AÑO 14. Nº 5-6. JULIO-AGOSTO 1927

SOBRE LA POSIBILIDAD DE LAS CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS [1]

I

Hay dos maneras de encarar todo problema matemático. La primera tiene por objeto calcular y hallar el resultado y la segunda se contenta con demostrar la existencia de este resultado.

La primera calcula y se sirve del número obtenido: es la matemática aplicada. La segunda demuestra que existe un resultado sin que le importe individualizarlo: es la matemática pura.

Para la vida diaria y sus necesidades, la primera es la que se usa; para la ciencia y su adelanto es la segunda la que se impone. Es claro que todo esto debe entenderse fuera de afirmaciones absolutas; ocurre que resulta problema fundamental y escabroso, muchas veces, la individualización de un resultado (2) y también que de estas búsquedas, suele obtener la matemática pura, más de una importante contribución.

Hay muchos ejemplos de esta doble forma de encarar los problemas matemáticos. En álgebra superior se han calculado las raíces de una ecuación; pero por otro lado todo lo esencial hubiera terminado con el teorema de D'Alembert que asegura la existencia de esas raíces. En matemática pura dada la ecuación:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

se demuestra que existen n raíces y basta con designarlas $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$

---

(1) Este artículo es el extracto de una conferencia dada el 5 de setiembre de 1925 en la Facultad de Ingeniería de Rosario y corresponde al ciclo de Extensión Universitaria desarrollado por su Centro de Estudiantes. Lo entrego a la publicidad porque a pesar de que los problemas clásicos de la "imposibilidad" que tienen su origen en la geometría griega han quedado aclarados, suelen aparecer intentonas nuevas que reivindican para pujantes inventores, el hallazgo de las cuadraturas, duplicaciones y trisecciones.

(2) Galois, creador de la teoría de los grupos, que contiene en sí el problema de la resolubilidad de las ecuaciones algebraicas, consideraba ya esta dificultad aún en casos en que el análisis teórico se hallaba realizado.

En matemática aplicada debemos decirque α_1 es tal número, α_2 tal otro y así hasta α_n

Frente a la $\int_a^b f'(x)dx$ la matemática pura demuestra que ella, en ciertas condiciones, define un número. La matemática aplicada quiere saber cuál es este número.

Se ve, pues, la diferencia que existe entre estas dos marchas que es lo mismo la gráfica $x^2 + y^2 = r^2$ en un sistema cartesiano y da [3]. Pero para el investigador, para el matemático puro, es más importante generalmente el método que conduce al resultado que el número que lo ha de precisar; él busca los enlaces generales demostrando existencias, su ciencia es una ciencia abstracta, amplia, lógico-formal, y dentro de su ambición se concibe un Poincaré que se equivoque cien veces en una simple suma, pero que en defecto de ello tenga chispazos de genio para alumbrar los campos más altos de la ciencia.

El problema de la posibilidad de las construcciones geométricas es en su aspecto más importante un problema de matemática pura; se estudia en él si una construcción es o no posible; esto es, si existe o no una solución, prescindiendo en esto, de toda tentativa o ejecución para lograrla. La construcción, el *modus operandi*, es problema aparte que habrá de seguirse por separado.

II

Es natural que toda construcción geométrica se refiera a determinados instrumentos. Así por ejemplo, carecería de sentido decir: La cuadratura del círculo es imposible; lo que debe decirse es: la cuadratura del círculo es imposible con la regla y el compás, por ejemplo, ya que con respecto a otros instrumentos esta imposibilidad puede desaparecer.

Se ve en seguida que, determinada la imposibilidad de una construcción con ciertos instrumentos, queda pendiente este otro

---

(3) A los efectos de considerar también, pero dentro de la misma matemática pura, las dos divisiones que sirven para distinguir al geómetra del analista, resultará intesante al lector el artículo "Sobre la evolución del concepto de la Geometría", de F. Enriques, Rev. de Matem. Hisp. Americana, 1920.

problema: ¿con qué instrumento es posible una construcción determinada?

Este problema, aparentemente sencillo, es secular; nació cuando la ciencia fué cultivada por el espíritu de los griegos pero, a falta de medios para abordarlo, éstos usaron un camino en el que no se trataba de discutir el problema de la posibilidad, creyendo que se debía ensayar para encontrarla; pero si no hubo una demostración de la imposibilidad, hubo un trabajo cuantioso que nos ha servido y del que nos valdremos.

Viendo que con la regla y el compás no podían resolver sus problemas de la cuadratura del círculo, trisección de un ángulo cualquiera y duplicación del cubo, usaron las cónicas, creando luego otras curvas que son la base de una geometría superior iniciada en el siglo V a. C. Con estas curvas lograron resolver estos problemas, pero inmediatamente surge esta pregunta: ¿tiene valor matemático (de existencia geométrica) una construcción hecha así? Para responder a ello es necesario examinar cuándo existe una determinada figura.

Se dice que una figura, por ejemplo la circunferencia o lo que es lo mismo la gráfica $x^2 + y^2 = r^2$ en un sistema cartesiano y coordenado, existe, cuando existe un instrumento que permite su diseño de un modo continuo ([4]). Aquí el compás asegura la existencia de la figura circunferencia. Se ve, pues, que la existencia de una figura es problema distinto que la existencia de la ley matemática de la figura. En este sentido los griegos resolvían sus cuestiones propuestas, solamente por aproximación. En efecto; si intervenía una parábola $y = \sqrt{2px}$ se podían trazar tantos puntos como se quisiese de la misma acudiendo a las correspondencias de valores entre las dos variables, pero siempre, necesariamente, un número finito y a lo sumo (en una prolongación indefinida del tiempo) un infinito numerable de puntos. En cambio la figura tiene una continuidad infinita actual de puntos y su existencia geométrica depende de que exista o no un instrumento que permita su trazado. Mientras no se precise tal instrumento se determinarán muchos puntos y

---

(4) Reflexiones sobre este mismo caso de la circunferencia, dentro de una interpretación de la teoría de los conjuntos, encontrará el lector en E. Borel "Leçons sur la theorie des fonctions".

tantos como se quiera en sucesión numerable, pero no se logrará tener la figura, esto es: todos los puntos de la curva.

III

Fué recién con la aparición de la Geometría analítica de Descartes, que el estudio de las posibilidades de las construcciones geométricas, se pudo definir en una forma nueva, más amplia y mucho más precisa, ya que con la geometría analítica el análisis es el lenguaje de las relaciones geométricas y él tiene un algoritmo poderoro que a la geometría le falta. Es precisamente con este deseo de ensanchar el campo del análisis geométrico que especialmente Poncelet completa y precisa la primera construcción de Cartesio introduciendo el uso del "imaginarismo" en la geometría. (5)

Desde ese momento se enfocan estos estudios por el campo del álgebra y es recién ésta la etapa en que el espíritu se entrega todo entero al rigor del pensamiento y el pensamiento puro empieza a trabajar.

Seguiremos, no ya cronológicamente, sino genéticamente a partir de la geometría analítica, la evolución de nuestro argumento.

Desde que con la geometría analítica el análisis emprende el estudio de las figuras y el de las relaciones entre sus elementos, a un punto le corresponde un número (una cupla, una terna etc., según el espacio) a una recta una relación y así sucesivamente, en forma que lo que en geometría es figura o construcción propuesta, se traduce en análisis por una relación dada o por una ecuación.

Referida una construcción a cierto instrumento, veamos cuáles son los que suelen mencionarse más frecuentemente. La regla y la regla sola; la regla y el compás usados libremente o bien la regla y una circunferencia de radio y centro dado, problema que corresponde a una forma dada por Poncelet y que impone el empleo de la regla y el compás, pero este último sin uso libre.

Para Mascheroni en su "Geometría del compasso" el solo instrumento a usar es el compás, así como para Carnot en su "Geometrie de position" el único es la regla.

Pero junto a estos instrumentos cabe mencionar procedimien-

---

(5) V. "Il principio di continuitá e l'immaginarismo in Geometria". E. Bompiani. "Questioni", de F. Enriques. Parte I. V. 2.

tos efectuados sobre el plano, en forma de poder obtener de las operaciones hechas sobre el mismo distintas figuras, determinadas por los puntos de doblez, pero naturalmente sin existencia completa. Estos ensayos que se denominan "plegados del papel" fueron inaugurados simultánea y separadamente por H. Wiener y un hindú Sundara Row (6).

Por afinidad con estas operaciones mencionaremos la superficie de Möbius cuyo estudio pertenece a la geometría topológica y que, mediante una operación sobre un plano, da el caso conocido de una superficie unilateral.

La geometría topológica estudia las figuras, de acuerdo al grupo de las transformaciones continuas y según la frase de H. Poincaré, en ella se hace abstracción a todo concepto de medida, siendo el suyo puramente cualitativo. (7) O sea, desde el punto de vista topológico dos figuras se dirán equivalentes si una de ellas no separa lo que en la otra estaba unido ni une lo que estaba separado.

Una recta, caracterizada métricamente con una longitud L es equivalente a una curva de longitud L' puesto que a un punto B. interior a A y C en la recta, puede corresponder un punto B' interior a A' y C' en la curva.

Se ve pues con esto, que lo que interesa a la topología son relaciones de posición o de sucesión conservadas en las transformaciones continuas.

Considerada la topología en comparación con la métrica y la proyectiva, puede decirse que es de un carácter más general. La proyectiva, basada esencialmente en los conceptos de orden y pertenencia (8) como invariantes en el grupo de las operaciones de proyección y sección y más general que la métrica ya que en ésta el segmento puede precisarse en formas distintas mientras su correspondiente proyectivo subsiste el mismo, se subordina a su vez a la

---

(6) F. Klein. "Leçons sur certaines questions de géometrie élementaire". En este libro del gran matemático alemán recientemente desaparecido, hallará el lector, de un modo elemental y con una elegancia llena de sugestiones, tratados muchos de los puntos que en este artículo tocamos.

(7) Para una primera lectura, v. G. Fano. Rev. "Scientia".

(8) v. F. Enriques. "Lezioni di Geometria Proiettiva".

topológica en cuanto en esta última la recta pertenece al género de la línea. (9)

Es natural que para el estudio de la geometría topológica ha sido necesario buscar y establecer formas tipos, de las cuales pudiera obtenerse cualquier figura dada, por una derivación en el sentido topológico. Así, por ejemplo, todo continuo a una dimensión corresponde a una línea abierta. Para extender estos principios a continuos de dos o más dimensiones ha sido necesario ir introduciendo nuevos conceptos que permitan la clasificación y dentro de los cuales se pueden mencionar las superficies (unilaterales y bilaterales). Ejemplo de estas últimas lo dan la esfera, el toro, el elipsoide, etc.; el plano mismo es una superficie bilateral y así en el caso de una superficie unilateral sería la que corresponde a la forma de Möbius y que se obtiene fácilmente. Sea la hoja rectangular y de vértices *A, B, C* y *D*. Uniendo *A* y *B* y *C* con *D* se tiene una superficie anular bilateral. En cambio que si se coloca *D* sobre *A*, y *C* sobre *B*, después de rotada la hoja, se tiene la superficie de Möbius.

Un móvil que partiera de un punto llegaría a su conjugado siguiendo un camino continuo y sin atravesar ninguna discontinuidad, esto es, estando siempre en un conjunto a dos dimensiones, lo que no era posible en el plano ni en la superficie anular derivada, pues en sus bordes hay una sola dimensión. (10)

IV

Hemos dicho ya, cómo el estudio de la posibilidad de una construcción geométrica, se torna un problema definido en el campo del análisis a partir de Descartes. En efecto, la geometría analítica con la ayuda de sencillos razonamientos del álgebra, permite encarar la cuestión general que no es sino ésta: ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que una construcción geométrica sea posible con la regla y el compás, o sea elementalmente?

---

(9) Para ver el punto fundamental en que la métrica y la proyectiva se tocan y el cual permite edificar a esta última con absoluta prescindencia de todo concepto métrico, v. W. Russel. "Fondaments de la geometrie".

(10) No es imprescindible para obtener la superficie de Möbius producir una sola rotación de la hoja antes de la unión de los vértices opuestos. Igual resultado se obtendría con un número impar de vueltas. Para otras superficies unilaterales obtenidas también por Möbius pero en modo distinto, v. E. Pascal "Repertorio di Matem. Superiore", T. II.

Evidentemente, la regla permite el trazado de rectas, pero en geometría analítica las rectas se traducen en ecuaciones del tipo:

$$a x + b y = c$$

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

que se satisfacen para valores de x e y raíces del sistema. Pero estos valores de x e y son del tipo $\frac{p}{g}$ esto es, números racionales.

Por otra parte y como se ve sencillamente de estudiar las correspondencias entre el campo real y la puntual, con la regla se puede obtener la construcción de los números racionales cuando se fija un segmento como unidad.

Si se opera con compás, se tendrán círculos o sea ecuaciones de segundo grado, de la forma:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x - a_1) + (y - b_1)^2 = r_1^2$$

que se resuelven para valores de x e y de la forma: $\frac{q+\sqrt{t}}{s}$
y para la regla y el compás tendremos: $ax + by = c$

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r^2$$

o sea soluciones de la forma: $\frac{p}{g}$ o bien $\frac{q+\sqrt{t}}{}$ Siendo el valor $\sqrt{t}$ construíble por el procedimiento corriente de la media proporcional si lo es $\sqrt{t}$ lo será $\sqrt{\sqrt{t}}$ y en general toda raíz de orden 2^n tomada un número finito de veces.

De aquí y si llamamos construcción elemental la que se resuelve con la regla y el compás, se tiene que la condición para que una construcción geométrica sea posible elementalmente es que la expresión analítica del problema se deduzca de los datos, mediante operaciones racionales o raíces cuadráticas o de orden 2^n.

Con esto se tiene marcado ya todo el camino a seguir para el estudio de cualquier construcción geométrica. Se busca la expresión analítica del mismo y ésta dirá si el problema es o no posible, independiente y a pesar de todos los tanteos que se hicieran. Olvidar esto, sería correr el peligro de perder el tiempo persiguiendo imposibles.

Antes de ocuparnos de los problemas clásicos, detengámosnos para hacer una breve consideración que tiene una gran importancia en estos asuntos.

De acuerdo con el enunciado de la condición para una construcción elemental, hay un cierto campo, conjunto, grupo o clase de números, los cuales tenían la propiedad de hacer posible la construcción. Estos números eran los racionales o los cuadráticos. Vale decir; en el campo de estos números tienen solución las construcciones elementales. Es la eterna cuestión por no decir siempre aparecida en matemáticas y en todo campo del conocimiento: tal proposición relativa a tales hipótesis. La suma de los ángulos de un triángulo igual a 180° para la geometría euclídea, etc. Uno de los conceptos que ha contribuido a desarrollar estos problemas es el de campo de racionalidad del cual daremos una idea asociada a nuestro fin.

Pudiera ser que la interpretación analítica de una construcción, nos condujera a una expresión del tipo:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad *$$

Sabemos que más allá del cuarto grado (11) no es posible en general la solución de las ecuaciones mediante radicales, lo que se debe al teorema de Abel. Supongamos por un momento que $n=5$ y que el polinomio * se puede descomponer, esto es, reducir en el producto de dos polinomios en x. Esto es: $P(x).Q(x)=0$ ** tal que todas las raíces de * lo sean de ** y recíprocamente esto es que todas las raíces que verifican ** o sea al sistema

$$P(x) = 0$$
$$Q(x) = 0$$

lo hicieran a * . $P(x)$ y $Q(x)$ serán necesariamente en nuestro caso de grado menor que 5 siendo por lo tanto resolubles mediante radicales. Supongamos a $P(x)$ de grado 2. Con ello se tiene que la expresión de $P(x)$ es elementalmente construible. A su vez pudiera serlo $Q(x)$ y ello ponerse de manifiesto por una nueva reducción.

(11) Para estas y otras importantes cuestiones tales como las ecuaciones del tipo $Z^m - 1 = 0$ estudiadas por Gauss y que interpretan la división regular de la circunferencia, las ecuaciones abelianas y los grupos de Galois, véase J. A. Serret, "Cours d'Algebre superieure". 2° tomo.

Se ve, pues, cuánta importancia tiene la reductibilidad de una ecuación. Hoy su estudio se aborda precisamente con el concepto de los campos de racionalidad.

Un campo o un grupo es en general en matemáticas, un conjunto de entes y una operación; de tal modo que todo ente del campo sometido a la operación del campo, dé un ente perteneciente a dicho campo. [12]

Dadas las operaciones suma, resta, multiplicación y división o sea las cuatro operaciones racionales se sabe cómo todo el campo de los números racionales se puede obtener a partir de la unidad con las cuatro operaciones racionales. Se llama, pues, campo de racionalidad a un conjunto de números el cual contenga todo número que se pueda obtener de los del conjunto mediante operaciones racionales. El campo racional o campo absoluto de racionalidad se suele indicar así [1]. Se ve que cualquier otro campo de racionalidad, contiene el campo absoluto puesto que si el número a es suyo, lo es $\frac{a}{a}$ o sea 1.

Un campo de racionalidad se puede ampliar introduciendo nuevos entes o números irracionales, los cuales se llamarán base del campo ampliado; así el campo $[\,1, a, b, c, \ldots\,]$ está compuesto de todos los números (comprendidos todos los racionales por estarlo 1) y los que se deducen de los de la base de un modo racional.

La ampliación hecha con un ente operatorio, lo mismo ampliaría el campo. Se tendría $[\,1, a, b, c, \ldots\ldots V\,]$ y V podría ser en particular, extracción de raíces cuadráticas.

Como en todas las consideraciones del análisis, o los entes son números fijos o variables. El campo:

$[1,a,b,c,\ldots x_1,x_2,x_3,\ldots x_n]$ sería un campo de racionalidad variable.

Numerosas cuestiones, tales como la de la reducción de una ecuación del tipo $a_0x^n+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ se pueden mirar en estos campos de racionalidad.

En condiciones más restrictivas, en el análisis indeterminado, encontramos los campos enteros para las ecuaciones de Diofanto que son del tipo (a, b y c enteros) $ax+by=c$ y en el que se con-

(12) En innumerables cuestiones se introducen estos conceptos. Así se tiene por ej. la trigonometría del grupo octóneo.

sideran solamente las soluciones enteras. También la célebre ecuación de Farmat $Z^n = x^n + y^n$ cuya imposibilidad en este campo y para $n>2$, entero, aún no ha sido posible demostrar.

V

Nos toca ahora hacer ver la imposibilidad de las construcciones elementales para los problemas de duplicación del cubo, trisección de un ángulo cualquiera y cuadratura del círculo.

El Dr. Heiberg, historiador alemán, en quien puede consultarse sobre los descubrimientos de las cartas de Arquímedes las que permitieron emplazar el origen del cálculo infinitesimal en el matemático siracusano ([13]) tendiendo así el hilo de pensamiento que de él parte hasta enlazarse en la obra de Galileo en física y Leibnitz y Newton en análisis, el mismo historiador sobre una carta de Eratóstenes dirigida a Tolomeo, nos refiere los orígenes del problema de la duplicación del cubo. ([14])

En pocas palabras y según cuenta Eratóstenes en esa carta, el origen viene de que Nimo, rey de Grecia, al hacer construir una tumba para su hijo, quiso que ésta, siguiendo la importancia del difunto real, fuera hecha con dobles medidas y con doble volúmen de otra tumba.

Es claro que el deseo del rey era imposible puesto que al duplicar los lados se octuplicaría el volúmen; pero corrigiendo este error explicable para un soberano cualquiera de nuestros mismos días, el origen del problema no deja de tener su leyenda.

Si a es el lado de un cubo, el cálculo del lado x de un cubo duplo lleva a la relación: $x^3 - 2\,a^3 = 0$ que no es posible con la regla y el compás en general.

Sin menoscabo de la generalidad puede suponerse $a=1$, de donde se tiene: $x^3 - 2 = 0$. Esta ecuación es de tercer grado y a menos que no sea reductible, no será construible elementalmente.

Ahora la ecuación $x^3 - 2 = 0$ pertenece a otra más general del tipo:

$$x^3 - a = 0 \qquad (2)$$

Supongamos $a = \frac{m}{n}$ (irreducible), la (2) será irreducible,

---

(13) L. Heiberg. "Matematiche, scien. natural. etc. nell antichita classica".
(14) v. Gino Loria. "Le scienze esatte nell'antica Grecia".

esto es sin construcción elemental a menos que m y n sean cubos de números enteros. En efecto, suponiéndola (2) reducible se tendrá:

(3) $x^3 - a = (x-b)(x^2 + cx + d)$. donde b, c, y d son racionales.

Por la (3) la ecuación (2) admite la raíz $x = b$ y poniendo b bajo forma de fracción irreductible $b = \frac{p}{q}$ se tiene:

primero de: $x^3 - a = 0 \qquad x^3 = a \qquad x^3 = \frac{m}{n}$

segundo de: $x - b = 0 \qquad x = b \quad \ldots \ x = \frac{p}{q}$, o sea $\frac{m}{n} = \frac{p^3}{q^3}$

y finalmente $m = p^3$, $n = q^3$ según queda dicho.

En particular la ecuación $x^3 - m = 0$ si m es entero exige que m sea cubo de otro; luego $x^3 - 2 = 0$ es irreductible o sea: no se puede llevar a ninguna de las formas elementales, vale decir, no hay solución elemental para este problema.

La misma ecuación pero con una sencilla introducción de números complejos, permite arribar a igual resultado para la trisección de un ángulo cualquiera.

En lo que respecta a la cuadratura del círculo se tiene que para un círculo de radio R, su área está dada por: πR^2 y el problema de la cuadratura consiste en determinar el lado de un cuadrado de igual área.

Sea este lado L, se tiene entonces la siguiente ecuación:

$$l^2 - \pi R^2 = 0$$

de donde $\quad l = R\sqrt{\pi}$

Son frecuentes, razonamientos al respecto como éste y que resulta obvio refutar: La construcción del lado L con la regla y el compás es imposible porque π y $\sqrt{\pi}$ son inconmensurables. Es natural que en la razón alegada se encuentra incluído el error de esta proposición por cuanto $\sqrt{2}$ es un inconmensurable y es así mismo construible elementalmente.

La razón es otra; la imposibilidad de una construcción elemental de este problema es debida únicamente a que el número π no es raíz de ninguna ecuación a coeficientes racionales o bien enteros. O sea, porque el número π es trascendente.

No siendo pues, raíz de ninguna ecuación algebraica, no lo será de ecuaciones de las del tipo visto y que dentro de las algebraicas, eran las que permitían tal construcción. Vale decir, la construcción de la cuadratura, es imposible con la regla y el compás.

VI

A propósito de la duplicación del cubo, Iparco, geómetra griego, planteó el problema en la siguiente forma: dados dos segmentos a y b construir otro dos x e y que con a y b tomados como extremos, formen la progresión geométrica siguiente:

$$a : x : y : b \qquad \text{de donde}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b} \therefore$$

$$x^2 = a.y \qquad \text{x} = \frac{ab}{y} \therefore x^3 = b.a^2$$

en particular para $b = 2\,a$, se tiene:

$$x^3 - 2a^3 = 0$$

que interpreta el problema de la duplicación del cubo.

Si bien es cierto que Iparco con esto no adelantaba nada definitivo a la solución del problema, había de preparar una solución a Menecmo, la cual éste realiza con parábolas.

Sean a y b parámetros de las parábolas:

$$y = \sqrt{ax}$$
$$x = \sqrt{by}$$

Las distancias QR y QP de su intersección a los ejes, son las dos medias proporcionales entre los segmentos a y b.

Tenemos, puesto que $OP = RQ$ y $QP = RO$,

$$\begin{matrix} PQ^2 = a.\ RQ \\ RQ^2 = b.\ PQ \end{matrix} \because \frac{a}{PQ} = \frac{PQ}{RQ} = \frac{RO}{b}$$

$$\text{luego:}\quad PQ^2 = a.RQ \quad , \quad PQ = \frac{a.b}{RQ} \therefore$$

$$PQ^3 = b\,.\,a^2$$

y en particular para $b = 2a$:

$$PQ^3 = 2a^3$$

el problema de la duplicación quedaba así efectuado mediante una parábola de parámetro a y otro $2a$ en las condiciones vistas. Pero ni la solución era elemental ni era perfectamente determinada, vale decir, que era aproximada (tanto como se quiera) por cuanto, como hemos visto, la existencia de la figura dependía de la del instrumento.

No es esta sola la forma cómo los griegos resolvieron estas cuestiones. De entre otras varias, dadas por la concoide, cisoide, etc. hemos seguido el camino de Iparco finalizando en la ejecución de Mencmo por su especial sencillez y elegancia.

En cuanto a las curvas trascendentes que permitirán la construcción del número π dejaremos a un lado la del tipo arc. sen x que hoy nos resuelven fácilmente la cuestión, considerando un momento, la cuadratiz de Dimostrato.

Sea una circunferencia de radio igual a uno y consideremos dos radios perpendiculares, el primero como posición inicial y el segundo final. Supongamos que sobre el cuarto arco de esta circunferencia se va moviendo un punto. La cuadratriz estará sobre los radios de este móvil y tendrá por ecuación: siendo θ el argumento del móvil, y x e y sus coordenadas respecto a la cupla de los dos radios:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tag} \frac{\pi y}{2}$$

para $y = o$ se tiene:

$$x = \lim_{y = o} \frac{y}{\operatorname{tag} \frac{\pi y}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

con lo cual en el punto en que la cuadratriz corta al eje de las x tendremos como abcisa $\frac{2}{\pi}$

Este valor de π, también mediante el problema de Buffon, estudiado en el cálculo de probabilidades, puede ser hallado "empíricamente".

Daremos una idea del mismo. Sea un plano en el cual se han trazado un conjunto de líneas rectas paralelas equidistantes siendo a el valor del distanciamiento. Si se tira al "azar" sobre dicho plano una aguja cuya longitud es L, la probabilidad para que esta aguja corte a las paralelas, es $P = \frac{2L}{\pi . a}$ Con lo cual, experimentando a *posteriori* se tiene un procedimiento "experimental" para el valor de π [15].

VII

LOS NUMEROS TRASCENDENTES

Se define un número trascendente como el que no es raíz de ninguna ecuación a coeficientes enteros: $a_0 x^n + \ldots + a_n = O$.

Como en todo problema de matemática y conforme a lo dicho al iniciar estas líneas, corresponde demostrar la "existencia" de los números trascendentes. Dos procedimientos se siguen para ello, el de Cantor que se vincula a la teoría de los conjuntos y el de Liouville a las fracciones continuas.

Dada una ecuación de grado n se forma con ella su número "altura", definiéndolo así:

$$N = (n - 1) + a_0 + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|. \qquad (2)$$

De acuerdo con esto, para cada valor de N hay un número finito de números algebraicos. En efecto, por (2) n es menor que N y fijados n y N, los números a_o $|a_1|, \ldots, |a_n|$ siendo enteros y positivos quedan determinados en una forma finita de modos. Para cada valor de N se arreglarán monótonamente los números algebraicos. Hacemos crecer N y el teorema queda demostrado, pues los números algebraicos resultan "numerables". Entre los números reales que forman un infinito continuo, los algebraicos sólo son una parte numerable, quedando un infinito continuo que por no ser algebraico, serán (de acuerdo con la definición) números trascendentes.

Respecto al segundo método tenemos:

Sea $\quad I_1 = \dfrac{P_1}{Q_1}, \quad I_2 = \dfrac{P_2}{Q_2}, \ldots \quad I_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$, una sucesión de fracciones que tienden hacia un límite ϵ con $n = \infty$ y cuyos denominadores crecen indefinidamente.

---

(15) Cfr. Castelnuovo: "Calcolo delle Probabilitá" o Borel: "Traité du Calcoul des Probabilités et de ses aplications", fasc. III.

Para datos históricos de π cfr. Aubry, A. "Noticia histórica sobre la cuadratura del círculo" y Sainte - Laguë, A: "La quadrature du cercle" en La Revue de l'Enseignement des Sciences, 1908.

El número ϵ no puede ser raíz de una ecuación algebraica a coeficientes enteros y de grado $\leqq \alpha$ sino cuando para $n = \infty$, se tiene

$$(1) \qquad |\varepsilon - I_n| > \frac{1}{M\, Q_n^{\alpha}}$$ (16) M siendo independiente

de n. El número ϵ existe en cualquier modo y está definido por la convergencia de la fracción continua. La condición (1) satisfecha o no lo hará algebraico o trascendente. Luego la existencia de estos últimos queda demostrada.

Aún cuando esta demostración de existencia haya sido formulada, quedan aún pendientes demostraciones que permitan clasificar ciertos números determinados como por ejemplo la constante de Mascheroni. Respecto al número "e" lo fué por Hermite y el número π por Lindemann.

La demostración de Hermite se ha podido hacer elemental con Gordan y Klein, esto es, no usando la integral de Hurtwitz. Generalizando la fórmula de integración por partes el lector hallará demostrada la trascendencia de "e" en el Ier. tomo de Goursat.

La demostración de la trascendencia de π y con ello la de la imposibilidad de una construcción elemental de la cuadratura, puede hacerse directamente. No obstante puede apoyarse en el corolario de Lindemann y el teorema de Hermite.

El corolario de Lindemann (17) dice:

Si el número e verifica una ecuación de la forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + \ldots + a^a{}_n x^n = 0$$ ó sea sí

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \ldots + a_n e^n = 0$$, es imposible que todos los coeficientes y todos los exponentes sean algebraicos.

Partiendo de las series de sen. ix y cos. ix es fácil llegar a la clásica expresión:

$$e^{ix} - 1 = 0$$ la cual se verifiicará para $x = \pi$ y siendo su coeficiente 1 un número algebraico, no puede serlo π por el corolario citado.

CARLOS DIEULEFAIT

Prof. Supl. de Geomt. analít. y Cálculo infin. (I) de la Universidad del Litoral

(16) Cfr. E. Maillet: "Introduction a la theorie des nombres trascendents".

(17) Klein: loc. cit.