

PÓRTICO BI-ARTICULADO

(Cargas verticales)

DEDUCCION DE FORMULAS DE CALCULOS GENERALES Y PARTICULARES. — CASOS DE MOMENTOS DE INERCIA VARIABLES Y CONSTANTES EN LOS PIES DERECHOS Y DINTEL. — APLICACIONES. — COMPARACION Y EXACTITUD DE RESULTADOS.

POR EL

Ing. Luis Sobrino Aranda

PORTICO BI-ARTICULADO

I). MOMENTOS DE INERCIA CUALESQUIERA PERO SIMETRICOS

1°.) GENERALIDADES. — Presentamos a continuación un procedimiento de cálculo del pórtico bi-articulado aplicable a los casos más generales de cargas y variaciones de los momentos de inercia, que tiene la ventaja de permitir de una manera objetiva darse cuenta exacta de su deformación.

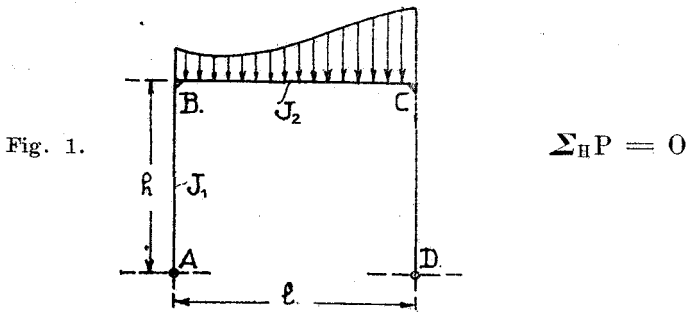
Deduciremos las fórmulas de cálculo suponiendo que las variaciones del momento de inercia sean cualesquiera pero simétricos, simplificándolas luego para el caso corriente en que se admite su constancia a lo largo del dintel y de ambos pies derechos.

2°.) INDETERMINACION ESTÁTICA. — Por sus condiciones de apoyo es una vez estáticamente indeterminado, pues sus vínculos de apoyo son dos articulaciones fijas que implican cuatro incógnitas. Como las leyes de equilibrio permiten ligarlas mediante tres ecuaciones, es necesario establecer la restante.

3°.) RIGIDEZ DE LOS ÁNGULOS. — Esta cuarta expresión se deduce de la indeformabilidad de los ángulos A y B que se

suponen rígidos, o en otros términos que mantienen sus valores iniciales de 90°. aun después de la deformación de la estructura debida a cualquier sollicitación.

4.) IGUALDAD DE AMBOS EMPUJES. — Para cargas verticales únicamente, la condición de equilibrio estático:



como no hay cargas exteriores con componentes horizontales, exige que:

$$\begin{aligned} H_d - H_i &= 0 \\ H_d &= -H_i \end{aligned} \quad (1)$$

es decir que ambos empujes son de iguales valores absolutos pero de signos contrarios. Luego veremos como los determinamos.

5.) PROCEDIMIENTO GENERAL DE CALCULO. — Cortemos el pórtico en las uniones del dintel con ambos piés derechos. Habremos roto así la continuidad de la estructura. Para restablecerla y colocarla a pesar de los cortes en sus condiciones de origen debemos aplicar en los extremos momentos "M" y "M₁" cuyos sentidos aún no podemos determinar.

El diagrama de momentos, esfuerzos de cortes, etc. del conjunto será la suma de los que respectivamente correspondan a cada una de las piezas AB, BC y CD bajo la acción conjunta de la carga exterior y de los momentos "M" y "M₁" actuando en los extremos, cuando éstos tengan por valores los que sean solución del problema. Este consiste precisamente en la determinación de sus sentidos y valores absolutos.

6°.) DETERMINACION DE LOS ANGULOS α Y β . — Son los extremos originados en el dintel por la carga exterior. Sus va-

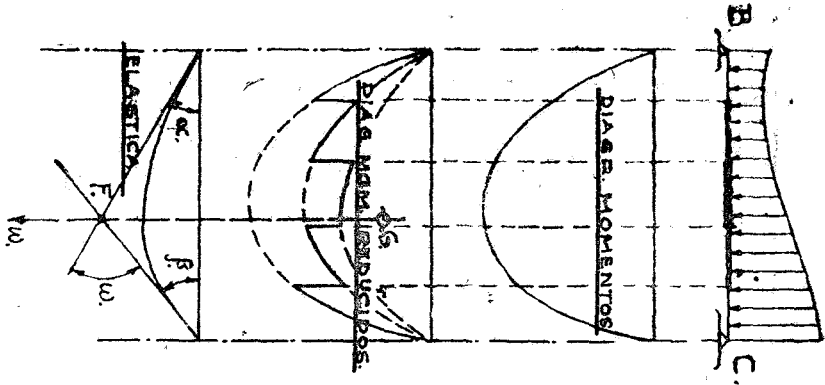


Fig. 2.

lores como se sabe son:

$$\alpha = \frac{n}{l} \cdot \int_0^l \frac{M. dx}{E. Idintel} \quad (2)$$

$$\beta = \frac{\xi}{l} \cdot \int_0^l \frac{M. dx}{E. Idintel}$$

Siendo η y β las distancias del centro de gravedad del diagrama de momentos reducidos a las verticales izquierda y derecha de los extremos B y C del dintel. La relación funicular entre la elástica y este diagrama exige que las rectas $D'F$ y $C'F$ que determinan a α y a β se corten en la vertical de G.

De esta manera los ángulos A y B primitivamente rectos valen ahora:

$$\text{áng. A: } (90^\circ - \alpha)$$

$$\text{áng. B: } (90^\circ - \beta)$$

7°.) SENTIDO DE LOS MOMENTOS "M" Y "M₁". — Como los ángulos A y B han disminuído sus valores, para restituirlos a sus 90°. iniciales, deben los momentos "M" y "M₁" tener forzosamente los sentidos indicados en la figura N°. , única for-

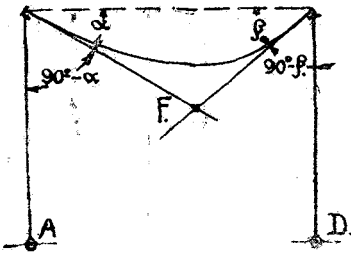


Fig. 3.

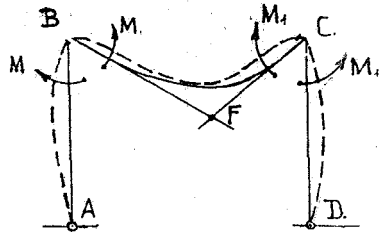


Fig. 4.

ma en que las deformaciones angulares que originan puedan tender a la solución del problema.

8°.) SENTIDO DE LOS EMPUJES "H". — Sobre la pieza AB no existen más causas exteriores que el empuje H_i cuyo sentido desconocemos y el momento "M" del que lo hemos fijado recientemente.

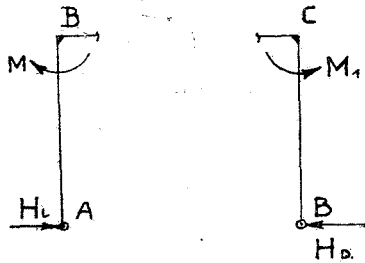


Fig. 5.

El equilibrio de ésta exige que el sentido de "H" sea el indicado en la figura.

Por idéntica consideración para CD, se deduce el sentido de H_d, que podríamos haber fijado también teniendo en cuenta por la (1) que debe ser igual y contrario al de H_i.

9°.) IGUALDAD DE “M” Y “M₁”. — De las acciones que obran sobre AB se deduce que el diagrama de momentos es trian-

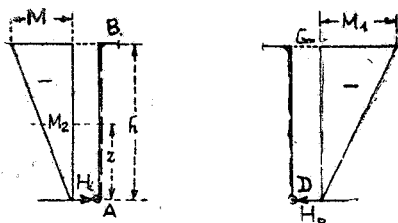


Fig. 6.

gular, que:

$$M = H \cdot h$$

y que a una altura cualquiera “z” éste vale:

$$Mz = H \cdot z$$

Si las fibras tendidas corresponden al costado indicado con rayas entrecortadas, debemos escribir:

$$-M = H \cdot h$$

Iguals observaciones para CD, teniendo en cuenta la posición de la raya entrecortada, se obtiene:

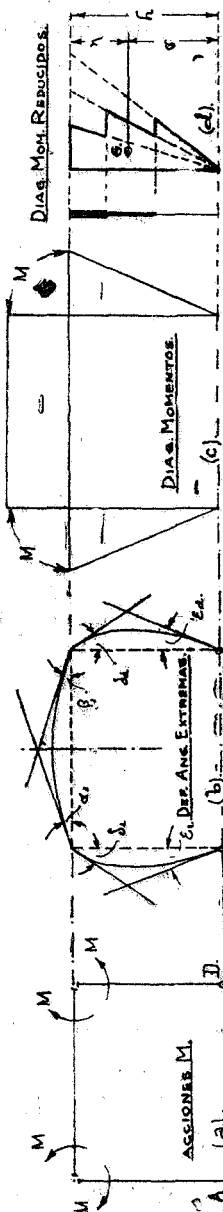
$$-M_1 = H \cdot h$$

o sea en consecuencia que:

$$M = M_1 \tag{3}$$

10°.) DEFORMACIONES ANGULARES EXTREMAS ORIGINADAS POR “M”. — Por de pronto siendo $M = M_1$, y la estructura simétrica, estas deformaciones serán también simétricas (fig. N° 7, croquis b).

El diagrama de momentos será semejante al que se ha representado en la figura N° 7 croquis e, y el de reducidos del pié derecho al indicado en el d de la misma figura. Se deduce:



$$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{2} \frac{\int_0^l M^m \cdot dx}{E \cdot I_{\text{dintel}}}$$

$$\delta_i = \delta_d = \frac{\sigma}{h} \frac{\int_0^h M^m \cdot dh}{E \cdot I_p \cdot \text{derecho}}$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_d = \frac{\pi}{h} \frac{\int_0^h M^m \cdot dh}{E \cdot I_p \cdot \text{derecho}}$$

11). RESTITUCION DE LA RIGIDEZ DE LOS ANGULOS A y B. — La rigidez de los ángulos A y B, que como hemos visto al principio deben tener los mismos valores iniciales después de una deformación originada por cualquier causa exterior, siendo “M” la solución del problema, exigirá que:

$$\text{áng. } \hat{A} : 90^\circ - \alpha + \alpha_1 + \delta_i = 90^\circ$$

$$\text{áng. } \hat{B} : 90^\circ - \beta + \beta_1 + \delta_d = 90^\circ$$

de donde:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 + \delta_i &= \alpha \\ \beta_1 + \delta_d &= \beta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

que no puede realizarse simultáneamente para iguales valores de “M” por ser α y β diferentes (ecuaciones 2), y sin embargo ser $(\alpha_1 + \delta_i) = (\beta_1 + \delta_d)$ de acuerdo al grupo de ecuaciones 4.

12) DESPLAZAMIENTO DEL DINTEL. — Para conciliar las consecuencias deducidas de la aplicación de las leyes de estática $\sum_H P = 0$ de donde se obtuvo $M = M_1$, con las ecuaciones de deformación angulares nú-

meros 2 y 4; ya que todas las conclusiones a que hemos llegado son ciertas; debe recurrirse a una traslación del dintel "a" que introduzca un ángulo suplementario $\frac{a}{h}$ tal que permita substituir las ecuaciones 5. (fig. 8).

Estas son ahora por consiguiente las siguientes:

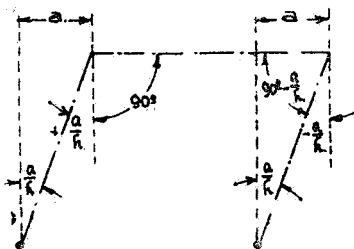
a) condición de rigidez del ángulo \hat{A} :

$$90^\circ - \alpha + \alpha_1 + \delta_i + \frac{a}{h} = 90^\circ$$

b) idem del \hat{B} :

$$90^\circ - \beta + \beta_1 + \delta_d - \frac{a}{h} = 90^\circ$$

Fig. 8.



ya que el ángulo suplementario a/h tiende a aumentar el valor del \hat{A} y a disminuir el del \hat{B} .

13) DEDUCCION DE LAS EXPRESIONES DE CALCULO.

— Si simplificamos y sumamos estas condiciones de rigidez obtenemos la siguiente que resume la condición de que los ángulos A y B permanezcan simultáneamente indeformables:

$$\alpha_1 + \delta_i + \frac{a}{h} = \alpha$$

$$\beta_1 + \delta_d - \frac{a}{h} = \beta$$

(6)

de donde:

$$a_1 + \beta_1 + \delta_1 + \delta_a = a + \beta$$

ecuación que buscábamos para completar según vimos al principio, el número de 4 necesarias.

Reemplazando los valores ya encontrados de estas deformaciones angulares, tenemos:

$$\int_0^1 \frac{M^m \cdot dx}{E \cdot \text{Idint}} + \frac{2 \cdot \sigma}{h} \int_0^h \frac{M^m \cdot dh}{E \cdot \text{Ip} \cdot \text{der.}} = \int_0^1 \frac{M^c \cdot dx}{E \cdot \text{Idint}} \left[\frac{\xi}{1} + \frac{\eta}{1} \right] = \int_0^1 \frac{M^c \cdot dx}{E \cdot \text{Idint}} \quad (7)$$

pues;

$$\frac{\xi}{1} + \frac{\eta}{1} = 1$$

de la (7):

$$-h \cdot \int_0^1 \frac{M^m \cdot dx}{E \cdot \text{Idint}} - 2 \cdot \sigma \cdot \int_0^h \frac{M^m \cdot dh}{E \cdot \text{Ip} \cdot \text{der.}} + h \cdot \int_0^1 \frac{M^c \cdot dx}{E \cdot \text{Idint}} = 0 \quad (8)$$

que expresa que el momento estático del diagrama de momentos reducidos con respecto al eje que pasa por las dos articulaciones es nulo, y permite calcular el valor de "M" para cualquier carga.

14) DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES. — Sumando los diagramas representados en las figuras números 2 y 7 co-

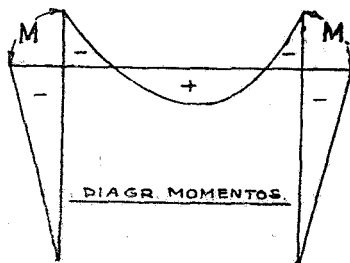


Fig. 9.

respondientes a los originados en el dintel por la carga exterior, y en toda la estructura (dintel y piés derechos separados) por los momentos "M", se obtiene el total que puede verse en la figura N° 9.

15) CALCULO DE "A." — Si en vez de sumar las igualdades (6) las restamos:

$$a_1 - \beta_1 + \delta_1 - \delta_d + \frac{2 \cdot a}{h} = a - \beta$$

como:

$$\delta_1 = \delta_d \quad \text{y} \quad a_1 = \beta_1$$

queda:

$$(a - \beta) = \frac{2 \cdot a}{h}$$

reemplazando a y β por sus valores conocidos:

$$\frac{\eta}{1} \cdot \int_0^1 \frac{M \cdot dx}{E \cdot Idint.} - \frac{\xi}{1} \int_0^1 \frac{M \cdot dx}{E \cdot Idint.} = \frac{2 \cdot a}{h}$$

de donde finalmente:

$$a = \frac{2 \cdot h}{1} \cdot (\eta - \xi) \cdot \int_0^1 \frac{M \cdot dx}{E \cdot Idint.} \quad (9)$$

expresión que permite calcular "a".

16) DETERMINACION DE LA DEFORMACION TOTAL. — Calculando "a" por la (9) pueden trazarse las tangentes extremas calculándose las deformaciones angulares ya vistas, según in-

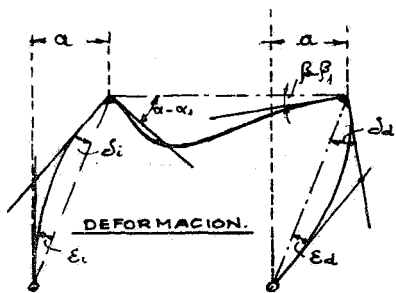


Fig. 10.

dica la figura N° 10 y determinarse la elástica de cada pié derecho o del dintel en la forma conocida.

Si la carga que actúa es simétrica, como $(\eta - \xi) = 0$, se anula en consecuencia el valor de "a". Además si $(\eta - \xi)$ es negativo, el desplazamiento de "a" es hacia la derecha, y a la izquierda en caso contrario.

II). I CONSTANTE EN EL DINTEL Y EN EL PIE DERECHO

17) DEDUCCION DE "M". — Si I tiene valor constante en el dintel e igual a I_2 , y en ambos pies derechos a I_1 , las expresiones (8) y (9) se simplifican de la siguiente manera:

$$\frac{h}{E \cdot I_2} \text{ Sup. mom} - \frac{h}{E \cdot I_2} \cdot M \cdot 1 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot h \cdot \frac{M \cdot h}{2 \cdot E \cdot I_1} = 0$$

de donde:

$$\frac{\text{Sup. mom}}{1} = M \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{1}$$

denominando:

$$\frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{1} = K$$

queda finalmente:

$$M = - \frac{3 \cdot \text{Sup. mom.}}{1 \cdot (3 + 2 \cdot k)} \quad (10)$$

18) DEDUCCION DE "A". — Procediendo análogamente se obtiene:

$$a = (\eta - \xi) \frac{h}{2 \cdot 1} \cdot \int_0^1 \frac{M \cdot dx}{E \cdot I_2} = (\eta - \xi) : \frac{h}{2 \cdot 1} \cdot \frac{\text{Sup mom}}{E \cdot I_2} \quad (11)$$

Demás está decir que el valor de la superficie de momentos corresponde al diagrama originado en el dintel, supuesto simplemente apoyado, por la carga exterior. Estos valores pueden tabularse empleándose las expresiones (10) y (11) con carácter general.

19) REACCIONES. — Podemos ahora escribir:

$$H = \frac{M}{h} = \frac{3 \cdot \text{Sup mom}}{1 \cdot h \cdot (3 - 2 \cdot k)}$$

$$V_a = \frac{Q \cdot n}{1} \quad V_b = \frac{Q \cdot m}{1}$$

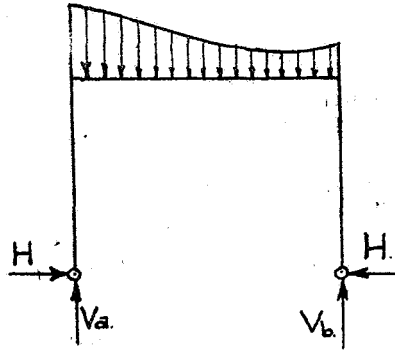


Fig. 11.

20) VALOR DE "a" MAXIMO. — Puede investigarse qué posición debe ocupar una carga "P" aislada, para que el despla-

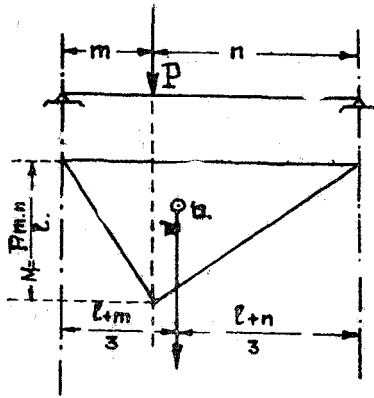


Fig. 12.

zamiento "a" sea máximo. De la figura N° 12:

$$\text{Sup mom} = \frac{P \cdot m \cdot n}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{P \cdot m \cdot n}{2}$$

Convirtiéndose la (11) en:

$$a = \frac{(n - m)}{3} \cdot \frac{h}{1} \cdot \frac{P}{4 \cdot E \cdot I_2} \cdot m \cdot n$$

El valor de "a" será máximo cuando:

$$\frac{da}{dm} = 0$$

como:

$$n = 1 - m$$

la anterior puede escribirse así:

$$a = \frac{P}{12 \cdot E \cdot I_2} \cdot \frac{h}{1} \cdot (m \cdot l^2 - 3 \cdot m^2 \cdot l + 2 \cdot m^3)$$

debiendo ser por lo tanto:

$$\frac{da}{dm} = 0 = \frac{P}{12 \cdot E \cdot I_2} \cdot \frac{h}{1} \cdot (l^2 - 3 \cdot l \cdot m + 6 \cdot m^2)$$

de donde:

$$l^2 - 3 \cdot l \cdot m + 6 \cdot m^2 = 0$$

finalmente queda:

$$\frac{m}{l} = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{\frac{1}{3}} \right] = \begin{cases} 0,789 \\ 0,211 \end{cases}$$

Posiciones simétricas a la derecha y a la izquierda del eje de simetría de la estructura, según actúe la carga.

21). TABLA PARA EL CALCULO DE LAS SUPERFICIES DE MOMENTOS

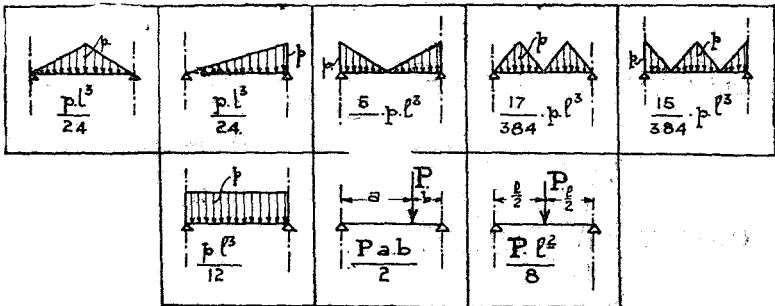


Fig. 13.

22). DEGENERACION DEL PORTIGO. — Cuando la carga es simétrica, el desplazamiento “a” es nulo y las tangentes a la elástica en los extremos del dintel se cortan sobre el eje de simetría de la figura. Si el momento de inercia de ambos piés derechos aumenta, como consecuencia de la rigidez de los ángulos, estas tangentes se irán levantando sucesivamente, concordante con este aumento, acercándose al eje primitivo del dintel. Cuando I sea infinito, dichas tangentes serán horizontales, degenerando el dintel en la viga bi-empotrada.

Si $I_1 = \infty$ resulta:

$$k = \frac{I_2 h}{I_1 l} = 0$$

La expresión “8” se reduce a:

$$-\int_0^l \frac{M^m \cdot dx}{E \cdot I_{dintel}} + \int_0^l \frac{M^c \cdot dx}{E \cdot I_{dintel}} = 0$$

Que indica el valor nulo de la superficie de momentos reducidos y permite calcular “M”.

La simplificada N°. 10 se transforma también en:

$$M = \frac{\text{Sup. mom}}{1}$$

que permite calcular M y escrita de la siguiente manera:

$$M \cdot 1 - \text{Sup. mom} = 0$$

expresa también el valor nulo de la superficie del diagrama de momentos flectores.

Si la carga es simétrica, existe un desplazamiento “a” del dintel que obliga a sus tangentes extremas a permanecer perpendiculares a las direcciones AB' y CD de ambos piés derechos, a causa de la indeformabilidad de éstos, a sus momentos de inercia infinitos y a la rigidez de los ángulos.

Por consiguiente le degeneración de esta estructura en caso de asimetría, no conduce como en el anterior a la viga bi-empotrada.

INTERPRETACION DE RESULTADOS

La comparación de los resultados obtenidos verificando una estructura mediante el empleo de las fórmulas 8 y 10 es interesante. En general se admite que son aproximadamente iguales y que ambos pueden usarse indistintamente por cuanto el error a que conduce el uso expeditivo de la 10 es insignificante. Sin embargo las diferencias que resultan no son tan inapreciables como tendremos ocasión de ver en los ejemplos que se desarrollan a continuación y en los que además se podrá seguir el proceso para su empleo.

La expresión 8 permite tener en cuenta el espesor de las secciones y la variación del momento de inercia en toda la estructura, en cambio la número 10 supone espesores de espesores nulos y momentos de inercia constantes a lo largo del dintel y de los pies derechos.

Ambas suposiciones dan margen a errores cuya importancia creemos necesario poner de manifiesto investigando la influencia de los chanfles, los espesores reales de la construcción, etc. con el objeto de sacar provecho de la comparación de estos resultados con los que se obtendrían empleando la fórmula simplificada, permitiendo como consecuencia final y útil aproximar los resultados obtenidos fácilmente con ésta en otros ejemplos análogos a los exactos.

La serie de los ejemplos que permitirán, sistematizados en su conjunto, sacar las conclusiones indicadas anteriormente son las siguientes:

- N° 1. — Pórtico representado en la figura N° 14. Se calcula totalmente mediante la expresión N° 8, teniendo en cuenta el espesor de las piezas y sus verdaderos momentos de inercia. El acartelamiento de los pies derechos es moderado.
- N° 2 y N° 3. — El mismo ejemplo pero el N° 2 con acartelamiento mayor que en el caso anterior y el N° 3 menor.
- N° 4. — Caso idéntico, pero con pies derechos sin acartelamientos, conservando como sección constante de éstos la superior de los casos 2 y 3 ó sea de 36 por 48 cm.

N° 5. — Igual al anterior pero sin chanfle.

N° 6. — Como el anterior aunque calculado mediante la fórmula N° 10.

La comparación de los casos 1 a 4 permite hacer notar la influencia del sesgo de los piés derechos, entre los 4 y 5 la del chanfle, y finalmente comparando los resultados obtenidos en los casos 5 y 6 del espesor de las secciones.

Los casos 1 a 6 se desarrollarán con detenimiento. Los demás brevemente a causa de que su objetivo didáctico cumplido en los anteriores se restringe a la comparación de resultados.

EJEMPLO N° 1. — METODO EXACTO. — Sea el pórtico representado en la figura N° 14. Se desea conocer el diagrama de

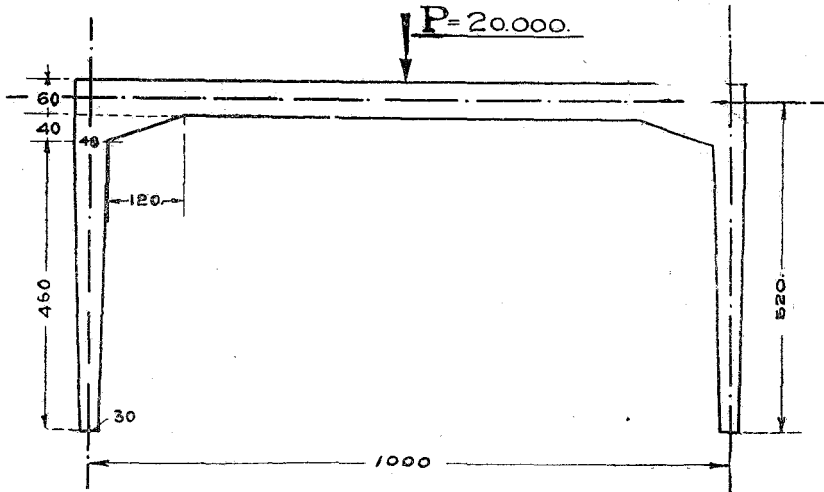


Fig. 14

momentos originados por una carga de 20.000 kgr. que actúe en el centro del dintel. Se debe tener en cuenta el sesgo de los pilares y el acartelamiento del dintel.

Los resultados del cálculo de los momentos de inercia se indican en la figura N° 15.

Si se considera a "E" constante la expresión 8 se reduce a la siguiente:

$$-h \cdot \int_0^1 \frac{M^m \cdot dx}{I_{dint}} - 2 \cdot \sigma \cdot \int_0^h \frac{M^m \cdot dx}{I \text{ pié. dr.}} + h \cdot \int_0^1 \frac{M^e \cdot dx}{I_{dint}} = 0 \quad (9)$$

El primer término expresa el valor de la superficie del diagrama de momentos reducidos originados en el dintel por "M"; multiplicado por h, o en otros términos su momento estático con respecto al eje que une ambas articulaciones.

El segundo, siendo la distancia del centro de gravedad del diagrama de momentos reducidos originados en el pié derecho por el momento "M", respecto al mismo eje; representa el momento estático de la superficie de momentos reducidos originados por "M" en ambos piés derechos con relación al eje que une las dos articulaciones.

El tercero expreso expresa el momento estático de la superficie de momentos reducidos con respecto al mismo eje, provocados en el dintel por la carga exterior, suponiéndolo aislado.

En resumen la ecuación N°. 9 indica que el valor de "M" es aquel que anule el momento estático del diagrama total de momentos reducidos con respecto al eje ya mencionado.

Comenzaremos a calcular el segundo término: Para ello de-

bemos calcular por separado los valores de $\int_0^h \frac{M^m \cdot dx}{I \text{ pié. dr.}}$ y de σ

Dividimos el pié derecho en trozos de pequeña altura, calculando sus respectivos momentos de inercia, como se indica en la figura N°. 15.

En el cuadro siguiente se **calculan los valores** de $\frac{M'}{l}$, habiéndose introducido el:

$$M' = 1.000.000 \cdot M$$

con el objeto de simplificar las operaciones aritméticas.

CUADRO N° 1.

Sección	z	I	$\frac{M'}{I} \cdot \frac{z}{h}$	
			$\frac{M'}{I}$	$\frac{z}{h}$
I	1.00	117.912	$\frac{M'}{117.912}$	$\frac{1,00}{5,20} = 1,630 \text{ M}'$
II	2.00	164.616	$\frac{M'}{164.616}$	$\frac{2,00}{5,20} = 2,336 \text{ M}'$
III	3.00	222.264	$\frac{M'}{222.264}$	$\frac{3,00}{5,20} = 2,594 \text{ M}'$
IV	4.00	292.008	$\frac{M'}{292.008}$	$\frac{4,00}{5,20} = 2,632 \text{ M}'$
V	4,50	331.776	$\frac{M'}{331.776}$	$\frac{4,50}{5,20} = 2,607 \text{ M}'$
VI	4,70	3.779.136	$\frac{M'}{3.779.136}$	$\frac{4,70}{5,20} = 0,2386 \text{ M}'$
VII	4,90	14.324.896	$\frac{M'}{14.324.896}$	$\frac{4,90}{5,20} = 0,6658 \text{ M}'$

Las superficies reducidas elementales son:

$$F_1 = \frac{1,63}{2} \cdot 100 = 81,56 \text{ M'}$$

$$F_2 = \frac{1,630 - 2,336}{2} \cdot 100 = 198,30 \text{ M'}$$

$$F_3 = \frac{2,336 - 2,594}{2} \cdot 100 = 246,50 \text{ M'}$$

$$F_4 = \frac{2,594 - 2,632}{2} \cdot 100 = 261,300 \text{ M'}$$

$$F_5 = \frac{2,632 - 2,607}{2} \cdot 100 = 130,975 \text{ M'}$$

$$F_6 = \frac{2,607 - 0,2386}{2} \cdot 20 = 28,456 \text{ M'}$$

$$F_7 = \frac{0,2386 - 0,0658}{2} \cdot 20 = 3,044 \text{ M'}$$

$$\frac{\sum_{0}^1 M'_m \Delta \times}{I} = 950,135 \text{ M'}$$

El valor de σ lo determinaremos mediante el polígono de sectores dibujado en la figura N° 15 y con ayuda del funicular correspondiente. De dicha figura se obtiene:

$$\sigma = 2,70 \text{ mts.}$$

Por lo tanto el segundo término vale:

$$950,135 \text{ M' } \cdot 270 = 256.536 \text{ M'}$$

El cálculo del primer y tercer término puede seguirse fácilmente en el cuadro siguiente:

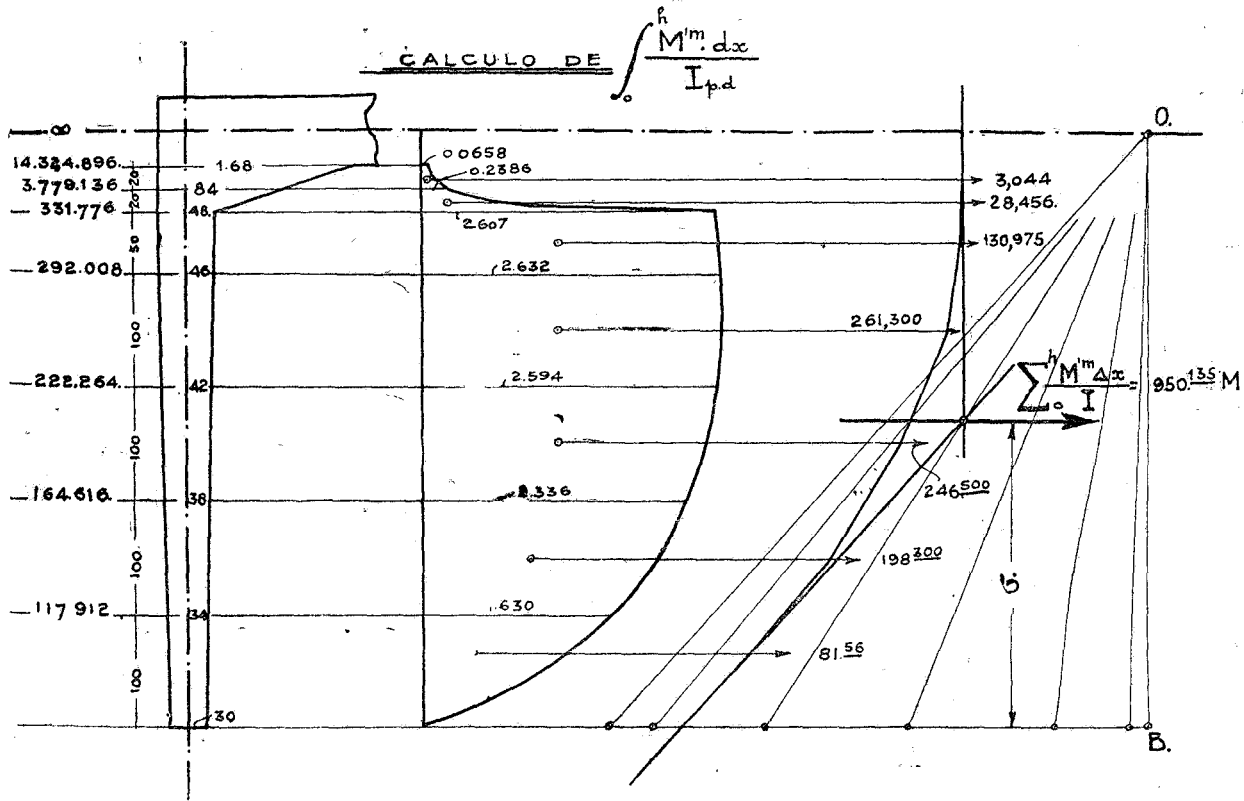


Fig. 15

CUADRO N° 2.

Sección I		1er. término M'/I	3er. término	
			Mc (kgcm)	Mc/I
I	648.000	1,543 M'	5.000.000	7,716
II	648.000	1,543 M'	1.440.000	2,222
III	1.536.000	0,651 M'	840.000	0,5402
IV	3.000.000	0,333 M'	240.000	0,080

Las áreas reducidas parciales valen:

$$F'_1 = \frac{0,333 + 0,651}{2} \cdot 60 = 29,529 \text{ M'}$$

$$F'_2 = \frac{0,651 + 1,543}{2} \cdot 60 = 65,82 \text{ M'}$$

$$F'_3 = 1,543 \cdot 356 = 549,308 \text{ M'}$$

$$\sum_0 \frac{M'^m \cdot \Delta x}{I} = 644,657 \text{ M'}$$

y su respectivo momento estático:

$$520 \cdot 644,657 \text{ M'} = 335.222 \text{ M'}$$

El tercer término lo determinaremos de la siguiente manera:

$$F''_1 = \frac{0,080 + 0,5402 \cdot 60}{2} = 18,606$$

$$F''_2 = \frac{0,5402 + 2,222}{2} \cdot 60 = 82,866$$

$$F''_3 = \frac{2,222 + 7,716}{2} \cdot 356 = 1768,964$$

$$\sum_0 \frac{1}{2} \frac{M^c \cdot \Delta x}{I_d} = 1870,436$$

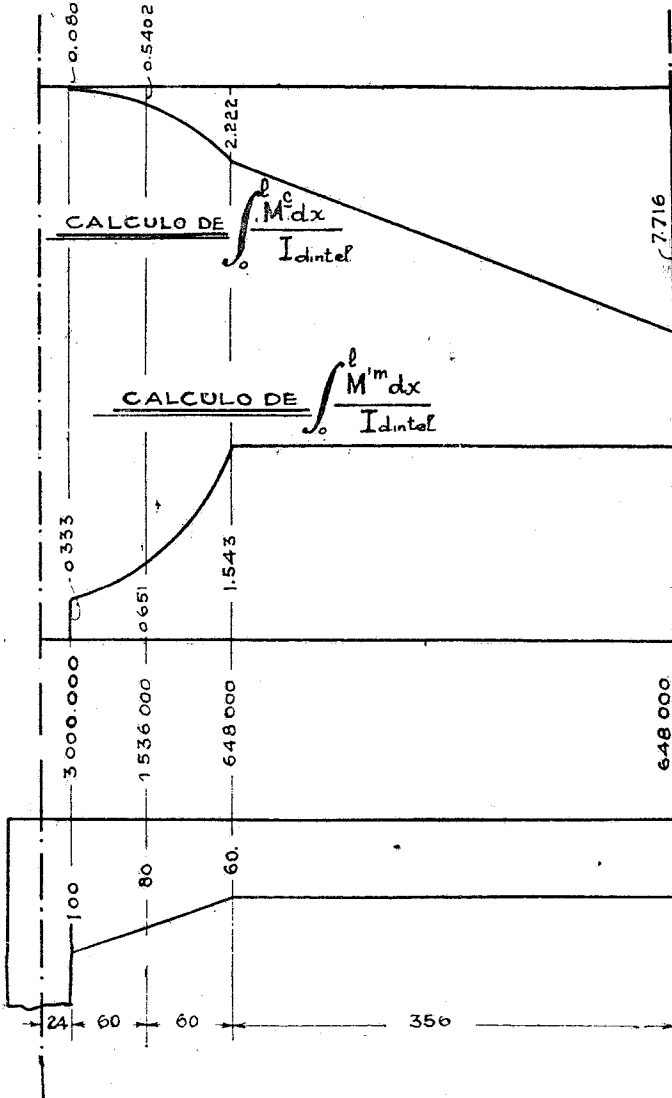


Fig. 16.

y su momento estático con respecto al eje que pasa por ambas articulaciones:

$$1.870,436 \cdot 520 = 972.626$$

En consecuencia la expresión (9) queda reducida a:

$$- 256.536 M' - 335.222 M' - 972.626 = 0 \quad (11)$$

de aquí:

$$M' = 1,6549$$

luego:

$$M = 1.654.900 \text{ kgcm.} = 16.430 \text{ kgm.}$$

Las reacciones verticales y horizontales son:

$$H = \frac{16.430}{5,20} = 3.159 \text{ Kg.}$$

$$V_a = V_b = 10.000 \text{ kg.}$$

EJEMPLO N° 2. — Caso igual al anterior con excepción de los pies derechos que en su extremidad inferior tienen una sección de 36 cms. por 20 cms.

CUADRO N° 3.

Sec	h	dim. tr.	I	M'/I	Tronco	$\frac{\Delta x \cdot M'}{I}$	σ'	$\frac{\Delta x \cdot M'}{I}$	σ'
						I		I	
0	0	dim. tr	24.000	0					
I	0,5	36 × 23	36.501	263,42	1	65,85	33,63	2.194,78	
II	1	36 × 26	52.728	364,71	2	157,03	76,32	11.984,53	
III	2	36 × 32	98.304	391,25	3	377,88	150,82	45.302,99	
IV	3	36 × 38	164.616	350,465	4	370,85	248,93	92.315,69	
V	4	36 × 44	255.552	301,007	5	325,73	348,72	113.588,56	
VI	4,5	36 × 48	331.776	260,834	6	280,92	424,79	119.219,64	
VII	4,7	36 × 108	3.779.136	23,916	7	28,47	458,26	13.048,49	
VIII	4,9	36 × 168	14.224.896	6,624	8	3,054	478,09	1.460,08	

$$\sigma \cdot \sum_0^h \frac{M' \cdot \Delta x}{I} = 399.114,76 M'$$

La expresión (11) se transforma en la siguiente dado que los términos correspondientes al dintel sufren variaciones:

$$- 399.114,76 M' - 335.222 M' + 972.626 = 0$$

de donde:

$$M' = 1,3245$$

$$o: \quad M = 13.245 \text{ kgm.}$$

EJEMPLO N° 3. — Como el anterior pero ambos extremos inferiores de ambos piés derechos tienen secciones 39 por 36 conservando la dimensión del ejemplo anterior en los extremos superiores.

CUADRO N° 4

Sec	h	dim. tr.	I	M'/I	$\frac{\Delta x \cdot M'}{I}$	σ'	$\frac{\Delta x \cdot M'}{I} \cdot \sigma'$
0	0	36 × 39	177.957	0,00			
I	1	36 × 41	206.763	93,008 M' ¹	46,504 M'	66,66	3.099,956 M'
II	2	36 × 43	238.521	161,249 M'	127,128 M'	154,46	19.636,190 M'
III	3	36 × 45	273.375	211,077 M'	136.143 M'	252,19	34.333,903 M'
IV	4	36 × 47	311.469	246,968 M'	229.002 M'	351,39	80.469,012 M'
V	4,5	36 × 48	331.776	260,833 M'	126,950 M'	425,20	53.959,140 M'
VI	4,7	36 × 108	3.779.136	23,916 M'	28.474 M'	458,26	13.048,495 M'
VII	4,9	36 × 168	14.224.896	6,624 M'	3,054 M'	478,09	1.460,086 M'

$$\sigma \cdot \sum_0^h \frac{\Delta x \cdot M'}{I} = 206.026,782 M'$$

Luego:

$$206.026,782 M' - 335.222 M' + 972.626 = 0$$

De donde finalmente:

$$M = 17.980 \text{ Kgrm.}$$

EJEMPLO N° 4. — Si el pié derecho no tiene ácartelamiento y su sección es constante de 36×48 :

CUADRO N° 5.

Sec	h	dim. tr.	I	M'/I	$\frac{\Delta x \cdot M'}{I}$	σ'	$\frac{\Delta x \cdot M'}{I} \sigma'$
0	0	36×48	331.776	0			
I	450	36×48	331.776	260,833 M'	568,874 M'	300	176.062 M'
II	470	36×108	3.779.136	23,916 M'	28,474 M'	458,26	13.048,495 M'
III	490	36×168	14.224.896	6,624 M'	3,054 M'	478,09	1.460,086 M'

$$\sigma \cdot \sum_0^h \frac{\Delta x \cdot M'}{I} = 190.570,581 \text{ M'}$$

Luego:

$$190.570,581 \text{ M'} - 332.222 \text{ M' } + 972.626 = 0$$

De donde:

$$M = 18.495 \text{ kgms.}$$

EJEMPLO N° 5. — Los piés derechos son de espesor constante (36×48) como en el caso anterior, pero se suprimen los chanfles del dintel (fig. 17).

Siendo las superficies de momentos reducidos las indicadas en la figura ya mencionada, sus momentos estáticos con respecto al eje AB son:

$$1.924,567 \times 5,20 - 734,567 \text{ M' } \times 5,20 - 695,841 \text{ M' } \times 3,2666 = 0$$

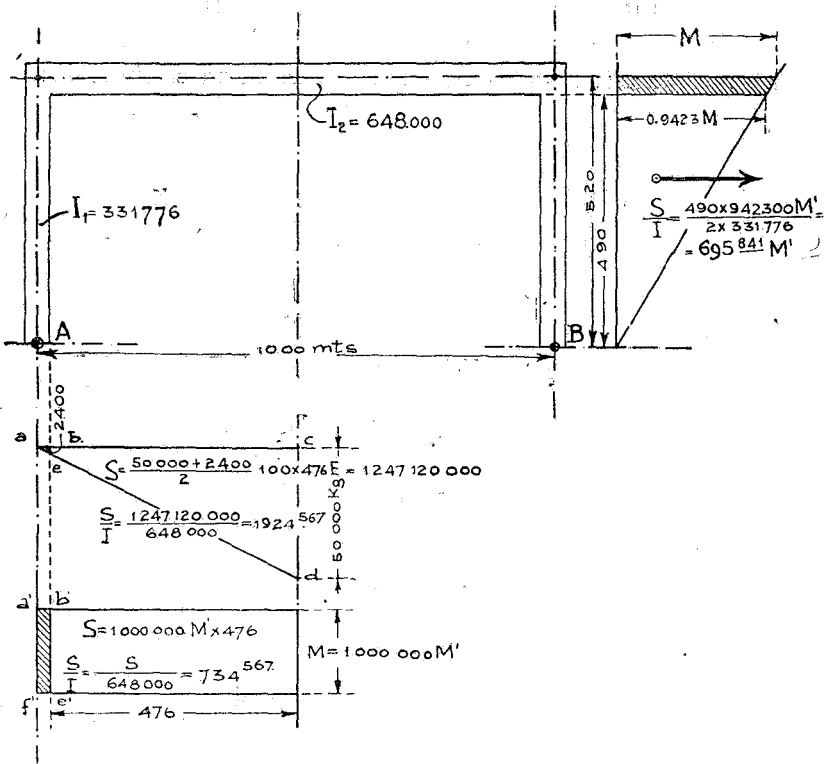


Fig. 17.

Luego: $M' = 1,6418$
 O sea: $M = 16.418 \text{ Kgm.}$

EJEMPLO N° 6. — Si se calcula mediante la fórmula N° 10, suponiendo momentos de inercia constantes en el pié derecho (sección de 36×48) y en dintel (36×60), se tiene:

$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{I} = \frac{648.000}{331.776} \cdot \frac{520}{1000} = 1,015$$

reemplazando:

$$M = \frac{3}{10} \cdot \frac{\text{Sup. mom}}{(3 - 2 \times 1,015)} = \frac{750.000}{50,30} = 14.910 \text{ kgm.}$$

COMPARACION DE RESULTADOS

En la figura N°. 18 se resumen los resultados obtenidos.

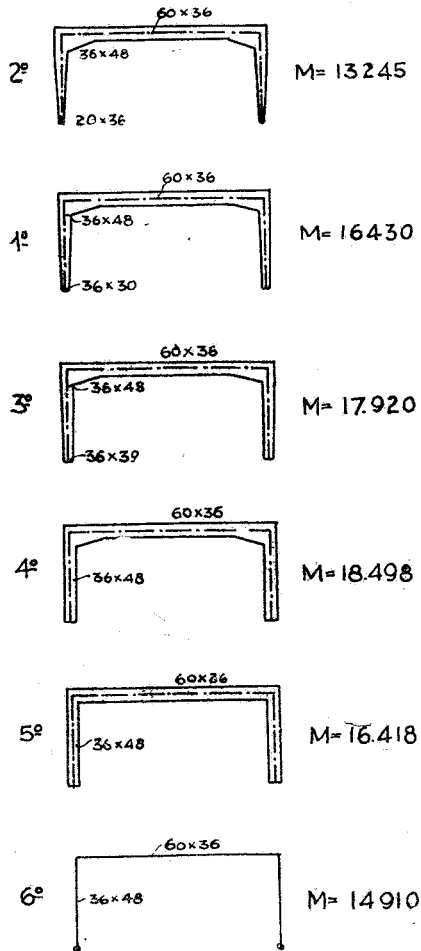


Fig. 18.

Comparando el caso 5 con el 6:

$$\frac{16.418 - 14.910}{16.418} \cdot 100 = 9,20 \%$$

se obtiene como error al no tener en cuenta el verdadero espesor de las secciones un 9,20 %.

Si la comparación la hacemos entre los casos 4 y 5 resulta:

$$\frac{18.498 - 16.418}{18.498} \cdot 100 = 11,25 \%$$

error debido a no tener en cuenta el chanfle.

La comparación entre los casos 4 y 6 permite establecer un error que se comete ordinariamente cuando se calcula un pórtico con piés derechos sin sesgo empleándose la fórmula simplificada N° 10:

$$\frac{18.498 - 14.910}{18.498} \cdot 100 = 19,35 \%$$

El error máximo que introduce la diferencia del sesgo de los piés derechos es:

$$\frac{18.498 - 13.245}{18.492} \cdot 100 = 19,35 \%$$

Además es útil comparar los resultados exactos deducidos de los casos 1 a 4 con los que se obtendrían mediante el empleo de la fórmula N° 10. Para ello, partiendo del resultado exacto, deduciremos el valor correspondiente de k . Conocidos I_2 , h , y l puede entonces determinarse I_1 . (momento de inercia de los piés derechos).

$$\text{Caso 1}^\circ: \quad 16.430 = \frac{3}{10} \cdot \frac{25.000}{(3 - 2 \cdot k)} \quad \dots \quad k \text{ 0,78}$$

luego:

$$I_1 = \frac{648.000}{0,78} - \frac{5,0}{10,00} = 433.000 \text{ cm}^4$$

Caso 2°: procediendo en la misma forma:

$$k = 1,56 \quad I_1 = 216.000 \text{ cm}^4$$

$$\text{Caso 3}^\circ: \quad k = 0,68 \quad I_1 = 572.000$$

$$\text{Caso 4}^\circ: \quad k = 0,52 \quad I_1 = 336.000$$

Puede observarse, estudiando estos resultados, que salvo el caso N°. 2 en que el sesgo de los piés derechos es exagerado (6,20 %), los momentos de inercia I_1 que hay que adoptar para calcular "M" con lo fórmula simplificada N°. 10 no corresponden, como generalmente se adopta, a la sección de altura media, sino a secciones que están dentro del chanfle (los valores de "z" resultan superiores a 4,50 pero inferiores á 4,70). Por lo tanto para sesgos del 6,00 % podemos emplear la fórmula N°. 10 adoptado como I_1 el que corresponda a la sección de altura media contando a esta última desde la articulación hasta el canto superior del dintel. Para sesgos más moderados (4,00 y 2,00 %) puede adoptarse como valor de I_1 el correspondiente a la sección superior del pié derecho. Cuando este carezca de sesgo debe adoptarse un momento de inercia doble de este último.

Teniendo en cuenta estas conclusiones podemos, mediante el empleo de la fórmula simplificada N°. 10, obtener resultados que se acerquen sin gran error a los valores exactos deducidos de la fórmula N°. 8 de dificultosa aplicación, aunque no deben adoptarse como regla general sino simplemente como guía por cuanto variarían con el tipo de carga y las dimensiones de la estructura. Cuando las secciones transversales de ésta sean desproporcionadas es necesario evidentemente verificarla por el procedimiento exacto. De lo expuesto surge claramente que debe desecharse en la práctica diaria el concepto tan divulgado de la exactitud del cálculo, ya que se emplean fórmulas simplificadas que son las que traen los manuales y textos en general.
