

ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS DE HORMIGÓN ARMADO

(Cálculo de estructuras hiperestáticas con o sin acartelamientos y sesgos)

POR EL

Ing. Civil Luis Sobrino Aranda

Profesor de matemáticas en el Liceo Nacional de Señoritas de Rosario (Stz. Fe)
 Profesor suplente por concurso de: "Estabilidad de Construcciones" y "Construcciones de Hormigón Armado" en la Universidad Nacional de Córdoba. —

(Continuación)

b) **Condición de aparcamiento doble** — Considerando el conjunto formado por h_{n-1} y l_n se tiene, procediendo en forma análoga a la anterior, que las deformaciones angulares extremas engendradas por Mi_{ln} y Md_{ln} en el extremo izquierdo de l_n son:

$$\text{extremo izquierdo de } l_n \left\{ \begin{array}{l} \text{originado por } Mi_{ln} : \alpha'_{(ln)} = \frac{Mi_{ln} \cdot l_n}{3 \cdot E \cdot I_{(ln)}} \\ \text{idem por } Md_{ln} : \alpha''_{(ln)} = \frac{Md_{(ln)} \cdot l_n}{6 \cdot E \cdot I_{(ln)}} \end{array} \right.$$

Además las originadas en el pié derecho son:
 en el extremo superior, originada por $Ms_{(hn-1)}$

$$\gamma'_{(hn-1)} = \frac{Ms_{(hn-1)} \cdot h_{n-1}}{3 \cdot E \cdot I_{(hn-1)}}$$

y en el extremo inferior debido a igual causa anterior:

$$\delta_{(hn-1)} = \frac{Ms_{(hn-1)} \cdot h_{n-1}}{6 \cdot E \cdot I_{(hn-1)}} \quad (78)$$

La indeformabilidad del ángulo formado entre h_{n-1} y l_n exige que:

$$\overset{<}{B} - \alpha_{(ln)} - \gamma_{(hn-1)} + \alpha'_{(ln)} + \alpha''_{(ln)} + \gamma'_{(hn-1)} = \overset{<}{B} \quad (79)$$

de donde:

$$\alpha_{(ln)} + \gamma_{(hn-1)} = \alpha'_{(ln)} + \alpha''_{(ln)} + \gamma'_{(hn-1)} \quad (80)$$

debiendo tener presente que son positivos los incrementos angulares que tiendan a aumentar el valor inicial del B y negativos en caso contrario.

De la misma manera la condición de indeformabilidad del ángulo C formado entre l_n y h_n será:

$$\overset{<}{C} - \beta_{(ln)} + \gamma_{(hn)} + \beta'_{(ln)} + \beta''_{(ln)} - \gamma'_{(hn)} = \overset{<}{C}$$

de la que:

$$\beta_{(ln)} + \gamma'_{(hn)} = \gamma_{(hn)} + \beta'_{(ln)} + \beta''_{(ln)} \quad (81)$$

en esta última $\beta'_{(ln)}$; $\beta''_{(ln)}$ y $\gamma'_{(hn)}$ valen:

$$\beta'_{(ln)} = - \frac{Mi_{(ln)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{ln}{I_{(ln)}}$$

$$\beta''_{(ln)} = - \frac{Md_{(ln)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{ln}{I_{(ln)}}$$

y

$$\gamma'_{(hn)} = - \frac{Ms_{(hn)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{hn}{I_{(hn)}}$$

Si sumamos las expresiones 80 y 81 obtendremos la condición de rigidez conjunta de los ángulos A. y B.

$$\begin{aligned} [a_{(ln)} + \beta_{(ln)}] + [\gamma_{(hn-1)} - \gamma_{(hn)}] &= [a'_{(ln)} + \beta'_{(ln)}] + \\ &+ [a''_{(ln)} + \beta''_{(ln)}] + [\gamma'_{(hn-1)} - \gamma'_{(hn)}] \end{aligned} \quad (82)$$

Reemplazando en ésta los respectivos valores de a , β y γ tenemos:

$$\begin{aligned} \left[\frac{Ki_{(ln)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{ln}{I_{(ln)}} + \frac{Kd_{(ln)}}{E \cdot 6} \cdot \frac{ln}{I_{(ln)}} \right] + \left[\frac{Ki_{(hn-1)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{h_{n-1}}{I_{(hn-1)}} - \frac{Ki_{(ln)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{hn}{I_{(ln)}} \right] = - \\ - \left[\frac{Mi_{(ln)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{ln}{I_{(ln)}} + \frac{Mi_{(ln)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{ln}{I_{(ln)}} \right] - \left[\frac{Md_{(ln)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{ln}{I_{(ln)}} + \frac{Md_{(ln)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{ln}{I_{(ln)}} \right] + \\ + \left[\frac{Ms_{(hn)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{hn}{I_{(hn)}} - \frac{Ms_{(hn-1)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{h_{n-1}}{I_{(hn-1)}} \right] \end{aligned}$$

Refiriendo los cocientes $\frac{l}{I_{(l)}}$ y $\frac{h}{I_{(h)}}$ a $\frac{I_0}{I_0}$ y denominando:

$$\frac{l_n}{I_{(l_n)}} \cdot \frac{I_0}{I_0} = X_{(l_n)} \quad ; \quad \frac{h_{(n-1)}}{I_{(h_{n-1})}} \cdot \frac{I_0}{I_0} = X_{(h_{n-1})} \text{ etc.}$$

la anterior se transforma en:

$$[Kd_{(l_n)} + Ki_{(l_n)}] \cdot X_{(l_n)} + [Ki_{(h_{n-1})} \cdot X_{(h_{n-1})} - Ki_{(h_n)} \cdot X_{(h_n)}] =$$

$$= -3.Mi_{(l_n)} \cdot X_{(l_n)} - 3.Md_{(l_n)} \cdot X_{(l_n)} + 2.Ms_{(h_n)} \cdot X_{(h_n)} - 2.Ms_{(h_{n-1})} \cdot X_{(h_{n-1})}$$

que puede escribirse así:

$$3.Mi_{(l_n)} \cdot X_{(l_n)} + 3.Md_{(l_n)} \cdot X_{(l_n)} + 2.Ms_{(h_{n-1})} \cdot X_{(h_{n-1})} - 2.Ms_{(h_n)} \cdot X_{(h_n)} =$$

$$= - [Kd_{(l_n)} + Ki_{(l_n)}] \cdot X_{(l_n)} - [Ki_{(h_{n-1})} \cdot X_{(h_{n-1})} - Ki_{(h_n)} \cdot X_{(h_n)}] \quad (83)$$

que denominaremos condición de aparcamiento doble, y liga a los momentos de los extremos superiores de dos pies derechos consecutivos y a los dos también extremos (derecho e izquierdo) del tramo que comprenden, con las sollicitaciones exteriores. Los términos encerrados entre paréntesis en el segundo miembro, significan lo siguiente:

- 1°) Influencia de la carga sobre la viga dintel l_n
- 2°) Idem de la carga que actúa sobre los pies derechos

c) Condiciones de aparcamiento simples.—

Si se tratara de estudiar un caso como el representado en la fig. 60 correspondiente a un posible primer tramo, se tendría que

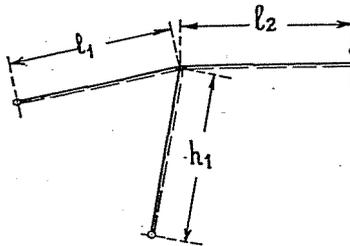


Figura 60

utilizar la expresión N°. 81, que empleando los índices convenientes sería:

$$\beta_{(1)} + \gamma'_{(h_1)} = \gamma_{(h_1)} + \beta''_{(1)} + \beta'_{(1)}$$

Reemplazando valores, teniendo en cuenta el cambio de índices y que $M_{i(1)} = 0$:

$$\frac{Ki_{(1)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{l_1}{I_{(1)}} - \frac{Ms_{(h_1)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{h_1}{I_{(h_1)}} = \frac{Ki_{(h_1)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{h_1}{I_{(h_1)}} - \frac{Md_{(1)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{l_1}{I_{(1)}}$$

eliminando E e introduciendo el concepto de coeficiente de flexibilidad, resulta:

$$2 \cdot Md_{(1)} \cdot x_{(1)} - 2 \cdot Ms_{(h_1)} \cdot x_{(h_1)} = -Ki_{(1)} \cdot x_{(1)} + Ki_{(h_1)} \cdot x_{(h_1)} \quad (84)$$

que denominaremos condición de aperticamiento simple correspondiente al semipórtico primero.

En forma análoga puede obtenerse la condición de aperticamiento simple correspondiente a un último semi-pórtico (fig. n°. 61).

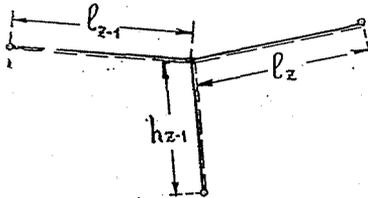


Figura N°. 61

De la expresión n°. 80 se obtiene, permutando en forma adecuada los índices:

$$a_{(1z)} + \gamma_{(h_{z-1})} = a'_{(1z)} + a''_{(1z)} + \gamma'_{(h_{z-1})}$$

de la que, reemplazando a , β y γ por sus valores ya obtenidos:

$$\frac{Ki_{(1z)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{l_z}{I_{(1z)}} + \frac{Ki_{(h_{z-1})}}{6 \cdot E} \cdot \frac{h_{z-1}}{I_{(h_{z-1})}} = \frac{Mi_{(1z)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{l_z}{I_{(1z)}}$$

$$\frac{Md_{(lz)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{lz}{I_{(lz)}} = \frac{Ms_{(hz-1)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{h(z-1)}{I_{(hz-1)}}$$

de la que teniendo en cuenta que $Md_{(lz)} = 0$, se obtiene:

$$2 \cdot Mi_{(lz)} \cdot X_{(lz)} + 2 \cdot Ms_{(hz-1)} \cdot X_{(hz-1)} = - \\ = - Ki_{(lz)} \cdot X_{(lz)} - Ki_{(hz-1)} \cdot X_{(hz-1)} \quad (85)$$

que es la condición de rigidez del último ángulo y la denominaremos de aperticamiento simple correspondiente al último semi-pórtico.

d) **Imposibilidad de giro de los nudos.** — Además de las expresiones ya encontradas pueden escribirse las siguientes, teniendo en cuenta que el equilibrio de cada nudo exige la imposibilidad de una rotación o giro:

$$\left. \begin{array}{l} \text{nudo } l_{n-1}; h_{n-1}; l_n \quad - Md_{(ln-1)} = - Mi_{(ln)} + Ms_{(hn-1)} \\ \text{nudo } l_n ; h_n ; l_{n+1} \quad - Md_{(ln)} = - Mi_{(ln+1)} + Ms_{(hn)} \\ \text{nudo } l_{n+1}; h_{n+1}; l_{n+2} \quad - Md_{(ln+1)} = - Mi_{(ln+2)} + Ms_{(hn+1)} \end{array} \right\} (81)$$

2° — **Caso de carga general.** — Uso de las expresiones deducidas para la resolución de una estructura cualquiera a vértices fijos y extremos articulados. — Ejercicios y ejemplos. —

Resolución de problemas. — Un problema estará resuelto cuando conozcamos la totalidad de los momentos extremos incógnitos y esto es posible mediante el empleo de las expresiones que dan las

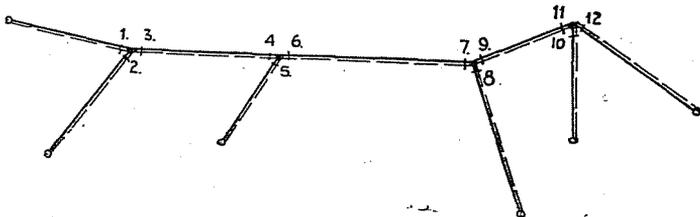


Figura N° 62

condiciones de continuidad, de aperticamientos doble y simple, y de la imposibilidad de giro de cada nudo.

Así, si tuviéramos que resolver la estructura representada en la figura N° 62, podríamos establecer:

a) Cuatro condiciones de continuidad	4
b) Tres de aperticamiento doble	3
c) Cuatro de imposibilidad de giro de los nudos	4
d) Una de aperticamiento simple (ya sea la correspondiente al 1°. o al último semipórtico)	1
	—
Total	12

o sea un total de doce ecuaciones para ligar los doce momentos incógnitos extremos, que permiten, por lo tanto, resolver el problema.

Si la estructura a resolver fuera la representada en la figura número 63, se tendría:

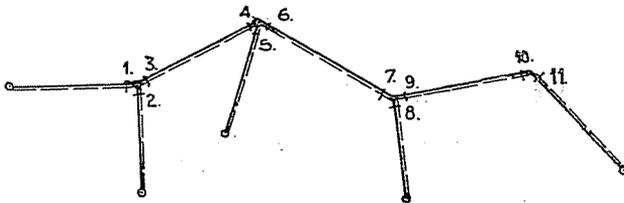


Figura N° 63

a) Tres condiciones de aperticamiento doble	3
b) Igual número de condiciones de continuidad	3
c) Una de aperticamiento simple	1
d) Tres de imposibilidad de giro	3
	—
Total	10

número de ecuaciones igual al de momentos extremos incógnitos del problema.

Todas estas expresiones se usan y utilizan en forma semejante a las de Clapeyron: si un tramo o pié derecho está descargado, los

correspondientes valores de K_i y K_d se anulan, y si la carga actúa de abajo a arriba en los dinteles o de derecha a izquierda en los pies derechos deben cambiarse los signos de ellos, facilitando los ejemplos que siguen la comprensión necesaria para su uso.

En esta parte correspondiente a los pórticos o estructuras a vértices fijos pueden incluirse y así lo haremos las que tengan vértices desplazables cuando sean simétricas y estén solicitadas por causas también simétricas, pues en este caso los vértices permanecerán evidentemente fijos.

En la resolución de problemas tendremos en cuenta que las formas más usadas son aquellas en las cuales los pies derechos y dinteles se cortan en general a ángulo recto.

3°.) **Deducción de fórmulas de cálculo de los casos de aplicación más corrientes.** —

Ejemplo N°. 1 — Pórtico biarticulado, compuesto de un dintel horizontal y de un pie derecho vertical, sometido a carga vertical.

Para este caso la expresión 86 dá:

$$- Md_{(1)} = - Mi_{(2)} + Ms_{(1)}$$

y como:

$$Mi_{(2)} = 0$$

resulta:

$$- Md_{(1)} = + Ms_{(1)}$$

La condición de aporcamiento simple N°. 34 permite establecer que:

$$- Kd_{(1)} x_{(1)} + 2 \cdot [-Md_{(1)}] \cdot x_{(1)} = 2 \cdot Md_{(1)} \cdot x_{(1)}$$

de donde:

$$Md_{(1)} = \frac{Kd_{(1)} \cdot x_{(1)}}{2 \cdot (x_{(1)} + x_{(1)})}$$

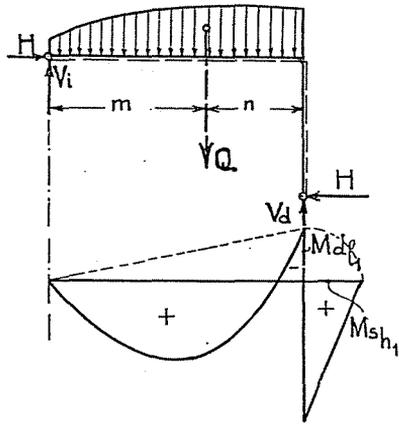


Figura N° 64

dividiendo por $x_{(l)}$:

$$\boxed{Md_{(l)} = \frac{Kd}{2 \cdot (x+1)}} \quad (87)$$

siendo:

$$x = \frac{x_{(h_1)}}{x_{(l)}} = \frac{\frac{h_1}{I_{(h_1)}} \cdot \frac{I_0}{l_0}}{\frac{l_1}{I_{(l_1)}} \cdot \frac{I_0}{l_0}} = \frac{I_{(l_1)} \cdot h_1}{I_{(h_1)} \cdot l}$$

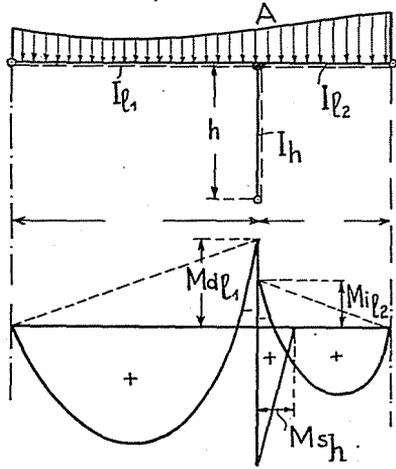
Las reacciones de apoyo pueden determinarse mediante la simple aplicación de las leyes de equilibrio:

$$Vd = \frac{Q \cdot m}{l} ; Vi = \frac{Q \cdot n}{l} ; H = M \div h$$

Ejemplo N° 2 — Pórtico triarticulado compuesto de una viga dintel de dos tramos y un pie derecho intermedio (fig. N° 65).

Los momentos extremos intermedios son tres:

Figura Nº. 65



Los momentos extremos intermedios son tres:

$$Md_{(1)} ; Mi_{(2)} \text{ y } Ms_{(h)}$$

Las expresiones que permiten resolver este problema son:

a) Condición de Continuidad en A:

$$2.Md_{(1)} \cdot x_{(1)} + 2.Mi_{(2)} \cdot x_{(2)} = -[Kd_{(1)} \cdot x_{(1)} + Ki_{(2)} \cdot x_{(2)}] \quad (87 \text{ bis})$$

pues

$$Mi_{(1)} = Md_{(2)} = 0$$

b) Condición de aporcamiento simple:

$$-Kd_{(1)} \cdot x_{(1)} + 2 \cdot Ms_{(h)} \cdot x_{(h)} = 2 \cdot Md_{(1)} \cdot x_{(1)} \quad (88)$$

c) Condición de imposibilidad de giro del nudo A:

$$-Md_{(1)} = -Mi_{(2)} + Ms_{(h)}$$

de la que:

$$Ms_{(h)} = Mi_{(2)} - Md_{(1)} \quad (89)$$

Las ecuaciones 87 bis, 88 y 89 forman un sistema que permite resolver el problema. Después de una serie de transformaciones se obtiene:

$$\frac{-[\text{Kd}_{(1)} \cdot x_{(1)} + \text{Ki}_{(2)} \cdot x_{(2)}] - 2 \cdot \text{Mi}_{(2)} \cdot x_{(2)}}{2 \cdot x_{(1)}} = \text{Md}_{(1)} =$$

$$= \frac{-\text{Kd}_{(1)} \cdot x_{(1)} + 2 \cdot \text{Mi}_{(2)} \cdot x_{(h_1)}}{2 \cdot (x_{(1)} + x_{(h_1)})}$$

Si en vez de referir los valores x_1 ; x_{h_1} ; x_{i_2} a I_0 y l_0 lo hacemos con respecto a I_{h_1} y h_1 , obtendremos denominando:

$$x_1 = \frac{I_{(h_1)}}{h_1} \cdot \frac{l_1}{I_{(1)}} ; x_2 = \frac{I_{(h_1)}}{h_1} \cdot \frac{l_2}{I_{(2)}} ; y, x_{(h)} = 1 \quad (89 \text{ bis})$$

la expresión siguiente:

$$\frac{-[\text{Kd}_{(1)} \cdot x_1 + \text{Ki}_{(2)} \cdot x_2] - 2 \cdot \text{Mi}_{(2)} \cdot x_2}{2 \cdot x_1} = \frac{-\text{Kd}_{(1)} \cdot x_1 + 2 \cdot \text{Mi}_{(2)}}{2 \cdot (1 + x_1)}$$

de la que finalmente:

$$\boxed{\text{Mi}_{(2)} = \frac{\text{Kd}_{(1)} \cdot x_1 + \text{Ki}_{(2)} \cdot x_2 \cdot (1 + x_1)}{2 \cdot (x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2)}} \quad (90)$$

de igual manera:

$$\boxed{\text{Md}_{(1)} = \frac{\text{Ki}_{(2)} \cdot x_2 + \text{Kd}_{(1)} \cdot x_1 \cdot (1 + x_2)}{2 \cdot (x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2)}} \quad (91)$$

pudiéndose determinar M_{sh} mediante la N° 89 una vez calculados M_{i_2} y M_{d_1} .

Ejemplo N° 3 — Pórtico bi-articulado simétrico compuesto de un dintel horizontal y de dos pies derechos inclinados de igual altura sometido a la acción (fig. N° 66) de una carga también simétrica.

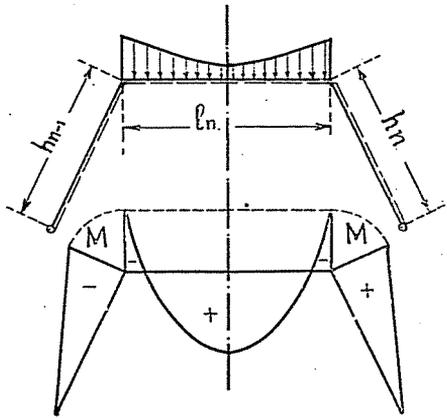


Figura No. 66

Los casos de cargas asimétricas los veremos al tratar las estructuras a vértices desplazables.

La carga y forma simétricas permiten establecer que:

$$\begin{aligned} K_{i(l_n)} &= K_{d(l_n)} = K \\ M_{d(l_n)} &= M_{i(l_n)} \\ X_{(l_n-1)} &= X_{(l_n)} \end{aligned}$$

Las expresiones 85 permiten establecer que:

$$\text{Nudo A: } -M_{i(l_n)} + M_{s(h_{n-1})} = 0$$

de donde:

$$M_{i(l_n)} = M_{s(h_{n-1})}$$

$$\text{Nudo B: } -M_{d(l_n)} = M_{s(h_n)}$$

luego:

$$M = M_{s(h_{n-1})} = M_{i(l_n)} = M_{d(l_n)} = - M_{s(h_n)}$$

La condición de artificio doble se transforma por consiguiente en:

$$6.M.x_{(1)} + 4.M.x_{(n)} = 2K \cdot x_{(1)}$$

si denominamos:

$$x = \frac{x_{(hn)}}{x_{(ln)}} = \frac{I_{(l)}}{I} \cdot \frac{h}{I_{(h)}}$$

la anterior se transforma en:

$$M = - \frac{K}{3 + 2.x} \quad (92)$$

pudiéndose como en casos anteriores determinar las reacciones mediante el empleo de las condiciones de equilibrio.

Ejemplo N°. 4. — Sea el pórtico representando en la fig. N°. 67, sometido a una carga vertical cualquiera, simétrica, caso para el cual el dintel no sufre desplazamientos.

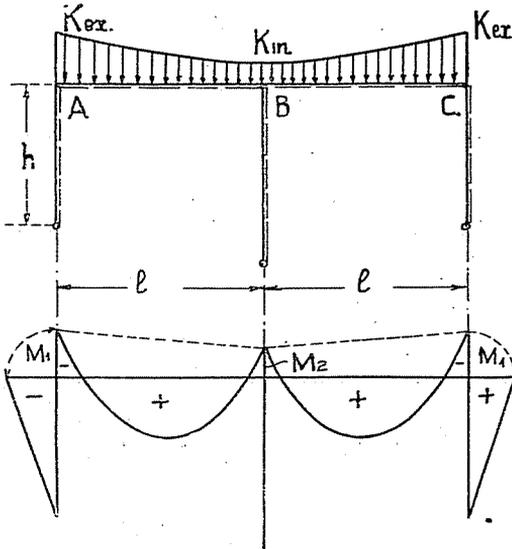


Figura N°. 67

Dentro de esta condición y adaptando la nomenclatura indicada en la fig. N°. 67, se tiene:

$$M_{i_{(1n-1)}} = M_{d_{(1n)}} = M_1$$

$$M_{d_{(1n-1)}} = M_{i_{(1n)}} = M_2$$

$$x_{(1n-1)} = x_{(1n)} = x_1$$

$$x_{(1n-2)} = x_{(1n)} = x_{(h)}$$

$$x_{(n-1)} = x_{(h)} ;$$

$$K_{i_{(1n-1)}} = K_{d_{(1n)}} = K \text{ ex. (exterior)}$$

$$K_{d_{(1n-1)}} = K_{i_{1n}} = K \text{ in. (interior)}$$

Las ecuaciones que pueden establecerse son:

a) Condición de continuidad. La expresión n°. 76 teniendo en cuenta a las simplificaciones que introduce la carencia de cargas contra los piés derechos, y la doble simetría de forma y sollicitación es:

$$- K \text{ (in) .} = M_1 \pm 2 M_2 \quad (92 \text{ bis})$$

b) Las condiciones de imposibilidad de giro de los nudos A y B son:

$$\text{nudo A:} \quad 0 = M_1 + M_{s(h)} \quad \therefore \quad M_1 = M_{s(h)} \quad (93)$$

$$\text{nudo B:} \quad -M_2 = -M_2 + M_{s(h)} \quad \therefore \quad M_{s(h)} = 0 \quad (94)$$

c) Condición de aporcamiento doble:

$$3 M_1 \cdot x_1 + 3 M_2 \cdot x_1 + 2 M_1 \cdot x_h = - [K_{in} + K_{ex}] \cdot x_1 \quad (94 \text{ bis})$$

Tenemos, por consiguiente, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que resuelve el problema.

Si referimos los valores a I_e/l y denominamos:

$$x = \frac{I_{(l)}}{1} \cdot \frac{h}{I_{(h)}}$$

las 92 bis y 84 bis se transforman en:

$$-K_{in} = M_1 + 2M_2$$

$$3M_1 + 3M_2 + 2M_1 \cdot x = - [K_{ex} + K_{in} \cdot]$$

cuya solución dá:

$$M_1 = - \frac{2K_{ex} - K_{in}}{4x + 3} \quad (95)$$

$$M_2 = - \frac{[2K_{ex} - K_{in}]}{(4x + 3)} \cdot \frac{(2x + 1)}{(4x + 3)} \quad (96)$$

que resuelven el problema.

Si la carga, fuera además, simétrica en cada tramo:

$$K_{in} = K_{ex} = K$$

transformándose las 95 y 96 en las siguientes:

$$M_1 = - \frac{K}{4x + 3} \quad (97)$$

$$M_2 = - K \cdot \frac{2x + 1}{4x + 3} \quad (98)$$

y

$$M_{sh} = 0 \quad (99)$$

Ejemplo N° 5 — La viga como elemento de estructura. — Una viga o una columna de una estructura cualquiera de un edificio forma parte de un complejo que en general no presenta cálculo exacto.

Sin embargo, éste lo será cada vez más a medida que nos va-

yamos acercando a la realidad en las hipótesis que formulemos sobre la naturaleza de los vínculos que la unen al respecto de la estructura.

Así, por ejemplo, si a una viga de un entramado la calculamos como semi-empotrada, podemos cometer un error que puede ser grosero; este error disminuirá si la consideramos como parte de una viga continua, y, así siguiendo, disminuirá más aún si tenemos en cuenta la flexión de las columnas.

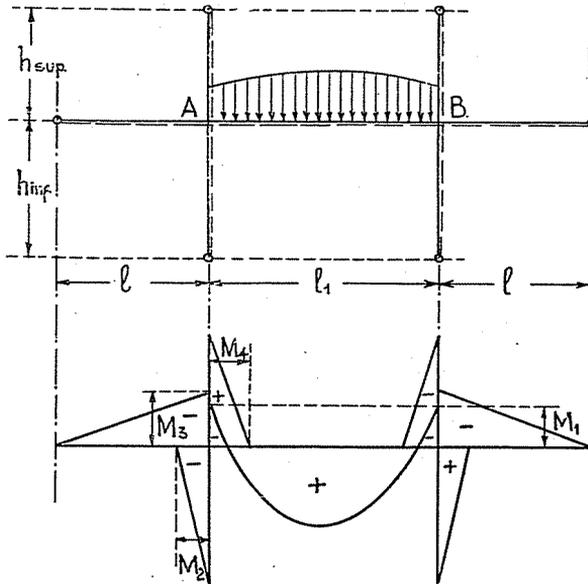


Figura N° 68

Como la influencia preponderante corresponde a los tramos adyacentes, se estará muy cerca de la verdad si la calculamos teniendo en cuenta la totalidad de las piezas, sean vigas o columnas, que le sean inmediatas.

Podemos formular dos hipótesis, todavía con respecto a la naturaleza de los vínculos que unen a estas últimas con el resto de la estructura, pues puede suponerse que sean articulaciones o empotramientos perfectos, tratando en el presente ejemplo el primer caso.

Para mayor sencillez, desarrollaremos el caso simétrico, aunque nada impide deducir en igual forma el asimétrico.

En lo que sigue, nos referimos a la fig. N°. 68.

El sistema que resuelve el problema es el siguiente:

a) Condición de continuidad. Como $K_i = K_d = K$ y $M_{i(l_n - 1)} = 0$, se tiene, ya que el primer tramo está descargado, que:

$$2 M_3 \cdot x_{(1)} + 3 M_1 \cdot x_{(1)} = -K \cdot x_{(1)} \quad (100)$$

b) Condición de aporcamiento doble:

$$4 M_2 \cdot x_{h \text{ inf}} \pm 6 M_1 x_{(1)} = -2 K \cdot x_{(1)} \quad (101)$$

c) Condiciones de aporcamiento simple. Teniendo en cuenta que el dintel del primero y último tramos están descargados, puede escribirse que:

1°.) Para el semi-pórtico 1; h_{inf} :

$$M_2 \cdot x_{h \text{ inf}} = M_3 \cdot x_1 \quad (102)$$

2°.) Para el 1; h_{sup} , observando el signo de M_4 :

$$-M_4 \cdot x_{h \text{ sup}} = M_3 \cdot x_1 \quad (103)$$

d) El equilibrio del nudo A exige que:

$$-M_1 = -M_2 - M_3 \pm M_4 \quad (104)$$

Tenemos, por lo tanto, un sistema de cinco ecuaciones con cuatro incógnitas. Como las N°. 100 y 101 son iguales; recordando la N°. 102; el sistema que permite la resolución del problema es el siguiente:

$$2 M_3 \cdot x_1 + 3 \cdot M_1 \cdot x_{(1)} = -K \cdot x_{(1)} \quad (105)$$

$$M_2 \cdot x_{\text{inf}} = M_3 \cdot x_1 \quad (106)$$

$$M_3 \cdot x_1 = -M_4 \cdot x_{h_{sup}} \quad (107)$$

$$-M_1 = -M_2 - M_3 + M_4 \quad (108)$$

De las tres últimas se deduce:

$$M_1 = -M_3 \cdot \frac{x_{(1)}}{x_{(h_{inf})}} - M_3 - M_3 \cdot \frac{x_{(1)}}{x_{(h_{sup})}} = -M_3 \cdot \left[1 + \frac{x_{(1)}}{x_{(h_{inf})}} + \frac{x_{(1)}}{x_{(h_{sup})}} \right]$$

o sea:

$$M_3 = \frac{M_1}{1 + \frac{x_{(1)}}{x_{(h_{inf})}} + \frac{x_{(1)}}{x_{(h_{sup})}}} \quad (109)$$

Esta, y la número 105 permiten establecer que:

$$M_1 = - \frac{K \cdot \left[\frac{1}{x_{(1)}} + \frac{1}{x_{(h_{inf})}} + \frac{1}{x_{(h_{sup})}} \right]}{2 + 3 \cdot \left[\frac{1}{x_{(1)}} + \frac{1}{x_{(h_{inf})}} + \frac{1}{x_{(h_{sup})}} \right]}$$

ó:

$$\boxed{M_1 = - \frac{K \cdot U}{2 + 3U}} \quad (110)$$

siendo $x_{(1)} = 1$, por cuanto hemos referido los valores de los coeficientes de flexibilidad a $I_{(1)}$ y I_1 :

Conocido M_1 :

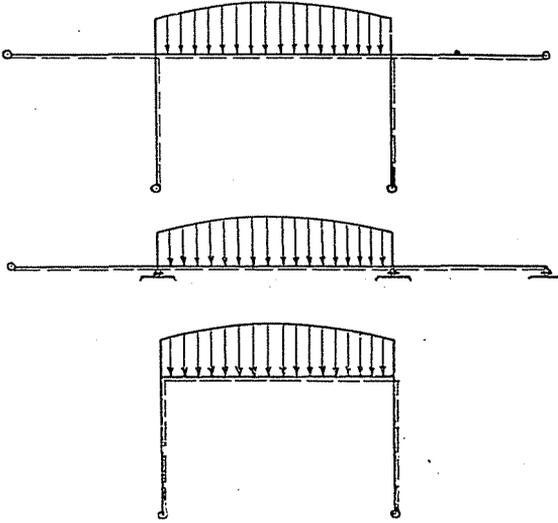
$$M_2 = - \frac{K}{x_{(h_{inf})} \cdot [2 + 3 \cdot U]} \quad (111)$$

$$M_3 = - \frac{K}{x_{(1)} \cdot [2 + 3 \cdot U]} \quad (112)$$

$$M_4 = \frac{K}{x_{(h \text{ sup.})} \cdot [2+3 \cdot U]} \quad (113)$$

que resuelven el problema.

Por degeneración de esta estructura pueden resolverse las formas representadas en las figuras números 69, 70, 71 y 72.



Figuras Nos. 69, 70 y 71

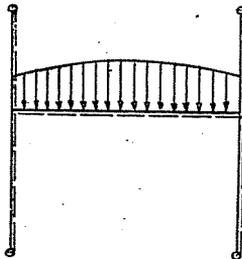


Figura No. 72

Para el caso indicado en la figura N°. 71:

$$U = \frac{1}{x_{(1)}} + \frac{1}{x_{(h \text{ inf.})}} + \frac{1}{x_{(h \text{ sup.})}} = \frac{1}{x_{(h \text{ inf.})}} = \frac{1}{\frac{h \text{ inf.}}{I_{(h \text{ inf.})}} \cdot \frac{I_{(1)}}{I_1}} = \frac{1}{x}$$

y la número 110 se reduce, en consecuencia, a:

$$M_1 = - \frac{K}{2x \pm 3} \quad (114)$$

que es la expresión n°. 92 encontrada al resolver el ejemplo n°. 3.

Ejemplo N°. 6 — Sea el pórtico representado en la fig. N°. 73 sometido a una carga normal al pie derecho. La expresión N°. 85, permite establecer que:

$$0 = -M_{i_{(1z-1)}} + M_{s_{hz}}$$

$$M_{i_{(1z-1)}} = M_{s_{(hz)}} = 0$$

pues:

$$M_{d_{(1n)}} = 0$$

La condición de aperticamiento simple (expresión N°. 85) se transforma en la siguiente, previo cambio adecuado de índices:

$$2M \cdot x_{(1z)} + 2M \cdot x_{(hz-1)} = -Kd_{(hz-1)} \cdot x_{(hz-1)}$$

Si referimos $x_{(1z)}$ y $x_{(hz-1)}$ a $I_{(1z)}$ y a $h_{(hz-1)}$ y denominando:

$$x = \frac{x_{(hz-1)}}{x_{(1z)}} = \frac{I_{(1z)}}{I_z} \cdot \frac{h_{z-1}}{I_{(hz-1)}}$$

la anterior se transforma en la siguiente:

$$2 \cdot M \cdot x + 2 \cdot M = -K_1 \cdot x$$

de la que finalmente:

$$M = - \frac{K_d \cdot x}{2 \cdot (x + 1)} \quad (I15)$$

Pudiendo las reacciones d apoyo calcularlas mediante la aplicación de las leyes de equilibrio.

Problema N°. 7. — Pórtico simple bi-articulado sometido a cargas horizontales simétricas. En este caso:

$$- M_{i(in)} \pm M_{s(hn-1)} = 0$$

luego:

$$M_{i(in)} + M_{s(hn-1)}$$

además:

$$- M_{d(in)} = + M_{s(hn)}$$

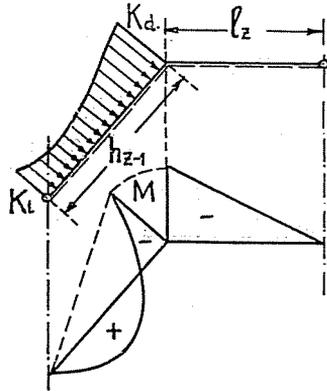


Figura N° 73

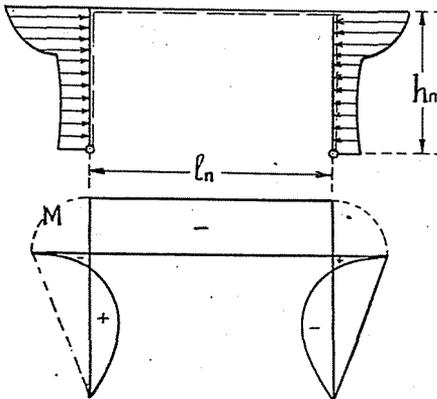


Figura N° 74

Como por simetría:

$$M_{i(l_n)} = M_{d(l_n)}$$

resulta:

$$M = M_{i(l_n)} = M_{d(l_n)} = M_{s(h_n-1)} = - M_{s(h_n)}$$

teniendo en cuenta que:

$$K_{d(h_n-1)} = - K_{d(h_n)}$$

pues la carga que actúa contra el pié derecho h_n es de dirección derecha-izquierda la condición de aporcamiento doble permite establecer que:

$$2 M \cdot x_{(h_n)} + 6 M \cdot x_{(l_n)} + 2 M \cdot x_{(h_n)} = - 2 K_i \cdot x_{(h_n)}$$

si:

$$x = \frac{x_{(h_n)}}{x_{(l_n)}} = \frac{I_{(h_n)}}{I_{(l_n)}} \cdot \frac{l_n}{h_n}$$

la anterior resulta:

$$M = - \frac{K_d \cdot x}{2 \cdot x + 3} \quad (116)$$

Ejemplo N° 8 — Para la resolución de la estructura representada en la fig. N° 75, cuyo pié derecho se halla sometido a una carga normal cualquiera, se tiene:

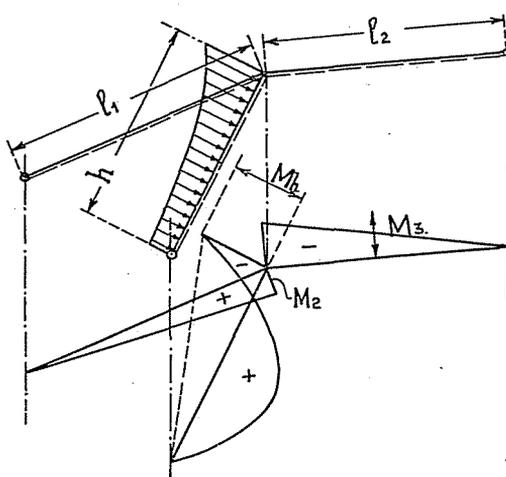


Figura N° 75

a) Condición de continuidad del dintel en A:

$$M_1 \cdot x_{(1)} + 2 M_2 \cdot x_{(1)} + 2 M_3 \cdot x_{(2)} + M_4 \cdot x_{(2)} = 0$$

de la que:

$$M_2 \cdot x_{(1)} = - M_3 \cdot x_{(2)}$$

b) La condición de aporcamiento simple, para el recorrido I ; h es:

$$- 2 M_h \cdot x_h + 2 M_2 \cdot x_{(1)} = \bar{K}_d \cdot x_h$$

c) y la del equilibrio del nudo A:

$$- M_2 = - M_3 + M_h$$

Si se refieren los valores x a I_h y a h:

$$x = \frac{I_{(h)}}{I_{(1)}} \cdot \frac{l_1}{h} ; \quad x_2 = \frac{I_{(h)}}{I_{(2)}} \cdot \frac{l_2}{h}$$

$$x_{(h)} = 1$$

Las ecuaciones anteriores se simplifican transformándose en las siguientes:

$$M_2 \cdot x_1 = - M_3 \cdot x_2 \quad (117)$$

$$- 2 M_h + 2 M_2 \cdot x_1 = K_d \quad (118)$$

$$M_3 = M_2 + M_h \quad (119)$$

sistema que resuelve el problema.

De la 117:

$$M_2 = - \frac{M_h \cdot x_2}{x_1}$$

de la 118:

$$K_d + 2 M_h$$

$$2 \cdot x_1$$

igualando ambas, después de una serie de transformaciones:

$$M_h = \frac{K_d (x_1 + x_2)}{2 (x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2)} \quad (120)$$

de la 118:

$$M_2 = + \frac{K_d \cdot x_2}{2 (x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2)} \quad (121)$$

de la 119:

$$M_3 = M_2 + M_h = - \frac{K_d \cdot x_1}{2 (x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2)} \quad (122)$$

Ejemplo N°. 9 — En forma análoga puede resolverse el pórtico de dos aberturas y simétrico representado en la figura N° 76, sometido también a carga simétrica.

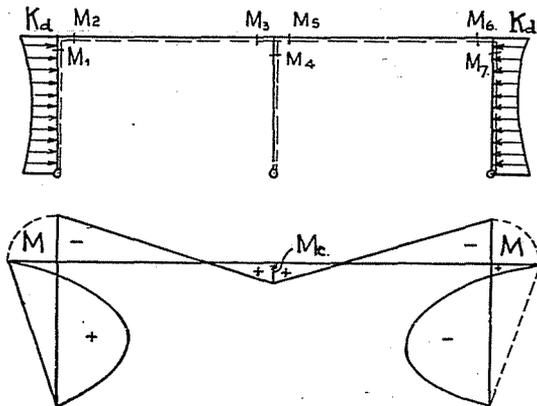


Figura N°. 76

Podemos establecer de antemano, teniendo en cuenta la convención de signos de los momentos flectores, que:

$$M = M_1 = M_2 = M_6 = - M_7$$

$$M_c = M_3 = M_5$$

$$M_4 = 0$$

a) La condición de continuidad aplicada al dintel dá:

$$M_2 \cdot x_1 + 2 M_3 \cdot x_1 + 2 M_5 \cdot x_1 + M_6 \cdot x_1 = 0$$

de donde:

$$M_2 + 2 \cdot M_3 = 0$$

o sea:

$$M = - 2 M_3 \quad (123)$$

b) La condición de aperticamiento doble, teniendo en cuenta que contra la pila central no actúan cargas, es:

$$2 M_1 \cdot x_h + 3 (M_2 + M_3) \cdot x_1 - M_4 \cdot x_h = K_d \cdot x_h$$

o sea:

$$2 M \cdot x_h + 3 (M + M_c) \cdot x_1 = - K_d \cdot x_h$$

si:

$$x = \frac{x_{(h)}}{x_{(l)}} = \frac{I_l}{I_h} \cdot \frac{h}{l}$$

la anterior se transforma en:

$$2 \cdot M \cdot x + 3 \cdot (M + M_c) = - K_d \cdot x_d \cdot x \quad (124)$$

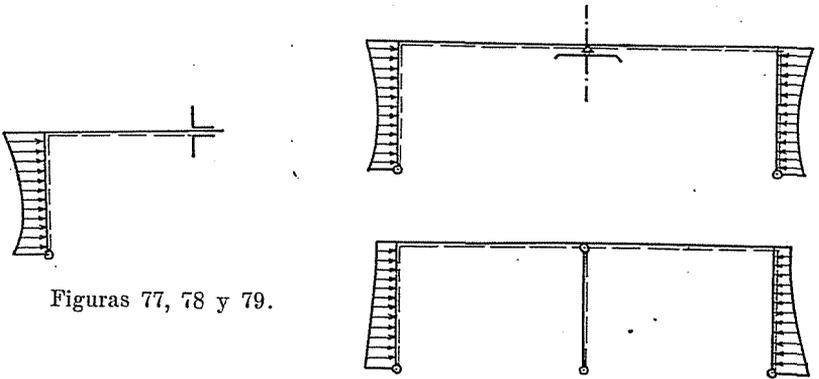
reemplazando la 123 en la 124:

$$M = \frac{K_d \cdot x}{4 \cdot x + 3} \quad (125)$$

y teniendo en cuenta la (123):

$$M = - \frac{2 \cdot K_d \cdot x}{4 \cdot x + 3} \quad (126)$$

Como por simetría la tangente a la elástica del dintel en su unión con la pila media queda horizontal, el problema recientemente resuelto puede hacerse extensivo a la estructura representada en la figura N°. 77, y además, como el resultado (M y M_0) es independiente de las medidas que definen al pié derecho central, el problema puede hacerse también extensivo a las figuras diseñadas en las N°. 78 y N°. 79.



Figuras 77, 78 y 79.

Ejemplo N°. 10. — Para resolver la estructura representada en la fig. N°. 80, sometida a una carga normal contra el primer pié derecho, pueden emplearse las expresiones que corresponden al aparcamiento doble y simple, a la continuidad del dintel e imposibilidad del giro del nudo A, en la forma siguiente:

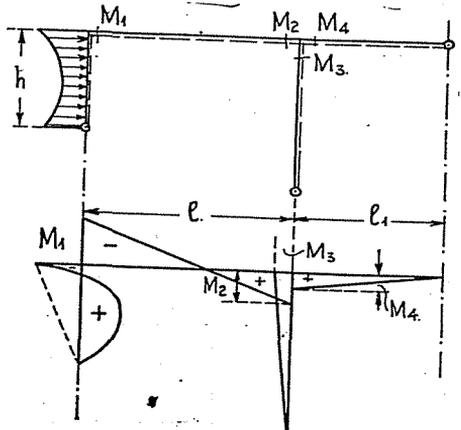


Figura No. 80

a) Condición de continuidad en A:

$$M_1 \cdot x_1 + 2 M_2 \cdot x_1 + 2 M_4 \cdot x_{h_1} = 0$$

b) Aperticamiento doble:

$$\text{recorrido } h; l; h_1: 2 \cdot M_1 \cdot x_h + 3 \cdot (M_1 + M_2) x_1 - 2 \cdot M_3 \cdot x_{h_1} = -K_d \cdot x_h$$

c) Aperticamiento simple:

recorrido $h_1; l_1$:

$$2 \cdot M_3 \cdot x_{h_1} + 2 \cdot M_4 \cdot x_{l_1} = 0$$

d) Imposibilidad de giro del nudo A:

$$M_2 + M_3 = M_4$$

Si los valores x los referimos a x_1 , denominando:

$$x_{(1)} = 1; \quad x = \frac{x_{(h)}}{x_{(1)}}; \quad x_1 = \frac{x_{(h_1)}}{x_{(1)}} \quad y \quad x_2 = \frac{x}{x_{(1)}}$$

las anteriores se reducen a:

$$2 \cdot M_1 \cdot x + 3 (M_1 + M_2) - 2 \cdot M_3 \cdot x_1 = -K_d \cdot x_h \quad (127)$$

$$M_1 + 2 \cdot M_2 + 2 M_4 \cdot x_2 = 0 \quad (128)$$

$$2 \cdot M_3 \cdot x_1 + 2 \cdot M_4 \cdot x_2 = 0 \quad (129)$$

$$M_2 + M_3 = M_4 \quad (130)$$

Eliminando M_3 entre las 127 y 129:

$$2 \cdot M_1 \cdot x + 3 \cdot M_1 + 3 \cdot M_2 + 2 M_4 \cdot x_2 = -K_d \cdot x$$

y a M_1 entre ésta y la 128:

$$4 \cdot M_2 \cdot x + 3 \cdot M_2 + 4 \cdot M_4 \cdot x \cdot x_2 + 4 M_4 \cdot x_2 = K_d \cdot x$$

eliminando M_3 , entre las 129 y 130:

$$M_4 \cdot x_2 + M_4 \cdot x_1 = M_2 \cdot x_1$$

y, finalmente, eliminando a M_2 entre ésta y la anterior:

$$M_4 = + \frac{K_d \cdot x \cdot x_1}{4 \cdot x \cdot x_2 + 4 \cdot x_1 \cdot x + 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x \cdot x_1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2}$$

Si por abreviar hacemos:

$$R = 4 \cdot x \cdot x_2 + 4 \cdot x_1 \cdot x + 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x \cdot x_1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2$$

la anterior se transforma en:

$$M_4 = + \frac{K_d \cdot x \cdot x_1}{R} \quad (131)$$

teniendo en cuenta la 129:

$$M_3 = - \frac{K_d \cdot x \cdot x_2}{R} \quad (132)$$

conocidos M_3 y M_4 la 130 permite deducir M_2 :

$$M_2 = + \frac{K_d \cdot x}{R} (x_1 + x_2) \quad (133)$$

y, finalmente:

$$M_1 = - K_d \cdot x \cdot \frac{2(x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2)}{R} \quad (134)$$

CAPITULO IX

Influencia de momentos exteriores

- 1°.) **Momentos M** que actúan en los vértices o nudos. — Condiciones de continuidad, aporticamientos doble y simple, nudos. — Ejercicios.
- 2°.) **Momentos M** que actúan en los extremos articulados. — Idem.

1°.) **Momentos M** actuando en los vértices o nudos. — Condiciones de: continuidad, aporticamientos doble y simple, nudos. Ejercicios.

Los valores K, correspondientes a los términos de carga deben anularse en todas las expresiones 83, 84 y 85, e incluir en la condición de imposibilidad de giro N° 86 el momento exterior M.

El conjunto, en consecuencia, que permite resolver cualquier problema de esta naturaleza, es el siguiente:

a) Condición de continuidad:

$$M_{i(1n)} \cdot x_{(1n)} + 2 \cdot M_{d(1n)} \cdot x_{(1n)} + 2 \cdot M_{i(1n+1)} \cdot x_{(1n+1)} + M_{d(1n+1)} \cdot x_{(1n+1)} = 0$$

b) idem de aporticamiento doble:

$$3 \cdot M_{i(1n)} \cdot x_{(1n)} + 3 \cdot M_{d(1n)} \cdot x_{(1n)} + 2 \cdot M_{s(1n-1)} \cdot x_{(1n-1)} - 2 \cdot M_{s(1n)} \cdot x_{(1n)} = 0$$

c) idem de aporticamiento simple:

$$2 \cdot M_{d(1_1)} \cdot x_{(1_1)} - 2 \cdot M_{s(1_1)} \cdot x_{(1_1)} = 0$$

$$2 \cdot M_{i(1_2)} \cdot x_{(1_2)} + 2 \cdot M_{s(1_2-1)} \cdot x_{(1_2-1)} = 0$$

d) imposibilidad de giro:

$$\Sigma M = 0$$

Ejemplo N°. 11. — Sea el caso representado en la figura n°. 81.

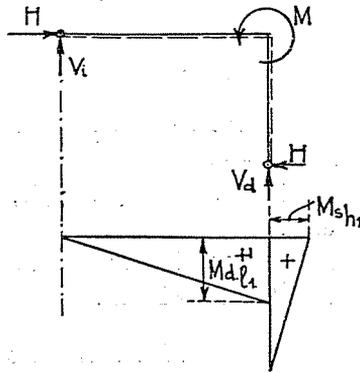


Figura n°. 81

Su resolución puede hacerse mediante el planteo siguiente:

- a) Condición (139) de imposibilidad de giro en M:

$$-Md_{(l_1)} = M + Ms_{(h_1)}$$

- b) Condición de aparcamiento simple (137):

$$Md_{(l_1)} \cdot x_{(l_1)} - 2 \cdot Ms_{(h_1)} \cdot x_{(h_1)} = 0$$

Estas dos ecuaciones forman un sistema que resuelve el problema:

$$Md_{(l_1)} = + \frac{x}{x+1} \cdot M \quad (140)$$

$$Ms_{(h_1)} = \frac{M}{x+1} \quad (141)$$

en las cuales:

$$x = \frac{x_{(h_1)}}{x_{(l_1)}} = \frac{I_{(l_1)} \cdot h_1}{I_{(h_1)}}$$

pudiéndose determinar las reacciones como en casos anteriores se ha indicado.

Ejemplo N°. 12 — Influencia de un momento exterior M que actúa en el nudo A de la estructura representada en la fig. N° 82.

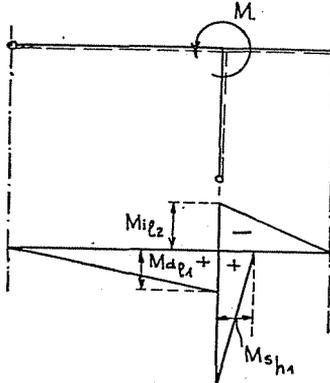


Figura n°. 82

Las expresiones de cálculo son:

a) de continuidad del dintel en A:

$$Md_{(1)} \cdot x_{(1)} + Mi_{(2)} \cdot x_{(2)} = 0 \quad (142)$$

b) de aperticamiento simple:

$$Ms_{(h_1)} \cdot x_{(h_1)} = Md_{(1)} \cdot x_{(1)} \quad (143)$$

c) ídem de equilibrio del nudo A:

$$M = Md_{(1)} + Ms_{(h_1)} + (-Mi_{(2)}) \quad (144)$$

El sistema de ecuaciones 142, 143 y 44, resuelve el problema.

De la N°. 143:

$$Ms_{(h_1)} = Md_{(1)} \cdot \frac{x_{(1)}}{x_{(h_1)}}$$

de la 142:

$$Mi_{(2)} = -Md_{(1)} \cdot \frac{x_{(1)}}{x_{(2)}} \quad (146)$$

luego:

$$M = Md_{(1)} + Md_{(1)} \cdot \frac{x_{1_1}}{x_{h_1}} + Md_{(1)} \cdot \frac{x_{1_2}}{x_{l_2}} =$$

$$= Md_{(1)} \cdot \left[1 + \frac{x_{1_1}}{x_{h_1}} + \frac{x_{1_2}}{x_{l_2}} \right]$$

denominando:

$$x_1 = \frac{I_{(h_1)}}{h_1} \cdot \frac{l_1}{I_{(l_1)}} ; x_2 = \frac{I_{(h_1)}}{h_1} \cdot \frac{l_2}{I_{(l_2)}} \quad \text{resulta } x = 1$$

y la anterior se transforma en la siguiente:

$$M = Md^1 \cdot \left[1 + x_1 + \frac{x_1}{x_2} \right]$$

de la que:

$$Md_{(1)} = \frac{M \cdot x_2}{x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2} \quad (147)$$

la 146 permite establecer que:

$$Mi_{(1_2)} = \frac{M \cdot x_1}{x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2} \quad (148)$$

Calculándose el valor de Ms_h con la n°. 145, una vez determinados los de $Md_{(1)}$ y $Mi_{(1_2)}$ mediante las 147 y 148.

$$Ms_h = M \cdot \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2} \quad (149)$$

Ejemplo N°. 13 — Sea el pórtico representado en la fig. N°. 83, sometido a cargas incidentes sobre los volados formados por prolongaciones del dintel a ambos lados y siempre que:

$$M = Q \cdot a = Q_1 \cdot a_1$$

sean iguales.

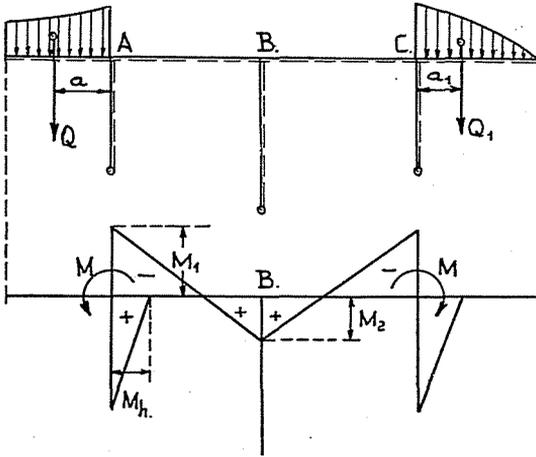


Figura n°. 83

Usando la nomenclatura consignada en la figura N°. 83, puede establecerse:

a) Condición de continuidad:

$$M_{i_{(ln-1)}} \cdot x_{(ln-1)} + 2M_{d_{(ln-1)}} \cdot x_{(ln-1)} + 2M_{i_{(ln)}} \cdot x_{(ln)} + M_{d_{(ln)}} \cdot x_{(ln)} = 0$$

y como por simetría:

$$x_{(ln-1)} = x_{(ln)}$$

resulta:

$$M_{i_{(ln-1)}} = -2 \cdot M_{d_{(ln-1)}}$$

o sea:

$$M_1 = -2 M_2 \quad (151)$$

b) Imposibilidad de giro de los nudos A y B:

Nudo A:

$$+ M = + M_h - M_1 \quad (152)$$

Nudo B:

$$M_2 = M_2 \quad \text{pues } M_{S_h} \text{ central} = 0$$

c) Condición de aparcamiento doble:

$$2 M_h \cdot x_h + 3 M_1 \cdot x_1 + 3 \cdot M_2 \cdot x_1 = 0 \quad (153)$$

El sistema de ecuaciones 151, 152 y 153 resuelve el problema:

$$M_h = \frac{3 \cdot M}{4 \cdot x_1 + 3} \quad (154)$$

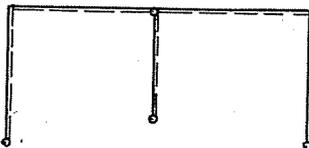
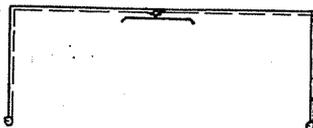
$$M_2 = \frac{2 \cdot x_1 \cdot M}{4 \cdot x_1 + 3} \quad (155)$$

en las que x_1 vale:

$$x = \frac{x_h}{x_1} = \frac{I_1}{I_h} \cdot \frac{h}{l}$$

La número 152 permite calcular M_1 .

Debe tenerse en cuenta al determinar las reacciones aumentar las verticales, correspondientes a las pilas extremas, en Q y Q_1 .



La resolución de este problema es independiente de las dimensiones de la pila central, por lo que puede hacerse extensiva a las estructuras en las figuras Nros. 84 y 85.

2º.) Momentos M que actúan en los extremos articulados. — Condiciones de: continuidad, aperticamiento doble y simple, nudos. Ejercicios.

Si en los extremos articulados actúan momentos M , y el resto de la estructura no está sometida a cargas de ninguna clase, deben, en primer término, anularse en todas las expresiones que correspondan a las condiciones de continuidad, aperticamientos, etc., los valores K , y en segundo término, tomarse en consideración las influencias de los valores M en la forma que veremos a continuación:

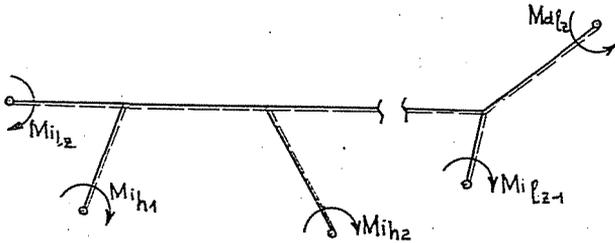


Figura n.º 86

Supondremos, teniendo en cuenta la convención de signos de los momentos flectores, y para conservar la característica de las expresiones ya encontradas, que los momentos exteriores que actúan en los extremos inferiores de los pies derechos sean levógiros, de igual sentido de Mi_{11} y de sentido contrario Md_{1z} .

a) Condición de continuidad. — Se establece en forma análoga a la vista al tratar la viga continua.

tramos l_1 y l_2 :

$$2.Md_{(1)} \cdot x_{(1)} + 2Mi_{(1)} \cdot x_{(2)} + Md_{(2)} \cdot x_{(2)} = -Mi_{(1)} \cdot x_{(1)} \quad (156)$$

tramos l_2 y l_3 :

$$Mi_{(2)} \cdot x_{(2)} + 2.Md_{(2)} \cdot x_{(2)} + 2.Mi_{(3)} \cdot x_{(3)} + Md_{(3)} \cdot x_{(3)} = 0 \quad (157)$$

tramos $l_{(z-1)}$; $l_{(z)}$:

$$Mi_{(z-1)} \cdot x_{(z-1)} + 2.Md_{(z-1)} \cdot x_{(z-1)} + 2.Mi_{(z)} \cdot x_{(z)} = -Md_{(z)} \cdot x_{(z)} \quad (158)$$

b) Condición de aporticamiento doble. — Podríamos deducirla en forma análoga a la empleada en la página , pero como ello nos llevará a una redundancia sin aportar ningún conocimiento nuevo, preferimos escribirla por extensión de la N°. 83:

$$\boxed{3.Mi_{(1n)}.X_{(1n)} + 3.Md_{(1n)}.X_{(1n)} + 2.Ms_{(hn-1)}.X_{(hn-1)} - 2.Ms_{(hn)}.X_{(hn)} = } \\ = - Mi_{(hn-1)}.X_{(hn-1)} - Mi_{(hn)}.X_{(hn)} \quad (159)$$

cc) Condición de aporticamiento simple. — Si al establecer la ecuación 84, anulamos a los valores K, y no hacemos como supusimos $Mi_{(1)} = 0$, queda:

$$\boxed{2.Md_{(1)} . X_{(1)} - 2.Ms_{(h_1)} . X_{(h_1)} + Mi_{(1n)} . X_{(1n)} = Mi_{(h_1)} . X_{(h_1)} \quad (160)$$

En igual forma, anulando los valores K, desde que no existen cargas aplicadas, y teniendo en cuenta que al deducir la expresión N°. 85 supusimos $Md_{(1z)} = 0$, que ahora tiene valor real, queda:

$$\boxed{2.Mi_{(1z)}.X_{(1z)} + 2.Ms_{(hz-1)}.X_{(hz-1)} - Md_{(1z)}.X_{(1z)} = Mi_{(hz-1)}.X_{(hz-1)} = X_{(hz-1)} \quad (161)$$

en las cuales se han permutado por analogía los términos K_h y K_1 por los M_h y M_1 correspondientes.

d) Imposibilidad de giro de los nudos o vértices. — Queda inalterable la expresión:

$$\boxed{\sum M = 0 \quad (161 \text{ bis})}$$

Las expresiones 156 a 161 no solamente nos permitirán la resolución de cualquier caso planteado, pues dan la solución del problema cualesquiera sea el número de momentos extremos M_{ih} y del grado de multiplicidad de la estructura, sino que servirán también para el cálculo de estructuras aporticadas con vértices fijos empotradas.

Si tenemos una estructura aporticada empotrada sometida a una carga cualquiera, razonando en forma semejante a la expuesta en el caso de las vigas empotradas, tendremos transformando los empotramientos en articulaciones que las cargas externas aplicadas originarán deformaciones angulares extremas (en los extremos articulares) que podemos calcular, debiendo los momentos M_{ih} originar otras iguales y de sentido contrario, en el caso de empotramiento. El diagrama de momentos será, evidentemente, suma algebraica de los que respectivamente correspondan a cada uno de estos estados.

Ejemplo N° 14 — Sea el pórtico representado en la figura N° 87, sometido a la acción del momento M_{hi} en el extremo inferior del pié derecho.

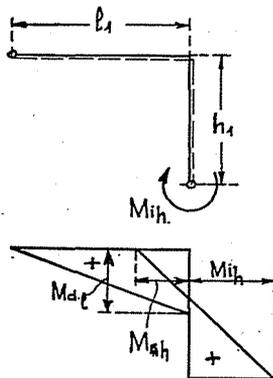


Figura n° 87

La 161 da:

$$-M_{d(1n)} = +M_{s(1n)} = M$$

pues:

$$M_{i(1n+1)} = 0$$

Teniendo en cuenta este resultado, la 160 permite establecer que:

$$-2.M.x_{(1)} - 2.M.x_{(h)} = M_{i(h)} \cdot x_{(h)}$$

si como hicimos en el ejemplo N° 1:

$$x = \frac{x_{(h)}}{x_{(l)}} = \frac{I_{(l)}}{I_{(h)}} \cdot \frac{h_1}{I_{(h)}}$$

la anterior se transforma en:

$$-2 \cdot M - 2 \cdot M \cdot x = Mi_{(h)} \cdot x$$

de la que finalmente:

$$M = - \frac{Mi_{(h)} \cdot x}{2 \cdot (x+1)} \quad (162)$$

Ejemplo Nº. 15. — Pórtico bi-articulado simétrico sometido a la acción de los momentos:

$$Mi_{(hn-1)} = -Mi_{(ln)}$$

que actúan en los extremos inferiores de ambos pies derechos.

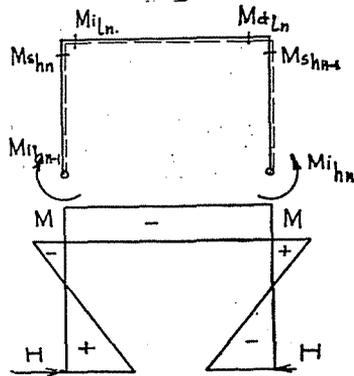


Figura nº. 88

La expresión 161 aplicada sucesivamente a los vértices A y B da:

$$Ms_{(hn-1)} = Mi_{(ln)} = Md_{(ln)} = -Ms_{(hn)} = M$$

y la 159 de aperticamiento doble:

$$6 \cdot M \cdot x_1 + 4 \cdot M \cdot x_h = -2 \cdot Mi_h \cdot x_h$$

Si como el ejemplo 3 hacemos:

$$x = \frac{x_h}{x_i} = \frac{I_{(ln)}}{h_n} \cdot \frac{I_n}{I_{(ln)}}$$

la anterior se transforma en:

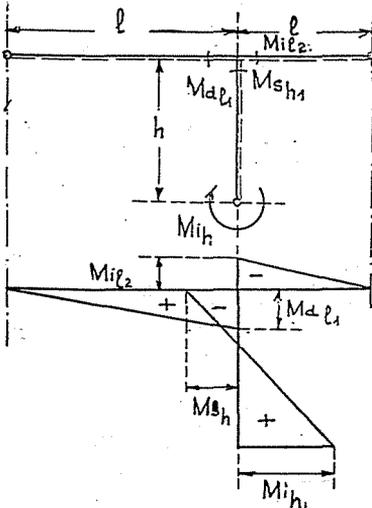
$$6.M + 4.M.x = -2.M_i_h . x$$

de la que:

$$M = -M_i_h \frac{x}{3 + 2x} \quad (163)$$

Las reacciones de apoyo se reducen al empuje:

$$H = \frac{3 \cdot M_i_{(h)}}{h} \cdot \frac{1 + x}{2x + 3} \quad (164)$$



Ejemplo N° 16. — La determinación del diagrama de momentos del caso representado en la fig. N° 89 no ofrece tampoco dificultad.

Figura n° 89

La 161 permite establecer para el nudo A:

$$-Md_{(1n)} = -Mi_{(1n+1)} + Ms_{(1n)}$$

La 158, teniendo en cuenta que los extremos están articulados y que en ellos no actúan momentos:

$$2.Md_{(1n)} \cdot x_{(1n)} + 2.Mi_{(1n+1)} \cdot x_{(1n+1)} = 0$$

En igual forma la N°. 160 da:

$$2.Md_{(1)} \cdot x_{(1)} - 2.Ms_{(1_1)} \cdot x_{(1_1)} = + Mi_{(1_1)} \cdot x_{(1_1)}$$

pues:

$$Mi_{(1_1)} = 0$$

Reemplazando los índices n y n + 1 por 1 y 2 respectivamente y adoptando los valores de x dados por la 89 bis; las anteriores se transforman en:

$$-Md_{(1)} = -Mi_{(1_2)} + Ms_{(1_1)} \quad (165)$$

$$2.Md_{(1)} \cdot x_{(1)} + 2.Mi_{(1_2)} \cdot x_2 = 0 \quad (166)$$

$$2.Md_{(1)} \cdot x_1 - 2.Ms_{(1_1)} = Mi_{(1_1)} \quad (167)$$

De la 166:

$$Md_{(1)} = -Mi_{(1_2)} \cdot \frac{x_2}{x_1} \quad \text{o} \quad Mi_{(1_2)} = Md_{(1)} \cdot \frac{x_1}{x_2}$$

reemplazando este valor en la 165:

$$-Md_{(1)} = Md_{(1)} \cdot \frac{x_1}{x_2} + Ms_{(1_1)} ; \quad -Ms_{(1_1)} = Md_{(1)} \left(1 + \frac{x_1}{x_2}\right)$$

Esta y la 167:

$$Ms_{(1_1)} = Md_{(1)} \cdot x_1 - \frac{Mi_{(1_1)}}{2} = -Md_{(1)} \left(1 + \frac{x_1}{x_2}\right)$$

finalmente se obtiene:

$$M_{s_{(h_1)}} = \frac{M_{i_{(h_1)}}}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2} \quad (168)$$

$$M_{i_{(1_2)}} = \frac{M_{i_{(h_1)}}}{2} \cdot \frac{x_1}{x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2} \quad (169)$$

$$M_{d_{(1_1)}} = \frac{M_{i_{(h_1)}}}{2} \cdot \frac{x_2}{x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2} \quad (170)$$

Ejemplo N°. 17. — Si se tratara de investigar la influencia sobre la misma estructura de un momento exterior $M_{i_{(1_1)}}$, en las expresiones anteriores 160 o 161 (v. gr. la 160) debe anularse $M_{i_{(h_1)}}$.

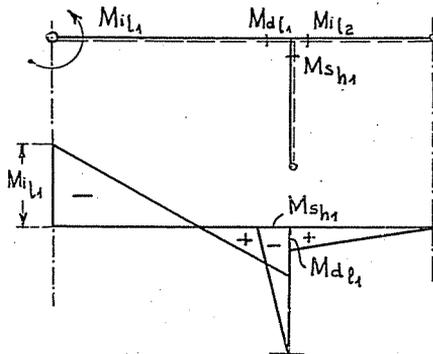


Figura n°. 90

Como $M_{i_{(1_1)}}$ tiene sentido contrario al que le corresponde en las expresiones deducidas en la página N°. , debe tenerse en cuenta esta circunstancia, invirtiendo el signo.

Procediendo en forma idéntica a la anterior, se tiene:

a) Expresión (161 bis):

$$+ Md_{(1_1)} = + Mi_{(1_2)} - Ms_{(1_1)} \quad (171)$$

b) La (160):

$$2.Md_{(1_1)} \cdot x_{(1_1)} - 2Ms_{(1_1)} \cdot x_{(1_1)} = + Mi_{(1_1)} \cdot x_{(1_1)}$$

c) La (161):

$$2.Md_{(1_1)} \cdot x_{(1_1)} + 2.Mi_{(1_2)} \cdot x_{(1_2)} = + Mi_{(1_1)} \cdot x_{(1_1)}$$

Estas expresiones se reducen a las siguientes:

$$Md_{(1_1)} = Mi_{(1_2)} - Ms_{(1_1)} \quad (172)$$

$$2.Md_{(1_1)} \cdot x_1 - 2.Ms_{(1_1)} = + Mi_{(1_1)} \cdot x_1 \quad (173)$$

$$2.Md_{(1_1)} \cdot x_1 + 2.Mi_{(1_2)} \cdot x_2 = + Mi_{(1_1)} \cdot x_1 \quad (174)$$

Este sistema resuelve el problema:

De la. (172):

$$- 2.Ms_{(1_1)} = 2.Md_{(1_1)} - 2.Mi_{(1_2)}$$

que reemplazado en la (173):

$$2.Mi_{(1_2)} \cdot x_1 + 2.Md_{(1_1)} - 2.Mi_{(1_2)} = + Mi_{(1_1)} \cdot x_1$$

$$2.Md_{(1_1)} (x_1 + 1) - 2.Mi_{(1_2)} = + Mi_{(1_1)} \cdot x_1$$

de aquí: $2.Mi_{(1_2)} = 2.Md_{(1_1)} \cdot (x_1 + 1) - Mi_{(1_1)} \cdot x_1$

reemplazando este valor en la (174):

$$2.Md_{(1_1)} \cdot x_1 + 2.Md_{(1_1)} (x_1 \cdot x_2 + x_2) - Mi_{(1_1)} \cdot x_1 \cdot x_2 = + Mi_{(1_1)} \cdot x_1$$

o:

$$\begin{aligned} 2.Md_{(1_1)} (x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2) &= + Mi_{(1_1)} (x_1 \cdot x_2 + x_1) = \\ &= + Mi_{(1_1)} \cdot x_1 \cdot (1 + x_2) \end{aligned}$$

de aquí:

$$Md_{(l_1)} = + \frac{Mi_{(l_1)}}{2} \cdot \frac{x_1 \cdot (x_2 + 1)}{x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2} \quad (175)$$

Teniendo en cuenta las (172|174) se tiene:

$$Ms_{(h_1)} = - \frac{Mi_{(l_1)}}{2} \cdot \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2} \quad (176)$$

y

$$Mi_{(l_2)} = + \frac{Mi_{(l_1)}}{2} \cdot \frac{x_1 \cdot (2 \cdot x_2 + 1)}{x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2} \quad (177)$$

Ejemplo N°. 18. — Si en el extremo articulado del dintel del pórtico representado en la fig. N°. 91, actúa el momento $Md_{(l_2)}$; la expresión N°. 159 de aperticamiento simple permite escribir:

$$2 \cdot Mi_{(l_2)} \cdot x_{(l_2)} + 2 \cdot Ms_{(h_2-1)} \cdot x_{(h_2-1)} + Md_{(l_2)} \cdot x_{(l_2)} = \\ = -Mi_{(h_2-1)} \cdot x_{(h_2-1)}$$

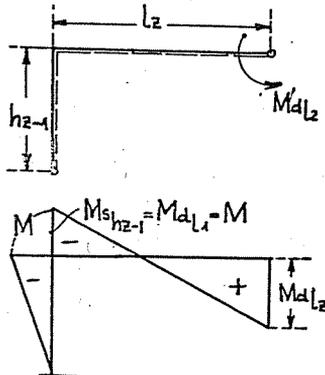


Figura n.º 91

como:

$$M_{i(hz-1)} = 0 \quad \text{y} \quad M_{s(hz-1)} = M_{i(lz)} = M$$

la anterior se transforma en:

$$2.M.x_{(lz)} + 2.M.x_{(hz-1)} + M_{d(lz)} \cdot x_{(lz)} = 0$$

si:

$$x = \frac{x_{(hz-1)}}{x_{(lz)}}$$

$$M = \frac{M_{d(lz)}}{2 \cdot (1+x)} \quad (178)$$

Ejemplo N° 19 — Si el momento exterior en vez de actuar en el extremo derecho articulado del dintel, lo hace en el inferior del pie derecho, debe ser la expresión 159:

$$M_{d(lz)} = 0$$

con lo que dicha expresión se simplifica:

$$2.M_{i(lz)} \cdot x_{(lz)} + 2.M_{s(hz-1)} \cdot x_{(hz-1)} = M_{i(hz-1)} \cdot x_{(hz-1)}$$

teniendo en cuenta la nomenclatura empleada en el ejercicio anterior:

$$2.M + 2.M.x = + M_{i(hz-1)} \cdot x$$

de donde finalmente:

$$M = \frac{M_{i(hz-1)} \cdot x}{2 \cdot (1+x)}$$

habiendo cambiado el signo a $M_{i(hz-1)}$ causa de tener sentido antagónico al supuesto en la deducción de la expresión (159).

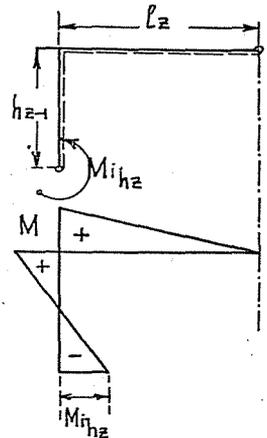


Figura n° 92

(Concluirá)