

# ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS DE HORMIGÓN ARMADO

(Cálculo de estructuras hiperestáticas con o sin acartelamientos y sesgos)

POR EL

**Ing. Civil Luis Sobrino Aranda**

Profesor suplente por concurso de: "Estabilidad de Construcciones" y "Construcciones de Hormigón Armado" en la Universidad Nacional de Córdoba. — Profesor de matemáticas en el Liceo Nacional de Señoritas de Rosario (Sta. Fe)

## CAPITULO IV

### **Viga continua sin acartelamientos**

(Cargas exteriores)

- 1º.) **Indeterminación estática — Condiciones de continuidad — Hipótesis de simplificación —** Casos en que se supone el momento de inercia totalmente constante, constante por tramos, y enteramente variable.
- 2º.) **Influencia de cargas exteriores.**
  - Iº) Momentos de inercia totalmente variables.
  - IIº) Momentos de inercia constantes por tramos.
  - IIIº) Momentos de inercia constantes en toda la viga.
- 3º.- **Viga continua con extremos empotrados.**
  - Iº) Momentos de inercia totalmente variables.

II°) Momentos de inercia constantes por tramos.

III°) Momentos de inercia constantes en toda la viga.

4°.) **Empleo de las expresiones tipo Clapeyvon** — Deducción de los momentos sobre los apoyos.

a) Vigas con extremos apoyados. — Casos I°, II° y III°.

b) Vigas con extremos empotrados. — Casos I°, II° y III°.

c) Vigas con extremos en voladizo. — Casos I°, II° y III°.

Caso de tramos descargados — Cargas permanentes y accidentales — Dificultad del cálculo de tablas numéricas. — Tablas de O. Skall.

5°.) **La viga empotrada como caso particular de la continúa.**

1°.) — **Indeterminación estática.** — Recordando que un apoyo fijo implica el desconocimiento de dos incógnitas y uno móvil de una solamente, la viga continúa representada en la figura N° 33 que consta de cuatro tramos es triplemente indeterminada, pues:

un apoyo fijo presenta:	2 incógnitas
y cuatro móviles	4 incógnitas

---

TOTAL 6 incógnitas

y como la estática dá tres relaciones entre ellas el número de las que faltan es:

$$(6 - 3) = 3$$

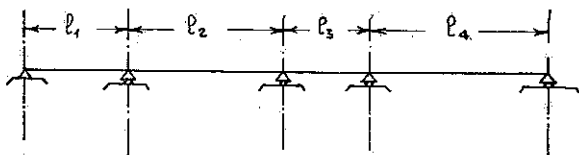


Figura N° 33

o sea que el número que mide su indeterminación estática es igual al de apoyos intermedios.

Si agregamos otro tramo, introducimos otra incógnita, debida al nuevo apoyo móvil, de tal manera que la ley anterior resulta general, es decir: “El número que mide la indeterminación estática de una viga continua simplemente apoyada es igual al de apoyos intermedios”.

**Condición de continuidad** — La deformación de la estructura bajo la acción de cualquier causa exterior debe ser tal que los ángulos  $\alpha_1$  y  $\beta_2$  (fig. 34) deben ser iguales, con lo que se establece la condición de continuidad de la viga sobre los apoyos.

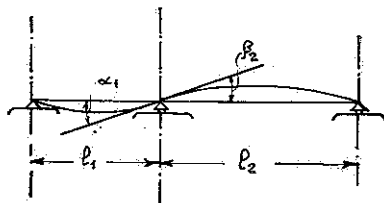


Figura N° 34

Como para cada apoyo intermedio podemos establecer “una condición de continuidad”, resultan éstas número suficiente para integrar el de las expresiones que faltan, tratadas en el punto anterior.

Este será el procedimiento que seguiremos y que en síntesis es el siguiente:

**Estado I** — Si cortamos la viga en concordancia de cada apoyo intermedio, formaremos un número de vigas estáticamente deter-

minadas igual al de tramos de la continua. La acción de las causas exteriores que deformen la estructura originará la formación de los ángulos:

$$\beta_{1.1} ; \alpha_{1.2} ; \beta_{1.2} ; \alpha_{1.3} \text{ etc}$$

que sabemos hallar (fig. N° 35).

Como la continuidad de la viga en concordancia de cada apoyo se ha roto, pues las tangentes que corresponden a cada apoyo

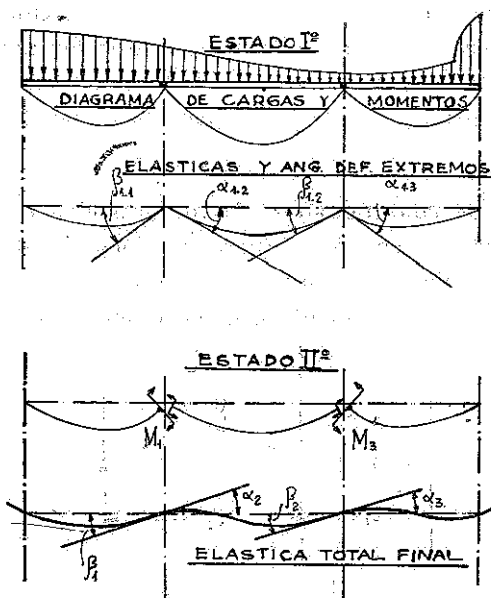


Figura N° 35

no están en prolongación como exige la "condición de continuidad", debemos, para volver la construcción a su estado primitivo, restablecerla, lo que conseguimos en el:

Estado II — Apliquemos en la forma que indica la figura N° 35 los momentos  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  sobre los extremos de las vigas de longitudes  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_2$ , formadas en el estado anterior y como causas exteriores, desde valores iniciales cero (las leyes de aumento de

$M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  son en general diferentes) hasta que las tangentes a las elásticas de deformación sean comunes en los apoyos intermedios.

En este caso, cumpliéndose las condiciones de continuidad:

$$\beta_1 = -\alpha_2 \quad \beta_2 = -\alpha_3 \quad \text{y} \quad \beta_3 = -\alpha_3 \quad (28)$$

los valores que en ese instante tengan los momentos  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  serán los que resuelvan el problema

Por consiguiente el diagrama de momentos flectores, el de esfuerzos cortantes, reacciones, elásticas de deformación, etc., pueden obtenerse como suma de los parciales que correspondan a cada uno de los estados que separadamente contribuyen a la continuidad de la viga.

**Hipótesis de simplificación** — Las fórmulas deducidas para el caso general en que se tenga en cuenta la verdadera variación de los momentos de inercia en la viga no permiten su cálculo directo, sirviendo únicamente como procedimiento de verificación. Aún esta operación resulta eminentemente engorrosa, derivándose de estos hechos la necesidad de simplificarlas, y en tal forma, que sea factible su cálculo directo.

Esta necesidad ha creado la simplificación de las fórmulas admitiendo como ya hemos visto en las vigas empotradas la igualdad del momento de inercia en *toda la viga*, con lo que automáticamente se transforman las fórmulas de verificación en otras sencillas que permiten su cálculo directo.

Debe tenerse en cuenta que en el error de los resultados obtenidos al calcular una viga aceptando la hipótesis simplificadora de la constancia de los momentos de inercia, influyen no solamente la variación real de estos dentro del tramo sino también la de los adyacentes; en cambio, en las vigas empotradas la influencia se restringe a la propia del tramo.

Esta consideración ha dado nacimiento a una nueva hipótesis que podríamos denominar intermedia: la de que los momentos de inercia sean constantes dentro de cada tramo únicamente, pero variables dentro de tramo a tramo.

Las fórmulas a que conduce la aceptación de esta hipótesis son sencillas y permiten el cálculo mediante aproximaciones que en la práctica diarias se reducen a un mínimo.

Para terminar, deduciremos las fórmulas de cálculo para el caso general en que  $I$  sea variable en forma cualquiera y sucesivamente de éstas y de acuerdo a las hipótesis vistas, las que correspondan a cada una de ellas empleando las denominaciones siguientes:

- I°.) Caso de  $I$  variable en forma cualquiera.
- II°.) Caso en que  $I$  varía de tramo a tramo, pero manteniéndose constante dentro de cada uno.
- III°.) Caso de  $I$  constante en toda la viga.

2° — **Influencia de cargas exteriores — I° — Momentos de inercia totalmente variables** — Separemos de la viga continua dos tramos adyacentes cualesquiera, que se supondrán cargados en igual forma, y que cortaremos separándolos en concordancia del apoyo intermedio, formando de esta manera dos vigas simplemente apoyadas adyacentes de longitudes: " $l_1$ " y " $l_2$ " que sometemos a los estados de deformación ya analizados precedentemente.

Estado I — La acción de las cargas exteriores directamente aplicadas origina las deformaciones angulares extremas siguientes en concordancia del apoyo intermedio:

$$\left. \begin{array}{l} \text{tramo } 1^{\circ}. \quad \beta_1^c = \frac{\eta_1^c}{l_1} \cdot \int_A^B \frac{M^c \cdot dx}{E \cdot I} \\ \text{tramo } 2^{\circ}. \quad \alpha_2^c = \frac{\xi_2^c}{l_2} \cdot \int_B^C \frac{M^c \cdot dx}{E \cdot I} \end{array} \right\} (29)$$

Siendo los momentos correspondientes positivos por presentar la elástica su convexidad hacia abajo.

Estado II — Si aplicamos los momentos  $M_0$ ,  $M_1$  y  $M_2$  en la forma ya indicada anteriormente hasta conseguir que la tangente geo-

métrica a las elásticas en concordancia del apoyo intermedio sea común a ambos tramos, habremos obtenido la condición de continuidad correspondiente a este apoyo:

$$\left. \begin{array}{l} \text{tramo 1}^{\circ}. \quad \beta_1^m = \frac{\eta_1^m}{I_1} \cdot \int_A^B \frac{-M^m \cdot dx}{E \cdot I} \\ \text{tramo 2}^{\circ}. \quad \alpha_2^m = \frac{\xi_2^m}{I_2} \cdot \int_B^C \frac{-M^m \cdot dx}{E \cdot I} \end{array} \right\} (30)$$

por ser los valores  $M_0$ ,  $M_1$  y  $M_2$ , etc., negativos.

Condición de continuidad — Esta exige que:

$$\dagger \beta_1 = - \alpha_2$$

y como:

$$\beta_1 = \beta_1^c - \beta_1^m \quad \text{y} \quad \alpha_2 = \alpha_2^c - \alpha_2^m$$

la “condición de continuidad” estará cumplida cuando:

$$\beta_1^c - \beta_1^m = - \alpha_2^c \dagger \alpha_2^m = \alpha_2^m - \alpha_2^c$$

Reemplazando y simplificando  $E$  que se supone constante:

$$\frac{\eta_1^c}{I_1} \cdot \int_A^B \frac{M^c \cdot dx}{I} - \frac{\eta_1^m}{I_1} \cdot \int_A^B \frac{-M^m \cdot dx}{I} = \frac{\xi_2^m}{I_2} \cdot \int_B^C \frac{-M^m \cdot dx}{I} - \frac{\xi_2^c}{I_2} \cdot \int_B^C \frac{M^c \cdot dx}{I} \quad (31)$$

Ecuación que expresa “la condición de continuidad” sobre el apoyo B. Como para cada apoyo intermedio puede escribirse una semejante, su conjunto, más las tres que permite establecer la Estática mediante sus leyes de equilibrio, forman un sistema que resuelve el problema.

II° — **I constante por tramos** — En este caso  $I$  puede sacarse fuera del signo integral:

$$\int_A^B M^c \cdot dx + \frac{\eta_1^m}{I_1 \cdot I_1} \cdot \int_A^B M^m \cdot dx = - \frac{\xi_2^m}{I_2 \cdot I_2} \cdot \int_B^C M^m \cdot dx - \frac{\xi_2^c}{I_2 \cdot I_2} \cdot \int_B^C M^c \cdot dx$$

Las expresiones:

$$\xi_2^m \cdot \int_B^C M^m \cdot dx$$

y

$$\eta_1^m \cdot \int_A^B M^m \cdot dx$$

representan respectivamente los momentos estáticos de las superficies de momentos flectores originados en el estado II de deformación ya estudiado con respecto a las verticales  $A_2$  y de  $A_0$  respectivamente.

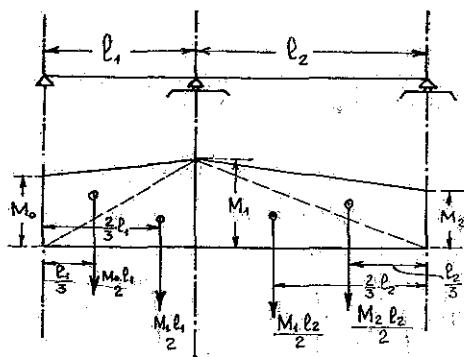


Figura N° 36

La figura N° 36 permite establecer, descomponiendo el diagrama trapecial en dos triángulos que:

$$\xi_2^m \cdot \int_B^C M^m \cdot dx = \frac{M_1 \cdot l_2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l_2 + \frac{M_2 \cdot l_2}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot l_2 = 2 \cdot M_1 \cdot \frac{l_2^2}{6} + M_2 \cdot \frac{l_2^2}{6}$$

y



$$\eta_1^m \cdot \int_A^B M^m \cdot dx = \frac{M_0 \cdot l_1}{2} \cdot \frac{1}{3} l_1 + \frac{M_1 \cdot l_1}{2} \cdot \frac{2}{3} l_1 = M_0 \cdot \frac{l_1^2}{6} + 2 \cdot M_1 \cdot \frac{l_1^2}{6}$$

valores que reemplazados en la anterior dan:

$$\frac{M_1 \cdot l_2}{6 \cdot I_2} + \frac{M_2 \cdot l_2}{6 \cdot I_2} + \frac{M_0 \cdot l_1}{6 \cdot I_1} + \frac{2 \cdot M_1 \cdot l_1}{6 \cdot I_1} = \frac{\eta_1^c}{I_1 \cdot l_1} \int_A^B M^c \cdot dx - \frac{\xi_2^c}{I_2 \cdot l_2} \int_B^C M^c \cdot dx$$

multiplicando por  $\frac{6}{l_1 \cdot l_2}$

$$\left[ \frac{2 \cdot M_1}{I_2 \cdot l_1} + \frac{M_2}{I_2 \cdot l_1} + \frac{M_0}{I_1 \cdot l_2} + \frac{2 \cdot M_1}{I_1 \cdot l_2} \right] = \frac{1}{I_1 \cdot l_2} \cdot \frac{6}{l_1^2} \eta_1^c \int_A^B M^c dx + \frac{1}{I_2 \cdot l_1} \cdot \frac{6}{l_2^2} \xi_2^c \int_B^C M^c \cdot dx$$

recordando la definición de los valores  $K_i$  y  $K_d$ :

$$-\frac{K_d}{I_1 \cdot l_2} - \frac{K_i}{I_2 \cdot l_1} = 2 \cdot M_1 \cdot \left[ \frac{1}{I_2 \cdot l_1} + \frac{1}{I_1 \cdot l_2} \right] + \frac{M_2}{I_2 \cdot l_1} + \frac{M_0}{I_1 \cdot l_2}$$

multiplicando por  $I_1 \cdot l_2$ :

$$-\frac{l_1}{I_1} \cdot K_d - \frac{l_2}{I_2} \cdot K_i = 2 \cdot M_1 \cdot \left[ \frac{l_2}{I_2} + \frac{l_1}{I_1} \right] + M_2 \cdot \frac{l_2}{I_2} + M_0 \cdot \frac{l_1}{I_1} \quad (32)$$

**Coefficientes de flexibilidad** — Llamaremos coeficiente de flexibilidad a los cocientes:

$$\chi_1 = \frac{I_0}{I_1} \cdot \frac{l_1}{l_0} \quad \chi_2 = \frac{I_0}{I_2} \cdot \frac{l_2}{l_0} \quad (33)$$

en las que “ $I_0$ ” y “ $l_0$ ” son valores ficticios cualesquiera.

Si multiplicamos la expresión N° 32 por  $\frac{I_0}{l_0}$  tendremos:

—  $K_d \cdot x_1$  —  $K_i \cdot x_2 = 2 \cdot M_1 \cdot (x_1 + x_2) + M_0 \cdot x_1 + M_2 \cdot x_2$   
de donde invirtiendo los miembros:

$$\boxed{M_0 \cdot x_1 + 2 \cdot M_1 \cdot (x_1 + x_2) + M_2 \cdot x_2 = - [K_d \cdot x_1 + K_i \cdot x_2]} \quad (34)$$

Relación que liga los momentos  $M_0$ ,  $M_1$  y  $M_2$  incógnitos con la carga exterior ( $K_i$  y  $K_d$ ).

El empleo de estas ecuaciones implica el conocimiento de  $x_1$ ,  $x_2$ , etc., y ambos coeficientes de flexibilidad exigen el de  $I_1$ ,  $I_2$ , etc., o sus relaciones a un tercero.

Como ellos no son conocidos, debe atribuírseles ya sea "a sentimiento" o por comparación con otra obra semejante, un valor determinado.

Si al calcular las secciones, con los momentos deducidos en base a los valores  $x_1$  y  $x_2$ , así determinado se llega a relaciones:

$$\frac{I_0}{I_1} \quad , \quad \frac{I_0}{I_2} \quad ; \text{ etc.}$$

semejantes a las adoptadas inicialmente el problema estará resuelto, debiendo rehacerlo en caso contrario, bastando en la práctica del manejo de estas fórmulas una o dos aproximaciones únicamente.

III° — **I constante en toda la viga** — Si  $I_1 = I_2 = I_3 = \text{constante}$ , la ecuación N° 34 se transforma en:

$$\boxed{M_0 \cdot I_1 + 2 \cdot M_1 \cdot (I_1 + I_2) + 2 \cdot M_2 \cdot I_2 = -[K_d \cdot l_1 + K_i \cdot l_2]} \quad (35)$$

ecuación denominada de Clapeyron o de los tres momentos, denominación que, por extensión, daremos también a las semejantes deducidas en los casos anteriores.

Como  $K_i$  y  $K_d$  son conocidos, la relación anterior liga los valores incógnitos  $M_0$ ,  $M_1$ , etc., con aquellos.

**Diagrama de momentos flectores** — Si  $M_0$ ,  $M_1$  y  $M_2$ , son la solución del problema a base del cumplimiento de la condición de continuidad sobre los apoyos, el diagrama de momentos flectores será la suma de los que correspondan a los dos estados de deformación estudiados, y que son:

- 1°) Los diagramas de momentos flectores engendrados, en cada tramo por la carga exterior, considerándolos aislados y simplemente apoyados. Estos diagramas de momentos son posi-

tivos para cargas verticales que actúen de arriba hacia abajo (diseño "a" de la figura N° 37).

2°) Por los diagramas trapeziales formados por  $M_0$ ,  $M_1$  y  $M_2$  que son negativos y corresponden al estado de deformación N° II ya analizado (diseños b, c y d figura N° 37).

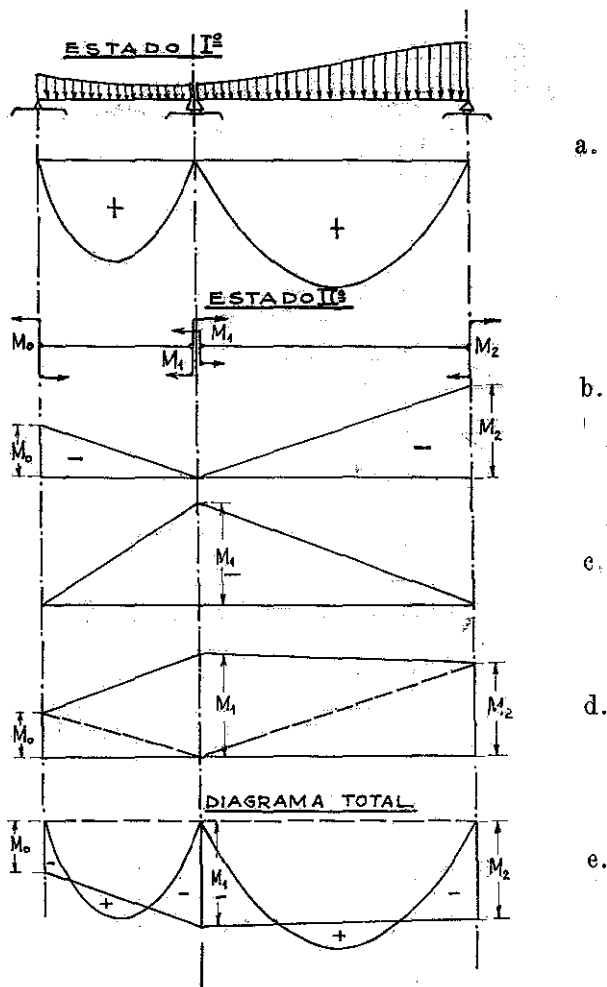


Figura N° 37

El diagrama total, suma de los dos anteriores es el indicado en la misma figura, de tal manera que conocidos los valores de  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ , etc., sobre los apoyos, puede trazarse sin inconveniente.

**Diagrama de Esfuerzos cortantes** — Puede determinarse en forma análoga, a pesar de lo cual analizaremos por separado a continuación.

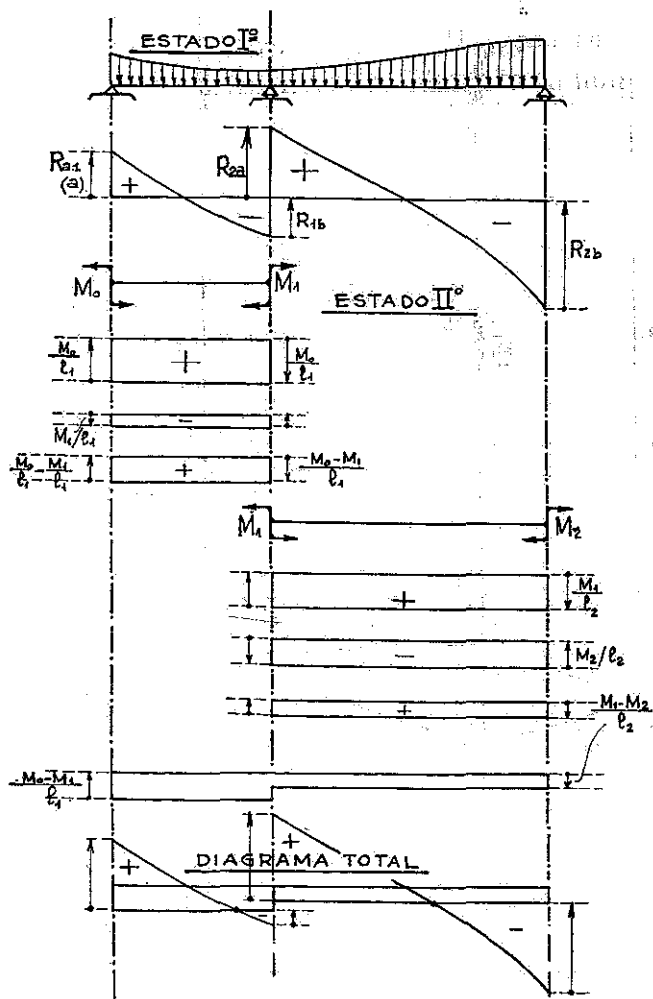


Figura N° 38

El estado I de deformación engendra las reacciones de apoyo siguientes:

$$R_{1a} \text{ y } R_{1b}$$

en el primer tramo, y

$$R_{2a} \text{ y } R_{2b}$$

en el segundo. Siendo el diagrama de esfuerzos de corte el representado en la figura N° 38.

El análisis de la misma figura muestra que el diagrama de esfuerzos cortantes originados en el estado II son dos rectángulos de alturas:

$$\frac{M_0 - M_1}{l_1} \quad \text{y} \quad \frac{M_1 - M_2}{l_2}$$

correspondientes a los tramos de longitudes  $l_1$  y  $l_2$  respectivamente.

De la suma de los diagramas deducidos para ambos estados de deformación se obtendrá otro resultante igual al que corresponde al Estado I, pero con las líneas de origen desplazadas en sentido positivo o negativo; según el caso; de:  $(M_0 - M_1) \div l_1$  o  $(M_1 - M_2) \div l_2$ , diagrama que presenta la parte inferior de la figura N° 38.

3°.) — **Viga continua con extremos empotrados** — Las fórmulas anteriores pueden transformarse para este caso. Supongamos que fuera empotrado, v. gr.: el primer apoyo, y que los dos tramos a que se extiende la ecuación de tres momentos sean de longitudes  $l$  y  $l_1$ , siendo sus respectivos momentos de inercia  $I$  y  $I_1$ .

Distinguiremos los tres casos analizados según sean las hipótesis que se formulen con respecto a los momentos de inercia, recordando que las fórmulas deducidas son:

**Caso I — I enteramente variable.**

$$\frac{\eta^c}{l} \cdot \int_0^l \frac{M^c \cdot dx}{I} + \frac{\eta^m}{l} \cdot \int_0^l \frac{M^m \cdot dx}{I} = -\frac{\xi_1^m}{l_1} \cdot \int_0^{l_1} M^m \cdot dx - \frac{\xi_1^c}{l_1} \cdot \int_0^{l_1} M^c \cdot dx$$

**Caso II — I constante por tramo:**

$$M \cdot x + 2 \cdot M_0 \cdot (x + x_1) + M_1 \cdot x_1 = -Kd \cdot x - Ki \cdot x_1$$

**Caso III — I es constante en toda la viga:**

$$M \cdot l + 2 \cdot M_0 \cdot (l + l_1) + M_1 \cdot l_1 = - Kd \cdot x - K_l \cdot x_1$$

A medida que el momento de inercia del tramo de la izquierda de longitud "l" aumente indefinidamente su valor, podrá irse considerando al segundo tramo cada vez más cercano al empotramiento en su apoyo izquierdo. En el límite cuando  $I = \infty$  este segundo tramo de longitud "l<sub>1</sub>" y momento de inercia "I<sub>1</sub>" tendrá su apoyo ya mencionado empotrado.

Si  $I = \infty$  las fórmulas arriba transcriptas se convierten en:

**Caso I — I variable:**

$$-\xi_1^m \cdot \int_0^{l_1} \frac{M^m \cdot dx}{I} = \xi_1^c \cdot \int_0^{l_1} \frac{M^c \cdot dx}{I} \quad (36)$$

**Caso II — I constante por tramos: En este caso:**

$$x = 0.$$

$$y: \quad 2 \cdot M_0 \cdot x_1 + M_1 \cdot x_1 = - K_l \cdot x_1$$

de donde:

$$2 \cdot M_0 + M_1 = - K_l \quad (37)$$

**Caso III — I constante en toda la viga:** Como la expresión (35) es independiente de I no puede deducirse la fórmula adecuada por este procedimiento, pero la anterior por este mismo motivo, es válida para este caso:

$$2 M_0 \pm M_1 = - K_l \quad (37)$$

Puede hallarse esta expresión directamente aplicando al extremo izquierdo un momento  $M_0$  capaz de conseguir la condición de empotramiento de dicho apoyo, supuesta la viga cargada con su

carga exterior y aplicando al extremo derecho un momento  $M_1$  en igual forma.

Si en vez de estar empotrado el extremo izquierdo del primer tramo lo estuviera el derecho del último (el enésimo) las expresiones semejantes a las anteriores para este caso serían:

Caso I — I variable:

$$-\xi_n^m \cdot \int_0^{l_n} \frac{M^m \cdot dx}{I} = \xi_n^c \cdot \int_0^{l_n} \frac{M^c \cdot dx}{I} \quad (38)$$

Casos II y III —

$$2 \cdot M_n + M_{n-1} = -K_{d(n)} \quad (39)$$

4° — Empleo de las fórmulas tipo Clapeyron — Deducción de los momentos sobre los apoyos — Supondremos los tres casos que pueden presentarse en la práctica, a saber:

- 1°) Viga continua con sus extremos simplemente apoyados.
- 2°) Idem con sus extremos (uno cualquiera o ambos) empotrados.
- 3°) Idem con extremos en voladizo (uno cualquiera o ambos).

Dentro de cada caso, analizaremos las tres hipótesis según sea la ley de constancia o variación de los momentos de inercia en la viga.

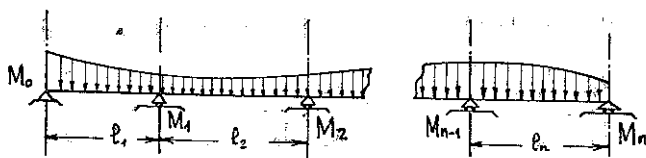


Figura N° 39

Supondremos que tenga  $n$  tramos de longitudes  $l_1, l_2 \dots l_{n-1}, l_n$  y denominaremos los momentos sobre los apoyos en la forma indicada en la fig. N° 39.

a) **Viga continua con extremos libre** — En este caso:

$$M_0 = 0 \qquad \text{y} \qquad M_n = 0$$

y dentro de cada hipótesis hecha con respecto al valor de los momentos de inercia podemos escribir una ecuación tipo Clapeyron para cada apoyo, serán ellas:

a) Caso  $I^\circ$  —  $I$  variable:

para el apoyo  $A_1$ :

$$\frac{\eta_1^c}{l_1} \cdot \int_0^{l_1} \frac{M^c \cdot dx}{I} + \frac{\eta_1^m}{l_1} \cdot \int_0^{l_1} \frac{M^m \cdot dx}{I} = - \frac{\xi_2^m}{l_2} \cdot \int_0^{l_2} \frac{M^m \cdot dx}{I} - \frac{\xi_2^c}{l_2} \cdot \int_0^{l_2} \frac{M^c \cdot dx}{I} \quad \left\{ (40) \right.$$

para el apoyo " $M^{n-1}$ ":

$$\frac{\eta_{n-1}^c}{l_{n-1}} \cdot \int_0^{l_{n-1}} \frac{M^c \cdot dx}{I} + \frac{\eta_{n-1}^m}{l_{n-1}} \cdot \int_0^{l_{n-1}} \frac{M^m \cdot dx}{I} = - \frac{\xi_n^m}{l_n} \cdot \int_0^{l_n} \frac{M^m \cdot dx}{I} - \frac{\xi_n^c}{l_n} \cdot \int_0^{l_n} \frac{M^c \cdot dx}{I} \quad \left\{ (41) \right.$$

que forman un sistema de  $(n-1)$  ecuaciones con igual número de incógnitas que resuelven el problema de verificación.

b) Caso  $II^\circ$  —  $I$  constante por tramos — En este caso tendremos para cada tramo su respectivo coeficiente de flexibilidad. Si los momentos de inercia de los tramos son:  $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ :

$$x_1 = \frac{I_0}{I_1} \cdot \frac{l_1}{l_0} \qquad x_2 = \frac{I_0}{I_2} \cdot \frac{l_2}{l_0} \qquad x_n = \frac{I_0}{I_n} \cdot \frac{l_n}{l_0}$$

el grupo de  $(n-1)$  ecuaciones tipo Clapeyron que resuelve el problema es:

Apoyo  $A_1$ :

$$2 \cdot M_1 \cdot (x_1 + x_2) + M_2 \cdot x_2 = - [Kd_{(1)} \cdot x_1 + Ki_{(2)} \cdot x_2] \quad (42)$$



Apoyo  $A_2$ :

$$M_1 \cdot x_2 + 2 \cdot M_2 \cdot (x_2 + x_3) + M_3 \cdot x_3 = - [Kd_{(2)} \cdot x_2 + Ki_{(3)} \cdot x_3] \quad (43)$$

Apoyo  $A_{n-1}$ :

$$M_{n-3} \cdot x_{n-2} + 2 \cdot M_{n-2} \cdot (x_{n-2} + x_{n-1}) + M_{n-1} \cdot x_{n-1} = - [Kd_{(n-2)} \cdot x_{(n-2)} + Ki_{(n-1)} \cdot x_{(n-1)}] \quad (44)$$

Apoyo  $A_n$ :

$$M_{n-2} \cdot x_{n-1} + 2 \cdot M_{n-1} \cdot (x_{n-1} + x_n) = - [Kd_{(n-1)} \cdot x_{n-1} + Ki_{(n)} \cdot x_n] \quad (45)$$

e) Caso III — I constante en toda la viga — El sistema de ecuaciones es:

Apoyo  $A_1$ :

$$2 \cdot M_1 \cdot (l_1 + l_2) + M_2 \cdot l_2 = - [Kd_{(1)} \cdot l_1 + Ki_{(2)} \cdot l_2] \quad (46)$$

Apoyo  $A_2$ :

$$M_1 \cdot l_2 + 2 \cdot M_2 \cdot (l_2 + l_3) + M_3 \cdot l_3 = - [Kd_{(2)} \cdot l_2 + Ki_{(3)} \cdot l_3] \quad (47)$$

Apoyo  $A_{n-2}$ :

$$M_{(n-3)} \cdot l_{(n-2)} + 2 \cdot M_{n-2} \cdot (l_{n-2} + l_{n-1}) + M_{n-1} \cdot l_{n-1} = - [Kd_{(n-2)} \cdot l_{n-2} + Ki_{(n-1)} \cdot l_{n-1}] \quad (48)$$

Apoyo  $A_{n-1}$ :

$$M_{n-2} \cdot l_{n-1} + 2 \cdot M_{n-1} \cdot (l_{n-1} + l_n) = - [Kd_{(n-1)} \cdot l_{n-1} + Ki_{(n)} \cdot l_n] \quad (49)$$

que forman como en el caso anterior un sistema de  $(n-1)$  ecuaciones (condiciones de continuidad) que permiten calcular las  $(n-1)$  incógnitas (momentos sobre los apoyos).

Creemos oportuno hacer notar que las fórmulas que resuelven el problema en este último caso son exactamente las mismas que para el caso II, permutando las longitudes de los tramos por los coeficientes de flexibilidad respectivos.

b) **Viga continua con extremos empotrados** — En este caso, además de las  $(n-1)$  ecuaciones que expresan otras tantas “condiciones de continuidad” debemos establecer las dos (o una según el caso) que correspondan a los extremos empotrados.

Caso I° — I variable — La condición de empotramiento del apoyo  $A_0$  es:

$$-\xi_1^m \cdot \int_0^{l_1} \frac{M^m \cdot dx}{I} = \xi_1^c \cdot \int_0^{l_1} \frac{M^c \cdot dx}{I} \quad (50)$$

La continuidad del apoyo  $A_1$  es:

$$\frac{\eta_1^c}{l_1} \cdot \int_0^{l_1} \frac{M^c \cdot dx}{I} + \frac{\eta_1^m}{l_1} \cdot \int_0^{l_1} \frac{M^m \cdot dx}{I} = -\frac{\xi_2^m}{l_2} \cdot \int_0^{l_2} \frac{M^m \cdot dx}{I} - \frac{\xi_2^c}{l_2} \cdot \int_0^{l_2} \frac{M^c \cdot dx}{I} \quad (51)$$

La continuidad del apoyo  $A_{n-1}$  es:

$$\frac{\eta_{n-1}^c}{l_{n-1}} \cdot \int_0^{l_{n-1}} \frac{M^c \cdot dx}{I} + \frac{\eta_{n-1}^m}{l_{n-1}} \cdot \int_0^{l_{n-1}} \frac{M^m \cdot dx}{I} = -\frac{\xi_n^m}{l_n} \cdot \int_0^{l_n} \frac{M^m \cdot dx}{I} - \frac{\xi_n^c}{l_n} \cdot \int_0^{l_n} \frac{M^c \cdot dx}{I} \quad (52)$$

y la correspondiente al apoyo  $A_n$  :

$$-\frac{\xi_n^m}{l_n} \cdot \int_0^{l_n} \frac{M^m \cdot dx}{I} = \xi_n^c \cdot \int_0^{l_n} \frac{M^c \cdot dx}{I} \quad (53)$$

Conjunto de  $(n+1)$  incógnitas (momentos sobre los apoyos)

que pueden determinarse mediante las  $(n + 1)$  ecuaciones de condición planteadas.

Caso II° — I constante por tramos: En este caso el conjunto de las  $(n + 1)$  ecuaciones es:

condición de empotramiento en  $A_0$ :

$$2 \cdot M_0 + M_1 = -K_i(1) \quad (54)$$

condición de continuidad en  $A_1$ :

$$M_0 \cdot x_1 + 2 \cdot M_1 \cdot (x_1 + x_2) + M_2 \cdot x_2 = -[K_d(1) \cdot x_1 + K_i(2) \cdot x_2]$$

.....  
 .....

condición de continuidad en  $A_{n-1}$ :

$$M_{n-2} \cdot x_{n-1} + 2 \cdot M_{n-1} \cdot (x_{n-1} + x_n) + M_n \cdot x_n = -[K_d(n-1) \cdot x_{n-1} + K_i(n) \cdot x_n] \quad (56)$$

condición de empotramiento en  $A_n$ :

$$M_{n-1} + 2 \cdot M_n = -K_d(n) \quad (57)$$

Caso III — I constante en toda la viga — Las expresiones del caso anterior son válidas sin más que permutar "i" por el "x" correspondiente del mismo índice.

**Casos de tramos descargados** — La observación de las fórmulas de los casos II y III muestra que sus segundos términos son de la forma:

$$K_d(r-1) \cdot x_{r-1} + K_i(r) \cdot x_r$$

o:

$$K_d(r-1) \cdot l_{r-1} + K_i(r-1) \cdot l_r$$

según corresponda.

Los valores K se refieren siempre al Kd del tramo izquierdo y los del segundo término al Ki del tramo de la derecha de los que se deben considerar en cada condición de continuidad, razón

per la cual hemos decidido aplicar al  $K_i$  o  $K_d$  como sub-índice el número de orden del tramo que deba considerarse.

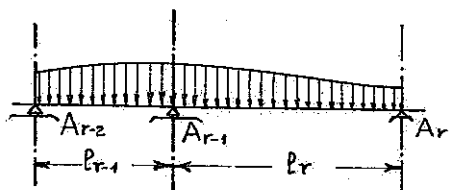


Figura N°. 40

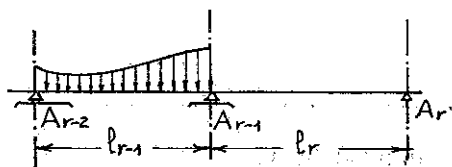


Figura N°. 41

Si un tramo cualquiera está descargado, v. gr.: el enésimo, en la condición de continuidad para el apoyo  $(r-1)$  debe tenerse:

$$K_i(r) = 0. \text{ (2º término del segundo miembro)}$$

y en la condición de continuidad para el apoyo  $(r)$  debe tenerse en forma semejante:

$$K_d(r) = 0. \text{ (1er. término del segundo miembro)}$$

repetiéndose el razonamiento para cualquier número de tramos descargados. Los valores  $K_i$  y  $K_d$  pueden tomarse de la tabla 1ª consignada en la página N° 456, números 3 y 4 de 1936.

El diagrama de momentos para el tramo descargado se reduce al trapecial, por cuanto no existe en él el estado I de deformación originado por la carga exterior (fig. N° 42). Si dos tramos consecutivos están descargados, el momento sobre el apoyo intermedio ( $l_b$  que puede demostrarse mediante el análisis de las fórmulas anteriores), tiene signo contrario al de los extremos.

En este caso los diagramas de momentos son trapecios cruzados (fig. N° 43).

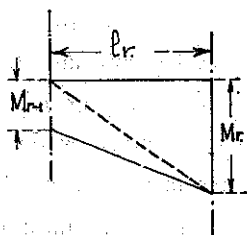


Figura N° 42

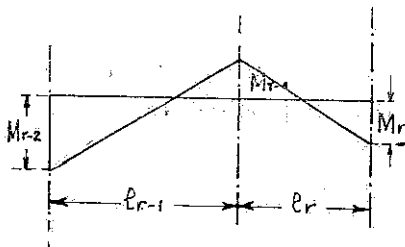


Figura N° 43

**Cargas permanentes y accidentales.** — Las primeras, no desplazables, dan lugar a un solo diagrama de momentos que ya sabemos determinar mediante el uso de las fórmulas anteriores, pero las cargas accidentales desplazables según sea la combinación de los tramos cargados y descargados en forma total o parcial, dan lugar a un diagrama diferente. Siempre habrá para cada sección una combinación de cargas accidentales desplazables que originen en ella un momento positivo que sea un máximo y otro negativo de igual índole. Se puede, de esta manera, trazar un diagrama envolvente de todos los momentos máximos positivos y negativos que correspondan a cada sección, originados como ya hemos indicado por las cargas desplazables. Estos, sumados por separado con el correspondiente a la carga permanente, dá como resultado final dos diagramas de momentos máximos positivos y negativos que pueden desarrollarse en cada sección con cualquier combinación de cargas.

**Dificultad del cálculo de tablas numéricas** — Las expresiones anteriores son ampliamente generales, pues suponen que todos los tramos están cargados en forma cualquiera. La dificultad para el cálculo de tablas estriba en la cantidad infinita de combinaciones que pueden hacerse, variando las longitudes de los diferentes tramos entre sí, sus respectivos momentos de inercia, las condiciones de sus apoyos extremos, la naturaleza de las cargas, cantidad de tramos cargados y descargados, que implica una tarea imposible de abordar con generalidad.

5°.) **La viga bi-empotrada como caso particular de la continua.**

Supongamos una viga continua de tres tramos de longitudes  $l_1$ ,  $l$  y  $l_3$  y momentos de inercia  $I_1$ ,  $I$  e  $I_3$ . El sistema de ecuaciones tipo Clapeyron que resuelve el problema es:

$$\frac{\eta_1^c}{l_1} \cdot \int_0^{l_1} \frac{M^c \cdot dx}{I} + \frac{\eta_1^m}{l_1} \cdot \int_0^{l_1} \frac{M^m \cdot dx}{I} = - \frac{\xi^m}{l} \cdot \int_0^l \frac{M^m \cdot dx}{I} - \frac{\xi^c}{l} \cdot \int_0^l \frac{M^c \cdot dx}{I}$$

$$\frac{\eta^c}{I} \cdot \int_0^l \frac{M^c \cdot dx}{I} + \frac{\eta^m}{l} \cdot \int_0^l \frac{M^m \cdot dx}{I} = - \frac{\xi_3^m}{l_3} \cdot \int_0^{l_3} \frac{M^m \cdot dx}{I} - \frac{\xi_3^c}{l_3} \cdot \int_0^{l_3} \frac{M^c \cdot dx}{I}$$

Si  $I$  es constante por tramos:

$$M_0 \cdot x_1 + 2 \cdot M_1 \cdot (x_1 + x_2) + M_2 \cdot x_2 = - [Kd \cdot x_1 + K1 \cdot x_2]$$

$$M_1 \cdot x_2 + 2 \cdot M_2 \cdot (x_2 + x_3) + M_3 \cdot x_3 = - [Kd \cdot x_2 + K1 \cdot x_3]$$

Suponiendo que las rigideces de los tramos extremos  $l_1$  y  $l_3$  aumenten progresivamente hasta adquirir valores infinitos:  $I_1 = I_3 = \infty$  los sistemas anteriores se transforman en

Caso de  $I$  variable:

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\xi^m}{l} \cdot \int_0^l \frac{M^m \cdot dx}{I} + \frac{\xi^c}{l} \cdot \int_0^l \frac{M^c \cdot dx}{I} = 0. \\
 & + \frac{\eta^c}{l} \cdot \int_0^l \frac{M^c \cdot dx}{I} + \frac{\xi^m}{l} \cdot \int_0^l \frac{M^m \cdot dx}{I} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{58}$$

Si  $I$  fuera variable por tramos, eligiendo  $l$  y  $l$  en vez de los cualesquiera  $l_0$  y  $l_0$ :

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = l \qquad x_3 = 0$$

y:

$$2 \cdot M_1 \cdot x + M_2 \cdot x = - K_i \cdot x$$

$$M_1 \cdot x + 2 \cdot M_2 \cdot x = - K_d \cdot x$$

que simplificados se transforman en:

$$2 M_1 + M_2 = - K_i$$

(59)

$$M_1 + 2 M_2 = - K_d$$

expresiones que concuerdan con las deducidas al tratar la viga bi-empotrada, pudiendo entonces considerarse a ésta como un caso particular de la continua. Para comparar las expresiones (58) con las deducidas al tratar las vigas bi-empotradas debe observarse que el primer término de la primera expresión (58) y el segundo de la segunda abarcan a los dos últimos de las dos expresiones (10).

## CAPITULO V

## Viga continua sin acartelamientos

## Caso I = constante

1°.) Descenso de apoyo.

2°.) Cambios no uniformes de temperatura.

1°.) — **Descensos de apoyos** — Supongamos que un apoyo intermedio, v. gr.: el  $A_{r-1}$  sufra un descenso de "a" cm.

Para calcular el diagrama de momentos flectores o mejor dicho de los momentos sobre los apoyos que hemos elegido como incógnitas, procedamos como siempre aislando dos tramos adyacentes que deben comprender al apoyo que sufre el descenso, formando de tal manera dos vigas simplemente apoyadas estáticamente determinadas de luces  $l_{r-1}$  y  $l_r$  y momentos de inercia  $I_{r-1}$  y  $I_r$  respectivamente

El descenso del apoyo  $A_{r-1}$  en estas condiciones origina fig. N° 44, diseño "a") los ángulos  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  en concordancia del mismo.

Para restablecer la continuidad debemos aplicar los momentos " $M_{r-1}$ " en la forma indicada en el diseño "b", teniendo en cuenta que la propagación de los momentos hacia las partes de la viga no dibujadas exige la existencia en  $A_{r-2}$  y en  $A_r$  de los momentos  $M_{r-2}$  y  $M_r$ .

De la misma figura (diseño "c") se deduce el sentido que deben tener, engendrado en  $A_{r-1}$  una deformación angular contraria a la debida a  $M_{r-1}$ .

La condición de continuidad estará cumplida cuando  $M_{r-1}$ ,  $M_{r-2}$  y  $M_r$  tengan simultáneamente valores tales que las tangentes a las elásticas de deformación totales de ambos tramos ( $l_{r-1}$ ,  $l_r$ ) sobre  $A_{r-1}$  estén en prolongación o en otros términos, sean común.

De lo expuesto, se deduce que los ángulos  $\alpha_2$  y  $\beta_2$  Originados por  $M_{r-1}$  deben ser mayores que los necesarios para conseguir la mencionada condición de continuidad en  $A_{r-1}$ .



Del diseño "C" se deduce, siguiendo sucesivamente el sentido de las flechas que indican el desarrollo de las deformaciones angulares:

$$\pi_{r-1} = -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$$

$$\pi_r = -\beta_1 + \beta_2 - \beta_3$$

y como la condición de continuidad exige que:  $\pi_{r+1} = -\pi_r$

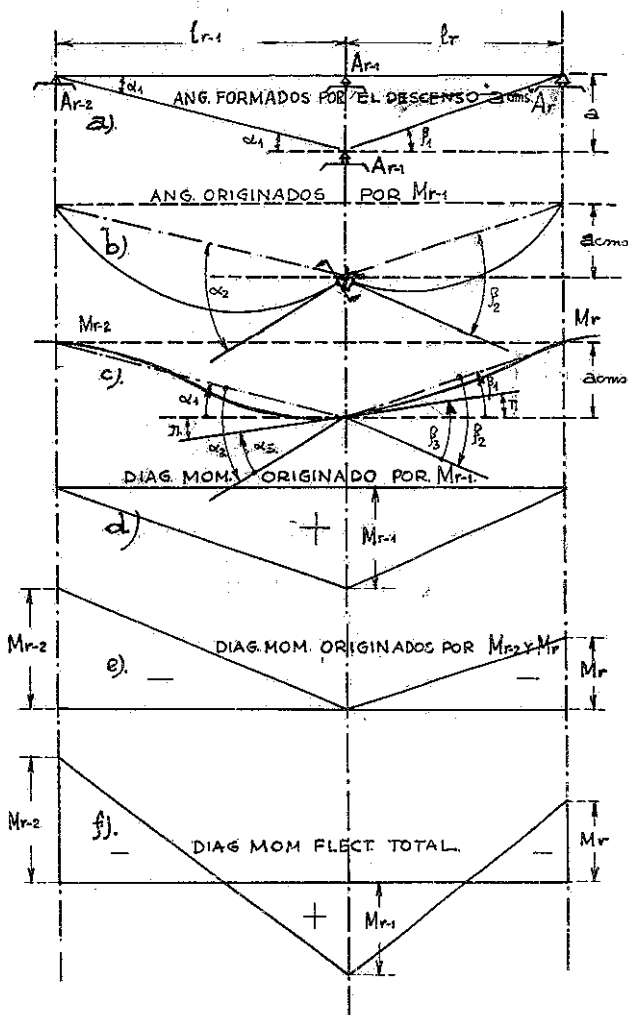


Figura N° 44

resulta:

$$- a_1 + a_2 - a_3 = \beta_1 + \beta_3 - \beta_2$$

o:

$$\boxed{a_2 - a_3 + \beta_2 - \beta_3 = a_1 + \beta_1} \quad (60)$$

Calculamos a continuación y sucesivamente estos valores, para lo cual tendremos en cuenta que los momentos engendrados por  $M_{r-1}$  son positivos y negativos los debidos a  $M_r$  y  $M_{r-2}$ :

1°)  $a_1$  y  $\beta_1$  originados por el descenso de "a" en del apoyo  $A_{r-1}$ .

Del diseño "a" se deduce fácilmente:

$$a_1 = \frac{a}{l_{r-1}}$$

$$\beta_1 = \frac{a}{l_r}$$

de donde el segundo miembro de la (60) es:

$$\frac{a}{l_r} + \frac{a}{l_{r-1}} = a \cdot \left( \frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r-1}} \right).$$

2°)  $a_2$  y  $\beta_2$  engendrados por el momento  $M_{r-1}$ :

$$a_2 = \frac{2 \cdot M_{r-1} \cdot l_{r-1}}{6 \cdot E \cdot I_{r-1}}$$

$$\beta_2 = \frac{2 \cdot M_{r-1} \cdot l_r}{6 \cdot E \cdot I_r}$$

3°)  $a_3$  y  $\beta_3$  originados por  $-M_{r-2}$  y  $-M_r$  respectivamente:

$$a_3 = - \frac{M_{r-2} \cdot l_{r-1}}{6 \cdot E \cdot I_{r-1}}$$

$$\beta_3 = - \frac{M_r \cdot l_r}{6 \cdot E \cdot I_r}$$

Condición de continuidad — La expresión (60) se transforma en:

$$\frac{2.M_{r-1} \cdot l_{r-1}}{E \cdot 6 \cdot I_{r-1}} + \frac{2.M_{r-1} \cdot l_r}{6 \cdot E \cdot I_r} + \frac{M_{r-2} \cdot l_{r-1}}{6 \cdot E \cdot I_{r-2}} + \frac{M_r \cdot l_r}{6 \cdot E \cdot I_r} = a \cdot \left( \frac{l_r + l_{r-1}}{l_r \cdot l_{r-1}} \right)$$

de donde:

$$M_{r-2} \cdot \left( \frac{l_{r-1}}{I_{r-1}} \right) + 2.M_{r-1} \cdot \left( \frac{l_{r-1}}{I_{r-1}} \right) + 2.M_{r-1} \cdot \left( \frac{l_r}{I_r} \right) + M_r \cdot \left( \frac{l_r}{I_r} \right) = 6 \cdot E \cdot a \cdot \left( \frac{l_r + l_{r-1}}{l_r \cdot l_{r-1}} \right)$$

Si introducimos el concepto del coeficiente de flexibilidad, multiplicando por la relación  $I_0/l_0$ , queda:

$$M_{r-2} \cdot x_{r-1} + 2.M_{r-1} \cdot (x_{r-1} + x_r) + M_r \cdot x_r = 6 \cdot E \cdot a \cdot \left( \frac{l_r + l_{r-1}}{l_r \cdot l_{r-1}} \right) \quad (61)$$

y si el momento de inercia fuera constante en toda la viga:

$$M_{r-2} \cdot l_{r-1} + 2.M_{r-1} (l_{r-1} + l_r) + M_r \cdot l_r = 6 \cdot E \cdot a \cdot \left( \frac{l_r + l_{r-1}}{l_r \cdot l_{r-1}} \right) \quad (62)$$

**Diagrama de momentos flectores** — La figura N° 44 es bien explícita. Los momentos  $M_{r-1}$  actuando en los extremos de las "vigas" de luces  $l_{r-1}$  y  $l_r$  dan origen a diagramas triangulares dibujados en el diseño "d" que son positivos a causa de presentar la elástica de deformación su parte convexa hacia abajo. Los momentos  $M_{r-2}$  y  $M_r$  actuando en los extremos izquierdo y derecho de los tramos  $l_{r-1}$  y  $l_r$  originan diagramas triangulares pero negativos por causa contraria a la anterior (diseño d).

El diagrama total será la suma de todos ellos, que se ha dibujado en el diseño "f", pudiéndose observar que sobre el apoyo que sufre el descenso el momento flector es positivo y negativo en los adyacentes.

Reacciones — Del análisis de la figura N° 44 se infiere que:

$$R_{r-1} = \frac{M_{r-2}}{l_{r-1}} + \frac{M_{r-1}}{l_{r-1} + l_r} + \frac{M_r}{l_r}$$

2º) **Influencia de cambios de temperatura no uniformes** — Como un apoyo es una articulación fija y las demás móviles, cualquier cambio uniforme de temperatura se traduce en un alargamiento de la viga sin engendrar tensiones ni momentos flectores.

Si el cambio es “no uniforme”, es decir, si la parte superior experimenta un cambio de temperatura diferente del inferior, se engendra una acción doble: un alargamiento debido a la menor y una flexión engendada por la diferencia de alargamientos relativos de las fibras, todo de acuerdo a lo visto en el caso de las vigas empotradas.

Supongamos separados del resto de la viga continua los tramos de longitudes “ $l_{r-1}$ ” y “ $l_r$ ” y momentos de inercia “ $I_{r-1}$ ” y “ $I_r$ ”, figura N° 45.

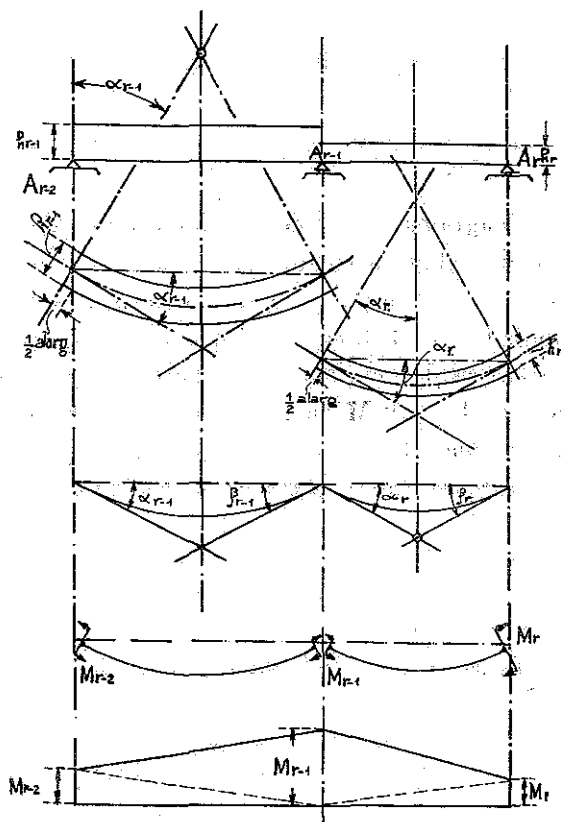


Figura N° 45

Cortemos en concordancia del apoyo intermedio, ambos tramos, formando de esta manera dos vigas simples.

Para mayor generalidad aceptaremos que los cantos inferiores sufran un cambio de temperatura de:

$$"t_{r-1}^i" \text{ y } "t_r^i"$$

y los superiores de:

$$"t_{r-1}^s" \text{ y } "t_r^s"$$

respectivamente, siendo siempre:

$$t_{r-1}^i > t_{r-1}^s$$

y

$$t_r^i > t_r^s$$

El alargamiento de los tramos a causa de los cambios uniformes de temperatura son:

$$\text{alar.} = l_{r-1} \cdot \alpha \cdot \Delta t_{r-1}$$

$$\text{alar.} = l_r \cdot \alpha \cdot \Delta t_r$$

siendo:

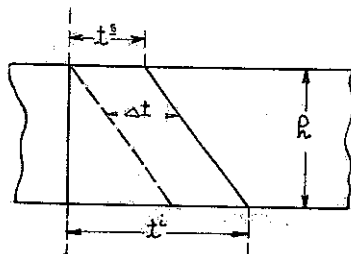
$$t_{r-1}^i - t_{r-1}^s = \Delta t_{r-1}$$

y

$$t_r^i - t_r^s = \Delta t_r$$

Estos alargamientos no originan, como ya hemos indicado, ninguna tensión, quedando entonces por analizar la influencia de la repartición triangular de los cambios de temperatura, pues se supone que la variación de  $t_i$  a  $t_s$  sea lineal a través de las secciones de la viga. (fig. N° 46).

Figura N° 46



Los aumentos de longitud de los cantos inferiores de ambos tramos son:

$$\text{tramo } l_{r-1} = l_{r-1} \cdot a \Delta t_{r-1}^i$$

$$\text{tramo } l_r = l_r \cdot a \cdot \Delta t_r^i$$

siendo nulos los alargamientos (por esta causa únicamente) de los cantos superiores, los ángulos  $\alpha_{r-1} = \beta_{r-1}$  y  $\alpha_r = \beta_r$  iguales por simetría parcial, valdrá:

$$\alpha_{r-1} = \beta_{r-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{alarg}}{h_{r-1}} = \frac{l_{r-1} \cdot a \cdot \Delta t_{r-1}}{2 \cdot h_{r-1}}$$

$$\alpha_r = \beta_r = \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{alarg}}{h_r} = \frac{l_r \cdot a \cdot \Delta t_r}{2 \cdot h_r}$$

Como se ha roto la continuidad de la viga sobre el apoyo "A<sub>r-1</sub>" debemos restablecerla, para lo cual vemos que es necesaria la aplicación (fig. N° 45) de los momentos M<sub>r-2</sub>, M<sub>r-1</sub> y M<sub>r</sub> en la forma que lo indica la figura ya mencionada, los que originar las siguientes deformaciones angulares en concordancia del susodicho apoyo:

1°.— tramo de longitud l<sub>r-1</sub>:

$$\text{Momento } M_{r-2} \quad \alpha_2 = \frac{M_{r-2} \cdot l_{r-1}}{6 \cdot E \cdot I_{r-1}}$$

$$\text{Momento } M_{r-1} \quad \alpha'_2 = \frac{2 \cdot M_{r-1} \cdot l_{r-1}}{6 \cdot E \cdot I_{r-1}}$$

2°.— tramo de longitud l<sub>r</sub>:

$$\text{Momento } M_{r-1} \quad \alpha'_3 = \frac{2 \cdot M_{r-1} \cdot l_r}{6 \cdot E \cdot I_r}$$

$$\text{Momento } M_r \quad \alpha_4 = \frac{M_r \cdot l_r}{6 \cdot E \cdot I_r}$$

La deformación angular extrema total de la derecha será:

$$\alpha_{r-1} - \alpha_2 - \alpha'_2$$

y la de la izquierda del tramo de longitud "l<sub>r</sub>" es:

$$\alpha_r - \alpha'_3 - \alpha_4$$

La condición de continuidad exige:

$$\alpha_{r-1} - \alpha_2 - \alpha'_2 = - (\alpha_r - \alpha'_3 - \alpha_4)$$

de la que:

$$\alpha'_3 + \alpha_4 + \alpha_2 + \alpha'_2 = \alpha_{r-1} + \alpha_r$$

y reemplazando los valores ya deducidos queda:

$$\begin{aligned} & \frac{M_{r-2} \cdot l_{r-1}}{6 \cdot E \cdot I_{r-1}} + \frac{2 \cdot M_{r-1} \cdot l_{r-1}}{6 \cdot E \cdot I_{r-1}} + \frac{2 \cdot M_{r-1} \cdot l_r}{6 \cdot E \cdot I_r} + \frac{M_r \cdot l_r}{6 \cdot E \cdot I_r} = \\ & = - \left[ \frac{\alpha \cdot l_{r-1} \cdot \Delta t_{r-1}}{2 \cdot h_{r-1}} + \frac{\alpha \cdot l_r \cdot \Delta t_r}{2 \cdot h_r} \right] \end{aligned}$$

introduciendo el concepto de coeficiente de flexibilidad, multiplicando por la relación  $I_0/I_0$  y luego por  $6 \cdot E$ :

$$M_r \cdot x_r + 2 \cdot M_{r-1} \cdot (x_r + x_{r-1}) + M_{r-2} \cdot x_{r-1} = -3 \cdot E \cdot \alpha \cdot \frac{I_0}{I_0}$$

$$\left[ \frac{l_{r-1}}{h_{r-1}} \Delta t_{r-1} + \frac{l_r}{h_r} \Delta t_r \right] \quad (63)$$

que para el caso de igualdad de los momentos de inercia en todos los tramos se transforma en:

$$M_{r-2} \cdot l_{r-1} + 2 \cdot M_{r-1} \cdot (l_{r-1} + l_r) + M_r \cdot l_r = -3 \cdot E \cdot \alpha \cdot \frac{I_0}{I_0} =$$

$$\left[ \frac{l_{r-1}}{h_{r-1}} \Delta t_{r-1} + \frac{l_r}{h_r} \Delta t_r \right] \quad (64)$$

Momentos flectores, su diagrama — El examen de la fig. N° 45 indica que todos los momentos son negativos, consistiendo el diagrama en una serie de rectas que no alcanza a cortar la línea de cierre.

Esfuerzo de corte y reacciones — Estudiando las reacciones parciales engendradas en cada tramo y en forma aislada por cada una de las causas momentos, se tiene, adoptando como signo positivo la dirección de abajo hacia arriba:

tramo “ $l_{r-1}$ ”	
apoyo “ $M_{r-2}$ ”	$\frac{M_{r-2} - M_{r-1}}{l_{r-1}}$
apoyo “ $M_{r-1}$ ”	$\frac{M_{r-1} - M_{r-2}}{l_{r-1}}$
tramo “ $l_r$ ”	
apoyo “ $M_{r-1}$ ”	$\frac{M_{r-1} - M_r}{l_r}$
apoyo “ $M_r$ ”	$\frac{M_r - M_{r-1}}{l_r}$

Siendo por consecuencia la reacción del apoyo  $M_{r-1}$  :

$$\frac{M_{r-1} - M_{r-2}}{l_{r-1}} + \frac{M_{r-1} - M_r}{l_r}$$

Uso de las fórmulas deducidas — Estas fórmulas se usan en forma análoga a sus semejantes deducidas para cuando actúan cargas exteriores.

Si algún tramo no sufre cambios de temperatura se anula el término  $l_r \frac{t}{h}$  correspondiente a él, además, en caso de calentarse más el canto superior que el inferior, se usan las mismas fórmulas pero previo cambio de signo a los momentos flectores, que, por consiguiente, serán positivos.

(Continuará)