)}$$

pues: $-Md_{(l_1)} = +Ms_{(h_1)} \quad \text{y} \quad C_{(h_1)} = 0$



de la que se deduce, haciendo

$$x = \frac{x_{(h_1)}}{x_{(l)}}$$

$$Md_{(l)} = -Ms_{(h_1)} = \frac{C_{(l)} \cdot c_d^c(l)}{2 \cdot \left[\frac{c_a(l)}{2} + x \cdot \frac{c_a(h_1)}{2} \right]} \quad (295)$$

Si no existieran sesgos ni acartelamientos se simplifica en:

$$Md_{(l)} = \frac{Kd_{(l)}}{2(1+x)}$$

pues:

$$C_{(l)} \cdot c_c^d(l) = Kd_{(l)}$$

$$c_a(l) = 2.$$

$$c_a(h_1) = 2.$$

igual a la (87).

Ejemplo N° 37. — Si la carga actúa contra el pié derecho, haciendo $C_{(l)} = 0$ en la (293) queda:

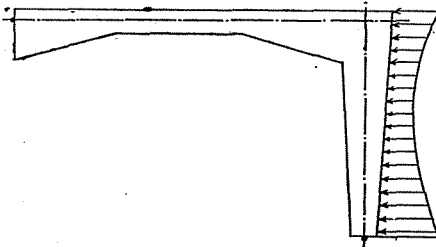


Figura N° 126

$$2.M.x_{(l)} \cdot \frac{c_a(l)}{2} + 2.M.x_{(h_1)} \cdot \frac{c_a(h_1)}{2} = -C \cdot x_{(h_1)} \cdot c_s^c(h_1)$$

como :
$$x = \frac{x_{(h_1)}}{x_{(l_1)}}$$

queda

$$M = M_{s_{(h_1)}} = \frac{C_{(h_1)} \cdot x \cdot c_s^c(h_1)}{2 \cdot \left[\frac{c_a(l_1)}{2} + x \cdot \frac{c_a(h_1)}{2} \right]} \quad (296)$$

que se transforma en la N°. 115 para $I = \text{constante}$.

Ejercicio N°. 38. — Pórtico bi-articulado, simétrico, con carga vertical también simétrica, que actúa sobre el dintel. En lo que sigue nos referimos a las figuras 66 y 127.

Por no actuar cargas contra los pies derechos en la expresión general de aperticamiento doble, debe hacerse.

$$C_{(hn-1)} = C_{(hn)} = 0$$

Además, por simetría:

$$M = M_{s_{(hn-1)}} = M_{i_{(in)}} = M_{d_{(in)}} = -M_{s_{(in)}}$$

y:

$$x_{(hn-1)} = x_{(in)}$$

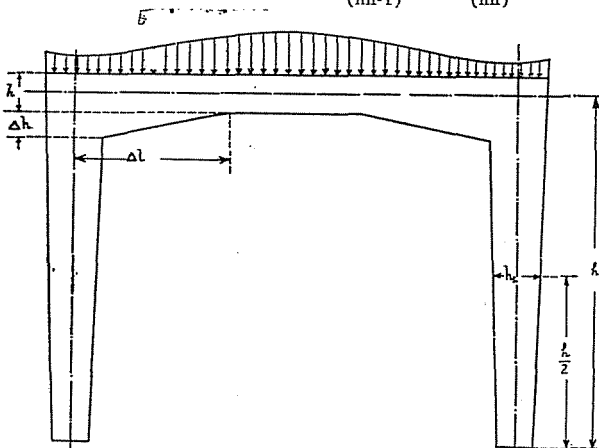


Figura N.º. 127

Luego, la expresión 292 se simplifica:

$$3.M.x_{(1)} \cdot \frac{c_{(1)}}{3} + 3.M.x_{(1)} \cdot \frac{c_{(1)}}{2} + 2.M.x_{(h)} \cdot \frac{c_{a(h)}}{2} + 2.M.x_{(h)} \cdot \frac{c_{a(h)}}{2} = -C_{(1)} \cdot x_{(1)} \cdot [c_{i(1)}^e + c_{d(1)}^e]$$

haciendo:

$$x = \frac{x_{(h)}}{x_{(1)}}$$

queda:

$$M = \frac{C_{(1)} \cdot [c_{i(1)}^e + c_{d(1)}^e]}{2 \cdot \left[3 \cdot \frac{c_{(1)}}{3} + 2 \cdot x \cdot \frac{c_{a(h)}}{3} \right]} \quad (297)$$

Como hipótesis la carga es simétrica:

$$c_{i(1)}^e = c_{c(1)}^d = e^e$$

luego:

$$M = \frac{C_{(1)} \cdot e^e}{3 \cdot \frac{c_{(1)}}{3} + 2 \cdot x \cdot \frac{c_{a(h)}}{2}} \quad (298)$$

Si se suponen constantes los momentos de inercia, del dintel e iguales a $I_{(1)}$ y los de ambos pies derechos a $I_{(1)}$

$$\begin{aligned} C_{(1)} \cdot c_{(1)}^e &= K \\ c_{(1)} &= 3 \\ \frac{c_{a(h)}}{2} &= \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

la (298) se reduce a:

$$M = \frac{K}{3 + 2 \cdot x}$$

igual a la (92).

Ejercicio N° 39. — Si la carga estuviera aplicada contra ambos piés derechos en forma simétrica, empleando iguales simplificaciones que las de problema N° 7 y las del anterior, tendríamos escribiendo la expresión de aporcamiento doble:

$$\begin{aligned} 3 \cdot M \cdot x_{(1)} \cdot \frac{c_{(1)}}{3} + 3 \cdot M \cdot x_{(1)} \cdot \frac{c_{(1)}}{2} + 2 \cdot M \cdot x_{(h)} \cdot \frac{c_{a(h)}}{2} + \\ + 2 \cdot M \cdot x_{(h)} \cdot \frac{c_{a(h)}}{2} = - [C_{(hn-1)} \cdot x_{(h)} \cdot c_{s(hn-1)}^c + \\ + C_{(hn)} \cdot x_{(hn)} \cdot c_{s(hn)}^c] \end{aligned}$$

como:

$$C_{(hn-1)} = - C_{(hn)} = C_{(h)} \quad \text{y:} \quad c_{s(hn-1)}^c = c_{(hn)} = c_{(h)}$$

queda:

$$3 \cdot M \cdot x_{(1)} \cdot \frac{c_{(1)}}{3} + 2 \cdot M \cdot x_{(h)} \cdot \frac{c_{a(h)}}{2} = C_{(h)} \cdot x_{(h)} \cdot c_{s(h)}^c$$

haciendo:

$$x = \frac{x_{(h)}}{x_{(1)}}$$

resulta finalmente:

$$M = \frac{C_{(h)} \cdot x \cdot c_{s(h)}^c}{3 \cdot \frac{c_{(1)}}{3} + 2 \cdot \frac{c_{a(h)}}{2} \cdot x} \quad (299)$$

Si I_e y I_h fueran constantes:

$$M = \frac{Kd \cdot x}{3 + 2 \cdot x}$$

igual a la (116).

Ejercicio. N° 40. — Si sobre el pórtico que corresponde a las figuras 67 y 128, actuaran cargas iguales en sus dos tramos y simétricamente con respecto a los ejes de cada tramo y del conjunto adoptando igual nomenclatura se tendría:

a) condición de continuidad

$$M_1 \cdot x_{(1)} \cdot e_{o(1)} + 2 \cdot M_2 \cdot x_{(1)} \cdot \frac{e_{a(1)}}{2} + 2 \cdot M_2 \cdot x_{(1)} \cdot \frac{e_{a(1)}}{2} + M_1 \cdot x_{(1)} \cdot e_{o(1)} = - [C_{(1)} \cdot x_{(1)} \cdot e_{d(1)}^c + C_{(1)} \cdot x_{(1)} \cdot e_{i(1)}^c]$$

simplificando $x_{(1)}$:

$$M_1 \cdot e_{o(1)} + 2 \cdot M_2 \cdot \frac{e_{a(1)}}{2} = - C_{(1)} \cdot e_{(1)}^c \quad (a)$$

pues como las cargas son iguales y simétricas:

$$e^c = e_{d(1)}^c \quad y: \quad C_{(ln)} = C_{(ln-1)}$$

b) Condición de aperticamiento doble:

$$3 \cdot M_1 \cdot x_{(1)} \cdot \frac{e_{(1)}}{3} + 3 \cdot M_2 \cdot x_{(1)} \cdot \frac{e_{(1)}}{3} + 2 \cdot M_1 \cdot x_{(ln-1)} \cdot \frac{e_{a(h)}}{2} = - C_{(1)} \cdot x_{(1)} \cdot [e_{i(1)}^c + e_{d(1)}^c] = - 2 \cdot C_{(1)} \cdot x_{(1)} \cdot e_{(1)}^c$$

haciendo:

$$x = \frac{x_{(h)}}{x_{(1)}}$$

queda:

$$3.M_1 \cdot \frac{c_{(1)}}{3} + 3.M_2 \cdot \frac{c_{(1)}}{3} + 2.M_1 \cdot x \cdot \frac{c_{a(h)}}{2} = -2.C_{(1)} \cdot c_{(1)}^e$$

o:

$$M_1 \cdot \left[3 \cdot \frac{c_{(1)}}{3} + 2 \cdot x \cdot \frac{c_{a(h)}}{2} \right] + 3.M_2 \cdot \frac{c_{(1)}}{2} = -2.C_{(1)} \cdot c_{(1)}^e \quad (b)$$

c) Dedución de M_1 y M_2 . — Eliminando M_2 entre a. y b.

$$C_{(1)} \cdot c_{(1)}^e \cdot \left[4 \cdot \frac{c_{(1)}}{2} - 3 \cdot \frac{c_{(1)}}{3} \right] \quad (300)$$

$$M_1 = \frac{\left[6 \cdot \frac{c_{(1)}}{3} \cdot \frac{c_{a(h)}}{2} + 4 \cdot x \cdot \frac{c_{a(h)}}{2} \cdot \frac{c_{a(1)}}{2} - 3 \cdot \frac{c_{(1)}}{3} \cdot c_{o(1)} \right]}{\left[4 \cdot \frac{c_{(1)}}{2} - 3 \cdot \frac{c_{(1)}}{3} \right]}$$

haciendo lo propio con M_1 :

$$C_{(1)} \cdot c_{(1)}^e \cdot \left[3 \cdot \frac{c_{(1)}}{3} + 2 \cdot x \cdot \frac{c_{a(h)}}{2} - 2 \cdot c_{o(1)} \right] \quad (301)$$

$$M_2 = \frac{\left[6 \cdot \frac{c_{a(1)}}{2} \cdot \frac{c_{(1)}}{3} + 4 \cdot x \cdot \frac{c_{a(h)}}{2} \cdot \frac{c_{a(1)}}{2} - 3 \cdot \frac{c_{(1)}}{3} \cdot c_{o(1)} \right]}{\left[3 \cdot \frac{c_{(1)}}{3} + 2 \cdot x \cdot \frac{c_{a(h)}}{2} - 2 \cdot c_{o(1)} \right]}$$

Si $I_e =$ constante, e igual pasa con I_h queda:

$$M_2 = \frac{K \cdot (1+2 \cdot x)}{4 \cdot x + 3} \quad \text{y:} \quad M_1 = \frac{K}{4 \cdot x + 3}$$

iguales a los encontrados como resultado del Ejemplo N°. 4.

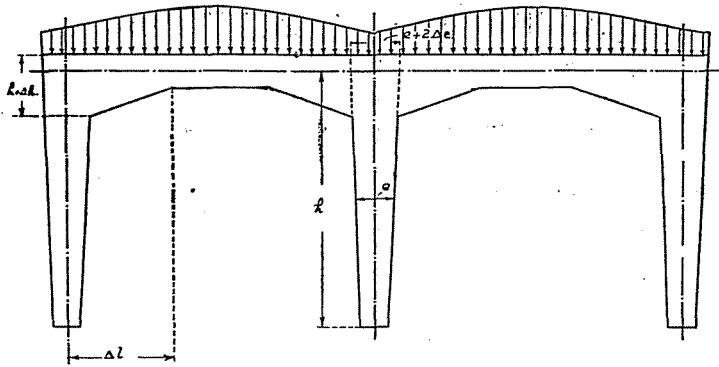


Figura N° 128

4°.) *Aplicaciones numéricas. — Problemas. — Comparación de resultados.*

Problema N° 22. — Determinar las reacciones y diagramas de momentos flectores del pórtico representado en la fig. N° 129, sometido a la acción de una carga concentrada en el punto medio del dintel.

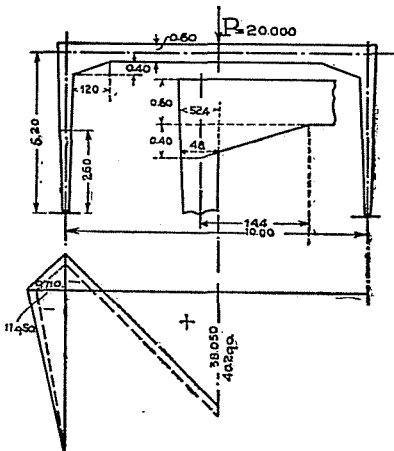


Figura N° 129

Como la carga es simétrica, las expresiones de cálculo adecuadas son:

a) Caso 1° en que $I_{(e)}$ y $I_{(h)}$ son constantes:

$$x = \frac{I_{(l)} \cdot h}{I_{(h)} \cdot 1} = \frac{60^3 \cdot 36}{36 \cdot 20^2 \cdot 36} \cdot \frac{520}{1000} \approx 2,36$$

Pues la sección del medio del dintel es de 60 x 36 y la de la mitad de altura del pié derecho de:

$$\left(\frac{52 \cdot 40 + 20}{2} \right) \cdot 36 = 36 \cdot 20 \times 36 \text{ cms.}$$

La fórmula N°. 92, reemplazando valores numéricos:

$$\begin{aligned} M &= \frac{K}{2 \cdot x + 3} = \frac{3}{8} \cdot \frac{P \cdot l}{(2 \cdot 2,36 + 3)} = \\ &= \frac{3 \cdot P \cdot l}{8 \cdot (7,72)} = \frac{3}{61,76} \cdot P \cdot l = \\ &= \frac{600 \cdot 000}{61,76} = 9.710 \text{ Kgms.} \end{aligned}$$

el empuje es: $E = \frac{9710}{5,20} = 1870 \text{ Kgrs.}$

b) Se tienen en cuenta el acartelamiento del dintel y sesgo de

los piés derechos. Para ello debemos calcular los valores $e_{(1)}^c \cdot c_{(1)}$ y $c_{a(h)}$ para lo cual:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{46}{60} = 0,80 \qquad \frac{\Delta l}{l} = \frac{1,44}{10,00} = \sim 0,144$$

como:

$$e. (1+n) = 52,40 \qquad (1+n) = \frac{52.40}{36.20} = 1,25$$

Con estos valores se tiene:

- a) Gráfico n°. 6.— : $e_{(1)}^c = 0,361$
- b) „ n°. 4.— : $e_{(1)} = 2,50$
- c) „ n°. 11.— : $c_{a(h)} = 1,50$

los que reemplazamos en la expresión n°. 298.:

$$M = \frac{C_{(1)} \cdot e_{(1)}^c}{3} = \text{P.l.} \frac{0,361}{2,50 + 2,36 \cdot 1,50} = -11.950 \text{ Kgms.}$$

$$3. \frac{e_{(1)}}{3} + 2. x. \frac{c_{a(h)}}{2}$$

c) *Comparación de resultados* — Referido al resultado más exacto sin duda, el de $M = -11.950$, el error incurrido al aceptar I_1 e I_n constantes, es:

1°. Para el momento en el vértice:

$$100 \cdot \frac{11.950 - 9710}{11.950} = \sim 18,80 \% \text{ en defecto.}$$

2°. Para el momento en el centro del tramo:

$$100 \cdot \frac{40.290 - 38.050}{38.050} = 5,80 \% \text{ en exceso}$$

Problema N°. 23. — Resolver el caso que plantea la fig. N° 455 del libro “Estática Aplicada” de Saliger (pág. 508). (1)

Para calcular M deben primeramente determinarse los valores de:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{95}{110} = 0,865 \qquad \frac{\Delta l}{l} = \frac{2,93}{41,00} = \sim 0,209$$

$$e. (1+n) = 1,76 \qquad \therefore (1+n) = \frac{1,76}{1,23} = 1,43$$

Los gráficos respectivos dan con estos valores:

a) el n°. 5. : $c_{(1)}^e = 0,2250$

b) el n°. 4. : $c_{(1)} = 2,26$

c) el n°. 11. : $c_s = 1,330$

Como:

$$x = \frac{I_{(1)} h}{I_{(h)} l} = \frac{555.000 \cdot 650}{776.000 \cdot 1400} = 0,333$$

La fórmula N°. 298 dá:

$$M = \frac{C_{(1)} \cdot c_{(1)}^e}{3 \cdot \frac{c_{(1)}}{2} + 2 \cdot x \cdot \frac{c_{a(h)}}{2}} = \frac{0,225 \cdot p \cdot l^2}{2,26 + 0,333 \cdot 1,33} = 0,083 \cdot p \cdot l^2$$

Si no se tuvieran en cuenta el acartelamiento y los sesgos, la expresión N°. 92 dá:

(1) Labor 1932 y cuyo resultado apenas se diferencia en 1,50 % del deducido en este trabajo.

$$M = \frac{K}{2x + 3} = \frac{p \cdot l^2}{4(2,00 \cdot 0,33 + 3)} = \frac{p \cdot l^2}{14,664}$$

$$= \sim 0,0680 p l^2$$

El error cometido, al no tener en cuenta la verdadera forma del pórtico, es para este caso de:

$$\frac{0,083 - 0,068}{0,083} = \sim 18 \%$$

suficientemente elevado para rehacerlos, incluyendo en ellos las influencias de los acartelamientos de los tramos y sesgos de los piés derechos, que puede obtenerse en forma sencilla con el procedimiento general expuesto.

5°.) Puede hacerse extensivo el procedimiento expuesto al cálculo de cualquier otra estructura a vértice fijo, v. gr.: las indicadas en las figuras N°. 130, 131 y 132, que no representan, desde luego, dificultad alguna

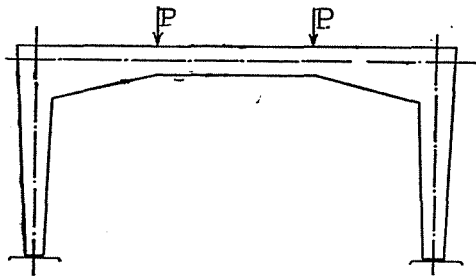


Figura N°. 130

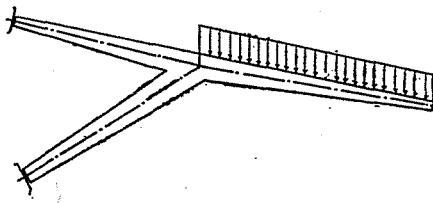


Figura N°. 131

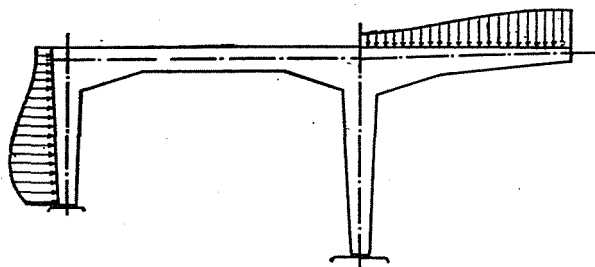


Figura N°. 132

figuras N°. 130, 131 y 132, que no presentan, desde luego, dificultad alguna.