

ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS DE HORMIGON ARMADO

(Cálculo de estructuras hiperestáticas con o sin acartelamientos y sesgos)

POR EL

Ing. Civil Luis Sobrino Aranda

Profesor suplente por concurso de: "Estabilidad de Construcciones" y "Construcciones de Hormigón Armado" en la Universidad Nacional de Córdoba. — Profesor de matemáticas en el Liceo Nacional de Señoritas de Rosario (Sta. Fe)

PARTE 1ª.

PROPIEDADES DEL HORMIGON ARMADO Y DEFORMACIONES ANGULARES

CAPITULO I

Generalidades. Restricciones al uso general de las fórmulas de cálculo de vigas hiperestáticas. Módulo de elasticidad. Momentos de inercia. Prescripciones neglamentarias. Determinación práctica de I. Tablas y gráficos. Ejemplos.

Sin formular, en general, otras hipótesis que las admitidas en Resistencia de Materiales, se deducen las expresiones de cálculo o de verificación de las estructuras estáticamente indeterminadas.

Cuando éstas tienen momento de inercia constante, (más exactamente cuando $E \cdot I$ es constante), las fórmulas permiten obtener en cada caso el valor de los momentos extremos incógnitos en función de los datos del problema, es decir, permiten su cálculo directo.

No pasa lo mismo cuando el producto $E \cdot I$ tiene valores diferentes de sección a sección, pues en este caso las fórmulas permiten solamente la verificación de los problemas respectivos.

En el primer caso pueden obtenerse los momentos incógnitos independientemente de las secciones transversales de la estructura; en cambio, en el segundo, este conocimiento es imprescindible, por cuanto el valor de $E \cdot I$. no puede ser eliminado de las fórmulas.

Se admite también la invariabilidad de E ., con lo que la constancia o variabilidad del producto $E \cdot I$. queda, en realidad, reducido únicamente al de I ., cosa que no puede aceptarse, como luego veremos, sin reservas.

Si la construcción, es de material homogéneo, v. gr.: hierro, es posible la determinación exacta de I , ya que E no varía, manteniéndose constante cualesquiera sean las tensiones a que se encuentre, en general, sometida la estructura.

El empleo, en este caso, de las fórmulas de cálculo es sencillo, pues puede correctamente simplificarse E ., y calcularse exactamente I .

No pasa lo mismo cuando el material de que está formada la estructura es el hormigón armado, pues la variabilidad de E y los diferentes períodos del estado elástico a que se encuentra sometida una sección cualquiera cuando varía de intensidad la sollicitación exterior, no permiten calcular con exactitud a aquel y determinar en igual forma a I .

Para resolver entonces un problema, se deben formular nuevas hipótesis, las que están ya, por otra parte, fijadas en los reglamentos de cálculo y construcciones de hormigón.

Antes de pasar adelante y transcribir lo pertinente, es necesario conocer, aunque sea someramente los factores que motivan esas reglamentaciones, pudiendo, recién así, interpretárselas debidamente, lo que se hace a continuación.

Módulo de elasticidad. — El módulo de elasticidad del hormigón, ya sea por compresión, tracción, etc., varía según su propia naturaleza, ("materiales empleados"), dosificación, relación agua-cemento, etc.), su edad y tensiones a que se encuentre sometido.

Con la riqueza del dosage, aumenta su valor en forma pon-

derable dentro de porcentajes elevados (ensayos de Bach y de la Deutscher Ausschus für Eisenbeton) y disminuye al aumentar las tensiones. El módulo por compresión correspondiente a tensiones bajas puede alcanzar 400.000 kgs./cm², reduciéndose a 130.000 kgs./cm² para tensiones próximas a la ruptura, debiéndose tomar tanto estos números como los que se consignan a continuación como valores medios.

El módulo por tracción disminuye igualmente con el aumento de las tensiones, aproximadamente dentro de los límites siguientes: de 0 a 10 kgs./cm² es sensiblemente igual al de compresión, bajando rápidamente a 100.000 kgs./cm² para tensiones próximas a la de ruptura.

La inclusión de una armadura, para ensayos de flexión, de una pieza de hormigón armado, modifica estos valores, complicándose el problema por la influencia de las deformaciones tangenciales que no permiten obtener valores de interpretación sencilla. Un ensayo efectuado por Saliger (Berlín 1913) arrojó el siguiente resultado:

Tensión	0 Kgs./cm ² .	E = 227.000 Kgs./cm ² .
„	25 Kgs./cm ² .	E = 207.000 Kgs./cm ² .
„	50 Kgs./cm ² .	E = 150.000 Kgs./cm ² .
„	65 Kgs./cm ² .	E = 140.000 Kgs./cm ² .
„	192 Kgs./cm ² .	E = 125.000 Kgs./cm ² . (ruptura).

Para un cálculo de deformación por flexión, no queda, teniendo en cuenta la diversidad de factores que hacen variar el valor de E, otro recurso que adoptar, de acuerdo a ensayos (v. gr.: el ya mencionado), un valor que se conceptúe como más adecuado, debiendo tenerse presente también la tensión posible a que se encuentre sometido el material.

Momntos de inercia. — Debemos recordar que para tensiones bajas, los módulos de elasticidad por tracción y compresión son prácticamente iguales, deduciéndose, por consiguiente, que en el fenómeno de flexión a que la pieza se encuentra sometida, la sección de hormigón tendida contribuye a reaccionar para el

equilibrio elástico, en iguales condiciones que la zona comprimida. Por lo tanto, el eje neutro estará debajo de la parte media de la viga si la sección de armadura extendida es mayor que la de compresión, en el centro, si son iguales o carece de ambas, y en caso contrario, encima. El valor del coeficiente "m" más apropiado, de acuerdo a numerosos ensayos, es de 7 a 10. A este estado de tensión se le denomina, en general, estado I.

Al aumentar las cargas exteriores (u otra causa exterior cualquiera) e incrementarse consiguientemente las tensiones desarrolladas en la sección, debido a la mayor rapidez con que disminuye el valor del módulo de elasticidad por tracción, con respecto al de compresión, la parte extendida disminuye su capacidad de acción molecular, implicando un levantamiento de la fibra neutra hacia el canto de compresión.

Se debe tener en cuenta, naturalmente, al deducir las fórmulas que reflejan este fenómeno la relación:

$$n = \frac{E \text{ (hormigón comprimido)}}{E \text{ (hormigón extendido)}}$$

entre los módulos de elasticidad por compresión y tracción, adoptando valores crecientes según sea el aumento de las tensiones en la sección. Generalmente se adopta $n = 3$. A este período se le denomina I°. y se extiende hasta la formación de la primera grieta en la sección que se considera.

Formada ésta, quedan automáticamente eliminadas las tensiones de tracción del hormigón como contribuyentes al equilibrio elástico, acercándose nuevamente al canto de compresión. A este estado se le denomina II°, y en general, en la construcción, no se llega a él, sino que se le prevee en el cálculo.

Los períodos posteriores hasta la ruptura no tienen interés para nuestro objeto.

Para la interpretación correcta de las disposiciones reglamentarias que se citan posteriormente debe tenerse en cuenta que una sección cualquiera, si bien está calculada previendo como ya

se indicó el estado II°, se encuentra, en realidad dentro de los estados I^a. y I especialmente.

Prescripciones reglamentarias. — Por las tensiones bajas a que se encuentran en general sometidas las diversas secciones de una estructura de hormigón armado, las normas de la Comisión Alemana de Hormigón Armado del año 1932 (parte A — § 17) establecen lo siguiente:

“Para el cálculo de las magnitudes estáticamente indeterminadas y la determinación de las deformaciones elásticas, en todas las estructuras debe operarse con un módulo de elasticidad del hormigón igual para la tracción y compresión a: $E = 210.000 \text{ kgs./cm}^2$.”

Como las secciones de hormigón armado se encuentran realmente dentro de los estados I y I^a., prescribe el mismo reglamento: (Parte A — § 17 y 25):

“El momento de inercia en este caso es el que corresponde a toda la sección de hormigón, con o sin inclusión de la sección correspondiente de hierro, adoptando $m = 10$ ”.

“Como ancho activo de la placa de compresión de las vigas-placa se adopta:

“a) . — vigas simétricas (fig. 1^a):

$$b = 6d + 2 \cdot b_s + b_0$$

“b) . — vigas asimétricas (fig. 2^a):

$$b = 2.25d + b_s + b_1$$

“debiendo b no ser mayor que la distancia entre los ejes de los tramos en el caso a) y que la semi-luz libre entre nervaduras $+ b_1$ en el caso b)” .

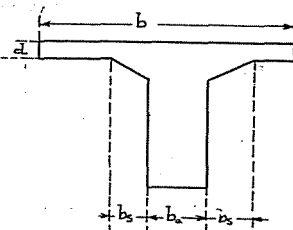


figura 1

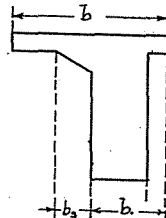


figura 2

Generalmente por lo bajo de las tensiones del metal (400 kgs./cm², en el estado I corresponde a 1.000 kgs./cm². previstos en el estado II), y su relativa poca influencia, se prescinde de tenerlo en cuenta en los cálculos, considerándose la sección como homogénea con $E = 210.000$ kgs./cm².

La fijación de E adoptando un valor constante, y las reglas transcriptas para el cálculo de I no permiten resolver un problema con exactitud sino aproximar su solución lo más posible a la realidad. Por otra parte, la obtención de un resultado exacto es imposible a causa del desconocimiento del valor, su régimen de variación y la determinación estricta de I .

Por ello, cuando se obtenga mediante el empleo de las fórmulas de cálculo un resultado cualquiera, no puede verse en él sino un valor que resuelve un problema dentro del marco de aproximación de estas hipótesis a la realidad, concepto éste que no se tiene presente generalmente cuando se calculan estructuras hiperestáticas de hormigón armado, adoptando como artículo de fé las fórmulas simplificadas, llevando cálculos de tensiones y dimensiones hasta cifras decimales, prescindiendo de estos conceptos básicos y fundamentales.

Determinación práctica de I . — Trataremos primeramente la sección cuadrada con esquinas chanfleadas:

El momento de inercia es (fig. 3^a):

$$J = \frac{b^4}{12} - \frac{4 \cdot a^2}{2} \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{3} \right)^2 =$$

$$= b^4 \cdot \left[\frac{1}{12} + \frac{2 \cdot \gamma^3}{3} - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{2 \cdot \gamma^4}{9} \right] = K \cdot b^4$$

donde:

$$\gamma = \frac{a}{b}$$

el valor de K se dá en la tabla N° 1.

TABLA N° 1

Sección cuadrada con esquinas chanfleadas — Cálculo de I

$\frac{a}{b}$	K	$\frac{a}{b}$	K	$\frac{a}{b}$	K
0.00	0.08333	0.11	0.07812	0.21	0.06681
1	8328	12	7722	22	6545
2	8314	13	7625	23	6406
3	8290	14	7523	24	6264
4	8258	15	7416	25	6120
5	8216	16	7305	26	5973
6	8167	17	7188	27	5823
7	8110	18	7067	28	5672
8	8046	19	6942	29	5519
9	7975	20	6813	30	5363
0.10	7897	—	—	—	—

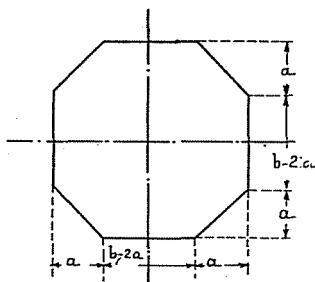


Figura 3

Sección T. — En forma análoga puede establecerse que:

$$J_x = \mu \frac{b \cdot h^3}{12}$$

dando el gráfico N°. 1 el valor de μ en función de:

$$\gamma_1 = \frac{b_0}{b} \quad \text{y} \quad \gamma_2 = \frac{d}{h}$$

y siendo: b_0 el ancho de la nervadura, b el de la placa, d el espesor de la losa y h la altura total de la viga.

Ejemplos: Calcular los momentos de inercia de las secciones dibujadas en las figuras 4, 5 y 6.

a) Sección octogonal. — Se tiene:

$$\gamma = \frac{0.09}{0.32} = 0.28$$

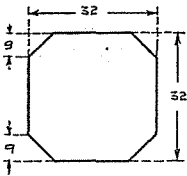


Fig. 4

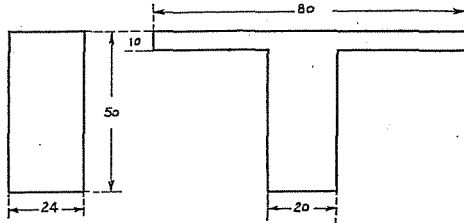


Fig. 5

Fig. 6

entonces: $I = 0,05672 \times 32^4 = 59.475 \text{ cm}^4$.

b) Sección rectangular. —

$$I = \frac{ab^3}{12} = \frac{24}{12} \cdot 50^3 = 250.000 \text{ cm}^4$$

c) Sección viga-placa:

$$\gamma_1 = \frac{b_0}{b} = \frac{20}{80} = 0,25 \quad \gamma_2 = \frac{d}{h} = \frac{10}{50} = 0,20$$

luego el gráfico N°. 1 dá:

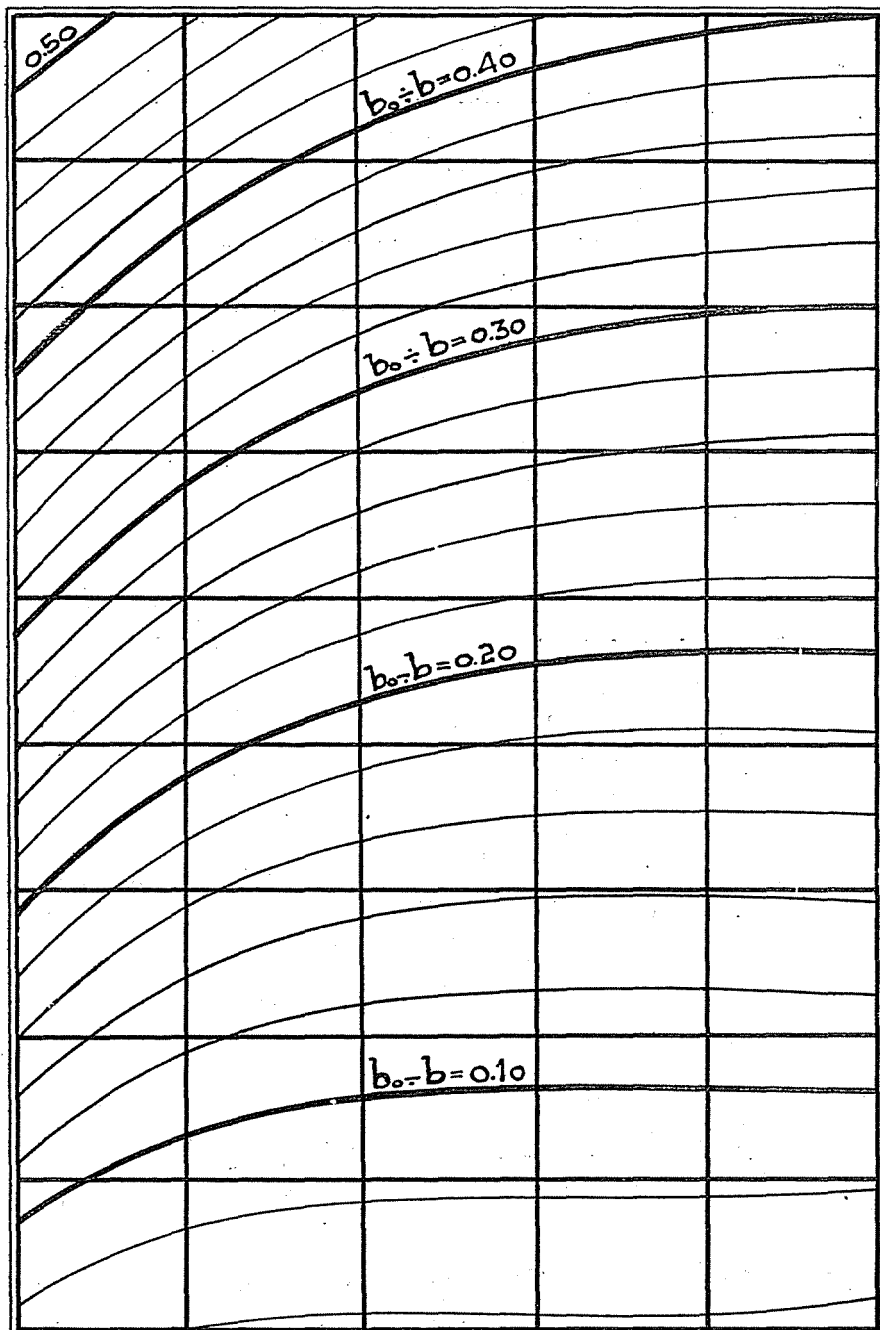
$$\mu = 0,435$$

y:

$$I = 0,435 \frac{80 \times 50^3}{12} = 362.500 \text{ cm}^4$$

GRAFICO N°. 1.

Secciones T. Cálculo de momentos de inercia



CAPITULO II°.

Rotaciones y deformaciones angulares

- 1°.) **Primer teorema de Mohr.** — Enunciado y deducción. Caso general en que el momento de inercia es cualquiera.
- 2°.) **Cálculo de deformaciones angulares extremas en vigas simplemente apoyadas.** — Casos particulares de sollicitaciones exteriores. Cálculo de deformaciones angulares con la ayuda de los valores K_i y K_d . Tabla de éstos. Ejemplos.
- a) Caso de vigas con momento de inercia constante.
- a) Caso de vigas con momento de inercia variable.
- 3°.) **Cálculo de deformaciones angulares en vigas simplemente apoyadas con acartelamientos.** — Gráficos de valores para cargas uniformemente repartida, concentradas y momentos exteriores que actúan en sus extremos. Ejercicios y problemas. Ejemplos de aplicación de los gráficos.

1°.) **Primer teorema de Mohr — Enunciado y deducción.** — De la ecuación diferencial de la línea elástica:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{M}{E.I} \quad (1)$$

se deduce:

$$d \left(\frac{d y}{d x} \right) = d \omega = \frac{M \cdot d x}{E.I}$$

de la que, como E es constante y ω muy pequeña:

$$\omega = \operatorname{tg} \omega = \int_{x_0}^{x_1} \frac{M \cdot dx}{E \cdot I} = \frac{1}{E} \int_{x_0}^{x_1} \frac{M}{I} \cdot dx \quad (2)$$

Se denomina momento reducido al cociente $\frac{M}{I}$ ó al $\frac{M}{E \cdot I}$ cuando E es también variable.

En lo que sigue supondremos $E = \text{constante}$, de donde surge la siguiente definición: "momento reducido es el cociente del valor del momento flector correspondiente a una abscisa determinada, por el respectivo del momento de inercia de dicha sección".

Puede entonces trazarse un diagrama de momentos reducidos que será evidentemente el lugar geométrico de los cocientes $\frac{M}{I}$ correspondientes a cada sección.

En la figura N° 7, se ha separado de una estructura cualquiera, la porción comprendida entre las abscisas x_0 y x_1 , indicándose en el diagrama a) la carga exterior, en el b) los momentos flectores, y en el c) los momentos reducidos.

En este último diseño, puede observarse que el producto $\frac{M}{E \cdot I} \cdot dx$ mide el valor del área del diagrama de momentos reducidos, comprendido entre las verticales de dos abscisas infinitamente vecinas.

Por lo tanto la expresión (2) indica que el ángulo ω comprendido entre las dos tangentes a la elástica en los puntos de abscisas x_0 y x_1 , está medido por el área total del diagrama de momentos reducidos limitado por las verticales de dichas abscisas.

Además como la expresión (1) es una relación funicular, deben cortarse ambas tangentes sobre la vertical del centro de gravedad del diagrama de momentos reducidos.

Estas sencillas consideraciones permiten enunciar el primer teorema de Mohr, que puede redactarse así: "la deformación angular ω , originada en un fenómeno de flexión cualquiera, entre

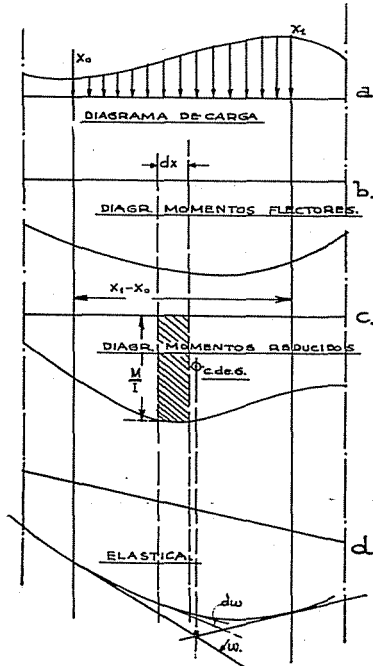


Figura 7.

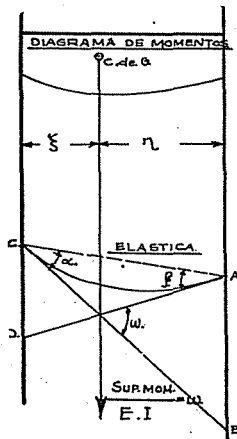


Figura 8

dos abscisas x_0 y x_1 está medida por el área del diagrama de momentos flectores reducidos comprendido entre éstas”.

Este teorema y el hecho ya analizado de que ambas tangentes deban cortarse sobre la vertical del centro de gravedad del diagrama de momentos reducidos, permiten calcular las deformaciones angulares α y β , lo que es factible a causa de su pequeñez.

Llamemos (fig. N° 8) ξ y η las distancias del centro de gravedad a las verticales de x_0 y x_1 ; de la figura indicada, se tiene:

$$\omega \cdot \eta = A \cdot B = \alpha \cdot (x_1 - x_0)$$

$$\omega \cdot \xi = C \cdot D = \beta \cdot (x_1 - x_0)$$

de donde:

$$\alpha = \frac{\omega \cdot \eta}{(x_1 - x_0)}$$

$$\beta = \frac{\omega \cdot \xi}{(x_1 - x_0)}$$

o:

$$\alpha = \frac{\eta}{(x_1 - x_0)} \cdot \frac{1}{E} \cdot \int_{x_0}^{x_1} \frac{M}{I} dx$$

$$\beta = \frac{\xi}{(x_1 - x_0)} \cdot \frac{1}{E} \cdot \int_{x_0}^{x_1} \frac{M}{I} dx$$

y si I es constante:

$$\alpha = \frac{\eta}{(x_1 - x_0)} \cdot \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_{x_0}^{x_1} M dx$$

$$\beta = \frac{\xi}{(x_1 - x_0)} \cdot \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_{x_0}^{x_1} M dx$$

valiendo todo lo dicho anteriormente sin más que cambiar la expresión "superficie de momentos reducidos" por "superficie de momentos flectores" simplemente.

2.) Cálculo de deformaciones angulares extremas en vigas simplemente apoyadas. — Como no hemos hecho ninguna restricción respecto a los límites, para el caso de una viga simplemente apoyada tendríamos:

$$x_0 = 0 \quad \text{y} \quad x_1 = l$$

a) si:

$$I = \text{constante}$$

$$\omega = \frac{\text{sup. momentos}}{E.I}$$

de donde:

$$(3) \quad a = \frac{\omega \cdot \eta}{l} = \frac{\text{sup. momentos}}{E.I} \cdot \frac{\eta}{l}$$

$$\beta = \frac{\omega \cdot \xi}{l} = \frac{\text{sup. momentos}}{E.I} \cdot \frac{\xi}{l}$$

Expresiones que permiten calcular, conocida la carga, el material y el momento de inercia de la viga, las deformaciones angulares extremas a y β .

b) Si el momento de inercia no es constante, las expresiones adecuadas serían:

$$a = \frac{\eta}{l} \cdot \frac{1}{E} \int_0^l \frac{M}{I} dx$$

(3 bis)

$$\beta = \frac{\xi}{l} \cdot \frac{1}{E} \int_0^l \frac{M}{I} dx$$

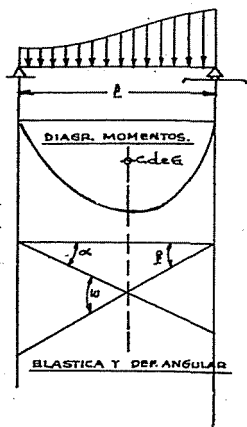


Figura 9

Deformaciones angulares extremas en función de los valores K_i y K_d . — Si las expresiones (3) las multiplicamos y dividi-

mos por $\frac{6}{l^2}$:

$$\alpha = \frac{\text{sup. momentos}}{E.I} \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{6}{l^2} = \left[(\text{sup. momentos}) \cdot \frac{6}{l^2} \right] \cdot \frac{1}{6EI}$$

$$\beta = \left[(\text{Sup. momentos}) \cdot \xi \cdot \frac{6}{l^2} \right] \cdot \frac{1}{6EI}$$

Los valores encerrados entre corchetes son respectivamente los momentos estáticos de la superficie de momentos flectores con respecto a las verticales de los apoyos derecho e izquierdo respectivamente multiplicadas por $\frac{6}{l^2}$. Si para abreviar los denominamos K_d y K_i , tendremos:

$$\omega = \alpha + \beta$$

$$\alpha = K_d \cdot \frac{1}{6 E.I} \quad \text{y:} \quad \beta = K_i \cdot \frac{1}{6.E.I} \quad (4)$$

Estos valores K_d y K_i , para caso de carga pueden tabularse, con lo que el problema de la determinación de α y β se puede resolver de inmediato.

A continuación, en el cuadro siguiente, se consignan los valores de K_d y K_i , para los casos más frecuentes de carga.

TABLA N° 2. — VALORES DE Kd y Ki

N°.	Caso de carga	Kd	Ki
1	Carga P a distancias a y b de los extremos izquierdo y derecho respectivamente.	$P \cdot b \cdot \frac{a}{l} \cdot \left(1 + \frac{a}{l}\right)$	$P \cdot a \cdot \frac{b}{l} \cdot \left(1 + \frac{b}{l}\right)$
2	Carga P que actúa en el centro.	$\frac{3}{8} \cdot P \cdot l$	$\frac{3}{8} \cdot P \cdot l$
3	Dos Fuerzas P que actúan en $\frac{l}{3}$ y $\frac{2l}{3}$	$\frac{2}{3} \cdot P \cdot l$	$\frac{2}{3} \cdot P \cdot l$
4	3 Fuerzas P en $\frac{l}{4}$; $-\frac{l}{4}$ y $\frac{3l}{4}$	$\frac{15}{16} \cdot P \cdot l$	$\frac{15}{16} \cdot P \cdot l$
5	Carga uniforme parcial de longitud a contada a partir del extremo izquierdo hacia la derecha. $b = l - a$	$\frac{q \cdot l^2}{4} \cdot \left[\frac{a}{l}\right]^2 \cdot \left[2 - \left(\frac{a}{l}\right)^2\right]$	$\frac{q l^2}{4} \cdot \left(\frac{a}{l}\right) \cdot \left[1 + \frac{b}{l}\right]^2$
6	Carga unif. que abarca la mitad izquierda de la viga.	$\frac{7}{64} \cdot q \cdot l^2$	$\frac{9}{64} \cdot q \cdot l^2$
7	Carga uniformemente repartida que abarca toda la viga.	$\frac{q l^2}{4}$	$\frac{q l^2}{4}$
8	Carga triangular con valores: p en el extremo derecho y 0 en el izquierdo	$\frac{2}{15} \cdot p \cdot l^2$	$\frac{7}{60} \cdot p \cdot l^2$
9	Carga triangular con valores: p en el centro de la viga y cero en ambos extremos.	$\frac{5}{32} \cdot p \cdot l^2$	$\frac{5}{32} \cdot p \cdot l^2$
10	Cargas triangulares con valores: p en ambos extremos de la viga y cero en su centro.	$\frac{3}{32} \cdot p l^2$	$\frac{3}{32} \cdot p l^2$

3º. Ejemplos. — El cálculo de las deformaciones angulares, base fundamental del de las construcciones hiperestáticas, no presenta en principio dificultades teóricas, aunque su determinación aritmética es larga y engorrosa cuando el momento de inercia no es constante a lo largo de cada uno de los elementos, tramo o pié derecho, de que consta la construcción.

Los casos que más frecuentemente se presentan en el cálculo de vigas de hormigón armado son dos:

1º.) Cuando $I = \text{constante}$; y 2º.) cuando el tramo o pié derecho tiene acartelamientos en sus extremos.

Este último puede aun desdoblarse según si los acartelamientos son simétricos con respecto al eje de simetría de la pieza o si existe solamente en un solo extremo, como es frecuente se presente en los tramos primero y último de las vigas continuas.

Aunque innecesario, pero entendiendo su utilidad desde el punto de vista didáctico, desdoblaremos toda la exposición, presentando en todos los capítulos primeramente el caso en que $I = \text{constante}$, tratando luego el correspondiente a la existencia de los acartelamientos.

El empleo de los gráficos que se incluyen permiten su cálculo con extrema sencillez, aunque para cuando $I = \text{variable}$ en forma cualquiera, debe necesariamente recurrirse al procedimiento general.

a) Momentos de inercia constante. —

Problema 1º. — Sea una viga de sección rectangular, constante, de 30×80 cms., de hormigón armado, de 8 mts. de luz, sometida a una carga uniformemente repartida de 2.000 kgs./m. Se desea conocer la rotación total.

La deformación angular es: (Fórm. 4):

$$\omega = \alpha + \beta = Kd \cdot \frac{l}{6.E.I} + Ki \cdot \frac{l}{6.E.I} = 2.K \cdot \frac{l}{6.E.I}$$

Para la carga uniformemente repartida (tabla 2ª.):

$$K = \frac{p \cdot l^2}{4}$$

luego:

$$\omega = \frac{p \cdot l^3}{12 \cdot E \cdot I}$$

reemplazando:

$$\omega = \frac{20 \times \overline{800^3}}{12 \times 200.000 \times \frac{30 \times \overline{80^3}}{12}} = 0.00333$$

pues:

$$I = \frac{a \cdot h^3}{12} = \frac{\overline{80^3} \times 30}{12}$$

luego:

$$\omega = 11' 27'' 54$$

Problema 2º. — Una viga de hormigón armado de 6 mts. de luz, de sección constante igual a la diseñada en la figura 10ª., se halla sometida en su extremo derecho a la acción de un momento exterior $M = 15.000$ kgms. Se desea conocer las rotaciones extremas.

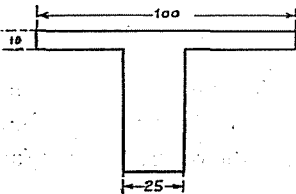


Figura 10

Para calcular I usaremos el gráfico N° 1.

$$\frac{b_0}{b} = \frac{25}{100} = 0,25 \quad ; \quad \frac{d}{h} = \frac{0.10}{0.50} = 0.20$$

luego:

$$\mu = 0,434$$

y:

$$I = 0,434 \frac{100 \times 50^3}{12} = \sim 450.000 \text{ cms}^4.$$

Los valores de K_i y K_d son (tabla 2ª):

$$a \text{ izq.} = K_d \frac{1}{6.E.I}$$

$$a \text{ der.} = K_i \frac{1}{6.E.I}$$

como:

$$K_i = 2.K_d = 2M$$

resulta: $a \text{ der.} = 2. a \text{ izq.} = 2M \cdot \frac{1}{6.E.I} = 0.000333$

y:

$$a \text{ der.} = 2. a \text{ izq.} = 11' 27''^{45}$$

la rotación total vale:

$$a = a \text{ izq.} + a \text{ der.} = 11' 27''^{45} + 5' 43''^{72} = 17' 11''^{17}$$

b) **Momentos de inercia variables en forma cualesquiera.** —

Problema N° 3. — Se desea calcular las rotaciones comprendidas entre $x = 2.00 \text{ m.}$; $y, x = 0$; $x = 2.00 \text{ mts.}$ y, $x = 8,00 \text{ mts.}$; y la total, de la viga de hormigón armado de 10.00 mts. de luz representada en la figura 11ª, sometida a la acción de una carga concentrada en su punto medio.

Dicha viga es de sección rectangular de $24 \times 70 \text{ cms.}$ en sus dos metros extremos, y con una losa superior de 1.20×0.10 en los 6.00 mts. centrales.

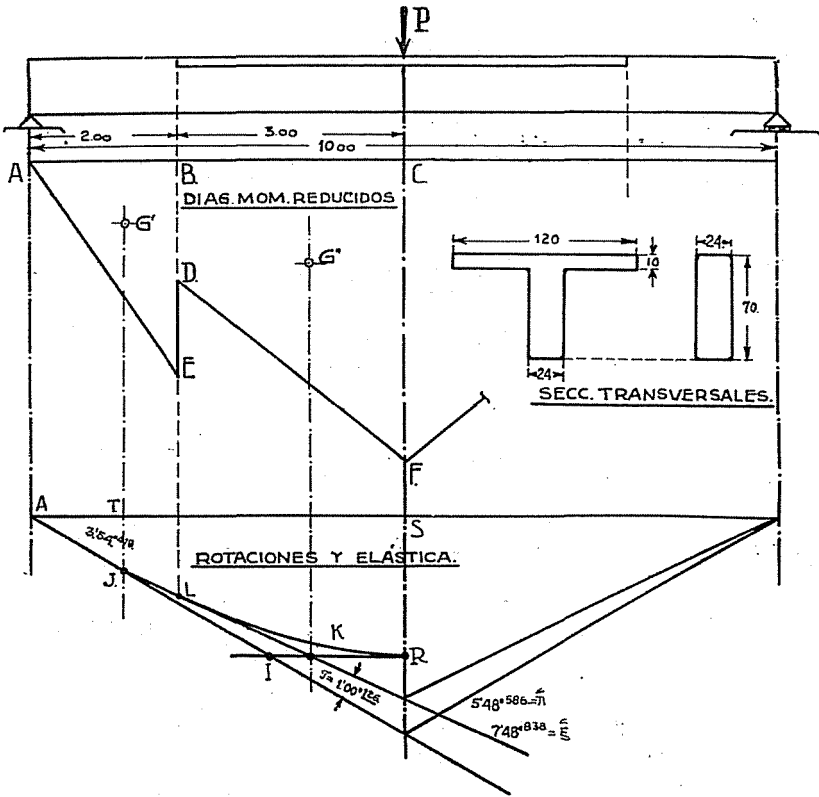


Figura 11

Calcularemos los momentos de inercia:

a) sección rectangular:

$$I = \frac{24 \times 70^3}{12} = 686.000 \text{ cm}^4$$

b) sección T:

$$\frac{d}{h} = 0,142 \quad \frac{b_0}{b} = 0,20 \quad \mu = 0,362$$

con lo que:

$$I = 0,362 \times \frac{120 \times \overline{70^3}}{12} = 1.241.660 \text{ cm}^4.$$

Los momentos flectores son:

a) en el centro de la viga:

$$M = \frac{P.l}{4} = \frac{4.000 \times 1.000}{4} = 1.000.000 \text{ kgems.}$$

b) en $x = 2.00$ mts.:

$$M = 400.000 \text{ kgems.}$$

Los momentos reducidos:

a) en el centro de la viga:

$$C.F. = \frac{1.000.000}{1.241.660} = 0,805.300$$

b) en $x = 2.00$ mts.:

$$D.B. = \frac{400.000}{1.241.000} = 0,322.000$$

$$B.E. = \frac{400.000}{686.000} = 0,583.000$$

Cálculo de rotaciones:

a) entre $x = 2.00$ mts. y $x = 8.00$ mts.:

$$\pi = \frac{0,322.000 + 0,805.300}{2 \times 200.000} \cdot 2.300 = 0,00169$$

$$\therefore \angle \pi = 5' 48''^{59}$$

b) entre $x = 0.$ y $x = 2.00$ mts.:

$$\tau = \frac{0,583.000 \times 200}{2 \times 200.000} = 0,000.291.5$$

$$\tau = 1' 00''^{13}$$

e) rotación total:

$$\xi = \angle + 2.\tau = 7' 48''^{85}$$

d) rotaciones extremas:

$$\alpha = \beta = \frac{7' 48''^{85}}{2} = 3' 54''^{18}$$

La elástica puede ser trazada observando que las tangentes extremas (v. gr.: la de la izquierda) se deben cortar con las correspondientes al centro de la viga, que es horizontal, en el punto I, que pertenece a la vertical del centro de gravedad de la superficie de momentos reducidos A.B.C.F.D.E.A.

El punto de tangencia sobre la vertical B.E. se encuentra determinando los centros de gravedad de las superficies A.B.E. y B.D.F.C. Las intersecciones de estas verticales con las tangentes en $x = 0$ y $x = 5$ mts., permiten trazar la recta $\overline{J.E.}$; siendo L el punto buscado. La flecha $\overline{T.J.}$ puede calcularse así:

$$\overline{T.J.} = \overline{A.T.} \operatorname{tg.} 3' 59''^{419}$$

y la S.R.:

$$\overline{S.R.} = \frac{1}{2} \operatorname{tg.} 3' 54''^{419} - \overline{I.R} \operatorname{tg.} 3' 54''^{419} = \left(\frac{L}{2} - \overline{I.R.}\right) \operatorname{tg.} 3' 59''^{419}$$

Problema 4º. — Una viga de 6,00 m. de luz está sometida a una carga uniformemente repartida de $p = 2.000$ kgs./m. El ancho de la viga es constante, pero las alturas varían linealmente desde 46 cms. en concordancia del apoyo derecho, a 118 sobre el izquierdo. Se desea conocer la variación angular entre las secciones de abscisas $x = 2.00$ mts. y $x = 4.00$ mts.

Dividiremos el tercio medio de la viga en ocho secciones que denominaremos tal cual se indica en la figura N°. 12.

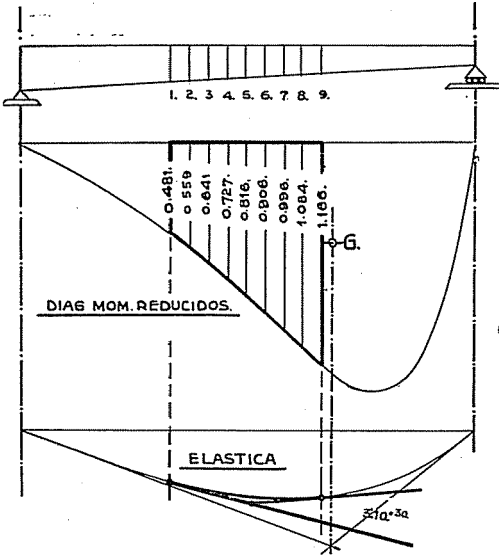


Figura 12

El cálculo de las alturas y momentos de inercia puede seguirse en el cuadro siguiente:

Sección	h	$I = \frac{ah^3}{12}$
1	94	1.661.128
2	91	1.507.142
3	88	1.362.944
4	85	1.228.250
5	82	1.102.736
6	79	986.078
7	76	877.952
8	73	778.034
9	70	686.000

y el de los momentos flectores y momentos reducidos, a continuación:

Sección	x	1-x	x. (1-x)	M kgcm.	$M' = \frac{M \cdot \text{Kgcm.}}{I \cdot \text{cm}^4}$
1	2,00	4,00	8,00	800.000	0,481.588
2	2,25	3,75	8,4375	843.750	0,559.835
3	2,50	3,50	8,75	875.000	0,641.994
4	2,75	3,25	8,9375	893.750	0,727.631
5	3,00	3,00	9,00	900.000	0,816.148
6	3,25	2,75	8,9375	893.750	0,906.368
7	3,50	2,50	8,75	875.000	0,996.337
8	3,75	2,25	8,4375	843.750	1,084.464
9	4,00	2,00	8,00	800.000	1,166.180

TOTAL 7,380.845

luego:

$$J = \frac{1}{E} \cdot \sum_{x=2}^{x=4} \frac{M \cdot \Delta x}{I} =$$

$$= \frac{\Delta x}{E} \cdot \sum_{x=2}^{x=4} \frac{M}{I} = \frac{25}{200.000} \cdot 7,380.845 =$$

$$= 0,0009226$$

o sea:

$$T = 3' 10''^{30}$$

A M = 1 kgm.

Sección	Abcisa (cm).	Kgrms. M	η'	$\eta' \cdot \frac{M' \cdot \Delta x}{I}$	$\eta' \cdot \frac{M' \cdot \Delta x}{I}$
0	0	0,00	968,00	0,9232	279,2680
1	48	0,04	924,37	79,9031	976,5969
2	96	0,09	877,23	288,2836	2.059,8764
3	144	0,14	829,52	780,8257	3.799,3343
4	192	0,19	781,58	1.877,8660	6.719,6341
5	240	0,24	454,93	137.711,8265	114.937,9735
6	760	0,76	217,34	23.752,9170	6.596,0429
7	808	0,80	169,17	18.293,6802	3.724,8797
8	856	0,85	121,04	14.610,5126	2.012,3505
9	904	0,90	72,92	12.008,9867	944,7133
10	952	0,95	24,83	10.093,9847	257,0153
11	1.000	1,00			

$$\frac{\Delta x}{I} = 219.671,0930$$

$$\sum_{n=0}^1 \eta' \cdot \frac{M' \cdot \Delta x}{I} = 142.307,6849$$

c) Vigas con acartelamientos. —

Problema 5. — Calcular las rotaciones total y extremas de recha e izquierda de una viga de hormigón armado de sección rectangular, de 10 mts. de luz, sometida a un momento exterior $M = 1$ kgm. La viga es simétrica, de 36×70 de sección en la parte media (y tiene acartelamientos con las dimensiones siguientes: $h = 0.50$ y $\Delta l = 2.40$ mts.

El cálculo puede seguirse con facilidad consultando simultáneamente el cuadro anterior y la figura 13.

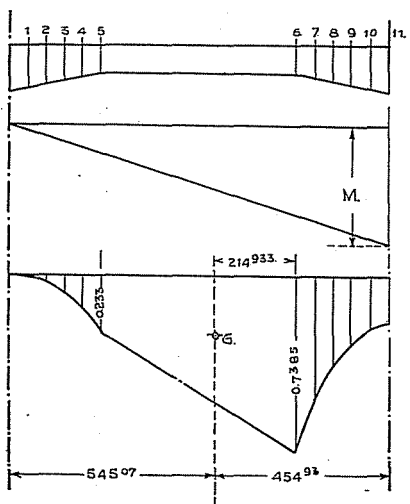


Figura 13.

Como aritméticamente habría que operar, por lo reducido de $M = 1$ kgm., con cantidades muy pequeñas, se ha procedido provisoriamente a la siguiente sustitución:

$$M' = 1.000.000 M$$

Las casillas 9, 10, 11 y 12 se consignan a objeto de determinar la posición del centro de gravedad de cada superficie elemental, comprendida entre dos secciones adyacentes.

Las números 13 y 14 son las respectivas distancias de cada uno de esos centros de gravedad a las verticales que pasan por los extremos izquierdo y derecho de la viga.

Los productos de estas distancias por las superficies elementales consignadas en la casilla 8 dan, evidentemente, las rotaciones parciales, en columnas 15 y 16, cuya suma son las rotaciones extremas izquierda y derecha:

$$\text{rot. izq.} = \alpha = 219,^{6711}$$

$$\text{rot. der.} = \beta = 142,^{3077}$$

$$\text{rot. total} = \pi = 361,^{9788}$$

Debemos referir este resultado a M y a E, pues hemos operado con M' y prescindido de E. Así:

$$\alpha = \frac{219,^{6711}}{1.000.000 \times 200.000} = 0,000.000.001.098$$

$$\beta = 0,000.000.000.711.5$$

que expresados en segundos:

$$\frac{\alpha}{\text{seg}} = 0'' 000.2264$$

$$\frac{\beta}{\text{seg}} = 0'' 000.146.75$$

3º.) Cálculo de deformaciones angulares extremas en vigas simplemente apoyadas con acartelamientos cualesquiera.—

Hemos visto que el cálculo de las deformaciones angulares extremas, cuando el momento de inercia de la viga es constante, puede hacerse con facilidad mediante la ayuda de las fórmulas 4 y de los valores consignados en el cuadro N°. i.

Si la viga tiene acartelamientos, pueden obtenerse análogamente, aunque no en una forma tan sencilla, directamente las deformaciones angulares extremas, base del cálculo de sistemas hiperestáticos, para cada par de relaciones:

$$\frac{\Delta h}{h} \text{ y } \frac{\Delta l}{l}$$

que definen en cada caso a un determinado acartelamiento.

Deducimos, como es lógico, si las demás condiciones del problema permanecen constantes, que las deformaciones angulares extremas dependen de cada par de valores $\frac{\Delta h}{h}$ y $\frac{\Delta l}{l}$, por lo cual es conveniente dar sus valores en forma de gráficos (Gráficos 2 a 11).

Estos gráficos dán no precisamente éstos, sino los del coeficiente "c", que permiten calcularlos mediante una expresión que, en general, puede deducirse de acuerdo con el siguiente razonamiento:

Si la carga es, v. gr.: continua, siempre el momento M admite como factor a pl^2 , luego:

$$M = M' \cdot pl^2$$

luego las 3 bis:

$$a = \frac{\eta}{l} \cdot \frac{1}{E} \cdot \int_0^1 \frac{M \cdot dx}{I} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\xi}{l} \cdot \frac{1}{E} \cdot \int_0^1 \frac{M \cdot dx}{I}$$

que pueden escribirse así:

$$a \cdot E = \frac{\eta}{l} \cdot pl^2 \cdot \int_0^1 \frac{M' dx}{I} \quad \text{y} \quad \beta \cdot E = \frac{\xi}{l} \cdot pl^2 \cdot \int_0^1 \frac{M' dx}{I}$$

Relacionando los momentos de inercia I de la parte acartelada al I_m del medio de la viga:

$$a \cdot E = \frac{\eta}{l \cdot I_m} \cdot pl^2 \int_0^1 \frac{M' dx}{\left(\frac{I}{I_m}\right)} \quad ; \quad \beta \cdot E = \frac{\xi}{l \cdot I_m} \cdot pl^2 \cdot \int_0^1 \frac{M' dx}{\left(\frac{I}{I_m}\right)}$$

multiplicando y dividiendo por $6 \cdot l^2$:

$$a \cdot E = \frac{l}{6 \cdot I_m} \cdot pl^2 \cdot \frac{6}{l^2} \cdot \eta \cdot \int_0^1 \frac{M' \cdot dx}{\left(\frac{I}{I_m}\right)} \quad ; \quad \beta \cdot E = \frac{l}{6 \cdot I_m} \cdot pl^2 \cdot \xi \cdot \int_0^1 \frac{M' \cdot dx}{\left(\frac{I}{I_m}\right)}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha \cdot E &= \frac{1}{6 \cdot I_m} \cdot pl^2 \cdot \left[\frac{6}{l^2} \cdot \eta \cdot \int_0^1 \frac{M' \cdot dx}{I'} \right] = \frac{1}{6 \cdot I_m} \cdot pl^2 \cdot c_i^c \\ \beta \cdot E &= \frac{1}{6 \cdot I_m} \cdot pl^2 \cdot \left[\frac{6}{l^2} \cdot \xi \cdot \int_0^1 \frac{M' \cdot dx}{I'} \right] = \frac{1}{6 \cdot I_m} \cdot pl^2 \cdot c_a^c \end{aligned} \right\} (5)$$

Los términos entre paréntesis son semejantes a los que hemos denominado Ki y Kd, aunque en el presente caso hemos referido p, l y I a la unidad. Las denominaremos "c" adoptando para ello la siguiente nomenclatura con carácter general:

Si actúa una carga simétrica, α y β son siempre iguales, por lo que $c_i^c = c_a^c = c^c$. Luego, en estos casos, calificaremos al coeficiente c con la letra c en su parte superior, inicial de carga.

En caso que fuera asimétrica, debemos también tener en cuenta si se trata de la rotación extrema de la derecha o de la izquierda, por lo que colocaremos además como índice las letras d é i, iniciales de derecha e izquierda, respectivamente.

Cuando las deformaciones sean originadas por momentos exteriores que actúen en los extremos, adoptaremos como calificativo del coeficiente c la letra m, inicial del momento, y como índices las o ó a, según que se refiere la deformación angular al extremo opuesto a aquel en que actúa M ó al adyacente.

Hemos visto recientemente que las deformaciones angulares extremas originadas por una carga continua en vigas con acartelamientos simétricos, están dadas por las expresiones siguiente:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot E &= \frac{1}{6 I m} \cdot pl^2 \cdot c_i^c \\ \beta \cdot E &= \frac{1}{6 I m} \cdot pl^2 \cdot c_a^c \end{aligned} \quad (6)$$

Si actuaran cargas concentradas, procediendo análogamente, tendríamos:

— 471 —

$$\alpha \cdot E = \frac{l}{6 I m} P l \cdot c_i^e \quad (7)$$

$$\beta \cdot E = \frac{l}{6 I m} P l \cdot c_d^e$$

En caso que actuara un momento M en un extremo, v. gr.: en el derecho:

$$\alpha \cdot E = \frac{l}{6 I m} M \cdot c_o^m \quad (8)$$

$$\beta \cdot E = \frac{l}{6 I m} M \cdot c_a^m$$

Los gráficos 2 a 11, dan los coeficientes e para las cargas uniformemente repartidas, para cargas concentradas en abscisas:

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{6} ; \frac{2}{6} ; \frac{3}{6} ; \frac{4}{6} ; \frac{5}{6}$$

y para un momento M que actúe en sus extremos, con lo que puede resolverse, en general, cualquier problema práctico.

EJEMPLOS: Problema 6 — Sea el caso resuelto en el problema N°. 1, pero agregando a la viga los acartelamientos indicados en la fig. 14

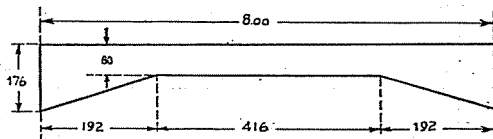


Figura 14

Se tiene:

$$\Delta h = 1.76 - 0.80 = 0.96$$

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{0.96}{0.80} = 1.20$$

— 472 —

$$y: \quad I_m = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{30 \times 80^3}{12} = 1.280.000 \text{ cm.}^4$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1.92}{8.00} = 0,240$$

Como el gráfico N°. 4 dá para "c" el valor:

$$c = 0,213$$

resulta:

$$a = \frac{1}{E} \cdot \frac{l}{6 \cdot I_m} \cdot pl^2 c =$$

$$= \frac{20 \times 800^3 \times c}{6 \times 200.000 \times 1.280.000} = 0,00668 \cdot c = 0.00142$$

$$a = 4' 52'' \frac{89}{-}$$

la rotación total:

$$\angle \pi = 2 \cdot a = 9' 45'' \frac{78}{-}$$

valores inferiores a los obtenidos en el primer problema debido al aumento de rigidez que dan los acartelamientos.

Problema 7 — Igual al problema 2, pero la viga tiene las chanfles indicados en la fig. 15.

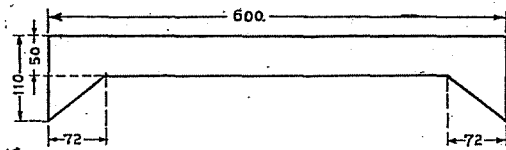


Figura 15

Se tiene:

$$a \cdot E = \frac{M}{6 \cdot I_m} \cdot l \cdot c$$

reemplazando valores:

$$a = \frac{1.500.000 \times 600}{6 \times 200.000 \times 450.000} \times c_{izq} =$$

$$= \frac{0.01}{6} c_{izq}$$

Los gráficos dán (gráficos 1 y 2)

$$c_{der} = 1,56 \qquad c_{izq} = 0,93$$

para:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{110 - 50}{50} = 1.20$$

y:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{0.72}{6.00} = 0.12$$

luego:

$$a_{izq.} = \frac{0.01}{6} \times 0,93 = 0.00155$$

$$a_{der.} = \frac{0.01}{6} \times 1,56 = 0.00260$$

El ángulo vale entonces:

$$\eta = (0.00155 + 0.0026) \times 206.264 = 14' 16''$$

Si la sección fuera constante:

$$a_{izq.} = \frac{0.01}{6} \times 1 = 0.001666$$

$$a_{der.} = \frac{0.01}{6} \times 2 = 0.003333$$

y:

$$\eta = a_i + a_d = 0,005$$

luego:

$$\eta = 17' 11'' \overset{33}{-}$$

igual al deducido en el problema 2, salvo la aproximación aritmética.

Observación importante. — Aunque los gráficos que dan los valores a han sido dibujados para secciones rectangulares, también pueden ser empleados sin error sensible para secciones T:

El aumento de inercia, de estas secciones, es según vimos:

$$I_T = \mu \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}$$

y si denominamos:

$$\mu \cdot b = b'$$

queda:

$$I_T = \frac{b' h^3}{12}$$

que indica que la sección T ha sido transformada en otra rectangular de igual altura, igual momento de inercia, pero de ancho diferente.

Si al calcular b' para cada sección, correspondiente a una parte cartelada, se obtuvieran valores muy diferentes, es evidente que no podrían hacerse extensivos los gráficos 2 a 11 a las secciones T, pero este caso no es el general.

Para un acartelamiento como el indicado en la figura 16, se tendrá:

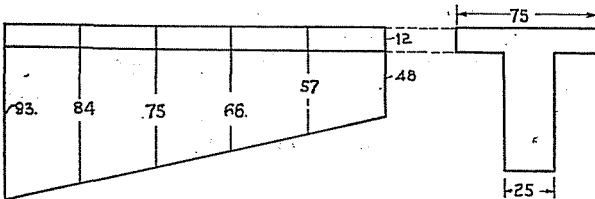


Figura 16

VALORES DE b'

Sección	$\frac{b_0}{b}$	$\frac{d}{h}$	μ	b' (cms)
1	0.30	0.129	0.458	34.40
2	0.30	0.143	0.466	34.90
3	0.30	0.160	0.474	35.50
4	0.30	0.185	0.483	36.20
5	0.30	0.21	0.490	36.70
6	0.30	0.25	0.496	37.00

Puede observarse que sin variar el acartelamiento, y manteniendo sus respectivos momentos de inercia, se han transformado las secciones transversales T en otras rectangulares cuyos anchos varían entre 34,40 y 37 cms.

Como en este caso el momento de inercia es proporcional al ancho, de admitirlo a éste constante e igual a su promedio, se cometería un error de 3,5 %, de poca monta.

El análisis objetivo del gráfico 1 indica que este error es menor cuanto menor es la relación:

$$\frac{b_0}{b}$$

y cuanto mayor es:

$$\frac{d}{h}$$

En la zona comprendida entre $\frac{d}{h}$ (de 0.15 a 0.30) y $\frac{b_0}{b}$ (de 0.06 a 0.20), no serían sensibles.

Gráfico N°. 2

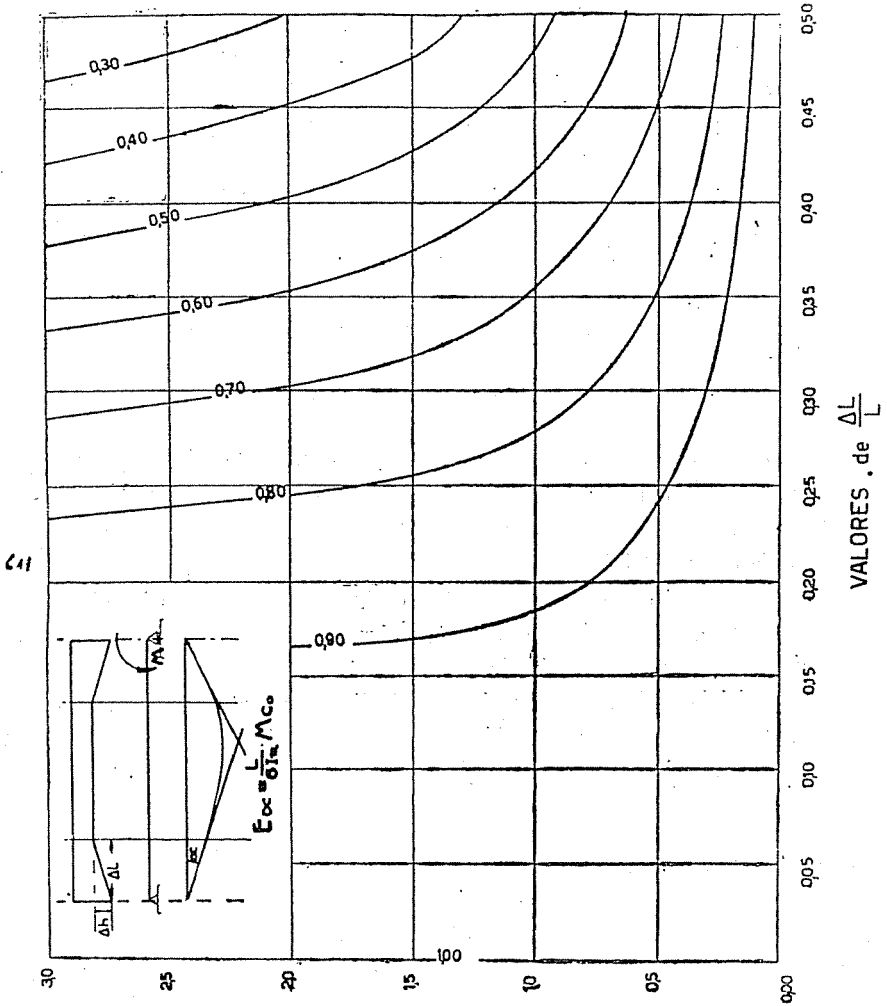


Gráfico N°. 3

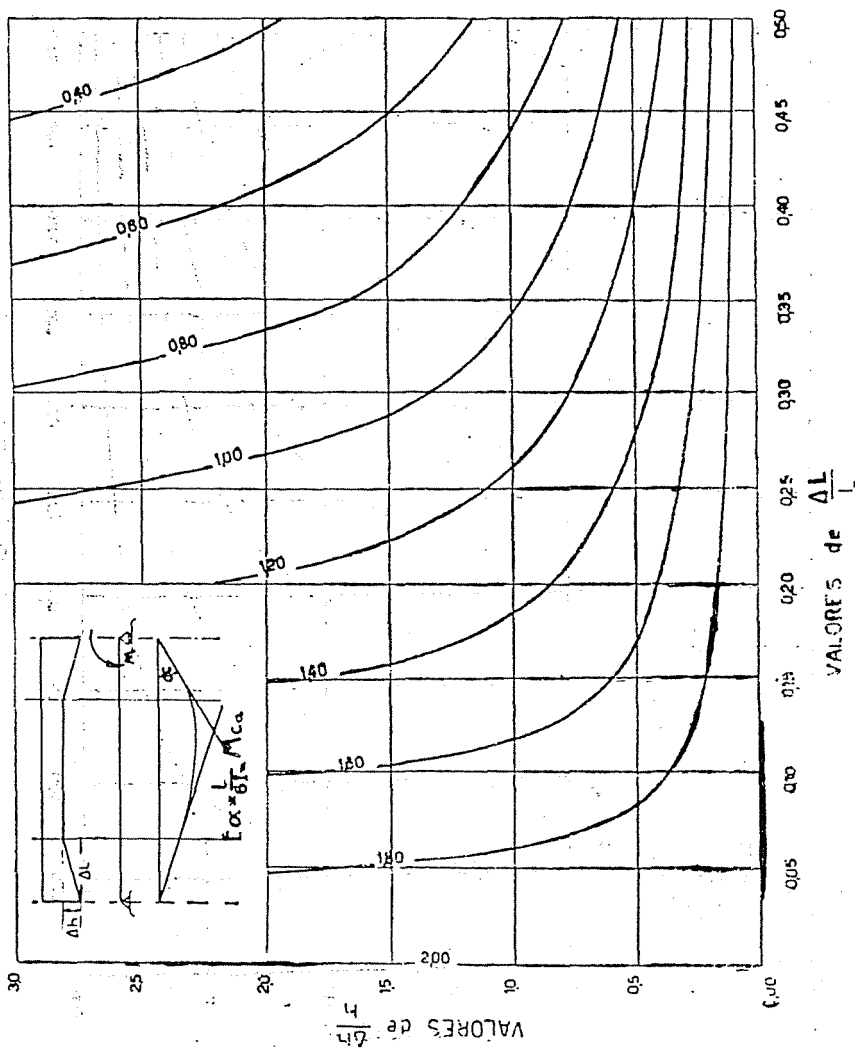


Gráfico N°. 4

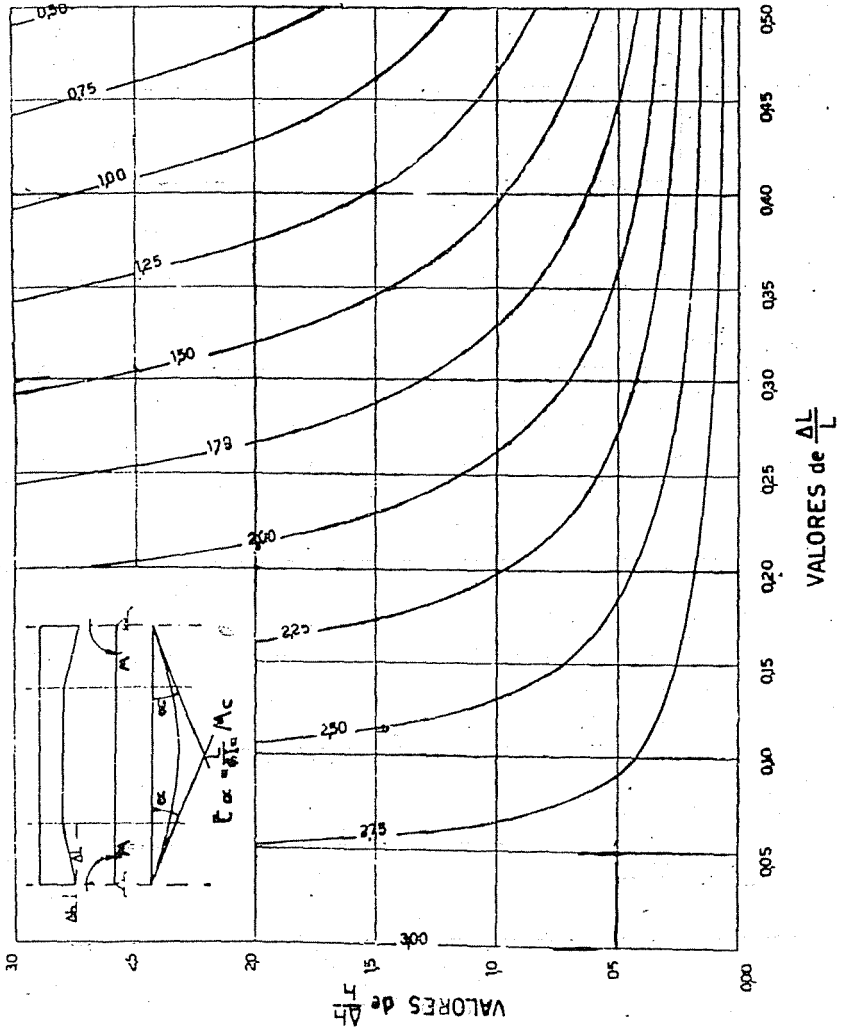


Gráfico N°. 5

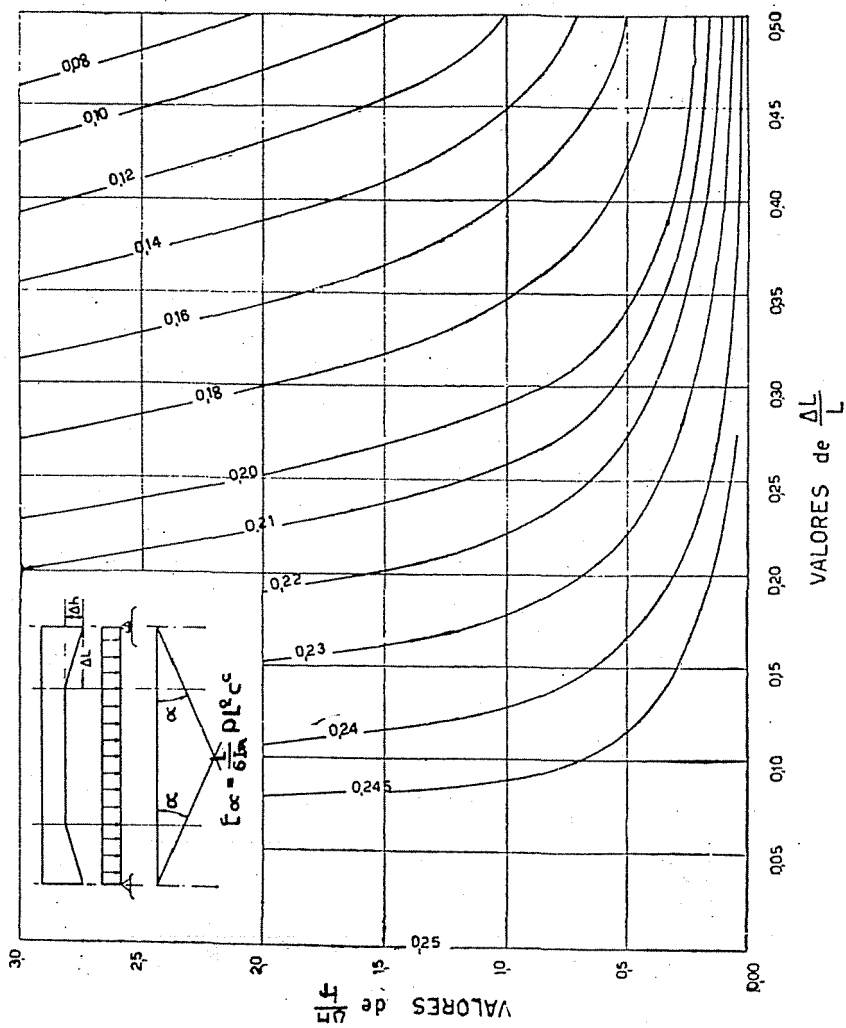


Gráfico N°. 6

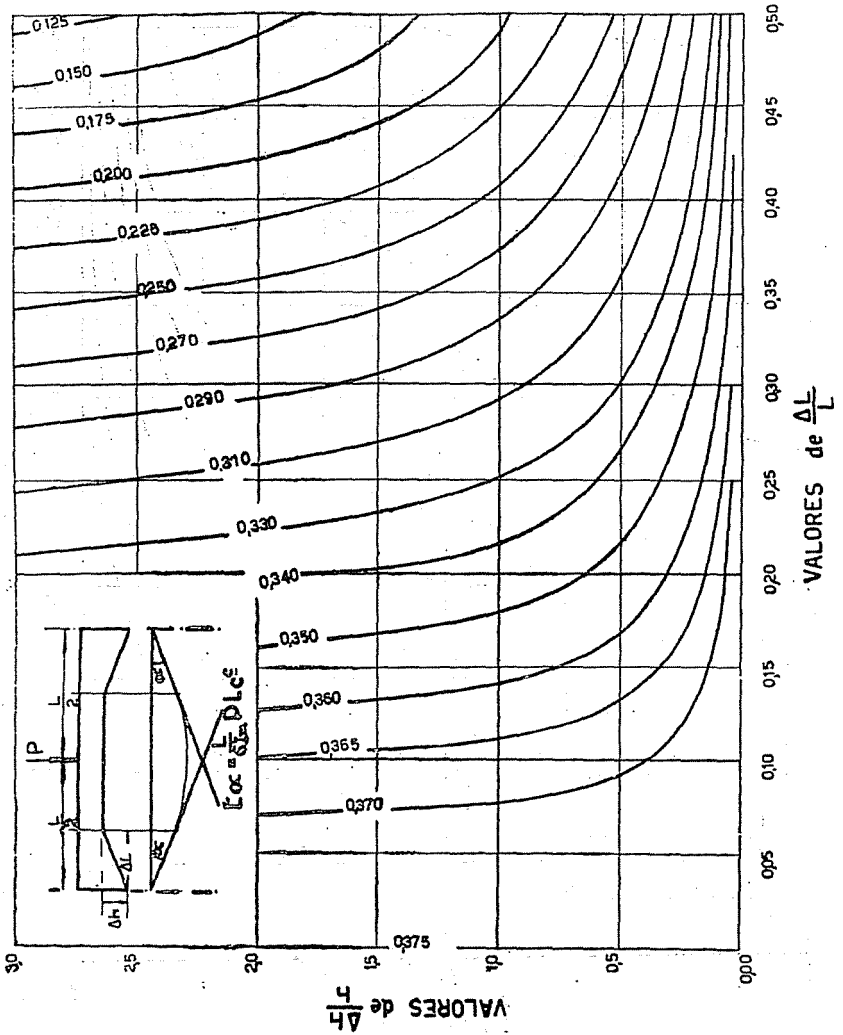


Gráfico N°. 7

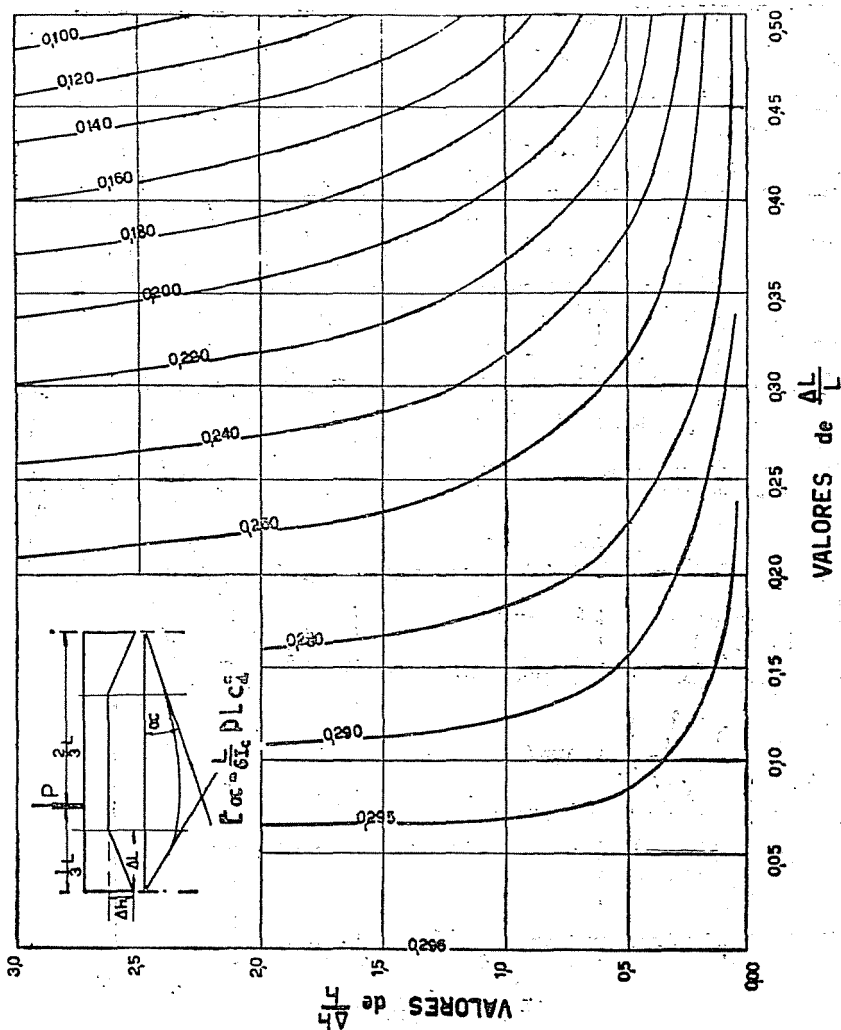


Gráfico N°. 8

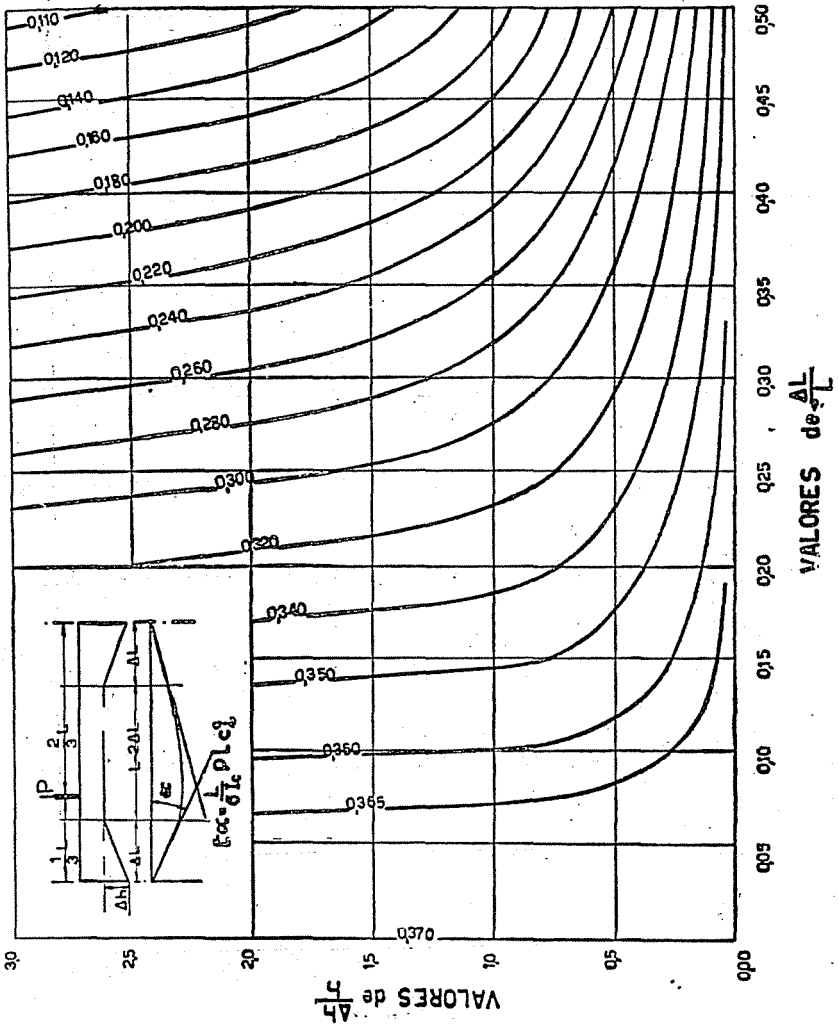
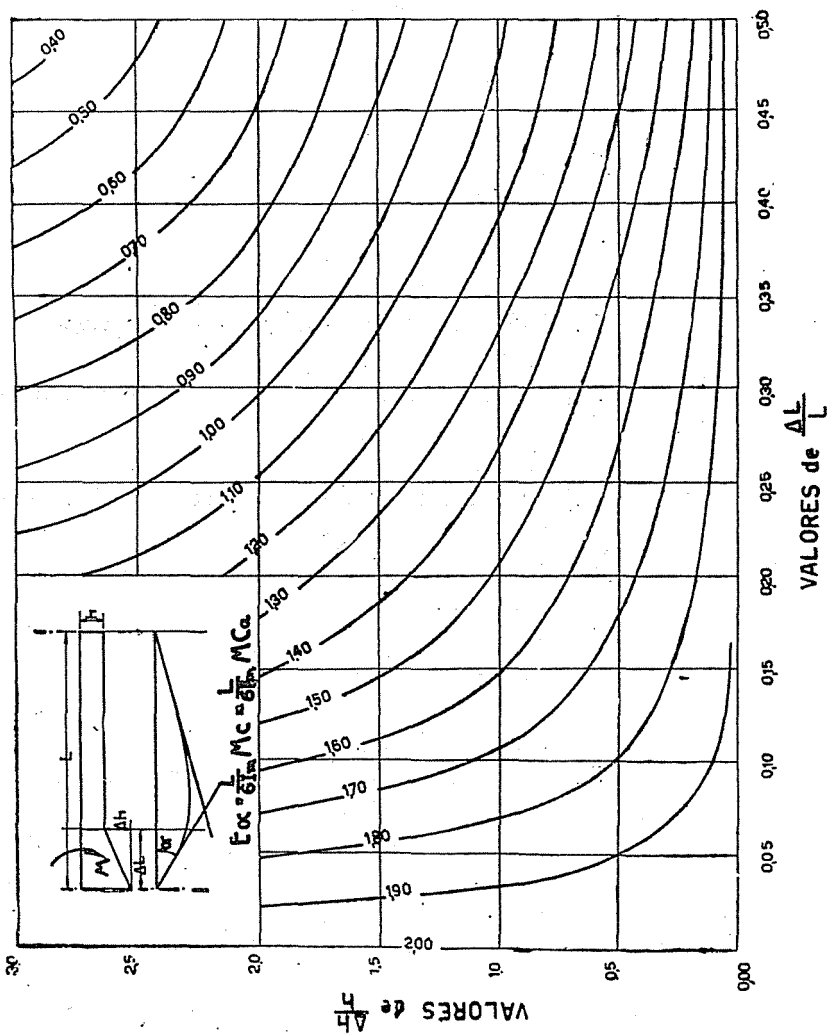


Gráfico N°. 9



PARTE 2ª.

VIGAS HIPERESTATICA

CAPITULO III

Viga empotrada

- 1º.) Indeterminación estática — Condiciones de empotramiento.
- 2º.) Vigas con momentos de inercia cualesquiera. — Caso de cargas verticales — Diagrama de momentos flectores — Reacciones.
- 3º.) Viga con momentos de inercia constantes — Cargas verticales — Descensos de apoyos — Influencia de cambios no uniformes de temperatura.
- 4º.) Viga con acartelamientos — Cargas verticales — Deducción de fórmulas de cálculo generalizadas — Empleo de gráficos — Caso de carga uniforme.
- 5º.) Ejemplos, aplicaciones y comparación de resultados — Cálculo del diagrama de momentos en caso de $I = \text{constante}$ — Procedimientos — Cálculo directo del diagrama de momentos flectores en vigas acarteladas.

1º) Indeterminación estática. — Los dos empotramientos implican la existencia de seis incógnitas, en la resolución de este problema. Como la estática permite establecer tres relaciones en-

tre ellas, es necesario disponer de otras tres que ligen a aquellas, siendo, por lo tanto, el problema, triplemente estáticamente indeterminado. Esta triple indeterminación estática se reduce a una doble para el caso de cargas verticales.

Condiciones de empotramiento — Cualesquiera sean las cargas aplicadas, la deformación del sistema debe ser tal que los extremos A y B no sufran ni descensos ni deformaciones angulares. Hemos visto que para la resolución de esta estructura eran necesarias dos expresiones que complementaran las tres que dan las leyes de equilibrio estático, y ellas son precisamente las condiciones de que las tangentes en A y B no giren, es decir, que las deformaciones angulares extremas sean nulas. A estas condiciones las denominaremos “condiciones de empotramiento” y de ellas nos ocuparemos a continuación:

2°.) **Viga con momentos de inercia cualesquiera.** — Cargas verticales. — Transformaremos la viga doblemente empotrada en simplemente apoyada. Bajo la acción de las cargas se deformará dando lugar a las variaciones angulares extremos α_1 y β_1 , y a un diagrama de momentos positivos.

Como en este caso estamos fuera de las condiciones de apoyo, que exigen que no hayan deformaciones angulares en ambos extremos de la viga, debemos, para satisfacer las condiciones de empotramiento, aplicar los momentos “ M_d ” y “ M_i ” como causas exteriores y en la forma conocida.

Todo este proceso dá lugar a los tres estados de deformación siguientes:

1°. — Estado I. — Se produce por la acción de las cargas que actúan sobre la viga simplemente apoyada, en que hemos transformado a la estructura hiperestática. A los momentos engendrados en este estado, los denominaremos M^o (c inicial de carga (fig. N°. 17).



Figura N°. 17

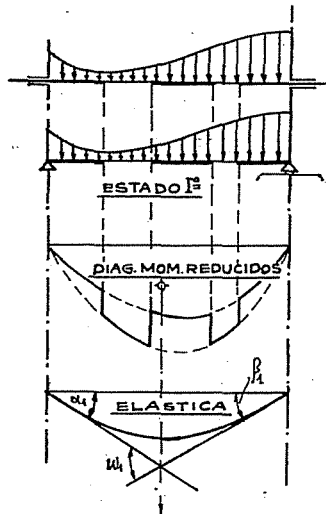


Figura N° 18

2°. — Estado II. — Se origina por la acción del momento M_i^m , el que actúa como causa exterior en el extremo izquierdo de la viga (fig. N° 19).

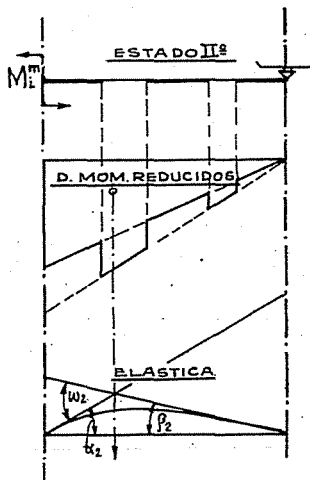


Figura N° 19

3º. — Estado III. — Idem, pero el momento que actúa es el M_d^m en el extremo derecho. (fig. N° 20).

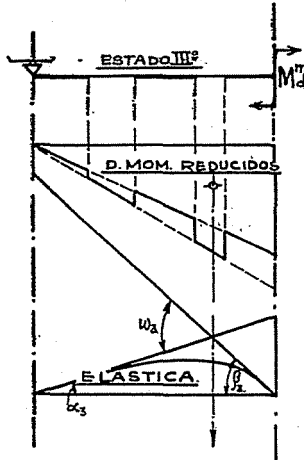


Figura N° 20

Debemos observar que la letra “m” no tiene ningún significado como exponente, sino indica que el estado de deformación es originado por el momento M_d , considerado como causa exterior. Además, estos momentos, de acuerdo con la convención de signos, son negativos.

Estado I — Las cargas aplicadas en la deformación que originan en la viga dan lugar a los ángulos α_1 , y β_1 , cuyos valores son (fig. 18):

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\xi_1}{l} \int_0^1 \frac{M^c \cdot dx}{E \cdot I} \\ \beta_1 &= \frac{\eta_1}{l} \int_0^1 \frac{M^c \cdot dx}{E \cdot I} \end{aligned} \right\} (7)$$

Estado II — Recordemos que no estamos dentro de las condiciones del problema, pues α_1 y β_1 deben ser cero.

Para conseguirlo, apliquemos simultáneamente los momentos M_i^m y M_d^m en ambos extremos de la viga, derecho e izquierdo respectivamente, en forma creciente y desde el valor inicial cero, hasta conseguir que actuando simultáneamente se formen hacia arriba deformaciones angulares α_1 y β_1 .

En este instante M_i^m y M_d^m cumplen ambas condiciones de empotramiento, siendo, por consiguiente la solución del problema.

Las deformaciones angulares extremas originadas por M_i^m son (fig 19.)

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{\xi_2}{l} \cdot \int_0^l \frac{-M_i^m \cdot dx}{E \cdot I} \\ \beta_2 &= \frac{\eta_2}{l} \cdot \int_0^l \frac{-M_i^m \cdot dx}{E \cdot I} \end{aligned} \right\} (8)$$

Estado III — El momento M_d^m actuando en el extremo de la viga dá lugar a los ángulos o rotaciones siguientes (fig. 20):

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{\xi_3}{l} \cdot \int_0^l \frac{-M_d^m \cdot dx}{E \cdot I} \\ \beta_3 &= \frac{\eta_3}{l} \cdot \int_0^l \frac{-M_d^m \cdot dx}{E \cdot I} \end{aligned} \right\} (9)$$

Condiciones de empotramiento — Para el extremo derecho es:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 &= 0 \end{aligned} \right\} (9 \text{ bis})$$



Reemplazando: $a_1, a_2, a_3, \beta_1, \beta_2$ y β_3 por las expresiones halladas anteriormente y simplificando la constante E, queda:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 \cdot \int_0^1 \frac{M^c \cdot dx}{I} + \xi_2 \cdot \int_0^1 \frac{M_i^m \cdot dx}{I} + \xi_3 \cdot \int_0^1 \frac{M_d^m \cdot dx}{I} &= 0. \\ \eta_1 \cdot \int_0^1 \frac{M^c \cdot dx}{I} + \eta_2 \cdot \int_0^1 \frac{M_i^m \cdot dx}{I} + \eta_3 \cdot \int_0^1 \frac{M_d^m \cdot dx}{I} &= 0. \end{aligned} \right\} (10)$$

Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que resuelve el problema.

Diagrama de momentos flectores — Si M_i y M_d^m son los momentos que resuelven el problema cumpliendo las condiciones que impone la sustentación de la viga, el diagrama de momentos flectores será la suma de los tres parciales que corresponden a los tres estados de deformación ya vistos, los que pueden sumarse, quedando finalmente el diagrama total que indica la fig. N° 21. Al realizar esta operación debe tenerse en cuenta que los momentos engendrados por M_i y M_d^m son negativos y positivos los debidos a la carga exterior.

Reacciones — Serán las sumas de las que correspondan a cada uno de los tres estados de deformación ya analizados que se consignan en la fig. N° 22.

De la misma figura se deduce que:

$$\left. \begin{aligned} R_d &= R_a + \frac{M_i^m}{1} - \frac{M_d^m}{1} = \frac{M_i^m - M_d^m}{1} + R_a \\ R_i &= R_b - \frac{M_i^m}{1} + \frac{M_d^m}{1} = \frac{M_d^m - M_i^m}{1} + R_b. \end{aligned} \right\} (11)$$

El trazado del diagrama de esfuerzos de corte no ofrece, por consiguiente, conocidos R_i y R_d , ninguna dificultad.

2°.) Vigas con momentos de inercia constantes — Cargas verticales.

Si $I =$ constante, los grupos de ecuaciones 7, 8 y 9 se transforman, respectivamente, en:

$$a_1 = \frac{\text{Sup. mom } \xi_1}{E \cdot I \cdot l}$$

$$\beta_1 = \frac{\text{Sup. mom } \eta_1}{E \cdot I \cdot l}$$

$$a_2 = -\frac{2}{6} \cdot \frac{M_i^m \cdot l}{E \cdot I}$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{6} \cdot \frac{M_i^m \cdot l}{E \cdot I}$$

$$a_3 = -\frac{1}{6} \cdot \frac{M_d^m \cdot l}{E \cdot I}$$

$$\beta_3 = -\frac{2}{6} \cdot \frac{M_d^m \cdot l}{E \cdot I}$$

12

13

14

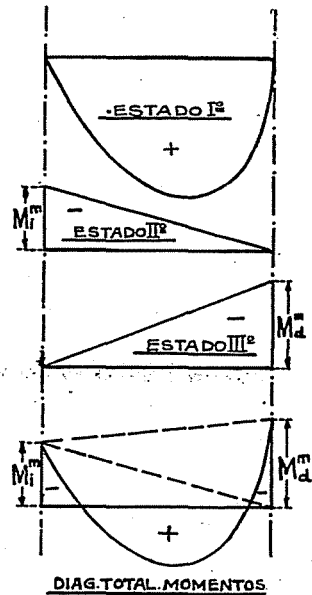


Figura N° 21

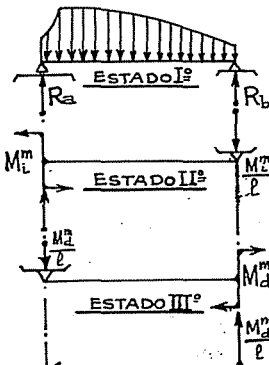


Figura N° 22

Cumpléndose las condiciones de empotramiento cuando

$$\frac{\text{Sup. mom. } \xi_1}{\text{E. I.}} = \frac{2 M_i^m \cdot l}{6 \text{ E. I.}} - \frac{1}{6} \cdot \frac{M_d^m \cdot l}{\text{E. I.}}$$

$$\frac{\text{Sup. mom. } \eta_1}{\text{E. I.}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{M_i^m \cdot l}{\text{E. I.}} - \frac{2}{6} \cdot \frac{M_d^m \cdot l}{\text{E. I.}}$$

que simplificados dan:

$$\left[\xi_1 \cdot \text{Sup mom.} \cdot \frac{6}{l^2} \right] = -2 \cdot M_i^m - M_d^m$$

$$\left[\eta_1 \cdot \text{Sup mom.} \cdot \frac{6}{l^2} \right] = -M_i^m - 2 \cdot M_d^m$$

y recordando la definición de los valores K:

$$K_i = -2 M_i^m - M_d^m$$

$$K_d = -M_i^m - 2 M_d^m$$

de donde:

$$\text{y: } \left. \begin{array}{l} \boxed{M_i^m = -\frac{2 K_i - K_d}{3}} \\ \boxed{M_d^m = -\frac{2 K_d - K_i}{3}} \end{array} \right\} 15$$

Fórmulas generales que resuelven el problema independientemente de la forma de la carga que actúa sobre la viga, mediante la ayuda de los valores K_i y K_d tabulados en la página n°.

Descensos de apoyos. — Procederemos como en el caso anterior, convirtiendo la viga en simplemente apoyada.

El descenso de un apoyo, por ej.: el B, implica la formación de los ángulos extremos:

$$\alpha = \frac{a}{l}$$

entre la posición inicial de las tangentes (horizontales) en los empotramientos, con respecto a las actuales (fig. n°. 23).

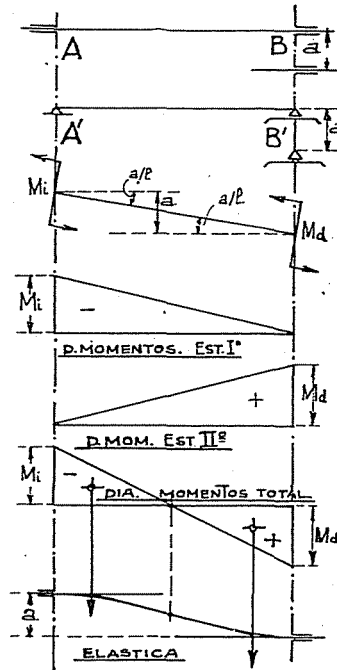


Figura N°. 23

El problema estará resuelto cuando la acción de los momentos M_i^m y M_d^m mediante las deformaciones que originen, las anulen.

Estado I — Acción del momento M_i^m aplicado al extremo izquierdo:

$$\alpha_1 = \frac{2}{6} \cdot \frac{M_i^m \cdot l}{E \cdot I} \quad \text{y} \quad \beta_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{M_i^m \cdot l}{E \cdot I}$$

Estado II — Acción del momento M_d^m aplicado al extremo derecho:

$$a_2 = + \frac{1}{6} \cdot \frac{M_d^m \cdot l}{E \cdot I} \quad \text{y} \quad \beta_2 = + \frac{2 M_d^m \cdot l}{6 \cdot E \cdot I}$$

Condición de empotramiento. Será tanto para el extremo A como para el B.

$$-a + a_1 - a_2 = 0 \quad \beta + \beta_1 - \beta_2 = 0$$

de la primera se obtiene:

$$\frac{a}{1} - \frac{2 M_i^m \cdot l}{6 E \cdot I} - \frac{1}{6} \cdot \frac{M_d^m \cdot l}{E \cdot I} = 0$$

y de la segunda:

$$\frac{a}{1} - \frac{2 M_d^m \cdot l}{6 E \cdot I} - \frac{1}{6} \cdot \frac{M_i^m \cdot l}{E \cdot I} = 0$$

De estas dos últimas:

$$\frac{6 \cdot E \cdot I \cdot a}{l^2} - 2 \cdot M_i^m = M_d^m : \frac{6 \cdot E \cdot I \cdot a}{l^2} - M_i^m = 2 \cdot M_d^m$$

o sea:

$$\frac{12 \cdot E \cdot I \cdot a}{l^2} - 4 \cdot M_i^m = \frac{6 \cdot E \cdot I \cdot a}{l^2} - M_i^m$$

de donde:

$$\frac{18 \cdot E \cdot I \cdot a}{l^2} = 3 \cdot M_i^m$$

y, finalmente:

$$\boxed{M_i^m = \frac{6 \cdot E \cdot I \cdot a}{l^2}} \quad (16)$$

En forma semejante, se deduce:

$$M_i^m = -M_d^m = -\frac{6 \cdot E \cdot I \cdot a}{l^2} \quad (17)$$

El diagrama de momentos flectores es el consignado en la fig. n° 23. Las reacciones de apoyo pueden deducirse en la forma conocida.

Influencia de cambios de temperatura — Supondremos, para evitar tensiones por compresión axial, que cualquier empotramiento, por ej.: el derecho, conserve su propiedad característica de no poder girar, pero que pueda deslizarse permitiendo dilataciones uniformes en el sentido del eje de la viga.

Un apoyo que permita la realización de este fenómeno sería, v. gr.: el indicado en la figura n° 24.

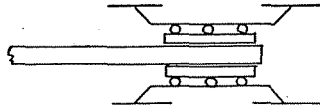


Figura N° 24

Una variación de temperatura desigual, por ej.: de t^o en el canto inferior de la viga, y de t_i en el superior, siendo h la altura de la misma, y suponiendo lineal la variación de temperatura dentro de la sección, puede analizarse así:

- a) el canto inferior se alargará de: $(b c = a t^o \cdot l)$
- b) y el superior de: $(a e = a \cdot t^i \cdot l)$

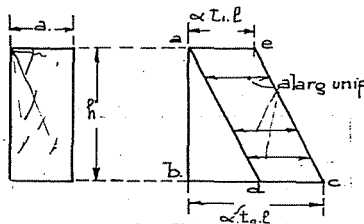


Figura N° 25

Estos serán los alargamientos máximos, siendo la variación de longitudes, de acuerdo a las hipótesis hechas, lineal dentro de la sección de la viga.

Si trazamos (fig. n° 25) ad paralela a ec , tenemos que la deformación que experimentará la pieza será la suma de las dos siguientes:

1°. — Un alargamiento uniforme en toda la sección, originado por una variación de temperatura t^i que tendrá por efecto desplazar el rodillo del carro de dilatación de:

$$m = a \cdot t^i \cdot l$$

Este fenómeno de dilatación no origina tensiones en el material.



Figura N° 26

Si transformamos la viga en simplemente apoyada, el efecto derivado del cambio triangular de temperatura será:

2°. — Un alargamiento en el canto inferior de:

$$b \cdot d = a \cdot (t^o - t^i) \cdot l$$

y nulo en el canto superior, todo lo cual dará origen a un encurvamiento circular de la viga, formando los ángulos extremos del siguiente valor:

$$a_1 = \frac{\text{alarg}}{2} \cdot \frac{1}{h} = \frac{a \cdot (t^o - t^i)}{2 \cdot h} \cdot \frac{1}{h}$$

fenómeno de deformación que tampoco origina tensiones en el material.

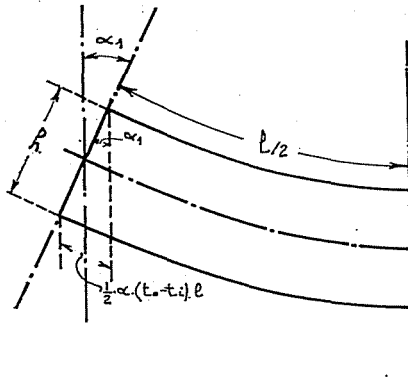


Figura N°. 27

Condición de empotramiento de los apoyos — La condición de empotramiento de los apoyos, por simetrías de forma y de acciones, será común para ambos, deduciéndose de esta observación que el momento M necesario en A para volver a cero las deformaciones angulares α_1 , debe ser igual al de B.

Los ángulos de deformación extremos originados por la acción de los dos momentos M actuando simultáneamente en A y en B, son:

$$\alpha_2 = \beta_2 = - \frac{M \cdot l}{2 \cdot E \cdot I}$$

y como la condición de empotramiento exige:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \quad \beta_1 - \beta_2 = 0$$

queda:

$$\frac{a \cdot (t^0 - t^1) \cdot l}{2 \cdot h} = \frac{M \cdot l}{2 E \cdot I}$$

de donde finalmente:

$$M = \frac{a \cdot (t^0 - t^1) \cdot E \cdot I}{2 \cdot h} \quad (18)$$

resultado independiente de la longitud de la viga.

Diagrama de momentos flectores. — Es el diagrama de base l y de altura constante M.

Elástica de deformación total. — Descartando el alargamiento producido por el cambio uniforme de temperatura $t^{\circ}i$ en la viga, no se producen descensos ni levantamientos, es decir, que la elástica es el mismo eje primitivo de la viga. Esta conclusión puede demostrarse observando que las superficies barridas por la viga en la deformación originada por la variación de temperatura ($t^{\circ} - t^{\circ}i$) en el canto inferior y nula en el superior, es un segundo cir-

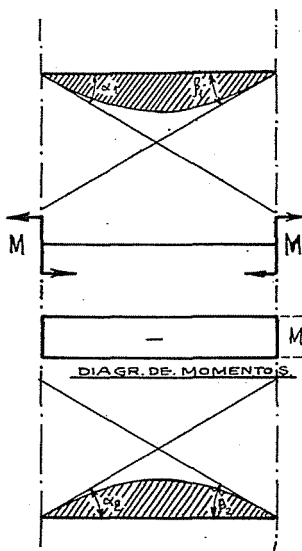


Figura N° 28

cular de flecha “f” y ángulos extremos y que la superficie barrida por la misma viga en la deformación originada por el momento M actuando en ambos extremos es igual a la anterior, pero con sentido contrario (figura n° 28).

Observaciones. — Si sumamos las expresiones 10 teniendo en cuenta que:

$$\xi_1 + \eta_1 = \xi_2 + \eta_2 = \xi_3 + \eta_3 = \xi + \eta = l$$

obtenemos:

$$\int_0^1 \frac{M_c \cdot dx}{I} + \int_0^1 \frac{M_i^m \cdot dx}{I} + \int_0^1 \frac{M_d^m \cdot dx}{I} = 0 \quad (19)$$

Sumando las 15:

$$\text{Sup mom} \cdot \frac{6}{1} = 3 \cdot M_i^m + 3 \cdot M_d^m$$

de la que:

$$(\text{Sup mom}) = \left(\frac{M_i^m + M_d^m}{2} \right) \cdot 1 \quad (20)$$

Expresiones que indican, la primera con carácter general y la segunda para el caso especial de que el momento de inercia sea constante, que: en una viga bi-empotrada la superficie del diagrama de momentos flectores tiene valor cero.

Esta conclusión podríamos haberla enunciado de antemano a causa del doble empotramiento que origina, de acuerdo al enunciado del teorema de Mohr, una deformación angular total nula.

4°. — **Viga de acartelamientos.** — Cargas verticales. Deducción de fórmulas de cálculo generalizadas. Empleo de gráficos. Caso de carga uniforme.

La viga empotrada admite cálculo directo cuando el momento de inercia tiene valor constante. Este concepto es general para toda construcción hiperestática.

En este caso si:

$$I = \text{constante}$$

las expresiones que resuelven el problema, son, según hemos visto (fórm. 15):

$$M_c^m = \frac{2 K_i - K_d}{3}$$

$$M_i^m = \frac{2 K_d - K_i}{3}$$

que permiten encontrar los valores de los momentos extremos incógnitos en función de las características K_i y K_d conocidas para cada sollicitación.

Si la viga tiene acartelamientos, ya no puede calcularse en forma tan directa, pues las fórmulas deducidas para el caso en que I sea variable, permiten solamente su verificación. Cuando existen acartelamientos, los gráficos 2 a 11 facilitan la resolución del problema hasta permitir, por su sencillez, su empleo en la práctica diaria.

Las expresiones generales (fór. 12, 13 y 14) pueden escribirse en función de los valores "c" dados por los gráficos incluidos en el capítulo anterior.

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{\xi_1}{l} \cdot \int_0^1 \frac{M^c \cdot dx}{E \cdot I} = \frac{l}{6 \cdot I_m} \cdot Pl \cdot c_i \cdot \frac{1}{E} \\ \beta_1 &= \frac{\eta_1}{l} \cdot \int_0^1 \frac{M^c \cdot dx}{E \cdot I} = \frac{l}{6 \cdot I_m} \cdot Pl \cdot c_d^c \cdot \frac{1}{E} \end{aligned} \right\} 21$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= -\frac{\xi_2}{l} \cdot \int_0^1 \frac{M_i^m \cdot dx}{E \cdot I} = -\frac{l}{6 \cdot I_m} \cdot M_i^m \cdot c_a \cdot \frac{1}{E} \\ \beta_2 &= -\frac{\eta_2}{l} \cdot \int_0^1 \frac{M_i^m \cdot dx}{E \cdot I} = -\frac{l}{6 \cdot I_m} \cdot M_i^m \cdot c_o \cdot \frac{1}{E} \end{aligned} \right\} 22$$

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= -\frac{\xi_3}{l} \cdot \int_0^1 \frac{M_d^m \cdot dx}{E \cdot I} = -\frac{l}{6 \cdot I_m} \cdot M_d^m \cdot c_o \cdot \frac{1}{E} \\ \beta_3 &= -\frac{\eta_3}{l} \cdot \int_0^1 \frac{M_d^m \cdot dx}{E \cdot I} = -\frac{l}{6 \cdot I_m} \cdot M_d^m \cdot c_a \cdot \frac{1}{E} \end{aligned} \right\} 23$$

Si formulamos las correspondientes condiciones de empotramiento (fór. 9 bis):

$$y \quad \begin{aligned} a_1 - a_2 - a_3 &= 0 \\ \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazando los valores ya encontrados, se transforman en:

$$P l \cdot c_i^c + M_i^m \cdot c_a + M_d^m \cdot c_o = 0$$

$$P l \cdot c_d^c + M_i^m \cdot c_o + M_d^m \cdot c_a = 0$$

de donde:

$$\left. \begin{aligned} M_i^m &= - P \cdot l \cdot \frac{c_i^c \cdot c_a - c_d^c \cdot c_o}{c_a^2 - c_o^2} \\ M_d^m &= - P \cdot l \cdot \frac{c_o \cdot c_i^c - c_a \cdot c_d^c}{c_o^2 - c_a^2} \end{aligned} \right\} \text{(fór. 19f)}$$

Si actuaran varias fuerzas:

$$\left. \begin{aligned} M_i^m &= - \frac{l}{c_a - c_o} \cdot \sum_o^1 P \cdot (c_i^c \cdot c_a - c_d^c \cdot c_o) \\ M_d^m &= - \frac{l}{c_o - c_a} \cdot \sum_o^1 P \cdot (c_o \cdot c_i^c - c_a \cdot c_d^c) \end{aligned} \right\} \text{(fór. 19f)}$$

y, finalmente, si la carga fuera uniformemente repartida:

$$M_i^m = M_d^m = - P \cdot l^2 \cdot \frac{c^c}{c_a + c_o} \quad \text{(fór. 26)}$$

o si actuara una carga concentrada en el centro del tramo:

$$M_i^m = M_d^m = - P \cdot l \cdot \frac{c^c}{c_a + c_o} \quad \text{(fór. 27)}$$

pues entonces:

$$c_i^c = c_d^c = c^c$$

Para cada caso particular de carga debe hallarse el valor "e" que corresponda en el gráfico respectivo; si la carga es uniforme, se reemplaza P_1 por pl^2 , y si ella es cualesquiera, se la puede descomponer en varias concentradas aplicadas en:

$$x = \frac{5}{6} \cdot l ; \frac{4}{6} \cdot l ; \frac{3}{6} \cdot l ; \frac{2}{6} \cdot l$$

Al buscar en los gráficos los valores "e" debe tenerse cuidado de interpretar bien la nomenclatura anterior y el lado a que corresponde la deformación angular extrema, pues los gráficos están dados suponiendo que los momentos o las cargas concentradas actúan de un solo lado. Por otra parte, ayuda en la interpretación la nomenclatura adoptada.

El caso general en que I varía en forma cualquiera, no puede, como es evidente, ser encuadrado dentro de reglas determinadas y debe ser resuelto numéricamente por separado cada problema que se presente.

Caso de carga uniforme — El gráfico N° 12 da directamente para cada par de valores que definen los acartelamientos, el respectivo divisor de pl^2 , de tal manera que calcular, teniendo en cuenta los acartelamientos, los momentos de empotramiento se reduce a hallar en el gráfico N° 12, el valor de x , con lo que:

$$M = - \frac{pl^2}{x}$$

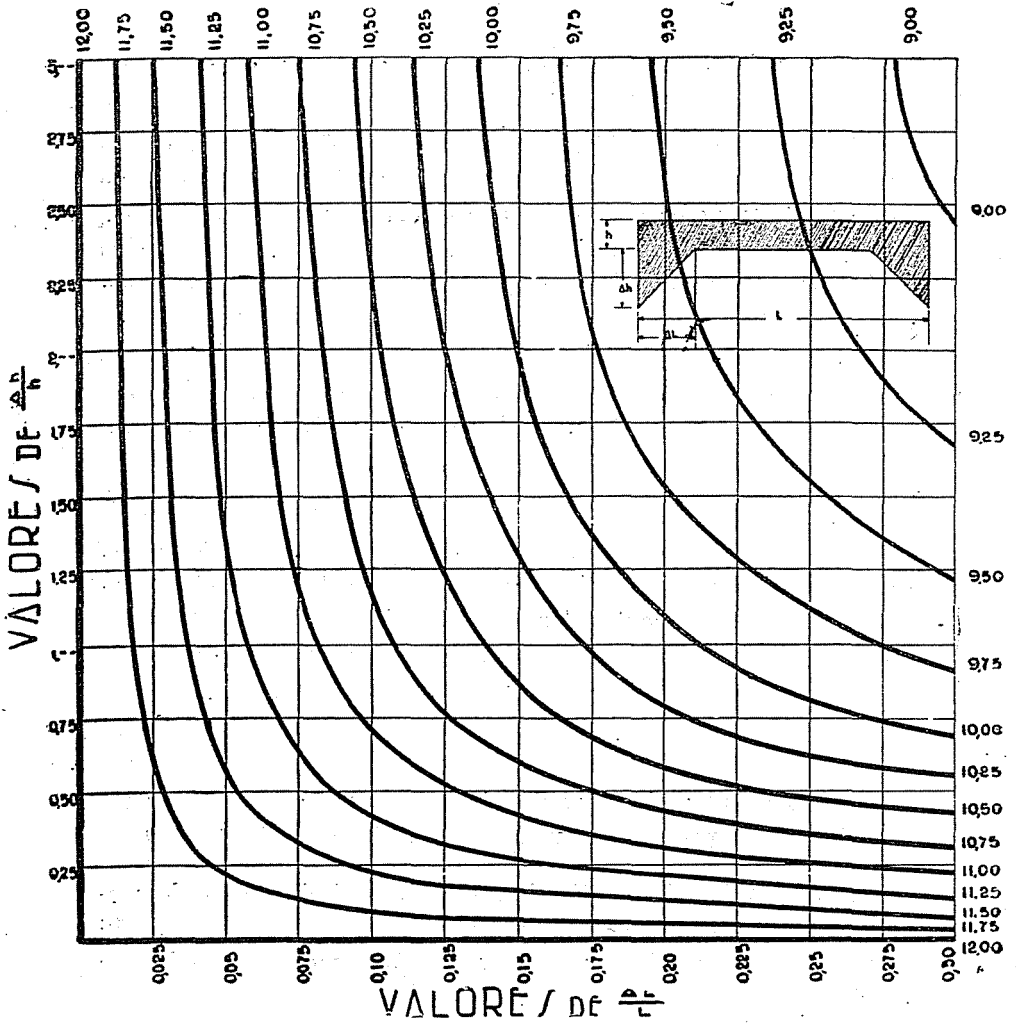
5°.) **Ejemplos. Aplicaciones y comparación de resultados.**
Cálculo del diagrama de momentos para $I = \text{constante}$.

Problema N° 8. — Se desea conocer el diagrama de momentos flectores de una viga empotrada en sus extremos de 10 mts. de luz, sometida a una carga uniformemente repartida de 2.400 kgr/m.

Como, por simetría:

$$K_i = K_d = K$$

Gráfico N°. 10



las expresiones 15 se transforman en:

$$M = M_i = M_d = - \frac{K}{3}$$

y como (tabla 1ª.) :— :

$$K_d = K_i = K = - \frac{pl^2}{4}$$

resulta:

$$M = - \frac{pl^2}{12} = - \frac{2400 \times 100}{12} = - 20.000 \text{ kgms. —}$$

El momento positivo en el centro es:

$$M_c = \frac{pl^2}{8} - 20.000 = 30.000 - 20.000 = 10.000 \text{ kgms..}$$

Problema N°. 9. — Sobre una viga empotrada de sección constante, de 6.00 mts. de luz, actúa una carga concentrada $P = 9.000$ kgrs. en abscisa $x = 2.00$ mts. Se desean calcular los momentos de empotramiento.

Si $x = 2.00$ mts.

$$a = 2.00 \quad \text{y} \quad b = (l - a) = 6 - 2 = 4 \text{ mts.}$$

Como (tabla 1ª.):

$$K_d = \frac{P \cdot a \cdot b}{l^2} (1 + a)$$

$$\text{y} \quad K_i = \frac{P \cdot a \cdot b}{l^2} (1 + b)$$

resulta, reemplazando valores:

$$K_d = \frac{9.000 \times 2 \times 4 \times 8}{36} = 16.000$$

$$K_i = \frac{9.000 \times 2 \times 4 \times 10}{36} = 20.000$$

— 504 —

$$M_d^m = \frac{2 \times 16.000 - 20.000}{3} = - 4.000 \text{ kgms.}$$

$$M_i^m = \frac{2 \times 20.000 - 16.000}{3} = - 8.000 \text{ kgms.}$$

Como la superficie de momentos debe ser nula, podemos verificar estos resultados.

a) parte negativa:

$$1. \left(\frac{M_i^m + M_d^m}{2} \right) = \frac{4.000 + 8.000}{2} \times 6 = 36.000 \text{ kgm}^2$$

b) parte positiva:

$$M. \frac{1}{2} = \frac{\text{P.a.b.}}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\text{P.a.b.}}{2} = \frac{9.000 \times 4 \times 2}{2} = 36.000 \text{ kgm}^2.$$

luego: $S = 36.000 - 36.000 = 0$

Las reacciones son:

a) Si la viga fuera simplemente apoyada:

$$R'_i = \frac{9.000 \times 4}{6} = 6.000 \text{ kgrs.}$$

$$R'_d = \frac{9.000 \times 2}{8} = 3.000 \text{ kgrs.}$$

b) los momentos M_i^m y M_d^m engendran:

$$R''_i = \frac{M_i^m}{1} - \frac{M_d^m}{1} = \frac{8.000 - 4.000}{6} = 666 \text{ kgrs.}$$

$$R''_d = \frac{M_d^m - M_i^m}{1} = - 666 \text{ kgrs.}$$

luego:

$$R_i = R'_i + R''_i = 6.666 \text{ kgrs.}$$

$$R_d = R'_d + R''_d = 2.333 \text{ kgrs.}$$

Problema N°. 10. — Una viga bi-empotrada de 20.00 mts. de luz, de sección constante, está cargada en su punto medio con una carga concentrada $P = 4.000$ kgrs. Calcular los momentos extremos y el que corresponda al centro.

Por simetría:

$$M = -\frac{K}{3}$$

y como:

$$K = \frac{3}{8} \cdot Pl$$

resulta:

$$M = -\frac{3}{8} \cdot \frac{Pl}{3} = -\frac{P \cdot l}{8} = -\frac{4.000}{8} \times 20 = -10.000 \text{ kgrms.}$$

el momento en el centro es:

$$M_c = \frac{P \cdot l}{4} - \frac{Pl}{8} = \frac{P \cdot l}{8} = 10.000 \text{ kgrms.}$$

la superficie de momentos se anula porque:

$$\text{Superficie} = M \cdot l - \frac{P \cdot l}{4} \cdot \frac{l}{2} + \frac{Pl}{8} \cdot l - \frac{Pl}{8} \cdot l = 0$$

Problema N°. 11. — Igual al anterior, pero la carga que actúa es uniformemente repartida con $p = 3.000$ Kg/m.

$$M = -\frac{p \cdot l^2}{12} = -\frac{3.000 \times 20^2}{12} = -100.000 \text{ kgrms.}$$

Procedimiento general de verificación cuando existen acartelamientos — Ejemplo numérico.

Resolveremos el mismo problema, aunque supondremos que la viga tenga los acartelamientos indicados en la figura N°. 29. Este mismo problema, así como otros, los resolveremos, más adelante, mediante el empleo de los gráficos respectivos, lo que permitirá valorar la simplificación que introducen en esta clase de problemas.

Problema N° 12. — Para resolver el problema definido anteriormente, debemos tener presente que los valores de M_i^m y M_d^m solución del mismo, son aquellos que anulan la superficie de momentos reducidos de momentos reducidos, pues ahora debemos operar a causa de la variabilidad de I , con los cocientes $\frac{M}{I}$.

Esta superficie se compone de dos partes, la positiva originada por la sollicitación exterior que actúa sobre la viga simplemente apoyada correspondiente, y la segunda de signo contrario a la anterior, debida a la influencia de los momentos M_i^m y M_d^m actuando en ambos extremos.

Debemos previamente calcular los momentos de inercia de las secciones transversales extremas, de los prismas en que hemos dividido a la viga (fig. n° 29).

En ésta se detalla todo el procedimiento a seguir, así, como dentro del perímetro de la viga se han indicado las alturas de las diferentes secciones.

Los momentos de inercia, teniendo en cuenta que el ancho de la viga es de 36 cms. son:

$$\text{Sec. 1.ª: } 5.184.000 \text{ cm}^4$$

$$\text{Sec. 2.ª: } 3.990.000 \text{ cm}^4$$

$$\text{Sec. 3.ª: } 3.000.000 \text{ cm}^4$$

$$\text{Sec. 4.ª: } 2.187.000 \text{ cm}^4$$

$$\text{Sec. 5.ª: } 1.536.000 \text{ cm}^4$$

$$\text{Sec. 6.ª: } 1.029.000 \text{ cm}^4$$

La influencia de los momentos M_i^m y M_d^m que actúan en ambos extremos es un rectángulo de base igual a la longitud de la viga y altura constante $M_i^m = M_d^m = M$. El diagrama de momentos reducidos, será, de acuerdo a su definición y refiriendo la superficie a la línea de cierre AD , el lugar geométrico de los extremos de los valores $\frac{M}{I}$ que correspondan a cada sección.

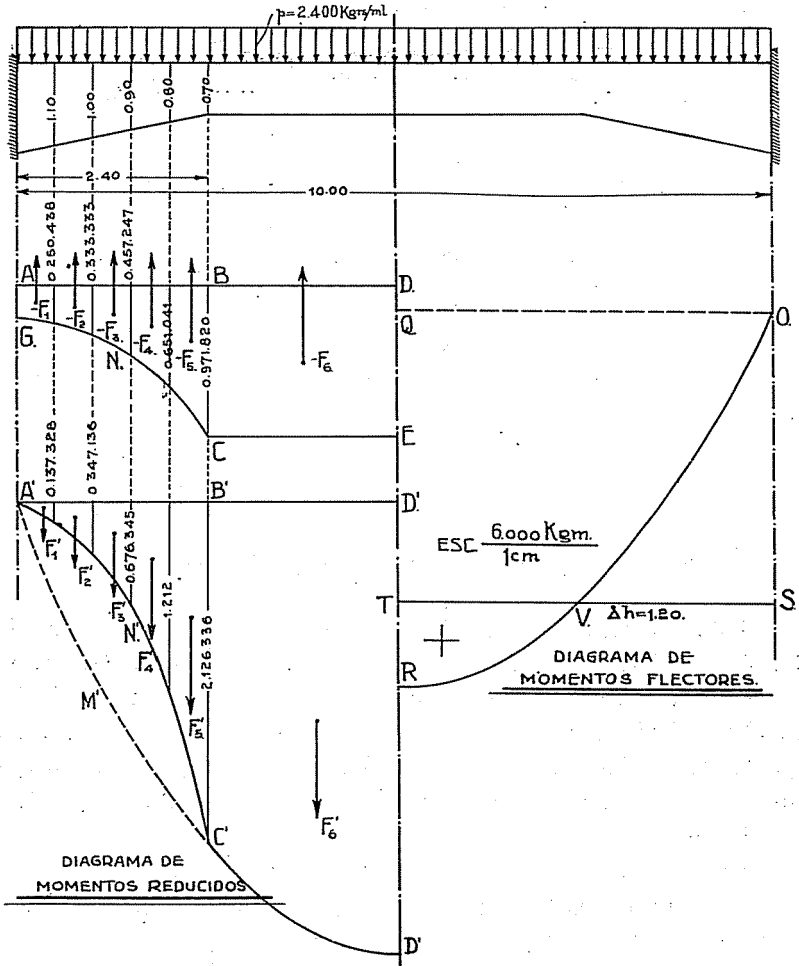


Figura N°. 29

Como M es constante, varían de acuerdo a la inversa de I ; además, si se lo expresa en Kg.m. , podemos, para abreviar los cálculos aritméticos, adoptar provisoriamente un valor:

$$M_j = 1.000.000 M'$$

Los valores $\frac{M}{I}$ son entonces:

$$\text{sec. } 1.^{\text{a}}: \frac{M}{I} = \frac{1.000.000 \text{ M}'}{5.184.000} = 0,191.820 \text{ M}'$$

$$\text{sec. } 2.^{\text{a}}: \frac{M}{I} = \frac{1.000.000 \text{ M}'}{3.993.000} = 0,250.438 \text{ M}'$$

$$\text{sec. } 3.^{\text{a}}: \frac{M}{I} = \frac{1.000.000 \text{ M}'}{3.000.000} = 0,333.333 \text{ M}'$$

$$\text{sec. } 4.^{\text{a}}: \frac{M}{I} = \frac{1.000.000 \text{ M}'}{2.187.000} = 0,457.247 \text{ M}'$$

$$\text{sec. } 5.^{\text{a}}: \frac{M}{I} = \frac{1.000.000 \text{ M}'}{1.536.000} = 0,651.041 \text{ M}'$$

$$\text{sec. } 6.^{\text{a}}: \frac{M}{I} = \frac{1.000.000 \text{ M}'}{1.029.000} = 0,971.820 \text{ M}'$$

Estos valores se consignan en el diagrama A. B. D. E. C. G. A. Si el chanfle fuera más pronunciado, la curva G. N. C. se acercará más con su convexidad hacia A. B.; si fuera infinito altura infinita del acartelamiento) se confundiría con A. B., quedando el diagrama reducido al B. D. E. C., y, finalmente, si no existiera, se mantendría el rectangular de base A. D. y altura constante B. C.

Debemos calcular ahora el valor de esta superficie:

$$48 \text{ M}' \cdot \left[\frac{0,192.901 + 0,250.438}{2} + \frac{0,250.438 + 0,333.333}{2} + \frac{0,333.333 + 0,457.247}{2} + \frac{0,457.247 + 0,651.041}{2} + \frac{0,651.041 + 0,971.820}{2} \right] \times 2 + 520 \text{ M}' \cdot 0,971.820 =$$

$$= (109, \frac{1721}{2} + 505, \frac{3448}{2}) \text{ M}' = 723, \frac{689}{2} \text{ M}'$$

luego:

$$\sum_{0}^{1} \frac{M' \cdot \Delta x}{I} = - 723, \frac{689}{M'}$$

Para obtener el diagrama correspondiente a la parte positiva debemos calcular la parábola de momentos y los valores de éstos en concordancia de cada una de las secciones, en Kgem. son:

Sec. 1.^a: 0.—

Sec. 2.^a: 548.352

Sec. 3.^a: 1.041.408

Sec. 4.^a: 1.479.168

Sec. 5.^a: 1.861.632

Sec. 6.^a: 2.188.800

y Sec. 7.^a: 3.000.000 en el eje de simetría.

En la misma figura se ha trazado el diagrama de momentos reducidos, consignándose sus valores en la vertical de cada sección en:

$$\frac{M \text{ Kgem.}}{I \text{ cm}^4}$$

El valor numérico de esta superficie es:

a) parte A' B' C' :

$$\left[\frac{0,137.328}{2} + \frac{0,347.136 + 0,137.328}{2} + \frac{0,347.136 + 0,676.345}{2} + \frac{0,676.345 + 1,212.000}{2} + \frac{1,212.000 + 2,126.336}{2} \right] \times 48 = 164 \frac{9269}{1000}$$

b) parte B' D' E' C' B' :

$$2.188.000 \times 520 = 1.138.176.000$$

$$(3.000.000 - 2.188.000) \times \frac{2}{3} \times 520 = \frac{281.216.000}{1.419.392.000}$$

y:

$$\frac{1.419.392.000}{1.029.000} = 1.379 \frac{3875}{1000}$$

A semejanza de la parte negativa, si el charfle fuera menos acentuado, la línea curva A' N' C' se aproximará más a la A' M' B', y en caso contrario se acercaría más a la recta A' J', con la que llegaría a confundirse cuando el momento de inercia en la parte A B fuera infinito.

La superficie total positiva es, entonces:

$$\sum_0^1 \frac{M^c \Delta x}{I} = 2 \times 164, \frac{9269}{\quad} + 1.379, \frac{3875}{\quad} = 1.709, \frac{2413}{\quad}$$

Para calcular M' debemos tener presente que:

$$\sum_0^1 \frac{M^c \cdot \Delta x}{I} + \sum_0^1 \frac{M' \cdot \Delta x}{I} = 0$$

de donde:

$$\text{luego: } 1.709, \frac{2413}{\quad} + 723, \frac{689}{\quad} M' = 0$$

$$M' = - \frac{1.709,2413}{723,689} = - 2, \frac{348}{\quad}$$

y finalmente:

$$M = 1.000.000 M' = - 2.348.000 \text{ kgem} = - 23.480 \text{ kgms.}$$

valor que resuelve el problema.

Si refiriéramos el resultado, como es corriente, al factor pl.², se tendría:

$$M = \frac{240.000}{x} = 23.480$$

luego:

$$x = \frac{240.000}{23.480} = 10, \frac{22}{\quad}$$

o sea:

$$M = - \frac{pl^2}{x} = \frac{pl^2}{10,22} = - 23.480 \text{ kgms.}$$

Si trazamos sobre O . Q . como línea de cierre:

$$Q . R . = \frac{pl^2}{8} = 30.000 \text{ kgms.}$$

y sobre ésta tomamos Q . T . = 23.480 kgms., podemos dibujar el diagrama de momentos flectores que está compuesto de la parte Q . S . V . negativa con su ordenada igual a 23.480 kgms. y la V . T . R . con T . R . = 30.000 — 23.480 = $\frac{1}{4}$ 6.520 kgms. con máximo positivo.

Cálculo directo del diagrama de momentos flectores en vigas acarteladas. — Empleo de gráficos.

Problema N° 13. — Resolver el problema anterior mediante el empleo de los gráficos.

La expresión 26 dá:

$$M = M_i^m = M_d^m = - pl^2 \cdot \frac{c^c}{c_a + c_o}$$

Como:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{1.20 - 0.70}{0.70} = 0,71 \quad \text{y} \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{2.40}{10.} = 0,24$$

los gráficos respectivos dan los valores de c:

- a) Gráfico N° 5. — $c^c = 0,22$
- b) Gráfico N° 3. — $c_a = 1,370$
- c) Gráfico N° 2. — $c_o = 0,87$

luego:

$$M = - \frac{pl^2}{c_a + c_o} c^c = - 2.400 \times 100 \times \frac{0,22}{1.37 + 0,87} =$$

$$= - 23.571 \text{ kgms.}$$

valor que solamente se diferencia de un 0,4 % del obtenido analíticamente.

Problema N° 14 — Sea el problema 9 teniendo presente que la viga tiene acartelamientos simétricos definidos por:

$$h = 0.60 \qquad \Delta h = 1.20 \qquad \Delta l = 2 \text{ mts.}$$

luego:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{1.20}{0.60} = 2. —$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{2. —}{6} = 0.333$$

La expresión 24 permite establecer:

$$M_i^m = - P . l . \frac{c_i^c \cdot c_a - x c_d^c \cdot c_o}{c_a^2 - c_o^2} = - 54.000 . \frac{c_i^c \cdot c_a - c_c^d \cdot c_o}{c_a^2 - c_o^2}$$

$$M_d^m = - P . l . \frac{c_o \cdot c_i^c - c_c \cdot c_d^c}{c_o^2 - c_a^2} = - 54.000 . \frac{c_o \cdot c_i^c - c_a \cdot c_d^c}{c_o^2 - c_a^2}$$

Debemos obtener ahora de los gráficos respectivos los valores “c” para el par de valores $\Delta h/h = 2$ y $\Delta l/l = 0,333$.

- a) Gráfico N° 7. — $c_i^c = 0,243$
- b) Gráfico N° 8. — $c_d^c = 0,2125$
- c) Gráfico N° 2. — $c_o = 0,6430$
- d) Gráfico N° 3. — $c_a = 0,8000$

reemplazando los valores:

$$\frac{c_a \cdot c_i^c - c_o \cdot c_d^c}{c_a^2 - c_o^2} = \frac{0,243 \times 0,80 - 0,2125 \times 0,643}{0,80^2 - 0,643^2} = + 0,255$$

$$\frac{c_o \cdot c_i^c - c_a \cdot c_d^c}{c_o^2 - c_a^2} = \frac{0,643 \times 0,243 - 0,80 \times 0,2125}{0,643^2 - 0,80^2} = + 0,0606$$

luego:

$$M_i^m = - 54.000 \times 0,255 = - 13.770 \text{ kgms.}$$

$$M_d^m = - 54.000 \times 0,0606 = - 3.272.40 \text{ kgms.}$$

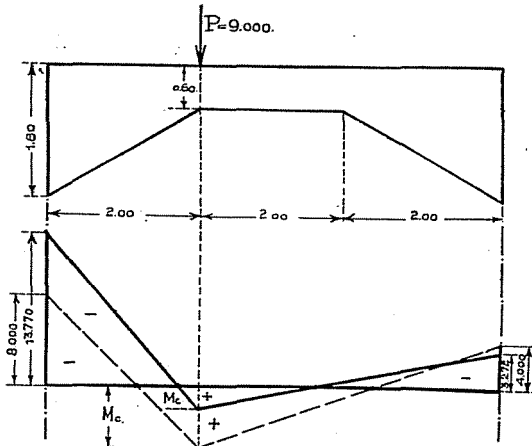


Figura N° 30

En la figura 30 se ha dibujado con raya entera el diagrama de momentos que corresponde a este caso y con entrecortada la calculada con $I \equiv$ constante. Las reacciones de apoyo valdrían:

$$R_i = 6.000 + \frac{M_i - M_d}{l} = 7.750 \text{ kgrs.}$$

$$R_d = 6.000 - 1.750 = 4.250 \text{ kgrs.}$$

Problema N° 15. — Resolveremos este problema, semejante al N° 10, suponiendo que la viga tenga acartelamiento definidos por:

$$\frac{\Delta h}{h} = 3.00 \qquad \frac{\Delta l}{l} = 0,40$$

La fórmula que lo resuelve es la 27:

$$M_i^m = M_d^m - Pl \cdot \frac{e^c}{e_a + e_o} = - 80.000 \cdot \frac{e^c}{e_a + e_o}$$

Los valores de "c" son:

a) Gráfico N° 6 . — — $c^c = 0,205$

b) Gráfico N° 3 . — — $c_a = 0,52$

c) Gráfico N° 5 . — — $c_o = 0,45$

luego:

$$M = - 80.000 \cdot \frac{0,205}{0,97} =$$

$$= - 16.900 \text{ kgms.}$$

El momento positivo en el centro de la viga es:

$$M_c = \frac{Pl}{4} - 16.900 =$$

$$= \frac{4.000 \times 20}{4} - 16.900 =$$

$$= 20.000 - 16.900 = + 3.100 \text{ kgms.}$$

En la figura 31 se diseñan los diagramas de momentos, según se considere o no la influencia de los acartelamientos.

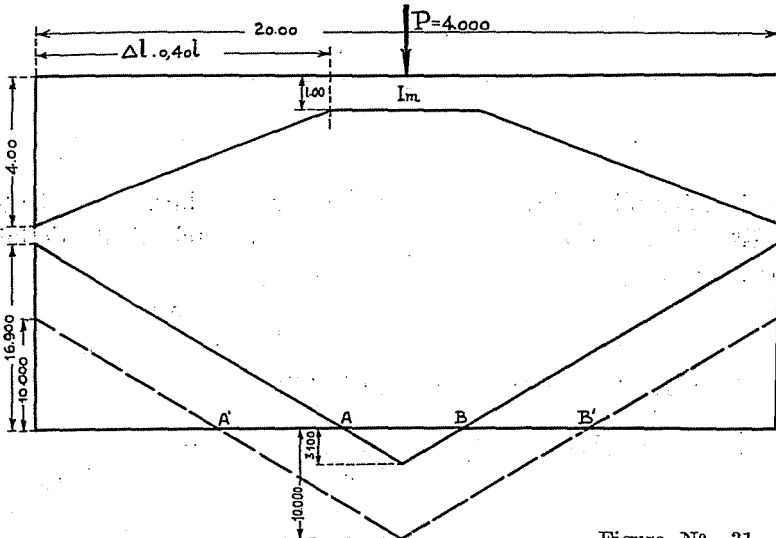


Figura N° 31

Problema N° 16. — Igual al N° 11, pero con los acartelamientos indicados en el anterior.

Se tiene, expresión 26 :

$$M = - pl^2 \cdot \frac{e^c}{c_a + c_o}$$

Con respecto al problema anterior, varía únicamente e^c , pues c_a y c_o no dependen de la carga exterior, y su valor debe buscarse en el gráfico N° 6, resultando:

$$e^c = 0,115$$

Por lo tanto, reemplazando:

$$\begin{aligned} M &= - 3.00 \times 400 \times \frac{0,115}{0,97} = \\ &= - 142.260 \text{ kgms.} \end{aligned}$$

El momento positivo al centro es:

$$\begin{aligned} M_c &= \frac{pl^2}{8} - 142.260 = \\ &= \frac{3.000 \times 400}{8} - 142.260 = \\ &= 150.000 - 142.260 = 7.740 \text{ kgms.} \end{aligned}$$

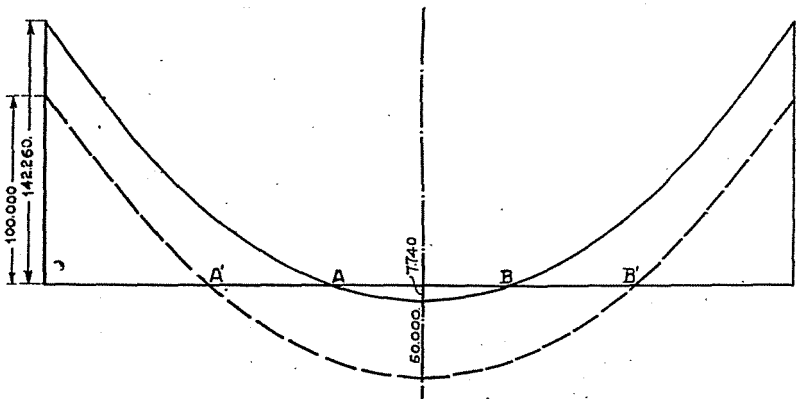


Figura N° 32

Comparación de resultados. — Errores. — Es útil comparar los resultados obtenidos mediante los mismos ejemplos, aunque suponiendo primeramente la viga sin acartelamientos y después con ellos, con el objeto de concretar además el grado de exactitud que se obtiene al adoptar en principio como aceptable la hipótesis de la constancia de los momentos de inercia. El cuadro siguiente resume los resultados obtenidos:

CUADRO N° 2

COMPARACION DE RESULTADOS

Caso: I = Constante

Problemas.	M_1^m	M_d^m	M_c
8	20.000	20.000	10.000
9	8.000	4.000	5.340
10	10.000	10.000	10.000
11	100.000	100.000	50.000

Caso I variable — Con acartelamientos

12	23.480	23.480	6.520
14	13.770	9.083	1.798
15	16.900	16.900	3.100
16	142.260	142.260	7.700

Errores en %

8 y 12	14,80	14,80	53,20
9 y 14	42,—	29,60	197,—
10 y 15	40,80	40,80	222,—
11 y 16	29,20	29,20	550,—

La influencia de los acartelamientos moderados se reduce en general a un aumento de poca monta (problemas 2 y 12, del 14,80 %) en los valores de los momentos flectores extremos que resisten las secciones a expensas del coeficiente de seguridad y a una sensible disminución del momento flector en el centro de la viga que llega al 53 % en los ejemplos citados, favorables a la resistencia en esa parte.

Para acartelamientos exagerados es evidente que los aumentos de los momentos flectores extremos y la disminución del mismo en la parte central son tan elevados, que no puede ni debe recurrirse en estos casos a las hipótesis de simplificación a base de $I = \text{constante}$, que, como demostramos, invalida el cálculo.

No se puede, pues, sin exponer los resultados a errores que desnaturalicen las soluciones, aceptar las fórmulas corrientes a base de $I = \text{constante}$ para vigas con acartelamientos medianos o exagerados, y, en cambio, se le puede aceptar para acartelamientos moderados, debido a que el aumento de los momentos extremos es reducido y la disminución del valor numérico de los del centro de la viga es favorable a la resistencia.

El empleo de los gráficos incluidos en este trabajo facilita notablemente; hasta hacerlo práctico, tener en cuenta la influencia de los acartelamientos, permitiendo corregir los resultados, acercándolos más a sus verdaderos valores. Se consigue así una mejor y más racional distribución del material, y soluciones constructivas en casos en que se deba, por motivos de diversa índole reducir la altura de las vigas en el centro.

Problema N° 17. — Se desea calcular una viga de 6.00 mts. de luz, de hormigón armado, que debe soportar una carga uniformemente repartida de 3.600 kgrs/m., teniendo en cuenta la influencia de los acartelamientos.

Supondremos secciones rectangulares, aunque no se modifica la solución del problema para el caso de la sección T.

Si $I = \text{constante}$, se tiene:

$$M = - \frac{pl^2}{12} = - \frac{3.600 \times 6^2}{12} = - 10.800 \text{ kgms.}$$

y en el centro:

$$M = + 5.400 \text{ kgms.}$$

las alturas de las secciones, si: $a = 30 \text{ cms.}$, $r = 40 \text{ Kgr./cm}^2$
y $R = 1.200 \text{ kgr./cm}^2$, son:

$$h \text{ ext.} = 74 + 6 = 80 \quad h \text{ centro} = 53 + 4 = 57 \quad (^\circ)$$

$$\text{pues:} \quad \frac{10.800}{0.30} = 36.000 \quad \text{y} \quad \frac{5400}{0.30} = 18.000$$

Si al chanfle le damos una longitud:

$$(80 - 57) \times 4 = 23 \times 4 = 92 \text{ cms.}$$

tendremos que:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{80 - 57}{57} = 0,403$$

$$\text{y} \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,92}{6} = 0,153$$

Para este par de valores, el gráfico N°. 12, da:

$$x = 10,85.$$

y entonces el verdadero momento extremo es:

$$M \text{ ext.} = - \frac{pl^2}{x} = - \frac{3.600 \times 36}{10,85} = - 11.944 \text{ kgms.}$$

$$M \text{ centro} = \frac{pl^2}{8} - 11.944 = + 4.256 \text{ kgms.}$$

Podemos ahora seguir los dos caminos diferentes siguientes:

1º.) Mantener invariables las dimensiones de hormigón halladas anteriormente y recalculer las secciones metálicas, lo que

(°) Tablas del Ing. Castiñeyras.

nos lleva a dotar de armadura de compresión a los extremos de la viga y a reducir la correspondiente al centro en la proporción:

$$\frac{4256}{5400}, 0:$$

2°.) a recalcular en forma total nuevas secciones de hornigón.

En el primer caso el problema queda resuelto; para el segundo es preferible, teniendo en cuenta que los valores $\frac{\Delta l}{h}$ y $\frac{\Delta l}{l}$ tienden a aumentar, a iniciar el cálculo con un M extr. mayor y un M centro menor que los anteriores.

Si adoptamos:

$$M \text{ ext.} = 12.960$$

$$M \text{ centro} = 3.240$$

que corresponden a un valor $x = 10$, tendremos (C. tablas IV y V):

$$a) \text{ extremos: } h = 81 + 6 = 87$$

$$b) \text{ centro: } h = 41 + 4 = 45$$

entonces:

$$\frac{\Delta h}{5} = \frac{87 - 45}{45} = 0,93$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1,26}{6} = 0,21$$

pues:

$$\Delta l = 3 \cdot \Delta h = 3 \times 42 = 1.26$$

el gráfico N° 12 da:

$$x = \sim 10$$

Luego la viga está dimensionada teniendo en cuenta la influencia de los acartelamientos. Podrá observarse la sencillez del método que permite obtener el resultado con operaciones aritméticas reducidas y elementales, distribuyendo el material más racionalmente.