AÑO 18. Nº 9-10. NOVIEMBRE-DICIEMBRE 1931

FÓRMULA DE TAYLOR Y RESTOS DE LAGRANGE Y DE CAUCHI

En los libros elementales de Cálculo Infinitesimal se demuestra en forma algo deficiente el teorema de Taylor, y se da como fórmula del resto casi únicamente la de Lagrange.

El estudio que sigue tiene por objeto llegar a la fórmula de Taylor con una forma tal para el resto, que nos permita obtener a voluntad diversos restos, entre ellos los de Lagrange y de Cauchy.

Sea la función $f(x)$, que supondremos continua, lo mismo que sus n primeras derivadas, para los valores de x comprendidos entre a y b $(a < b)$.

Podemos escribir, evidentemente:

$$f(b) = f(a) + (b-a)k, \qquad (1)$$

siempre que se dé a k el valor que haga que la igualdad se verifique.

De la igualdad anterior se deduce que

$$f(b) - f(a) - (b-a)k = 0; \qquad (2)$$

y si hacemos variar a dentro de los límites establecidos, tendremos, reemplazando a por x, una función que llamaremos $F(x)$; es decir:

$$F(x) = f(b) - f(x) - (b-x)k. \qquad (3)$$

Como $F(x)$ se anula para $x = a$ (f. 2) y $x = b$, su primera derivada, por el teorema del Rolle, se anulará para un valor de x, a lo menos, comprendido entre a y b. Si x_1 es dicho valor y si derivamos la 3.ª,

$$F'(x) = -f'(x) + k,$$

se tendrá, por consiguiente, que

$$F'(x_1) = -f'(x_1) + k = 0, \qquad (4)$$

en la que $a < x_1 < b$.

De la 4.ª se deduce que

$$k = f'(x_1).$$

La 1.ª, pues, puede escribirse así:

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(x_1).$$

Es evidente que *sólo* sabemos de x_1 que está comprendido entre a y b.

Siguiendo el mismo procedimiento, podemos escribir:

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} k_1; \qquad (5)$$

de donde

$$f(b) - f(a) - (b-a) f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2} k_1 = 0; \qquad (6)$$

y por lo tanto, como anteriormente:

$$F_1(x) = f(b) - f(x) - (b-x) f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2} k_1, \qquad (7)$$

que se anula para $x = a$ (f. 6) y $x = b$.

Por el teorema de Rolle, ya mencionado, la primera derivada se anulará para un valor, por lo menos, comprendido entre a y b. Sea x_2 este valor. Derivando la 7.ª:

$$F_1'(x) = -f'(x) + f'(x) - (b-x) f''(x) + (b-x) k_1 =$$
$$= (b-x) [k_1 - f''(x)];$$

y evidentemente:

$$F_1'(x_2) = (b-x_2) [k_1 - f''(x_2)] = 0;$$

de donde

$$k_1 = f''(x_2),$$

en la que $a < x_2 < b$.

La f. 5, pues, puede escribirse así:

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(x_2).$$

Por el mismo método se tendrá, sucesivamente:

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!} k_2; \qquad (8)$$

$$F_2(x)=f(b)-f(x)-(b-x)\,f'(x)-\frac{(b-x)^2}{2}f''(x)-\frac{(b-x)^3}{3\,!}k_2\,;$$

$$F_2'(x)=-\frac{(b-x)^2}{2}f'''(x)+\frac{(b-x)^2}{2}k_2\,;$$

$$F_2'(x_3)=\frac{(b-x_3)^2}{2}\,[k_2-f'''(x_3)]=0, \tag{9}$$

en la que $a < x_3 < b$.

De la 9.ª se obtiene el valor de k_2:

$$k_2=f'''\,(x_3)\,;$$

y la 8 puede escribirse así:

$$f\,(b)=f\,(a)+(b-a)\,f'\,(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''\,(a)+\frac{(b-a)^3}{3!}f'''\,(x_3).$$

Siguiendo el mismo procedimiento hasta obtener un desarrollo de n + 1 términos, tendremos:

$$f(b)=f(a)+(b-a)\,f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(a)+\frac{(b-a)^3}{3\,!}f'''(a)+\ldots+$$

$$+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)\,!}f^{(n-1)}\,(a)+\frac{(b-a)^n}{n\,!}k_n\,; \tag{12}$$

y

$$F_n(x)=f(b)-f(x)-(b-x)\,f'(x)-\frac{(b-x)^2}{2}f''(x)-\frac{(b-x)^3}{3\,!}f'''(x)-$$

$$-\,\ldots\ldots-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)\,!}f^{(n-1)}\,(x)-\frac{(b-x)^n}{n\,!}k_n\,;$$

$$F'_n\,(x_n)=-\frac{(b-x_n)^{n-1}}{(n-1)\,!}f^{(n)}(x_n)+\frac{(b-x_n)^{n-1}}{(n-1)\,!}k_n=0,$$

siendo $a < x_n < b$.

Por consiguiente:

$$k_n=f^{(n)}\,(x_n)\,;$$

y la 10.ª puede escribirse del siguiente modo:

$$f(b) = f(a) + (b-a)\,f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3\,!} f'''(a) +$$

$$+ \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)\,!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n\,!} f^{(n)}(x_n),$$

en la que x_n es un valor de x comprendido entre a y b.

Por este medio llegaríamos a la fórmula de Taylor con el resto de Lagrange. Voy a seguir, ahora, un método similar para llegar a una fórmula en que los n primeros términos sean los mismos que hubiéramos obtenido, y cuyo resto sea más general. En efecto: la f. 10 puede escribirse así:

$$f(b) = f(a) + (b-a)\,f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3\,!} f'''(a) +$$

$$+ \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)\,!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^p}{(n-1)\,!} K, \qquad (11)$$

con tal de que se dé a K el valor que haga iguales los dos miembros. Vamos a hallar dicho valor. Siguiendo el procedimiento ya empleado, se podrá escribir:

$$\phi(x) = f(b) - f(x) - (b-x)\,f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2} f''(x) - \frac{(b-x)^3}{3\,!} f'''(x) -$$

$$- \ldots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)\,!} f^{(n-1)}(x) - \frac{(b-x)^p}{(n-1)\,!} K;$$

y por ser $\phi(a) = 0$ y $\phi(b) = 0$, un valor de x, por lo menos, comprendido entre a y b anulará a la derivada de $\phi(x)$. Si x_c es ese valor, se tendrá, pues:

$$\phi'(x_c) = -\frac{(b-x_c)^{n-1}}{(n-1\,!} f^{(n)}(x_c) + \frac{p\,(b-x_c)^{p-1}}{(n-1)\,!} K = 0;$$

de donde

$$\frac{p(b-x_c)^{p-1}}{(n-1)\,!}\left[-\frac{(b-x_c)^{n-p}}{p} f^{(n)}(x_c) + K\right] = 0;$$

y

$$K = \frac{(b-x_c)^{n-p}}{p} f^{(n)}(x_c). \qquad (12)$$

De cada expresión se deduce que a p puede atribuírsele cualquiera de los valores 1, 2, 3, ... n. No puede ser igual a 0 porque daría para K un valor infinito; y no puede dársele valor mayor que n porque $n-p$ sería negativo, y K sería irracional.

Por ser x_c mayor que a y menor que b, puede representarse su valor por la suma de a y una cantidad menor que la diferencia entre b y a, es decir que

$$x_c = a + \theta\,(b-a)\,,$$

en que θ representa un valor menor que la unidad y mayor que 0, o sea, por consiguiente, una fracción propia.

Por lo tanto, la f. 12 puede escribirse así:

$$K = \frac{\{b-[a+\theta(b-a)]\}^{n-p}}{p}\, f^{(n)}\,[a+\theta(b-a)] =$$

$$= \frac{[(b-a)-\theta\,(b-a)]^{n-p}}{p}\, f^{(n)}\,[a+\theta\,(b-a)]\,;$$

y sacando factor común $(b-a)$:

$$K = \frac{(b-a)^{n-p}\,(1-\theta)^{n-p}}{p}\, f^{(n)}\,[a+\theta\,(b-a)].$$

Sustituyendo este valor en la 11.ª:

$$f(b) = f(a) + (b-a)\,f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}\,f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3\,!}\,f'''(a) +$$

$$+\ldots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)\,!}\,f^{(n-1)}\,(a) + \frac{(b-a)^n}{p(n-1)\,!}\,(1-\theta)^{n-p}\,f^{(n)}\,[a+\theta(b-a)]$$

Si hacemos, ahora, $b-a=h$, será $b=a+h$; y

$$f(a+h) = f(a) + h\,f'(a) + \frac{h^2}{2}\,f''(a) + \frac{h^3}{3}\,f'''(a) + \ldots\ldots +$$

$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)\,!}\,f^{(n-1)}\,(a) + \frac{h^{\,n}}{p(n-1)\,!}\,(1-\theta)^{n-p}\,f^{(n)}\,(a+\theta\,h)\,;$$

y como a es cualquier valor comprendido entre los límites de continuidad de la función y de sus n primeras derivadas, se podrá escribir, indudablemente:

$$f(x+h)=f(x)+h\,f'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\ldots\ldots+$$

$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{p(n-1)!}(1-\theta)^{n-p}f^{(n)}(x+\theta\,h),\qquad(13)$$

que es la fórmula de Taylor, en la que el último sumando es el resto después de n términos. Si el resto tiende hacia cero cuando el número de términos crece indefinidamente, el segundo miembro de la f. 13 se convierte en una sucesión infinita, que es la serie de Taylor; es decir:

$$f(x+h)=f(x)+h\,f'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\ldots\ldots$$

En la f. 13, θ tiene, evidentemente, valores diferentes para los distintos valores de x y de h, pero siempre comprendidos aquéllos entre 0 y 1. Para un valor de x y otro de h, y para un cierto valor de n, también variará θ con los diversos valores que le demos a p, puesto que éstos hacen variar el valor de $\dfrac{h^n}{p(n-1)!}$ en el resto, y como éste debe conservar su valor para cada sistema de valores de x, h y n, tendrá que variar también $(1-\theta)^{n-p}f^{(n)}(x+\theta\,h)$, lo que implica la variación de θ, ya que consideramos para x, h y n valores determinados, y la variación de $(1-\theta)^{n-p}$ dependiente de p no es inversa de la de $\dfrac{h^n}{p(n-1)}$. Es indudable, por otra parte, que *lo único* que sabemos del valor de θ es que está comprendido entre 0 y 1, y ello es suficiente.

Si en la f. 13 se hace $p=n$ en el último término, se obtiene el resto de Lagrange:

$$R_L=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta\,h)\;;$$

y si se toma para p el valor 1, se obtendrá el resto de Cauchy:

$$R_C=\frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(x+\theta\,h).$$

JUAN MANUEL GARZÓN.

Córdoba, diciembre de 1931.