

# ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS DE HORMIGÓN ARMADO

(Cálculo de estructuras hiperestáticas con o sin acartelamientos y sesgos)

POR EL

**Ing. Civil Luis Sobrino Aranda**

Profesor suplente por concurso de: "Estabilidad de Construcciones" y "Construcciones de Hormigón Armado" en la Universidad Nacional de Córdoba. —  
Profesor de matemáticas en el Liceo Nacional de Señoritas de Rosario (Sta. Fe)

## CAPITULO VI

### Viga continua con tramos acartelados

(Cargas exteriores)

1°) **Generalidades.**

2°) **Tramos con iguales momentos de inercia.**

- a) Caso de extremos libres.
- b) Caso de extremos empotrados.
- c) Casos de extremos volados.

Ejemplos y comparación de resultados.

3.) **Tramos con diferentes momentos de inercia.**

- a) Caso de extremos libres.
- b) Caso de extremos empotrados.
- c) Casos de extremos volados.

Ejemplos y comparación de resultados.

1°) **Generalidades** — A igual de otras condiciones (solicitaciones exteriores, dimensiones, etc.) el momento flector de una sección de un tramo cualquiera altera su valor con la variación de los momentos de inercia en su propio tramo y con la de los demás.

Débase así desdoblar el estudio, ya complejo de por sí por las numerosas combinaciones a que dan lugar la naturaleza de las cargas, número de tramos, sus respectivas longitudes, naturaleza de los vínculos de sustentación extremos, en dos partes: la primera, en que se abordará la viga continua cuyos momentos de inercia sean iguales en los centros de todos los tramos, pudiendo tener acartelamientos cualesquiera, aun variables de tramo a tramo, y la segunda, en que trataremos la viga continua cuyos extremos tengan en sus respectivos centros momentos de inercia diferentes, sin acartelamientos o con cualesquiera dimensiones de ellos.

Pueden abordarse ambos estudios en forma semejante al empleado en los capítulos anteriores, llegándose a expresiones análogas a las deducidas al tratar la viga continua sin acartelamientos.

2º.) Tramos de iguales momentos de inercia —

Debemos deducir la ecuación generalizada de Clapeyron para este caso, para lo que formularemos la correspondiente condición de continuidad.

La expresión general para I variable es (Expresión 31):

$$\frac{\eta_1^c}{l_1} \cdot \int_A^B \frac{M^c \cdot dx}{I} - \frac{\eta_1^m}{l_1} \cdot \int_A^B \frac{-M^m \cdot dx}{I} = \frac{\xi_2^m}{l_2} \cdot \int_B^C \frac{-M^m \cdot dx}{I} - \frac{\xi_2^c}{l_2} \cdot \int_B^C \frac{M^c \cdot dx}{I}$$

Si los tramos tienen acartelamientos:

$$a). \quad \beta_1^c = \frac{\eta_1^c}{l_1} \cdot \int_A^B \frac{M^c \cdot dx}{I} = \frac{l_1}{6 \cdot I_{(1)}} \cdot C_{(1)} \cdot e_d^c(1) \cdot \frac{1}{E}$$

$$b). \quad \alpha_2^c = \frac{\xi_2^c}{l_2} \cdot \int_B^C \frac{M^c \cdot dx}{I} = \frac{l_2}{6 \cdot I_{(2)}} \cdot C_{(2)} \cdot e_d^c(2) \cdot \frac{1}{E}$$

$$c). \quad \beta_1^m = \frac{\eta_1^m}{I_1} \cdot \int_A^B \frac{-M^m dx}{I} = - \left[ \frac{l_1}{6 \cdot I_{(1)}} \cdot Mo \cdot Co_{(1)} + \right. \\ \left. + \frac{l_1}{6 \cdot I_{(1)}} \cdot M_1 \cdot Ca_{(1)} \right] \cdot \frac{1}{E} = \\ = - \frac{l_1}{6 \cdot I_{(1)}} \cdot \frac{1}{E} \left[ Mo \cdot Co_{(1)} + M_1 \cdot Ca_{(1)} \right].$$

$$d). \quad \alpha_2^m = \frac{\zeta_2^m}{I_2} \cdot \int_B^C \frac{-M dx}{I} = - \left[ \frac{l_2}{6 \cdot I_{(1)}} \cdot M_1 \cdot Ca_{(2)} + \right. \\ \left. + \frac{l_2}{6 \cdot I_{(1)}} \cdot M_2 \cdot Co_{(2)} \right] \cdot \frac{1}{E} = - \frac{l_2}{6 \cdot I_{(1)}} \cdot \frac{1}{E} \left[ M_1 \cdot Ca_{(2)} + M_2 \cdot Co_{(2)} \right]$$

de donde:

$$\frac{l_1}{6 \cdot I_{(1)}} \cdot \frac{1}{E} \cdot C_{(1)} \cdot c_d^c_{(1)} + \frac{l_2}{6 \cdot I_{(1)}} \cdot \frac{1}{E} \cdot C_{(2)} \cdot c_d^c_{(2)} = - \frac{l_1}{6 \cdot I_{(1)}} \cdot \frac{1}{E} \cdot \\ \left[ Mo \cdot Co_{(1)} + M_1 \cdot Ca_{(1)} \right] - \frac{l_2}{6 \cdot I_{(1)}} \cdot \frac{1}{E} \cdot \left[ M_1 \cdot Ca_{(2)} + M_2 \cdot Co_{(2)} \right]$$

Simplificando E, y como por hipótesis  $I_{(1)} = I_{(2)} = \text{constante}$ , se tiene:

$$l_1 \cdot C_{(1)} \cdot c_d^c_{(1)} + l_2 \cdot C_{(2)} \cdot c_d^c_{(2)} = - l_1 \cdot [Mo \cdot Co_{(1)} + M_1 \cdot Ca_{(1)}] - \\ - l_2 \cdot [M_1 \cdot Ca_{(2)} + M_2 \cdot Co_{(2)}]$$

de la que:

$$(65) \quad \boxed{M_0 \cdot l_1 \cdot c_{0(1)} + M_1 \cdot [l_1 \cdot Ca_{(1)} + l_2 \cdot Ca_{(2)}] + M_2 \cdot l_2 \cdot Co_{(2)} = \\ = - [C_{(1)} \cdot l_1 \cdot c_d^c_{(1)} + C_{(2)} \cdot l_2 \cdot c_d^c_{(2)}]}$$

que escrita en esta forma:

$$\begin{aligned}
 & Mo \cdot l_1 \cdot Co_{(1)} + 2 \cdot M_1 \cdot \left[ l_1 \cdot \frac{Ca_{(1)}}{2} + l_2 \cdot \frac{Ca_{(2)}}{2} \right] + M_2 \cdot l_2 \cdot Co_{(2)} = \\
 (66) \quad & = - \left[ C_{(1)} \cdot l_1 \cdot c_{d(1)}^e + C_{(2)} \cdot l_2 \cdot c_{d(2)}^e \right]
 \end{aligned}$$

es en un todo semejante a la de Clapeyron. Para su empleo, deben tenerse en cuenta las siguientes reglas:

a) Si la carga es uniformemente repartida

$$C_{(1)} = P_1 \cdot l_1^2 \quad ; \quad C_{(2)} = P_2 \cdot l_2^2 \quad ; \quad \text{etc.}$$

y si es concentrada:

$$C_{(1)} = P_1 \cdot l_1 \quad ; \quad C_{(2)} = P_2 \cdot l_2 \quad ; \quad \text{etc.}$$

b) Los valores "c" corresponden siempre a los tramos señalados por el índice del factor l, del mismo término. Esta regla haría superfluo el uso de los índices  $(1)$ ;  $(2)$ , etc., en los coeficientes "c", dejándolos, sin embargo, para una mayor claridad. Para encontrar, v. gr.:  $c_{i(1)}^e$  del primer tramo, factor del primer término del segundo miembro; se debe conocer los pares de valores  $\Delta h/h$  y  $\Delta l/l$  del tramo que corresponde que es el  $l_1$ , dando el gráfico el valor de  $C_{i(1)}^e$  buscado. Si algún tramo no tiene acartelamiento y otros sí, para aquellos como:  $\Delta h=0$  y  $\Delta l=0$ , el valor de "c" es el indicado en los ejes coordenados, y para éstos el que corresponda al respectivo par de valores.

Por generalización, ya que desde un punto de vista conceptual no se ganaría nada, se consignan directamente las fórmulas para los casos en que los extremos sean libres, empotrados o volados.

a) **Extremos libres** — Las fórmulas que permiten resolver cualquier problema de esta naturaleza son:

$$2 \cdot M_1 \cdot \left[ l_1 \cdot \frac{Ca(l_1)}{2} + l_2 \cdot \frac{Ca(l_2)}{2} \right] + M_2 \cdot l_2 \cdot Ca(l_2) = -$$

$$- \left[ C_{(l_1)} \cdot l_1 \cdot c_{d(l_1)}^c + C_{(l_2)} \cdot l_2 \cdot c_{i(l_2)}^c \right] \quad (67)$$

$$M_1 \cdot l_2 \cdot c_{o(l_2)} + 2 \cdot M_2 \cdot \left[ l_2 \cdot \frac{ca(l_2)}{2} + l_3 \cdot \frac{ca(l_3)}{2} \right] + M_3 \cdot l_3 \cdot c_{o(l_3)} =$$

$$= - \left[ C_{(l_2)} \cdot l_2 \cdot c_{d(l_2)}^c + C_{(l_3)} \cdot l_3 \cdot c_{i(l_3)}^c \right] \quad (68)$$

.....

.....

$$M_{(ln-2)} \cdot l_{n-2} \cdot c_{o(ln-1)} + 2 \cdot M_{n-1} \cdot \left[ l_{n-1} \cdot \frac{Ca(ln-1)}{2} + l_n \cdot \frac{Ca(ln)}{2} \right] =$$

$$= - \left[ C_{(ln-1)} \cdot l_{n-1} \cdot c_{d(ln-1)}^c + C_{(ln)} \cdot l_n \cdot c_{i(ln)}^c \right] \quad (69)$$

b) **Extremos empotrados** — Procediendo análogamente, se tiene que la condición de empotramiento extremo (Fórm. 50) es:

$$\alpha = - \frac{\xi_1^m}{l_1} \int_0^{l_1} \frac{M^m \cdot dx}{I} = - \frac{\xi_1^c}{l_1} \int_0^{l_1} \frac{M^c \cdot dx}{I}$$

como:

$$\alpha = \frac{\xi_1^c}{l_1} \int_0^{l_1} \frac{M^c \cdot dx}{I} = \frac{l_1}{6 \cdot I_{(l_1)}} \cdot C_{(l_1)} \cdot \frac{1}{E} \cdot c_{i(l_1)}^c$$

$$\alpha = - \frac{\xi_1^m}{l_1} \int_0^{l_1} \frac{M^m \cdot dx}{I} = - \left[ \frac{l_1}{6 \cdot I_{(l_1)}} \cdot M_0 \cdot c_{a(l_1)} + \frac{l_1}{6 \cdot I_{(l_1)}} \cdot M_1 \cdot c_{o(l_1)} \right] \cdot \frac{1}{E}$$

resulta, simplificando:

$$C_{(1)} \cdot c_{i(1)} = - [M_0 \cdot c_{a(1)} + M_1 \cdot c_{o(1)}]$$

o:

$$2 \cdot M_0 \cdot \frac{c_{a(1)}}{2} + M_1 \cdot c_{o(1)} = - C_{(1)} \cdot c_{i(1)} \quad (\text{fórmula 70})$$

que conjuntamente con las siguientes resuelve el problema

$$(71) \quad M_0 \cdot l_1 \cdot c_{o(l_1)} + 2 \cdot M_1 \cdot \left[ l_1 \cdot \frac{c_{a(l_1)}}{2} + l_2 \cdot \frac{c_{a(l_2)}}{2} \right] + M_2 \cdot l_2 \cdot c_{o(l_2)} = \\ - \left[ C_{(1)} \cdot l_1 \cdot c_{i(l_1)} + C_{(2)} \cdot l_2 \cdot c_{i(l_2)} \right]$$

.....  
 .....

$$(72) \quad M_{(1n-2)} \cdot l_{n-1} \cdot c_{o(1n-1)} + 2 \cdot M_{(1n-1)} \cdot \left[ l_{n-1} \cdot \frac{c_{a(1n-1)}}{2} + l_n \cdot \frac{c_{a(1n)}}{2} \right] + M_{1n} \cdot l_n \cdot c_{o(1n)} = \\ - \left[ C_{(1n-1)} \cdot l_{n-1} \cdot c_{i(1n-1)} + C_{(1n)} \cdot l_n \cdot c_{i(1n)} \right]$$

$$(73) \quad M_{(n-1)} \cdot c_{o(1n)} + 2 \cdot M_{(n)} \cdot \frac{c_{a(1n)}}{2} = - c_{(1n)} \cdot c_{i(1n)}$$

c) **Extremos volados** — Si la viga termina en extremos volados, se conocen los momentos  $M_0$  y  $M_{(1n)}$ , calculándose además con las mismas fórmulas anteriores (caso b), excepto las fórmulas núms 70 y 73

**Problema N° 18** — Se desea obtener el diagrama de momentos flectores de una viga continua de tres tramos, de hormigón armado, estando el central sometido a la acción de una carga uniformemente repartida de 4000 kgr./m. La viga tiene los acartelamientos indicados en la fig. N° 47.

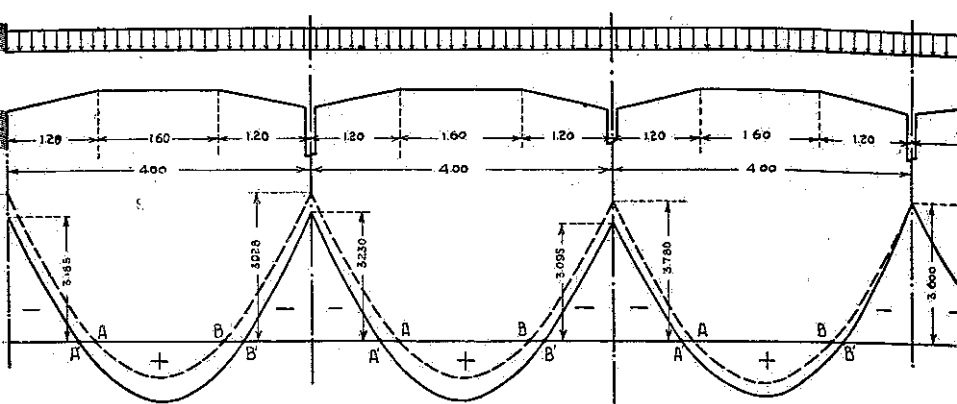


Figura 47

**Caso I = constante** — La ecuación de Clapeyron aplicada a este caso, da:

$$2 M_1 \cdot (l_1 + l_2) + M_1 \cdot l_2 = -\frac{p_2 \cdot l_2^3}{4}$$

pués:

$$M_0 = 0 ; M_1 = M_2 \text{ y } p_1 = 0 = p_3$$

reemplazando valores:

$$33,60 M_1 = -373,248$$

ó:

$$M_1 = -\frac{373,248}{33,60} = -11.108 \text{ kgms.}$$

El momento positivo en el centro del tramo  $l_2$  es:

$$M_0 = \frac{pl^2}{8} - 11.108 = 25.920 - 11.108 = +14.812 \text{ kgms.}$$

**Caso en que se tienen en cuenta los acartelamientos** — Se deben aplicar las fórmulas (67):

$$2 \cdot M_1 \cdot \left( l_1 \cdot \frac{Ca_{(1)}}{2} + l_2 \cdot \frac{Ca_{(2)}}{2} \right) + M_2 \cdot l_2 \cdot 0 = - \\ - C_{(1_2)} \cdot l_2 \cdot c_{i(1_2)}$$

como:

$$l_1 = 6,00 \text{ mts.}; l_2 = 7,20 \text{ mts.}; M_1 = M_2 \text{ y } C_{(1_2)} = p_2 \cdot l_2^2$$

resulta:

$$M_1 \cdot [6 \times c_{a(1)} + 7,20 \cdot c_{a(1_2)} + 7,20 \cdot c_{o(1_2)}] = \\ = -4.000 \times 7,20^2 \times c_{i(1_2)}$$

Los gráficos dan:

a) Gráfico N° 3 :  $c_a = 1,67$   $1,67 \times 6 = 10,020$

b) Gráfico N° 3 :  $c_a = 1,53$   $1,53 \times 7,20 = 11,015$

c) Gráfico N° 2 :  $c_o = 0,91$   $0,91 \times 7,20 = 6,552$

Total factor de  $M_1 = 27,587$

d) Gráfico N° 5 :  $c_{i(1_2)} = 0,235$

pués:  $\frac{\Delta h_1}{h_1} = \frac{\Delta h_2}{h_2} = \frac{0,90 - 0,60}{0,60} = 0,50$  y  $\frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{\Delta l_2}{l_2} = 0,20$

La expresión anterior se transforma en:

$$27,587 M_1 = -350,853$$

$$M_1 = \frac{350,853}{27,587} = - \sim 12.718 \text{ kgms.}$$

El momento en el centro del tramo  $l_2$  es:

$$M_o = 25.920 - 12.718 = +13.202$$

**Comparación de resultados** — Además de desplazar los puntos de inflexión, cambiando el signo de los momentos entre A y A', y, B y B', se constatan las siguientes diferencias:



a) Momento sobre el apoyo =

$$= (M_1) 100 \frac{12.718 - 11.108}{12.718} = 12,60 \%$$

b) Momento  $M_c$  en el centro de =

$$= 100 \frac{14.812 - 13.202}{13.202} = 12,20 \%$$

Puede observarse aquí, aún en este caso en que los acartelamientos no son exagerados, sino normales, que los errores encontrados al emplear las fórmulas simplificadas (caso I constante) son de significación.

En problemas como el presente, es conveniente calcular las dimensiones y secciones por la fórmula simplificada, y luego, en base a la sencillez del cálculo expuesto, tener en cuenta los acartelamientos hallando los momentos verdaderos, recalculando con éstos, sin variar las secciones de hormigón, las exactas del metal.

**Problema N° 19** — Se desea conocer el diagrama de momentos flectores de la viga de un entrepiso, cuyas dimensiones transversales y longitudinales y cargas se consignan en la fig. N° 48.

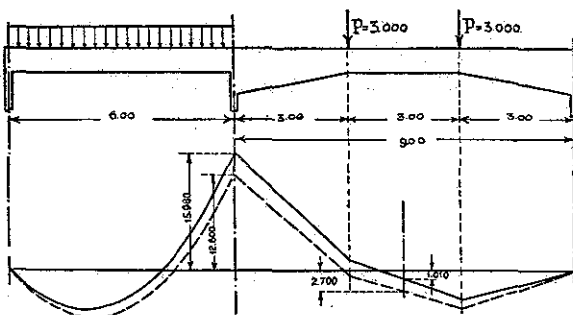


Figura 48

a) Si suponemos  $I = \text{constante}$ :

$$2 \cdot M_1 \cdot (l_1 + l_2) = - [Kd_1 \cdot l_1 + Ki_2 \cdot l_2]$$

Como: (tabla I<sup>a</sup>)

$$Kd_1 = \frac{p_1 l_1^2}{4} = \frac{4.000 \times 6^2}{4} = 36.000$$

$$Ki_2 = \frac{2}{3} \cdot Pl_2 = \frac{2}{3} \cdot 3000 \times 9 = 18.000$$

Luego:

$$2 \cdot M_1 (6 + 9) = - [36.000 \times 6 + 18.000 \times 9] = \\ = - [216.000 + 162.000] = - 378.000$$

y finalmente:

$$M_1 = - \frac{378.000}{30} = - 12.600 \text{ Kgms.}$$

Los momentos en el centro de los tramos son:

a) en el primero:

$$Mc_1 = \frac{p_1 l_1^2}{8} = \frac{12600}{2} = 11.700$$

b) en el segundo:

$$Mc_2 = \frac{P \cdot l_2}{3} = \frac{12600}{2} = 9.000 - 6.300 = 2.700 \text{ kgms.}$$

b) Se tienen en cuenta los acartelamientos: Teniendo presente la expresión 67, simplificada para este caso:

$$2 \cdot M_1 \left[ l_1 \cdot \frac{Ca_{(1)}}{2} + l_2 \cdot \frac{Ca_{(2)}}{2} \right] = \\ = \left[ C_{(1)} \cdot l_1 \cdot e_{d(1)}^c + C_{(2)} \cdot l_2 \cdot e_{i(2)}^c \right]$$

pués:

$$M_2 = 0$$

La carga del segundo tramo consiste en dos fuerzas concentradas que actúan en  $x = 0.333 l_2$  y  $0.666 l_2$ ; si tuviéramos un gráfico para este sistema de cargas, bastaría adoptar el coeficiente  $c^c$  que correspondiese, teniendo en cuenta el par de valores  $\Delta h/h$  y  $\Delta l/l$ ; en nuestro caso, debemos desdoblarlo en las dos fuerzas, de donde:

$$M_1 \cdot [l_1 \cdot c_{a(l_1)} + l_2 \cdot c_{a(l_2)}] = \\ = - [C_{(l_1)} \cdot l_1 \cdot c_{i(l_1)}^c + C'_{(l_2)} \cdot l_2 \cdot c_{i(l_2)}^c + C''_{i(l_2)} \cdot l_2 \cdot c_{i(l_2)}^{c''}]$$

en la que  $c_{i(l_2)}^c$  y  $c_{i(l_2)}^{c''}$  corresponden separadamente a cada fuerza concentrada considerada aisladamente.

Reemplazando: como  $l_1 = 6.00$  mts.;  $l_2 = 9.00$  mts.;

$$C_{(l_1)} = p_1 \cdot l_1^2 = 4000 \times 36 = 144.000;$$

$$C'_{(l_2)} = 3000 \times 9 = 27.000$$

$$\text{y } C''_{(l_2)} = 3000 \times 9 = 27.000$$

se tiene:

$$M_1 \cdot [6 \times c_{a(l_1)} + 9 \times c_{a(l_2)}] = \\ = - [864.000 \times c_{i(l_1)}^c + 243.000 (c_{i(l_2)}^c + c_{i(l_2)}^{c''})]$$

Para la determinación de los valores "c" debe tenerse presente que:

a) primer tramo:

$$\frac{\Delta h_1}{h_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\Delta l_1}{l_1} = 0$$

b) segundo tramo.

$$\frac{\Delta h_2}{h_2} = \frac{1.20 - 0.60}{0.60} = 1$$

$$\frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{3.00}{9.00} = 0.333$$

con lo que:

$$a) \text{ Gráfico N.º 3 ; } e_{a(1_1)} = 2.00 \quad ; \quad 2 \times 6 = 12.00$$

$$b) \text{ Gráfico N.º 3 ; } e_{a(1_2)} = 1.02 \quad ; \quad 1,02 \times 9 = 9.18$$

$$\text{Total factor de } M_1 \quad = 21.18$$

$$c) \text{ Gráfico N.º 5 ; } e_{i(1_1)}^c = 0.25 \quad ; \quad 0.25 \times 864.000 = 216.000$$

$$d) \text{ Gráfico N.º 8 ; } e_{i(1_1)}^{c'} = 0.232 \quad , \quad 0.232 \times 243.000 \\ = 122.472$$

$$e) \text{ Gráfico N.º 7 ; } e_{i(1_2)}^{c''} = 0.272 \quad ; \quad 0.272 \times 243.000$$

$$\text{Total 2.º miembro} \quad = 338.472$$

Cabe hacer notar que por simetría el  $e_{i(1_2)}^{c''}$  de la fuerza  $P = 3.000$  en  $x = 0.66 l_2$  es el  $e_{i(1_1)}^{c'}$  de la fuerza  $P = 3.000$  en  $x = 0.333 l_2$ .

$$\text{Luego:} \quad 21.18 M_1 = - 338.472$$

$$M_1 = - \frac{338.472}{21.18} = - 15.980 \text{ kgms.}$$

Los momentos en los centros de los tramos son:

$$a) \text{ 1.º tramo: } M_c = 18.000 \frac{15980}{2} = + 10.010 \text{ kgms.}$$

$$b) \text{ 2.º tramo: } M_c = 9.000 - 7990 = + 1.010 \text{ kgms.}$$

**Comparación de resultados:**

$$a) \text{ sobre el apoyo central: } 100 \cdot \frac{15.980 - 12.600}{12.600} = + 26,80 \%$$

$$b) \text{ } M_c \text{ en el primer tramo: } 100 \cdot \frac{11.700 - 10.010}{10.010} = - 16,80 \%$$

c)  $M_c$  en el segundo tramo:  $100 \cdot \frac{2.700 - 1.010}{1.010} = -158. \%$

Puede observarse que al aumentar las dimensiones de los acartelamientos en el 2° tramo, la variación de momentos sobre el apoyo es paralela, alcanzando en el centro una disminución del 158 %.

**Problema N°. 20** — Se desea conocer el diagrama de momentos flectores correspondiente a una viga continua de tres tramos iguales de 4.00 mts. de luz, cuyo extremo izquierdo está empotrado, presentando el derecho un voladizo de 1.707 mts. de saliente. La carga que actúa es uniformemente repartida de:  $p_1 = p_2 = p_3 = p_v = 2.400$  Kgr./m.

Los acartelamientos y otros datos se consignan en la fig.

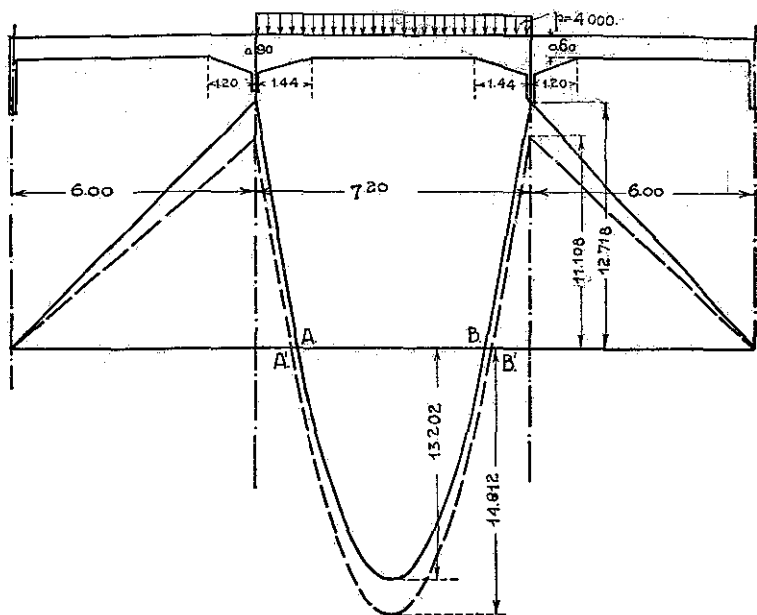


Figura 49

**Caso I constante —**

$$M_s = -\frac{pl_v^2}{2} = -\frac{2400}{2} \times 1.707^2 = -3.600 \text{ kgms.}$$

Las expresiones tipo Clapeyron son:

$$2.M_0 + M_1 = -\frac{pl^2}{4} = 9.600$$

$$M_0.l_1 + 2.M_1.(l_1 + l_2) + M_2.l_2 = -[9.600.l_1 + 9.600.l_2]$$

$$M_1.l_2 + 2.M_2.(l_2 + l_3) + M_3.l_3 = -[9.600.l_2 + 9.600.l_3]$$

que se reducen a:

$$2.M_0 + M_1 = 9.600 \quad (a.)$$

$$M_0 + 4.M_1 + M_2 = -19.200 \quad (b.)$$

$$M_1 + 4.M_2 + M_3 = -19.200 \quad (c.)$$

Eliminando  $M_0$  entre (a) y (b) queda:

$$M_1 = \frac{38.400 + M_2}{13} = \frac{38.400 - 3.600}{13} = 3.230 \text{ kgms.}$$

Reemplazando este valor en la (a)

$$M_0 = -3.185 \text{ kgms.}$$

De la (b):

$$M_2 = -19.200 + 3.185 + 12.920 = -3.095 \text{ kgms.}$$

**Caso II — Se tiene en cuenta la influencia de los acartelamientos —** Las expresiones tipo Clapeyron son:

$$2.M_0 \frac{c_a(l_1)}{2} + M_1 c_o(l_1) = -C_{(l_1)} \cdot c_i^c(l_1) \quad (a)$$

$$M_0 \cdot c_o(l_1) + 2.M_1 \left( \frac{c_a(l_1)}{2} + \frac{c_a(l_2)}{2} \right) + M_2 \cdot c_o(l_2) =$$

$$= - [C_{(1)} \cdot l_1 \cdot e_d^c(1) + C_{(1)} \cdot l_2 \cdot e_i^c(1)] \quad (b)$$

$$M_1 \cdot e_o(1) + 2 \cdot M_2 \left( \frac{e_a(1)}{2} + \frac{e_a(1)}{2} \right) + M_3 \cdot e_o(1) =$$

$$= - [C_{(1)} \cdot l_2 \cdot e_d^c(1) + C_{(1)} \cdot l_3 \cdot e_i^c(1)] \quad (c)$$

como:

$$\frac{\Delta h_1}{h} = \frac{\Delta h_2}{h} = \frac{\Delta h_3}{h} = \frac{\Delta h}{h} = \frac{75 \cdot 50}{50} = 0.50$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \text{constante} = \frac{1.20}{4} = 0.30$$

$$e_a(1) = e_a(2) = e_a(3) \quad C(1) = C(2) = C(3) = pl^2$$

$$e_o(1) = e_o(2) = e_o(3) \quad \text{y} \quad e_i^c(1) = e_d^c(1) = e_i^c(1) = e_i^c(1) = \text{etc.}$$

resulta:

- a) — Gráfico N° 3 ;  $e_a = 1.35$   
 b) — Gráfico N° 2 ,  $e_o = 0.55$   
 c) — Gráfico N° 4 ;  $e^c = 0.214$

Reemplazando estos valores en las expresiones (a), (b) y (c), y simplificando, se obtiene:

$$1.35 M_0 + 0.85 M_1 = - pl^2 \times 0.214 = - 8.217,60$$

$$0.55 M_0 + 2.70 M_1 + 0.85 M_2 = - 2. pl^2 \cdot 0.214 = - 16,435^{29}$$

$$0.85 M_1 + 2.70 M_2 + 0.85 M_3 = - 16.435,^{29}$$

Como  $M_3 = - 3.600$ , el sistema que resuelve el problema es:

$$1,35 M_0 + 0,85 M_1 = - 8.217,^{60}$$

$$0.85 M_0 + 2.70 M_1 + 0,85 M_2 = - 16,435,^{29}$$

$$0.85 M_1 + 2.70 M_2 = - 13.375,^{29}$$

que resuelto dá:

$$M_0 = - 3740 \text{ kgms.}$$

$$M_1 = - 3728 \text{ kgms.}$$

$$M_2 = - 3780 \text{ kgms.}$$

## Comparación de resultados —

CASOS	VALORES EN LOS MOMENTOS SOBRE LOS APOYOS			%	%	%
	$M_0$	$M_1$	$M_2$	$M_0$	$M_1$	$M_2$
I constante	— 3185	— 3230	— 3095	—	—	—
I variable	— 3740	— 3728	— 3780	— 14,80	— 13,36	— 17,80

CASOS	VALORES DE MOMENTOS EN CENTROS DE TRAMOS			%	%	%
	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_1$	$l_2$	$l_3$
I constante	+ 1593	+ 1623	+ 1458			
I variable	+ 1066	+ 1042	+ 1110	50	56	31, <sup>80</sup>

Como en casos anteriores, puede constatar-se que la influencia de los acartelamientos no es despreciable, sino de consideración: aumenta el valor de los momentos sobre los apoyos, disminuyéndolos en concordancia de los centros de los tramos, y que los gráficos y procedimientos de cálculo que preconizamos permite obtener los resultados exactos con tanta facilidad como la que implica el uso de las expresiones de Clapeyron .

## 3º.) Tramos con diferentes momentos de inercia.

Si se desea tratar con toda generalidad la viga continua debe tenerse en cuenta la influencia de los acartelamientos y de los diferentes valores de los momentos de inercia en todos los tramos.

La primera se consigue mediante los coeficientes "e" y la segunda con los "x". Ambos aparecen en forma de producto reemplazando a la longitud del tramo del mismo índice en la fórmula de Clapeyron.



Un problema se puede verificar, entonces, de tres maneras, según sean las hipótesis que se formulen. La más elemental e imprecisa es suponer los momentos de inercia constantes en toda la viga, con lo que el problema admite también cálculo directo, mediante las expresiones Clapeyron; la segunda, prescindiendo de los acartelamientos y tiene en cuenta los valores de los momentos de inercia de los centros de los diferentes tramos suponiéndolos constantes a lo largo de ellos, no permite su cálculo directo sino por aproximaciones mediante el empleo de unas expresiones semejantes a las de Clapeyron, en las que se reemplaza la longitud de cada tramo por el coeficiente de flexibilidad de ese mismo tramo. Si la viga no tiene acartelamientos, esta verificación da valores exactos.

El tercero corresponde al caso más general y como tiene en cuenta la verdadera variación de los valores  $I$ , inclusive los acartelamientos, es evidente que al corresponder más a la realidad, es también el más exacto.

Pasaremos ahora a deducir las fórmulas respectivas. Si a la expresión 64 bis del capítulo anterior, la multiplicamos por el cociente denominando:

$$x_1 = \frac{I_0}{I_1} \cdot \frac{l_1}{l_0}; x_2 = \frac{I_0}{I_2} \cdot \frac{l_2}{l_0}; x_3 = \frac{I_0}{I_3} \cdot \frac{l_3}{l_0} = \text{etc.}$$

se obtiene, simplificando:

$$\begin{aligned} M_0 \cdot x_1 \cdot c_{0(1)} + 2 \cdot M_1 \cdot \left( x_1 \cdot \frac{c_{a(1)}}{2} + x_2 \cdot \frac{c_{a(2)}}{2} \right) + M_2 \cdot x_2 \cdot c_{0(2)} = \\ = - [ C_{(1)} \cdot c_{d(1)}^c \cdot x_1 + C_{(2)} \cdot x_2 \cdot c_{i(2)}^c ] \end{aligned} \quad \text{(fórmula 74)}$$

que es la fórmula tipo Clapeyron más general que es posible obtener. Los coeficientes  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , etc., tienen en cuenta los diversos valores numéricos de los momentos de inercia de los tramos, y los  $c_1$ ,  $c_2$ , etc., los diferentes acartelamientos, con la única limitación de su simetría, aunque pueden variar de tramo a tramo.

Los demás grupos de fórmulas para cuando los vínculos de sustentación extremos sean apoyados, empotrados, etc., las deduciremos por analogía a las consignadas en el capítulo anterior, ya que la 74 y la 66 son semejantes, deduciéndose la primera de la segunda permutando los valores  $l_1, l_2, l_3$ , etc., por  $x_1, x_2, x_3$ , etc.

a) Extremo simplemente apoyado:

$$2 \cdot M_1 \left( x_1 \cdot \frac{c_a(l_1)}{2} + x_2 \cdot \frac{c_a(l_2)}{2} \right) + M_2 \cdot x_2 \cdot c_o(l_2) =$$

$$= - [ C_{(l_1)} \cdot x_1 \cdot c_d^c(l_1) + C_{(l_2)} \cdot x_2 \cdot c_i^c(l_2) ]$$

$$M_1 \cdot x_2 \cdot c_o(l_2) + 2 \cdot M_2 \left( x_2 \cdot \frac{c_a}{2} + x_3 \cdot \frac{c_a(l_3)}{2} \right) + M_3 \cdot x_3 \cdot c_o(l_3) =$$

$$= - [ C_{(l_2)} \cdot x_2 \cdot c_d^c(l_2) + C_{(l_3)} \cdot x_3 \cdot c_i^c(l_3) ]$$

.....

$$M_{(ln-2)} \cdot x_{(ln-1)} \cdot c_o(l_{n-1}) + 2 \cdot M_{(ln-1)} \cdot \left[ x_{(ln-1)} \cdot \frac{c_a(l_{n-1})}{2} + x_{(ln)} \cdot \frac{c_a(l_n)}{2} \right] =$$

$$= - [ C_{(ln-1)} \cdot x_{(ln-1)} \cdot c_d^c(l_{n-1}) + C_{(ln)} \cdot x_{(ln)} \cdot c_i^c(l_n) ]$$

b) extremos empotrados:

$$2 \cdot M_0 \frac{c_a(l_1)}{2} + M_1 \cdot c_o(l_1) = - C_{(l_1)} \cdot c_d^c(l_1)$$

$$M_0 \cdot x_1 \cdot c_o(l_1) + 2 \cdot M_1 \cdot \left[ x_1 \cdot \frac{c_a(l_1)}{2} + x_2 \cdot \frac{c_a(l_2)}{2} \right] + M_2 \cdot x_2 \cdot c_o(l_2) =$$

$$= - [ C_{(l_1)} \cdot x_1 \cdot c_d^c(l_1) + C_{(l_2)} \cdot x_2 \cdot c_i^c(l_2) ]$$

.....

$$M_{(ln-2)} \cdot X_{(ln-1)} \cdot C_{o(ln-1)} + 2 \cdot M_{(ln-1)} \cdot \left[ X_{(ln-1)} \cdot \frac{C_a(ln-1)}{2} + X_{(ln)} \cdot \frac{C_a(ln)}{2} \right] +$$

$$+ M_n \cdot X_n \cdot C_{o(ln)} = - [C_{(ln-1)} \cdot X_{(ln-1)} \cdot C_{d(ln-1)} + C_{(ln)} \cdot X_{(ln)} \cdot C_{i(ln)}]$$

$$M_{(ln-1)} \cdot C_{o(ln-1)} + 2 \cdot M_n \cdot \frac{C_a(ln)}{2} = - C_{(ln)} \cdot X_{(ln)} \cdot C_{i(ln)}$$

c) Extremos volados: Si la viga termina en extremos volados, se conocen los momentos  $M_n$  y  $M_o$ , calculándose con las mismas expresiones anteriores, excepto la primera y última que corresponden a las condiciones de empotramiento.

**Problema N° 21** — Sea la viga dibujada en la figura 50, sometida a una carga uniformemente repartida de 2.400 Kgr/m., deseándose conocer los diagramas de momentos para los tres casos enunciados.

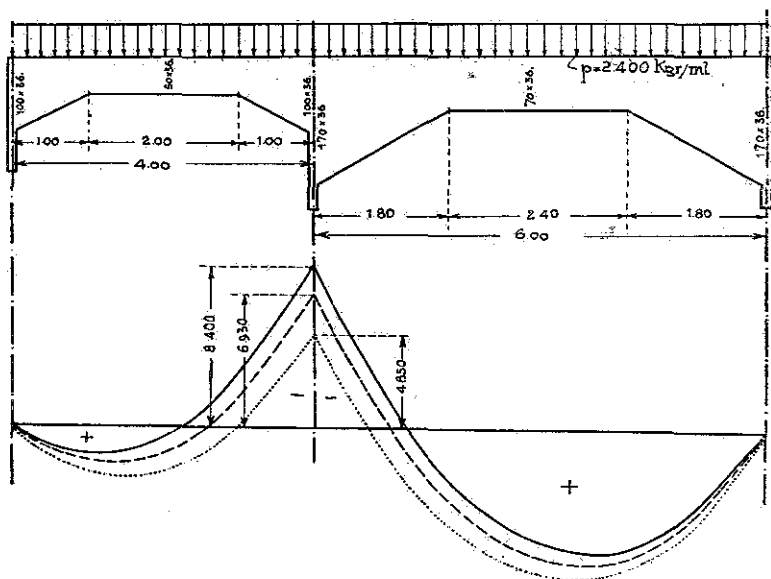


Figura 50.

**Caso I°.** — La ecuación de Clapeyron es:

$$2 M_1 (l_1 + l_2) = - \frac{pl_1^3}{4} - \frac{pl_2^3}{4}$$

$$20 M_1 = - 168.000$$

$$M_1 = - 8.400 \text{ kgms.}$$

**Caso II°.** — Calcularemos previamente los coeficientes de flexibilidad.

$$x_1 = \frac{I_0 \cdot l_1}{I_1 \cdot l_0} = \frac{I_1 \cdot l_1}{I_1 \cdot l_1} = 1$$

$$x_2 = \frac{I_0 \cdot l_2}{I_2 \cdot l_0} = \frac{I_1 \cdot l_2}{I_2 \cdot l_1}$$

Adoptando como valores  $I_0$  y  $l_0$  cualesquiera, los de  $I_1$  y  $l_1$ . De las secciones indicadas en la figura:

$$I_1 = \frac{36 \times 50^3}{12} = 3 \times 50^3 = 375.000 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = 3 \times 70^3 = 1.029.000 \text{ cm}^4$$

luego:

$$x_1 = 1 ; \quad x_2 = \frac{375.000}{1.029.000} \cdot \frac{600}{400} = \sim 0,55$$

La expresión tipo Clapeyron es:

$$\begin{aligned} 2 M_1 \cdot (x_1 + x_2) &= - \left( \frac{p \cdot l_1^2}{4} \cdot x_1 + \frac{p \cdot l_2^2}{4} \cdot x_2 \right) = \\ &= - \frac{p}{4} (l_1^2 \cdot x_1 + l_2^2 \cdot x_2) \end{aligned}$$

$$\delta: \quad 2 \cdot M_1 (1 + 0,55) = - 600 (16 + 36 \times 0,55) = - 21.480$$

y finalmente:

$$M_1 = - \frac{21\,480}{3.10} = 6929 \text{ kgms.}$$

**Caso III°.** — Se tiene en cuenta además la influencia de los acartelamientos. La expresión que resuelve el problema en este caso es:

$$2 \cdot M_1 \cdot \left( x_1 \cdot \frac{c_{a(1)}}{2} + x_2 \cdot \frac{c_{a(2)}}{2} \right) = \\ = - [C_{(1)} \cdot x_1 \cdot c_{d(1)}^c + C_{(2)} \cdot x_2 \cdot c_{i(2)}^c]$$

$x_1$  y  $x_2$  fueron deducidos anteriormente; para obtener los "c" debemos conocer los pares de valores:

$$\frac{\Delta h_1}{h_1} = \frac{1.00 - 0.50}{0.50} = 1 \qquad \frac{\Delta I_1}{I_1} = \frac{1.00}{4.00} = 0,25$$

$$\frac{\Delta h_2}{h_2} = \frac{1.70 - 0.70}{0.70} = 1,43 \qquad \frac{\Delta I_2}{I_2} = \frac{1,80}{6.00} = 0,30$$

los gráficos dan:

- a) Gráfico n° 3 —  $c_{a(1)}$  = 1,23
- b) Gráfico n° 3 —  $c_{a(2)}$  = 0,98
- c) Gráfico n° 5 —  $c_{d(1)}^c$  = 0,2125
- d) Gráfico n° 5 —  $c_{i(2)}^c$  = 0,188

reemplazando:

$$2 \cdot M_1 \cdot (1 \times 1,23 + 0,55 \times 0,98) = \\ = - [p_1 \cdot I_1^2 \times 1 \times 0,2125 + p_2 \cdot I_2^2 \times 0,55 \times 0,188]$$

$$6: \quad 3.538 \cdot M_1 = - [8160 + 8933] = - 17.093$$

$$\text{Luego:} \quad M_1 = - \frac{17.093}{3.538} = \sim - 4850 \text{ kgms.}$$



Los esfuerzos de corte serían:

$$\text{tramo 1}^\circ. - 4800 + \frac{8400}{4} = \begin{cases} R_a = 2700 \\ R_b = 6900 \end{cases}$$

CASO I°. —

$$\text{tramo 2}^\circ. - 7200 + \frac{8400}{6} = \begin{cases} R_c = 8600 \\ R_d = 5800 \end{cases}$$

CASO II°. —

$$\text{tramo 1}^\circ. - 4800 + 1732 = \begin{cases} 3068 \\ 6532 \end{cases}$$

$$\text{tramo 2}^\circ. - 7200 + 1955 = \begin{cases} 8355 \\ 6045 \end{cases}$$

CASO III°. —

$$\text{tramo 1}^\circ. - 4800 + \frac{4850}{4} = \begin{cases} 3590 \\ 6010 \end{cases}$$

$$\text{tramo 2}^\circ. - 7200 + \frac{4850}{6} = \begin{cases} 3010 \\ 6390 \end{cases}$$

COMPARACION DE RESULTADOS

<i>Momentos de altura</i>	<i>Caso I°</i>	<i>Caso II°</i>	<i>Caso III°</i>	<i>Errores en % respecto al caso III°</i>	
				<i>Caso I°</i>	<i>Caso II°</i>
$M_1$	— 8400	— 6930	— 4850	73.— %	43.— %
$R_a$	2700	3068	3590	24, <sup>80</sup> %	14, <sup>30</sup> %
$R_b$	6900	6532	6010	14, <sup>80</sup> %	8, <sup>70</sup> %
$R_c$	8600	8355	3010	7, <sup>40</sup> %	4, <sup>30</sup> %
$R_d$	5800	6045	6390	9, <sup>30</sup> %	5, <sup>40</sup> %

puede observarse el elevado error en que se incurre al suponer constante el momento de inercia y al depreciar la influencia de los acartelamientos.

### PARTE III

#### Pórticos a vértices fijos

#### CAPITULO VII

##### GENERALIDADES

**Generalidades — Clasificación de los pórticos — Rigidez de los ángulos — Fundamentos del cálculo — Convención de signos de los momentos flectores — Nomenclatura a emplear.**

---

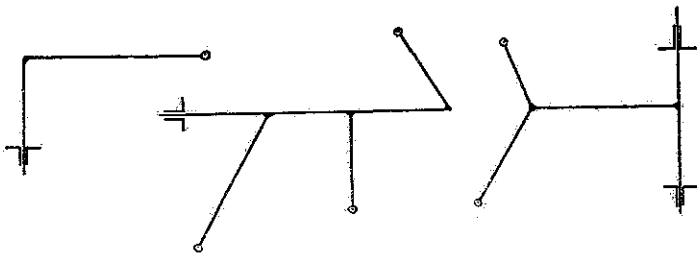
**Clasificación.** — La Estructura aporticada es la más general de todas y de ella por degeneraciones adecuadas pueden deducirse las tratadas anteriormente, cosa que haremos ver oportunamente en cada caso.

Los pórticos se clasifican teniendo en cuenta su forma geométrica, grado de multiplicidad, y la naturaleza de sus vínculos de sustentación.

Sin embargo, la más adecuada y moderna, teniendo presente ciertas características de deformación elástica que pueden precisarse de antemano con la sola inspección de su forma y vínculos de sustentación, es la que los divide en dos grandes grupos:

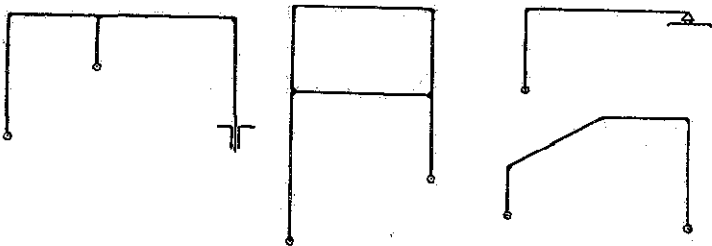
- a) Estructuras aporticadas con vértices fijos
- b) Idem con vértices desplazables.

Las figuras 51, 52 y 53 representan tres pórticos en los cuales la totalidad de sus vértices permanecen en su posición inicial para cualquier causa exterior que actúe sobre ellos (fuerzas o momentos),



Figuras 51, 52, 53

en cambio, los representados en las figuras 54 a 57 no tienen esa propiedad, pudiendo sufrir desplazamientos.



Figuras 54, 55, 56 y 57

**Indeformabilidad de los ángulos.** — El cálculo de todas estas formas ya sean a vértices fijos o desplazables, se hace partiendo del principio de la indeformabilidad de los ángulos, que se suponen permanecen con su valor inicial posteriormente a la deformación de la estructura, originada por cualquier sollicitación exterior, desplazamiento de apoyo o cambio de temperatura.

El procedimiento del cálculo que emplearemos es semejante al visto en capítulos anteriores.

Cortando el pórtico en forma de aislar sus pies derechos y tramos entre sí, podrán calcularse mediante la ayuda del primer teorema de Mohr las deformaciones angulares extremas originadas por las fuerzas o momentos exteriores.

Como estas deformaciones alteran los valores iniciales de los ángulos, que según hemos visto se suponen indeformables, es nece-



sario aplicar, en forma semejante a la empleada en las vigas empotradas y continuas, momentos extremos que las restituyan y que tomaremos siempre como incógnitas del problema.

Si las estructuras en estudio fuera a vértices desplazables se deben además tener en cuenta los ángulos secundarios originados por estos desplazamientos.

Trataremos las estructuras aportacadas con extremos articulados que dividiremos en dos grupos, según sean a vértices fijos o desplazables. Es de hacer notar, que el procedimiento de cálculo que exponemos es general cualquiera sea el grado de multiplicidad del pórtico, aunque su utilidad se reduce para estructuras que presenten más de tres incógnitas.

**Convención de signos de los momentos flectores.** — Estableceremos como positivos todos los momentos que originen tracciones en los cantos adyacentes a la línea de trazo interrumpido y negativos en caso contrario.

Estas líneas interrumpidas las trazaremos siempre por debajo del dintel y a la derecha (fig. N° 58) de los piés derechos de tal

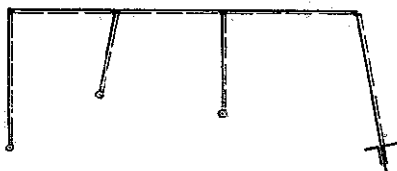


Figura 58

manera que la convención anterior de signos puede establecerse así:

“Serán positivos todos los momentos flectores que originen tracciones en las partes inferiores de los dinteles y en las partes derechas de los piés derechos; y negativos en caso contrario”.

Esta convención sobre la generalmente aceptada tiene la ventaja de permitir determinar el signo de los momentos flectores con precisión en un tramo o pié cualquiera (v. gr. el enésimo), y la desventaja de introducir una asimetría de signos de los momentos flectores en casos de forma y sollicitaciones simétricas

**Nomenclatura.** — Adoptaremos la siguiente:

- l — longitud de un tramo.
- h — idem de un pié derecho
- I — momento de inercia, y
- x — coeficiente de flexibilidad

el índice individualizará el tramo o pié derecho respectivo, así:  $I_{i_4}$ ;  $x_{h_3}$ ; etc. representarán respectivamente el momento de inercia del cuarto tramo y el coeficiente de flexibilidad del tercer pié derecho.

Además:

- $M_{d(ln)}$  y  $M_{i(ln)}$  representarán los momentos extremos derecho e izquierdo correspondientes al tramo enésimo.
- $M_{i(hn)}$  y  $M_{s(hn)}$  en igual forma los momentos extremos inferior y superior correspondientes al pié derecho enésimo.
- $K_{d(ln)}$  y  $K_{i(ln)}$  los valores K (derecha e izquierda) del tramo enésimo.
- $K_{i(hn)}$  y  $K_{d(hn)}$  los correspondientes a los extremos inferior y superior del pié derecho hn.

## CAPITULO VIII

**Pórticos fijos sin acartelamientos ni sesgos**

- 1°. — **Cargas exteriores.** — Cargas incidentes sobre los dinteles y piés derechos.  
Condiciones de: a) continuidad del dintel, b) aporticamiento doble, c) aporticamiento simple; d) nudo.
- 2°. — **Caso de carga general.** — Empleo de las expresiones deducidas para la resolución de un pórtico cualesquiera a vértice fijo de extremos articulados. — Resolución de problemas.
- 3°. — **Deducción de las fórmulas de cálculo de los casos de aplicación más corriente.**

1°. — **Cargas exteriores — Cargas incidentes sobre los dinteles y piés derechos.** —

Sea (fig. N°. 59) una estructura aporticada articulada a vértices fijos sometida a la acción de cargas normales a los pies derechos y a las vigas dintel. Las cargas aplicadas sobre el dintel son de dirección arriba-abajo, y las correspondientes a los piés derechos de izquierda a derecha, adoptando para ambos sentidos el signo positivo.

Si separamos mediante cortes los dinteles de los piés derechos, éstos y aquellos bajo las acciones exteriores que los solicitan se deformarán, siendo las variedades angulares extremas las siguientes (croquis b):

Figura N° 59

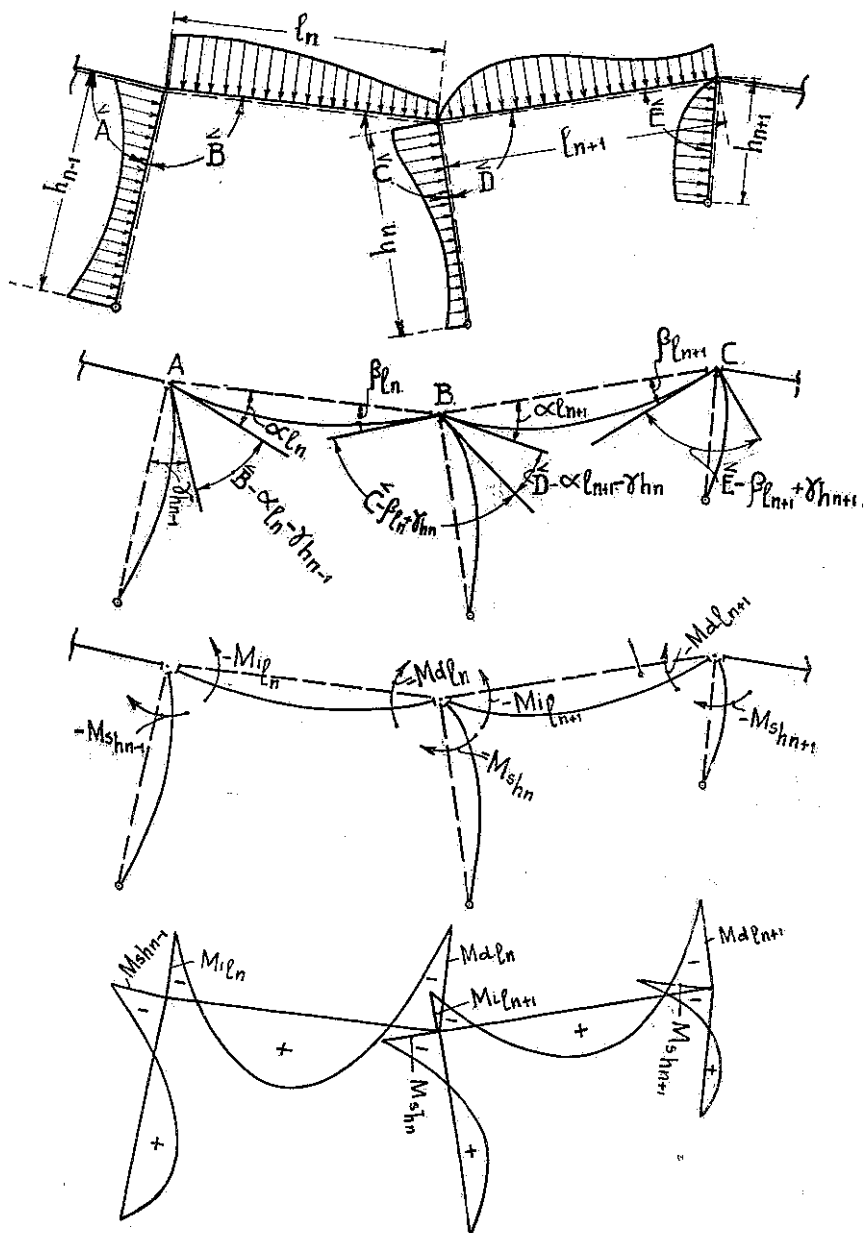


DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES

1°) tramo  $l_n$ : (carga exterior solamente):

$$\alpha_{(ln)} = \frac{Ki_{(ln)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{l_n}{I_{(ln)}} \qquad \beta_{(ln)} = \frac{Kd_{(ln)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{l_n}{I_{(ln)}}$$

2°) tramo  $l_{n+1}$ : (carga exterior solamente):

$$\alpha_{(ln+1)} = \frac{Ki_{(ln+1)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{l_{n+1}}{I_{(ln+1)}} \qquad \beta_{(ln+1)} = \frac{Kd_{(ln+1)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{l_{n+1}}{I_{(ln+1)}}$$

3°) pié derecho  $h_{n-1}$ : (idem)

$$\gamma_{(hn-1)} = \frac{Ki_{(hn-1)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{h_{n-1}}{I_{(hn-1)}}$$

$$\delta_{(hn-1)} = \frac{Kd_{(hn-1)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{h_{n-1}}{I_{(hn-1)}}$$

4°) pié derecho  $h_n$  (idem):

$$\gamma_{(hn)} = \frac{Ki_{(hn)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{h_n}{I_{(hn)}} \qquad \text{y} \qquad \delta_{(hn)} = \frac{Kd_{(hn)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{h_n}{I_{(hn)}}$$

5°) pié derecho  $h_{n+1}$ : (idem)

$$\gamma_{hn+1} = \frac{Ki_{(hn+1)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{h_{n+1}}{I_{(hn+1)}} \qquad \text{y} \qquad \delta_{(hn+1)} = \frac{Kd_{(hn+1)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{h_{n+1}}{I_{(hn+1)}}$$

Las condiciones que debe satisfacer la estructura, continuidad de los tramos entre sí, e invariabilidad de los ángulos de unión entre éstos y la viga de dintel, han sido, en consecuencia, alterados; así por ejemplo:

el áng. B, vale ahora:  $B - \alpha_{(ln)} - \gamma_{(hn-1)}$  . . .

el áng. C, vale ahora:  $C - \beta_{(ln)} + \gamma_{(hn)}$  . . .

el áng. D, vale ahora:  $D - \alpha_{(ln+1)} - \gamma_{(hn)}$  . . .

el áng. E, vale ahora:  $E - \beta_{(ln+1)} + \gamma_{(hn+1)}$  . . .

según indica el croquis b de la figura N°. 59.

Para restituirlos a sus valores iniciales debemos aplicar los momentos extremos  $M_{s_{(ln-1)}}$ ;  $M_{i_{(ln)}}$ ;  $M_{d_{(ln)}}$ ; etc. que serán las incógnitas del problema, como indica el croquis e de la misma figura, estando resuelto el problema, cuando éstos tengan simultáneamente valores tales que ambas condiciones estén satisfechas.

a) **Condición de continuidad del dintel** — Los momentos extremos  $M_{i_{(ln)}}$ ;  $M_{d_{(ln)}}$ ;  $M_{i_{(ln+1)}}$ ;  $M_{d_{(ln+1)}}$  que actúan en los extremos de los tramos  $l_n$  y  $l_{n+1}$  engendran en concordancia de los extremos adyacentes a la pila  $h_n$  las siguientes variaciones angulares:

En el extremo derecho del tramo  $l_n$ :

$$\text{Originado por } M_{i_{ln}}: \quad \beta'_{(ln)} = - \frac{M_{i_{(ln)}}}{6 \cdot E} \cdot \frac{l_{ln}}{I_{(ln)}}$$

$$\text{idem por } M_{d_{ln}}: \quad \beta''_{(ln)} = - \frac{M_{d_{(ln)}}}{6 \cdot E} \cdot \frac{l_n}{I_{(ln)}}$$

En el extremo izquierdo del tramo  $l_{(n+1)}$ :

$$\text{originado por } M_{d_{(ln+1)}}: \quad \alpha'_{(ln)} = - \frac{M_{d_{(ln+1)}}}{6 \cdot E} \cdot \frac{l_{n+1}}{I_{(ln+1)}}$$

$$\text{Idem por } M_{i_{ln+1}}: \quad \alpha''_{(ln+1)} = - \frac{M_{i_{(ln+1)}}}{3 \cdot E} \cdot \frac{l_{n+1}}{I_{(ln+1)}}$$

todos negativos, pues de acuerdo a la convención de signos sentada, los momentos  $M$  son negativos.

La condición de continuidad (la denominaremos así por extensión), procediendo en forma análoga a la analizada al tratar la viga continua, estará cumplida cuando:

$$\beta_{(ln)} - \beta'_{(ln)} - \beta''_{(ln)} = - [\alpha_{(ln+1)} - \alpha'_{(ln+1)} - \alpha''_{(ln+1)}] \quad (75)$$

Reemplazando valores se obtiene:

$$\frac{Kd_{(ln)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{I_n}{I_{(ln)}} + \frac{Ki_{(ln+1)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{I_{n+1}}{I_{(ln+1)}} = - \left[ \frac{Mi_{(ln)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{I_n}{I_{(ln)}} + \frac{Md_{(ln)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{I_n}{I_{(ln)}} + \frac{Md_{(ln+1)}}{6 \cdot E} \cdot \frac{I_{n+1}}{I_{(ln+1)}} + \frac{Mi_{(ln+1)}}{3 \cdot E} \cdot \frac{I_{n+1}}{I_{(ln+1)}} \right]$$

Si introducimos los valores ficticios cualesquiera  $I_n$  e  $I_0$  la anterior se transforma en la siguiente:

$$- [Kd_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Ki_{(ln+1)} \cdot x_{(ln+1)}] = Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + 2Md_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + 2Mi_{(ln+1)} \cdot x_{(ln+1)} + Md_{(ln+1)} \cdot x_{(ln+1)} \quad (76)$$

en la que los coeficientes de flexibilidad correspondientes a los tramos  $l_n$  y  $l_{n+1}$  son:

$$x_{(ln)} = \frac{I_n}{I_{(ln)}} \cdot \frac{I_0}{I_0} \quad x_{(ln+1)} = \frac{I_{n+1}}{I_{(ln+1)}} \cdot \frac{I_0}{I_0}$$

La ecuación (76) se denomina “ecuación de cuatro momentos” y es la forma general de la de tres para cuando no toda la flexión pueda propagarse íntegramente en el dintel a causa de la existencia de piés derechos que obligan a una “caída de momentos” en concordancia de cada uno de ellos. Nosotros la denominaremos “condición de continuidad del dintel” y de ésta a la de Clapeyron se pasa simplemente cuando no existe pié derecho entre ambos tramos, o sea que esa “caída de momentos” es nula.

En este caso:

$$Md_{(ln)} = Mi_{ln+1} = M$$

transformándose la N° 76 en la siguiente:

$$- [Kd_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + Kd_{(ln+1)} \cdot x_{(ln+1)}] = Mi_{(ln)} \cdot x_{(ln)} + 2M \cdot [x_{(ln)} + x_{(ln+1)}] + Md_{(ln+1)} \cdot x_{(ln+1)} \quad (77)$$

que es la deducida en la primera parte (pág. n° ) al tratar la viga continua con momentos de inercia constantes por tramos.

Como indicamos, la ecuación (76) la denominaremos “ecuación de continuidad” o simplemente “condición de continuidad” y liga los cuatro momentos consecutivos correspondientes a dos tramos que comprenden a una misma pila, con la carga exterior.

(Continuará)