AÑO 18. Nº 9-10. NOVIEMBRE-DICIEMBRE 1931

CARACTERÍSTICAS DE EXPLOTACIÓN DE LAS USINAS ELECTRÓGENAS DE CÓRDOBA

Por el Ing. CARLOS A. REVOL

Los factores que intervienen en el precio de la energía eléctrica y en la explotación de usinas electrógenas destinadas a suministrar energía a centros de consumo para usos y aplicaciones variadas, son complejos, y de difícil determinación o avaluación con prioridad a la implantación de la industria. Por esto, resulta de interés, conocer o determinar para cualquier lugar o centro de consumo de energía eléctrica, su precio, y las bases y normas que rigen o caracterizan la explotación, máxime si se tiene en cuenta que en las bases y factores de explotación y financiación entran numerosas variables independientes, que en la mayoría de los casos, solamente pueden estimarse en forma empírica, si no se dispone de elementos y datos necesarios para su deducción aproximada aunque sea por ley de similitud.

Las características económicas y de explotación que se consignan referente a capital, gastos, entradas brutas anuales, producción de energía, distribución de energía medida, etc. y que sirven de base para este trabajo, obedecen a datos que las empresas propietarias de las usinas electrógenas que proveen de energía a Córdoba, suministraran en el curso de este año a una Comisión Asesora de carácter judicial.

En base de dichos datos, se han deducido características económicas generales, que comparadas con las de otras empresas que efectúen servicios análogos, pueden suministrar elementos útiles e indispensables a veces, para estudios comparativos o deducciones de carácter comercial.

Además, teniendo en cuenta, la posibilidad de aumentar el aprovechamiento actual de la energía hidráulica del Río Primero, mediante usinas hidroeléctricas posibles de construir, se estudia, en base a las características y datos suministrados y con elementos de éstos deducidos, la influencia que dicha utilización hidráulica puede tener sobre el precio actual de la energía, ya sea distribuida o en el tablero de las usinas.

USINAS ELECTRÓGENAS —

La ciudad de Córdoba, algunas poblaciones y pueblos vecinos a ella, utilizan energía eléctrica generada por usinas térmicas e hidroeléctricas que pertenecen a las empresas: Compañía Luz y Fuerza Motriz de Córdoba y a la Compañía General de Electricidad de Córdoba.

Estas empresas tienen un capital invertido en sus instalaciones de más o menos treinta y dos millones de pesos m. n. correspondiéndole a la compañía Luz y Fuerza alrededor de veinte millones de pesos m. n. y alrededor de doce millones a la Compañía General.

Las usinas electrógenas pertenecientes a la Compañía Luz y Fuerza son:

1 — Usina *Bamba* — hidroeléctrica establecida en el Río Primero, con una capacidad de máquinas instaladas de 3000 K.W.

2 — Usina *Calera* — hidroeléctrica establecida en el Río Primero, con una capacidad de máquinas instaladas de 4000 K.W.

3 — Usina *Térmica* — con motrices de vapor, y establecida en la ciudad con una capacidad de máquinas instaladas de 5800 K.W.

La capacidad total de máquinas instaladas por esta empresa es de 12800 K.W. o sean alrededor de 16000 caballos de fuerza.

Las usinas electrógenas pertenecientes a la Compañía General de Electricidad son:

1 — Usina *Molet* — hidroeléctrica establecida en el Río Primero, con una capacidad de máquinas instaladas de 1020 K.W.

2 — Usina *Térmica* — con motrices de combustión interna y de vapor, establecida en la ciudad con una capacidad de máquinas de 7480 K.W. o sean alrededor de 11550 caballos de fuerza.

La capacidad total de máquinas o plantas motrices instaladas por ambas compañías es de 21300 K.W. o sean alrededor de 29000 caballos de fuerza.

CARACTERÍSTICAS DE CARGA —

Los diagramas A y B se refieren a máximas cargas diarias observadas en épocas de frío y de calor.

En el diagrama A correspondiente a la época de frío del día 14 de junio del año 1929, la curva (2) se refiere a la carga horaria total de las usinas térmica e hidroeléctricas de la Cía. Luz y Fuerza, la curva (1) a la Cía. General de Electricidad y la curva (3) corresponde a la totalización de las cargas horarias de ambas compañías.

De esta curvas se ha deducido:

a — la curva (4) o sea la *Característica de carga* del día, de la que se desprende, que las cargas variaron como sigue:

15000	k.w.	durante	corto tiempo.
13000	,,	,,	1 hora 30 minutos.
11000	,,	,,	3 horas 30 ,,
9000	,,	,,	5 ,, 20 ,,
7000	,,	,,	13 ,,
4100	,,	*durante*	*veinticuatro horas.*

b — La carga media durante veinticuatro horas correspondiente a la Cía. General de Electricidad ha sido de 2300 k.w. según la línea (6).

c — La línea (5) de carga media durante veinticuatro horas correspondiente a la Cía. Luz y Fuerza ha sido de 5450 k.w.

d — La línea (7) de carga media, de 7750 k.w. durante veinticuatro horas, correspondiente a la carga diaria total según la línea (3).

e — El Factor de Carga, que resulta de comparar la carga media total con la carga máxima del día es del 52 %.

f — La producción total de energía ha sido en este día de 186000 k. w. h. correspondiendo:

a Cía. Luz y Fuerza	—	130800 k.w.h.
a Cía. General	—	55200 k.w.h.

En el diagrama B correspondiente a la época de calor del día 5 de diciembre del año 1929, la curva (1) se refiere a la carga horaria total producida por las usinas térmica e hidroeléctricas de la Cía. Luz y Fuerza, la curva (2) a la Cía. General de Electricidad y la curva (3) corresponde a la totalización de las cargas horarias de ambas compañías.

De las curvas mencionadas se han deducido:

a — La curva (4) o sea la característica de carga del día, de la cual se desprende, que las cargas variaron como sigue:

11000	k.w.	durante corto tiempo.		
9000	”	”	2 horas	50 minutos.
7000	”	”	11 ”	50 ”
5000	”	”	17 ”	40 ”
3800	”	*durante veinticuatro horas.*		

b — La carga media durante veinticuatro horas correspondiente a la Cía. General de Electricidad ha sido de 1450 k.w. según la línea (6).

c — La carga media durante veinticuatro horas correspondiente a la Cía. Luz y Fuerza ha sido de 5200 k.w. según la línea (5).

d — La carga media total durante veinticuatro horas ha sido de 6650 k.w. según la línea (7).

e — El Factor de Carga del día resulta del 60 %.

f — La producción total de energía ha sido de 159600 k.w. correspondiendo:

a Cía. General de Electricidad — 34800 k.w.h.
a Cía. Luz y Fuerza — 124800 k.w.h.

FACTOR MEDIO DE CARGA —

De la comparación de las cargas medias mensuales, con las máximas cargas producidas en el mes, durante seis años a contar desde 1925 hasta el año 1930 se ha calculado para cada empresa los factores medios de carga mensuales y se ha construido el diagrama C.

De la observación de este diagrama, puede notarse que los *menores* factores medio de carga, corresponden a la época de frío y los mayores corresponden a la época de calor para ambas empresas.

De las curvas que caracterizan los factores de carga de cada empresa se ha deducido la curva (3) relativa al Factor Medio de Carga Mensual correspondiente a ambas empresas y la línea (4) relativa al valor medio total de dicho factor para el período considerado. Este factor resulta del 44,5 %.

CARACTERÍSTICAS ECONÓMICAS GENERALES —

En el diagrama D gráficamente se indican las *entradas brutas* y los *gastos* anuales correspondientes a ambas empresas desde el año 1925 al 1930. Estando representadas las Entradas Brutas para ambas compañías por:

Curva — I — importe percibido por fuerza motriz
" — II — " " por fuerza para tramways.
" — III — " " por alumbrado particular.
" — IV — " " por alumbrado público.
" — V — " " por fuerza suministrada a la otra compañía y por varios.

Los Gastos para ambas compañías están representados por:

Curva — A — gastos por sueldos, jornales y administración.
" — B — " " reparaciones generales.
" — C — " " amortizaciones e intereses.
" — D — " " combustible y lubrificante.
" — E — *Gastos Totales.*

Las absisas de la zona comprendida entre las curvas E y VI da inmediata idea de la diferencia y relación entre Entradas Brutas y Gastos Totales, y en consecuencia sirve para apreciar el índice de utilidades o beneficios con respecto al capital.

Si por otra parte se tiene en cuenta, el capital invertido por cada una de las empresas, en sus instalaciones, los gastos totales incluyendo amortizaciones e intereses, se puede establecer: (para el año 1930):

para la Cía. Luz y Fuerza los gastos totales representan el 12,7 % del capital invertido en sus instalaciones.

Para la Cía. General de Electricidad los gastos totales representan el 12,5 % del capital invertido en sus instalaciones.

Además, si se tiene en cuenta el capital invertido por cada una de las empresas en sus instalaciones y la capacidad de máquinas instaladas por cada una de ellas en sus usinas, resulta para el año 1930:

para la Cía. General de Electricidad $ 1400.00 m.n. por K.W.
para la Cía. Luz y Fuerza $ 1560.00 m.n. por K.W.

Energía Producida y Distribuida — En el diagrama E se indica la energía eléctrica medida y facturada que ha suministrado para cada clase de servicio cada una de las compañías, desde el año 1925 al 1930 inclusive, como así también se indica para ambas la producción anual de energía. En este diagrama las curvas representan:

Curva — I — Energía distribuida para alumbrado particular.
" — II — " " para alumbrado público.
" — III — " " para tramways.
" — IV — " " para fuerza motriz y calefacción.
" — V — " " a la otra compañía.
" — VI — " Total Generada por las Usinas.
" — VII — " Total Distribuida y Facturada.

Las absisas correspondientes a cada año y comprendidas entre las curvas VI y VII dan a conocer la pérdida de la energía producida, debida a la distribución e influencia de los demás factores inherentes a transporte, transformaciones, etc.

Precios medios — Considerando el monto parcial de las entradas brutas correspondiente a cada clase de servicio, se ha determinado el *precio medio de venta* de la unidad de energía de éstos.

De los diagramas D y E se han obtenido los valores necesarios para ello, y del resultado de su comparación se ha construido el diagrama F.

En este diagrama, los precios medios de venta, por unidad de energía para cada servicio están representados por:

" — I — Precio Medio de Venta de 1 k.w.h. por alumbrado particular.
" — II — " " " " de 1 k.w.h. por alumbrado público.
" — III — " " " " de 1 k.w.h. por fuerza motriz y calefacción.
" — IV — " " " " de 1 k.w.h. por fuerza para tramways.
" — VI — *Precio Medio General de Venta de 1 K.W.H.*

En este diagrama la curva V muestra la variación anual del *Precio Medio General de Producción* de la unidad de energía *Dis-*

tribuida o sea del (K.W.H.) suministrado a domicilio al consumidor incluyendo todos los gastos y cargas directas e indirectas de explotación.

Para la Cía. Luz y Fuerza este precio medio ha experimentado las variaciones siguientes:

Año 1925 —	*Precio*	*Medio*	*General*	*de*	*Producción*	— 10,3	ctvs.	m/n.
” 1926 —	”	”	”	”	”	— 9,8	”	”
” 1927 —	”	”	”	”	”	— 9,9	”	”
” 1928 —	”	”	”	”	”	— 8,6	”	”
” 1929 —	”	”	”	”	”	— 8,4	”	”
” 1930 —	”	”	”	”	”	— 7,7	”	”

y para la Cía. General de Electricidad:

Año 1925 —	*Precio*	*Medio*	*General*	*de*	*Producción*	— 13,7	ctvs.	m/n.
” 1926 —	”	”	”	”	”	— 14,7	”	”
” 1927 —	”	”	”	”	”	— 14,5	”	”
” 1928 —	”	”	”	”	”	— 13,2	”	”
” 1929 —	”	”	”	”	”	— 12,2	”	”
” 1930 —	”	”	”	”	”	— 12,0	”	”

USINAS HIDROELÉCTRICAS —

En el año 1929 la energía total generada por las usinas térmicas e hidroeléctricas de ambas compañías, según se desprende del diagrama E ha sido:

por la Cía. Luz y Fuerza . . . . . . 41000000 K.W.H.
por la Cía. General de Electricidad . . 15000000 K.W.H.

que suman una producción total de cincuenta y seis millones de kilowattio - hora, habiéndose distribuido o suministrado a los diferentes consumidores solamente alrededor de cuarenta y cinco millones de kilowattios - hora.

De los cincuenta y seis millones de kilowattios - hora generados o producidos por las diferentes usinas, corresponden a las usinas hidroeléctricas treinta y cuatro millones de kilowattios - hora, que representan más o menos un sesenta y cuatro por ciento de la energía total generada.

Estos treinta y cuatro millones de kilowattios - hora producidos mediante la energía hidráulica del Río Primero, representan la utilización de un caudal medio efectivo anual, de seis mil quinientos litros por segundo.

Este caudal a su vez, representa el setenta y seis por ciento más o menos del caudal medio anual de regulación, determinado como descarga media del Dique San Roque para los años críticos, según se establece en el último proyecto relativo al mencionado dique.

Como por otra parte, el proyecto mencionado comprende también un aprovechamiento hidroeléctrico, con la construcción de una usina, en reemplazo de las de *Molet* y *Bamba*, corresponde para su apreciación dentro del orden económico, determinar la influencia que la energía eléctrica generada por esta usina, tendría sobre los actuales precios de la unidad de energía en Córdoba, como así mismo la construcción de otra usina, construida al pie del dique y destinada a trabajar en las horas de máxima carga que influencia tendría también sobre los precios actuales.

Las bases que sirven para estos estudios comparativos, a los efectos de la determinación del precio de producción de la unidad de energía en el tablero de las usinas, excluyendo transformación y transporte son:

1 — Caudal mínimo anual disponible 8,5 metros cúbicos por segundo.

2 — Intereses y Amortizaciones y gastos de explotación 12 % del capital.

3 — Que la usina proyectada que anula la de Molet y Bamba, debe suministrar a las compañías propietarias de ellas y en sus tableros, una cantidad de energía equivalente a la capacidad productora anual de las mismas, funcionando con igual caudal.

4 — Que las compañías propietarias de las usinas anuladas, deben aportar a los fondos de amortización de la usina proyectada, el importe correspondiente a la energía que han recibido en el año, de acuerdo al precio actual de producción de las usinas anuladas (sin tener en cuenta la influencia que podrían tener otras indemnizaciones).

5 — Presión manométrica de trabajo en las turbinas de la usina proyectada nueve kilos cien gramos por centímetro cuadrado.

6 — Capacidad más conveniente de la usina proyectada, nueve mil kilowatt o sean alrededor de doce mil doscientos caballos de fuerza.

7 — El precio por kilowatt instalado, incluyendo el aumento de embalse para la regulación de descarga, en el dique Mal Paso se estima a razón de setecientos pesos $^m/_n$.

8 — Precio de estimación actual de la usina de Molet, a razón de cuatrocientos pesos $^m/_n$ por kilowatt, instalado.

9 — Presión manométrica de trabajo en las turbinas de Molet un kilo doscientos gramos por centímetro cuadrado.

10 — Precio de estimación actual de la usina de Bamba, a razón de cuatrocientos pesos $^m/_n$ por kilowatt instalado.

11 — Presión manométrica de trabajo en las turbinas de Bamba, tres kilos por centímetro cuadrado.

12 — Precio de estimación actual de la usina de Calera, a razón de ochocientos pesos $^m/_n$ por kilowatt instalado.

13 — Presión manométrica de trabajo en las turbinas de Calera, cuatro kilos por centímetro cuadrado.

Para la usina posible de construir al pie del dique, que la denominaremos ''usina de pico'' por cuanto con ésta, sería posible combatir picos tales como el A B C que puede observarse en la curva (3) del diagrama A se han tenido en cuenta las bases o factores siguientes:

1 — Instalación de un grupo turbina - turbobomba y un grupo turbo - alternador de cuatro mil K.W., sirviendo el primero para bombeo y almacenaje de agua en depósito elevado, aprovechando las condiciones topográficas del lugar; y el segundo como productor de energía en momentos adecuados y trabajando en paralelo con las usinas electrógenas actuales.

2 — Utilización de un solo conducto forzado para bombeo y alimentación del turbo alternador.

3 — Embalse para regulación de descarga en Molet o Mal Paso.

4 — El precio del kilowatt instalado se estima a razón de cuatrocientos pesos $^m/_n$.

Teniendo en cuenta para cada caso las bases correspondientes, se ha calculado el precio de producción de la unidad de energía, y con los resultados obtenidos se ha construido el diagrama G, en función del trabajo horario anual.

PRECIO DE LA UNIDAD DE ENERGÍA DISTRIBUIDA —

El precio de la unidad de energía distribuida es variable con el factor de carga, para una carga máxima dada; y también es variable con el *Coeficiente de producción* o sea con el cociente que resulta de comparar la *energía distribuida anualmente* por una instalación, con la que se podría *distribuir efectivamente* con la misma, atendiendo a la capacidad real o efectiva de ésta.

Como bases para la determinación de este precio aproximado se han adoptado las características siguientes:

1 — Trabajo anual práctico para las usinas hidroeléctricas: ocho mil horas anuales.

2 — Trabajo anual práctico para las usinas térmicas: seis mil horas anuales.

Con estas bases y suponiendo que las características económicas de explotación, dadas por los diagramas C, D, E y F sufran o experimenten variaciones adecuadas, se ha construído el diagrama H.

Este diagrama, nos da a conocer aproximadamente el *Precio Medio de Producción* de la unidad de energía distribuida; o sea el precio medio del kilowatt entregado en el domicilio del consumidor o en el lugar de utilización, para los casos siguientes:

a — Para la Cía. General de Electricidad (curva 1) suponiendo que la energía distribuida sea producida por la usina térmica y la hidroeléctrica de Molet.

b — Para la Cía. Luz y Fuerza (curva 2) suponiendo que la energía distribuida sea producida por la usina térmica y las hidroeléctricas de Bamba y Calera.

c — Para la Cía. Luz y Fuerza y Cía. General trabajando todas sus usinas conjuntamente con la usina de pico (curva 3) propuesta.

d — Para la Cía. Luz y Fuerza y Cía. General trabajando todas sus usinas conjuntamente con la usina proyectada en reemplazo de las de Molet y Bamba.

Del examen del diagrama H, se desprende: que las usinas de la Cía. General en el año 1929 habrían trabajado con un coeficiente de producción del 26 % y las usinas de la Cía. Luz y Fuerza, en el mismo año habrían trabajado con un coeficiente del 54 %.

REDUCCIÓN DEL PRECIO DE PRODUCCIÓN —

Puede notarse en el diagrama H que el precio de producción para cada uno de los sistemas estudiados, disminuye como es lógico, a medida que el Coeficiente de Producción aumenta. Así por ejemplo, para un coeficiente del 60 % los precios serían:

Según	Curva	— 1 —	7.0	centavos m/n.
,,	,,	— 2 —	7.8	,,
,,	,,	— 3 —	7.4	,,
,,	,,	— 4 —	7.3	,,

Con los mismos sistemas, para un coeficiente de producción ideal igual a la unidad, los precios de producción serían:

Según	Curva	— 1 —	5.6	centavos m/n.
,,	,,	— 2 —	6.1	,,
,,	,,	— 3 —	5.8	,,
,,	,,	— 4 —	5.8	,,

Si el mismo análisis se hiciera para las empresas que actualmente sirven a Córdoba, teniendo en cuenta el coeficiente de producción en el año 1929, y suponiendo que alcanzaren en el futuro un coeficiente de producción del setenta por ciento, (que puede admitirse como un máximum, dadas las características de explotación actual) nos haría ver la posibilidad de reducir los precios de producción como sigue:
para la Cía. Luz y Fuerza en 16 %
para la Cía. General de Electricidad en 46 %.

Estos resultados, hacen aparecer y muestran la necesidad de proponer con las instalaciones existentes (y tener en cuenta para las usinas citadas posibles de construir) a aumentar al máximum posible el *Coeficiente de Producción;* por cuanto ello implicaría un beneficio inmediato al consumidor. Pues las actuales tarifas podrían reducirse.

Por otra parte, es de hacerse notar que el aumento del coeficiente de producción en centros consumidores de energía eléctrica caracterizados por curvas de carga tales como las A y B, típicas de Córdoba, es difícil a expensas de un aumento en la distribución anual de energía, por cuanto este aumento, si se realiza siguiendo las características de las curvas típicas, forzosamente comprendería picos de carga superiores a los actuales, los que exigirían aumentar la capacidad de las plantas generadoras de la energía, manteniendo el coeficiente de producción en los límites actuales.

De lo expuesto, se desprende: que es necesario adoptar o exigir que la distribución de la energía eléctrica posible de generar por estas usinas electrógenas, debe encuadrarse en procedimientos o métodos que aseguren una mejor utilización de los capitales invertidos, por cuanto con ello, las cargas fijas que influyen en la financiación de la industria, tendrán una menor influencia en el precio de producción de la unidad de energía.

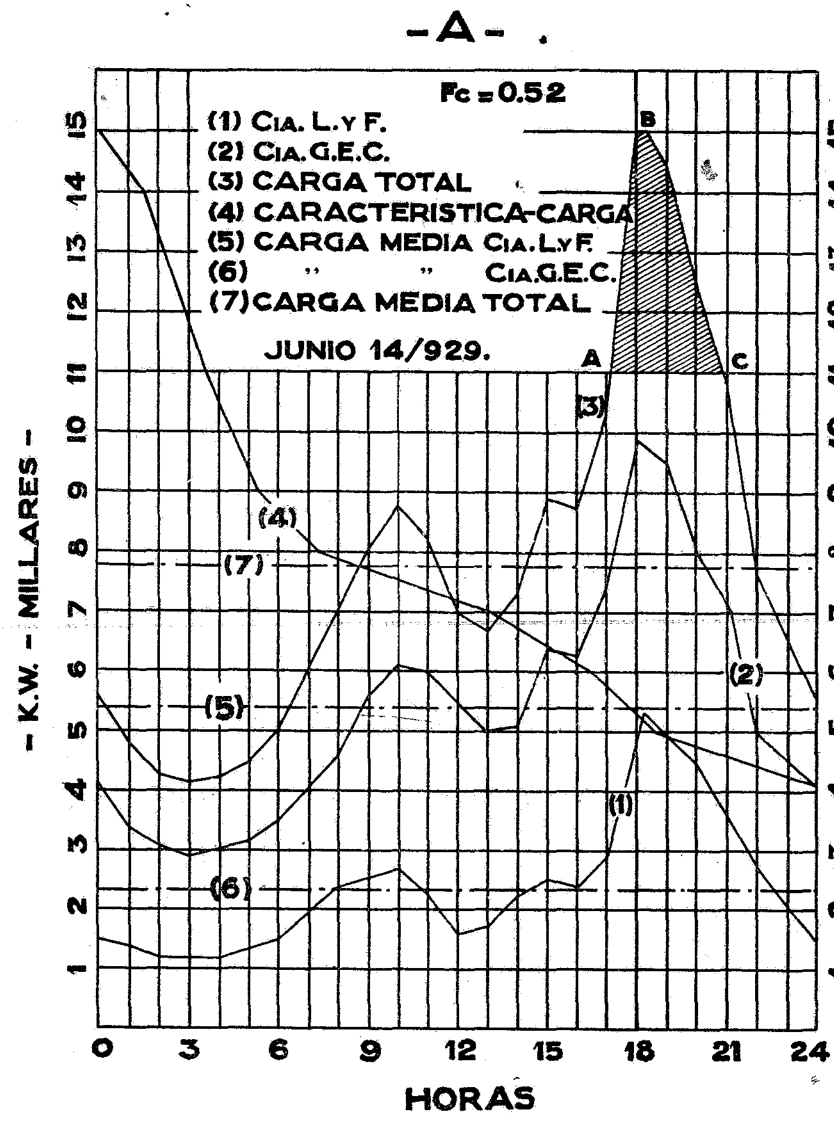
Es menester entonces, recurrir a los procedimientos puestos hoy en práctica en países europeos y americanos; procedimientos que si bien es cierto que no aseguran un aprovechamiento integral de la energía posible de generar, por lo menos, lo hacen más completo, obteniendo como consecuencia de ello una mejor repartición de la energía, que redunda en beneficio colectivo.

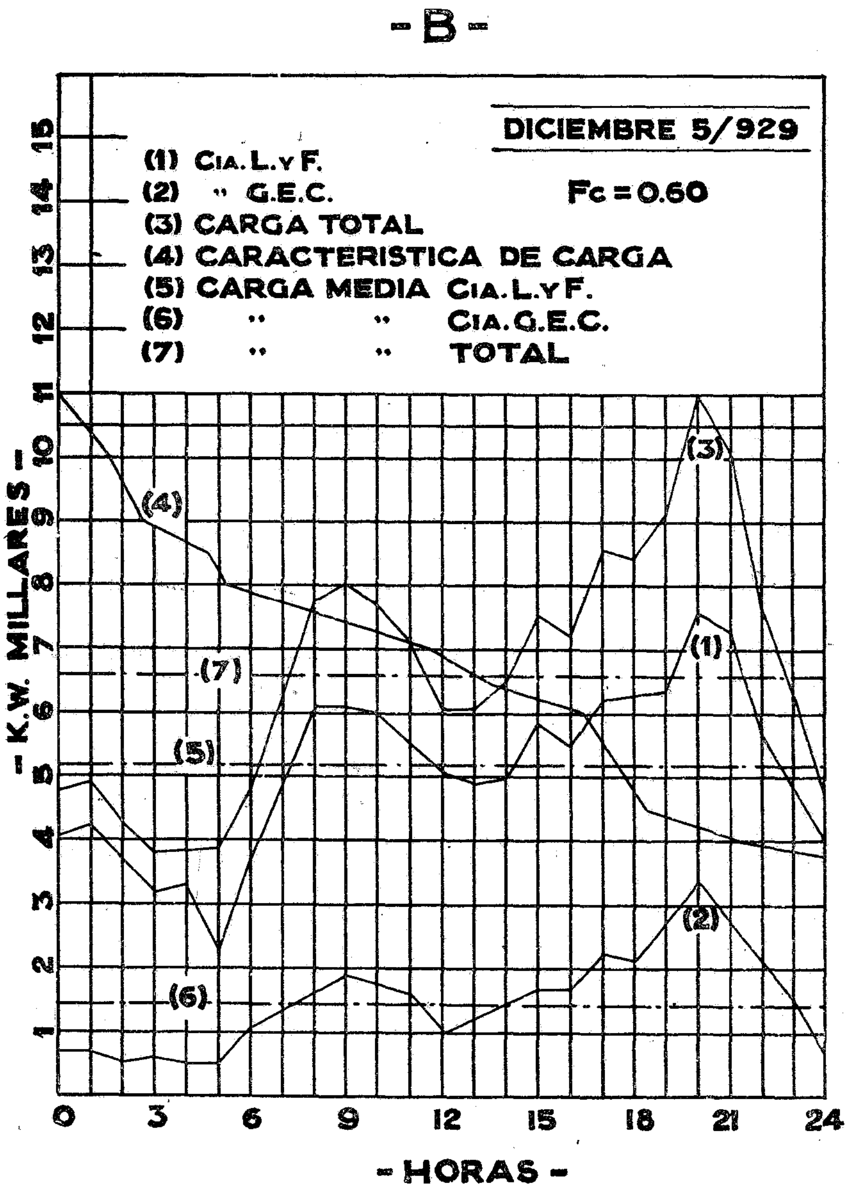
Estos procedimientos ya adoptados, en general se encuadran en las normas siguientes:

a — Coordenar el trabajo en paralelo de las usinas electrógenas de cierta importancia y características, que estén ubicadas dentro o fuera de centros de consumo, mediante redes de alta tensión aptas para servicio en recorrido.

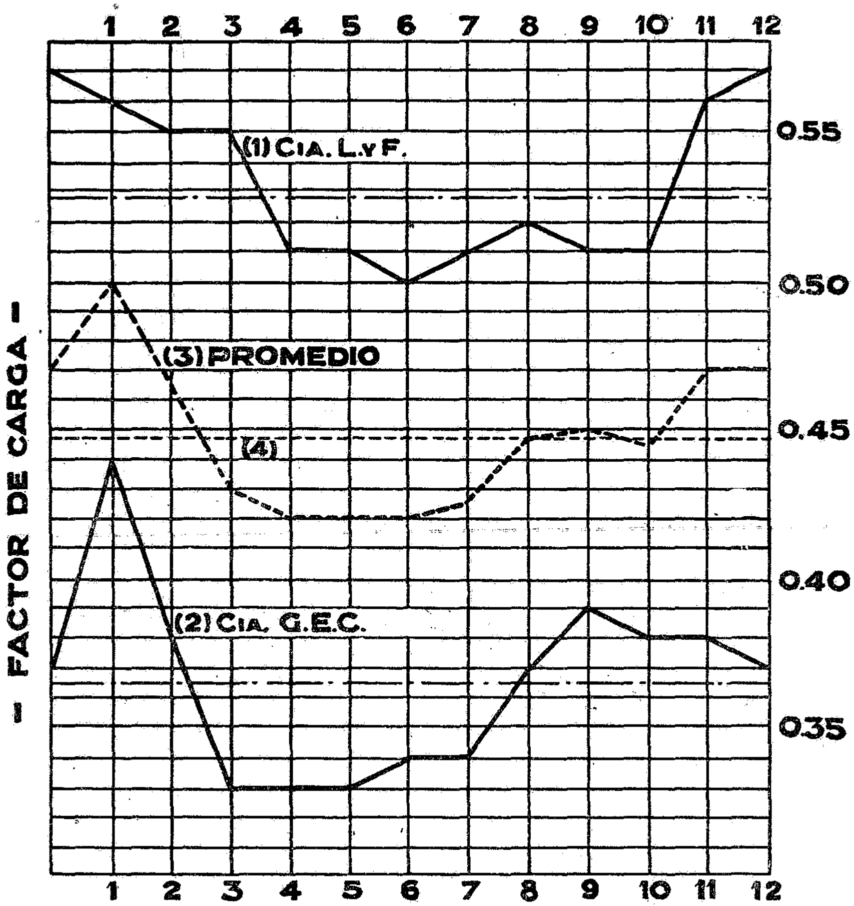
b — Exigir como condición indispensable de explotación para las nuevas concesiones, el trabajo en paralelo de las usinas electrógenas, por ser esto, en general, factor decisivo para obtener los menores precios de producción de la unidad de energía.

c — Construcción de redes colectivas para transporte de energía, establecidas si es necesario con la ayuda y bajo el control del estado, siguiendo por ejemplo las normas de la ley francesa del año 1922 u otras análogas.

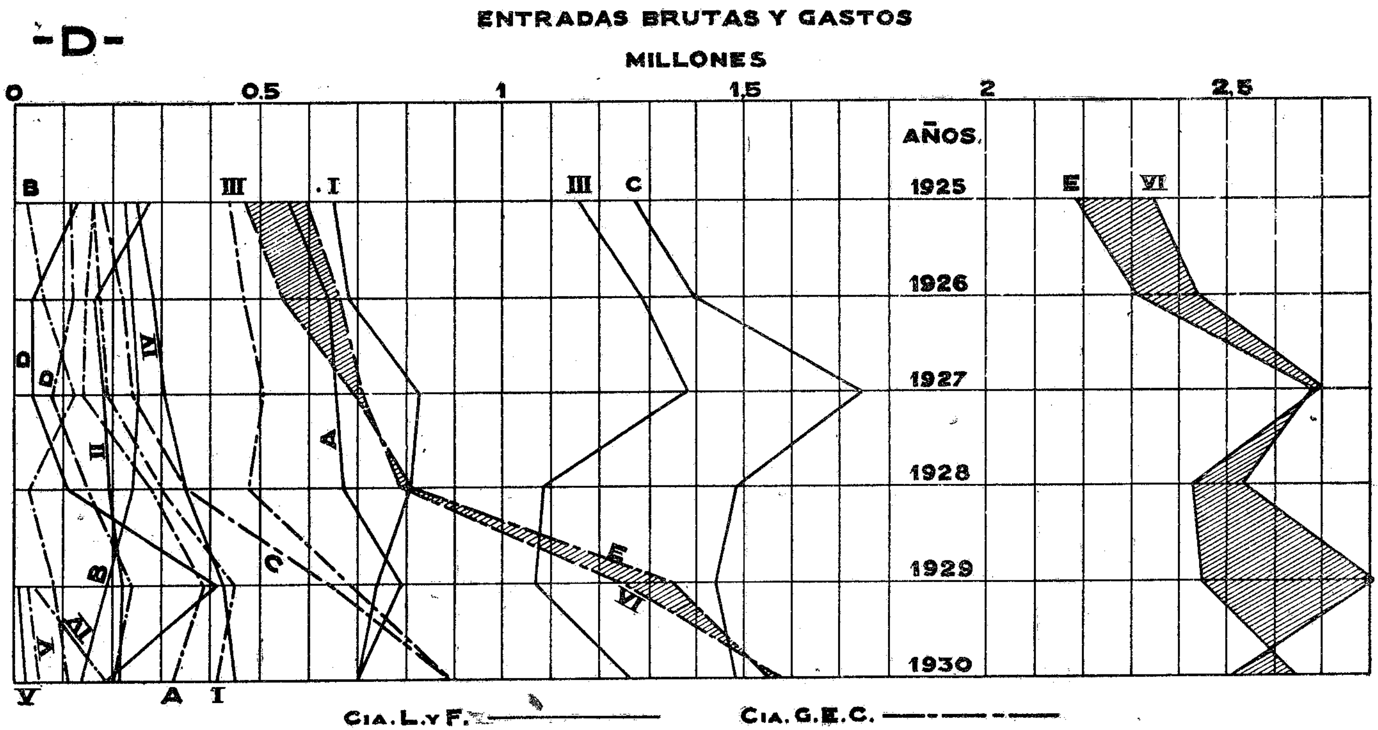

-A-
Fc = 0.52
(1) CIA. L. Y F.
(2) CIA. G.E.C.
(3) CARGA TOTAL
(4) CARACTERISTICA-CARGA
(5) CARGA MEDIA CIA. L. Y F.
(6) " " CIA. G.E.C.
(7) CARGA MEDIA TOTAL
JUNIO 14/929.
A
B
C
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
(7)
- K.W. - MILLARES -
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
0
3
6
9
12
15
18
21
24
HORAS


- B -
DICIEMBRE 5/929
(1) CIA. L. Y F.
(2) " G.E.C.
Fc = 0.60
(3) CARGA TOTAL
(4) CARACTERISTICA DE CARGA
(5) CARGA MEDIA CIA. L. Y F.
(6) " " CIA. G.E.C.
(7) " " TOTAL
- K.W. MILLARES -
- HORAS -

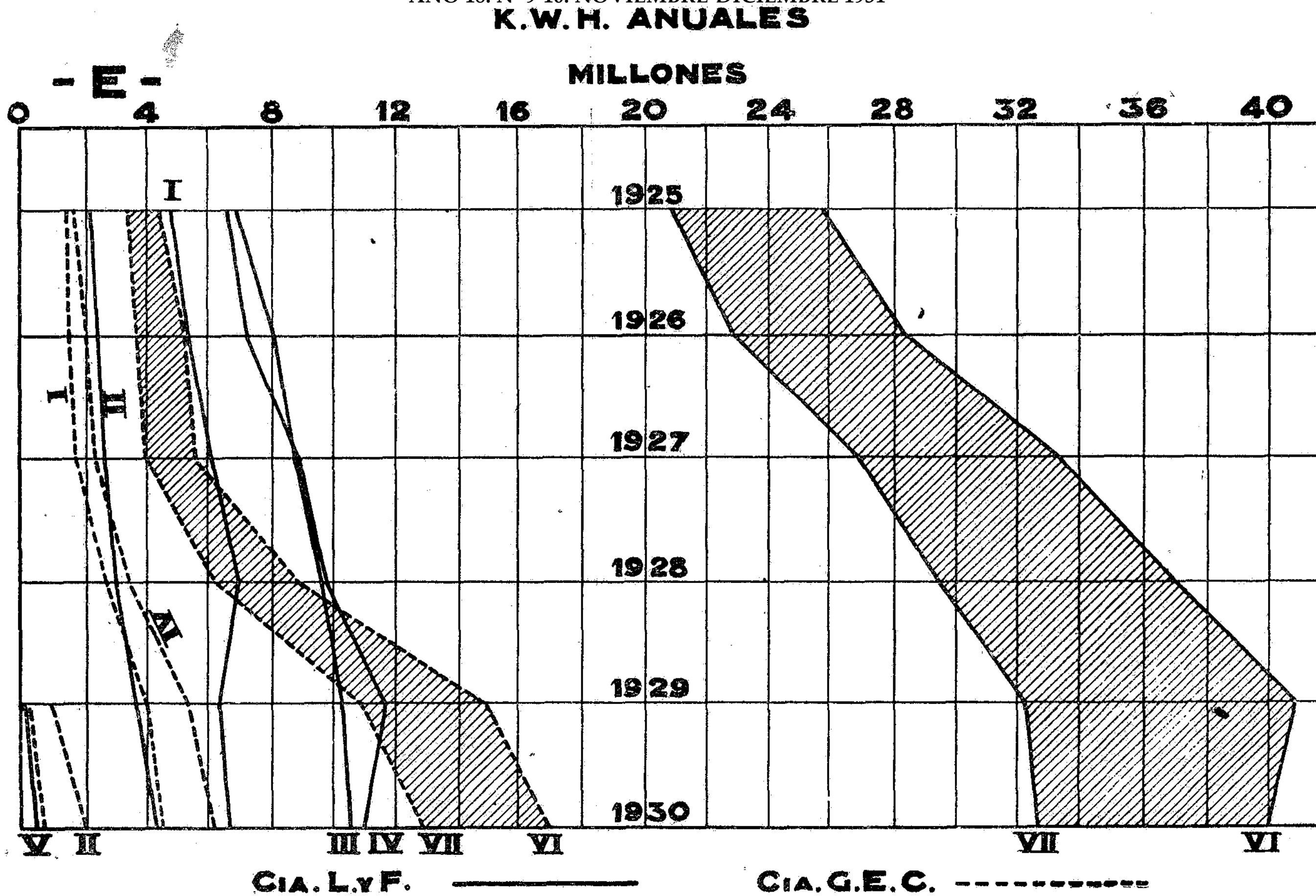
- C -


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
0.55
0.50
0.45
0.40
0.35
(1) CIA. L. y F.
(3) PROMEDIO
(4)
(2) CIA. G.E.C.
- FACTOR DE CARGA -
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

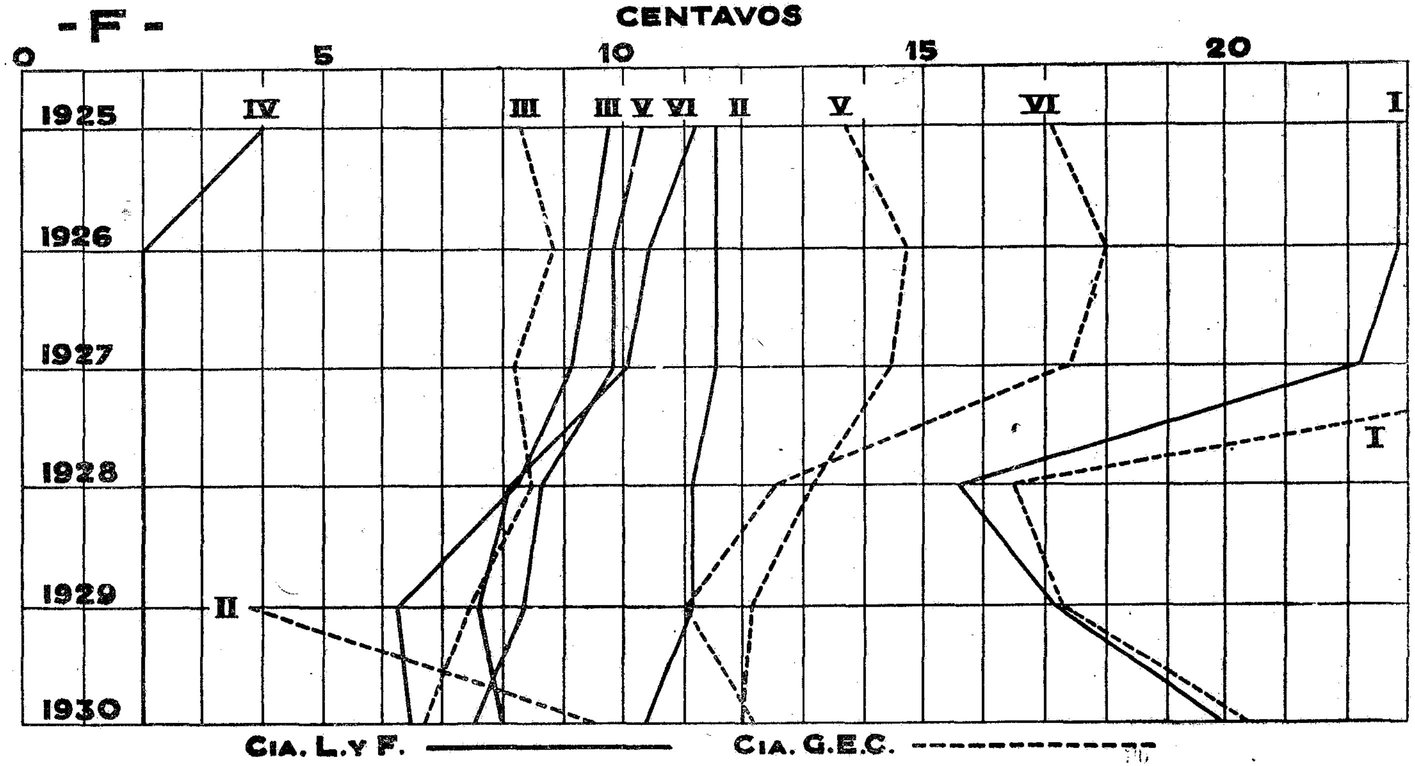
- MESES -



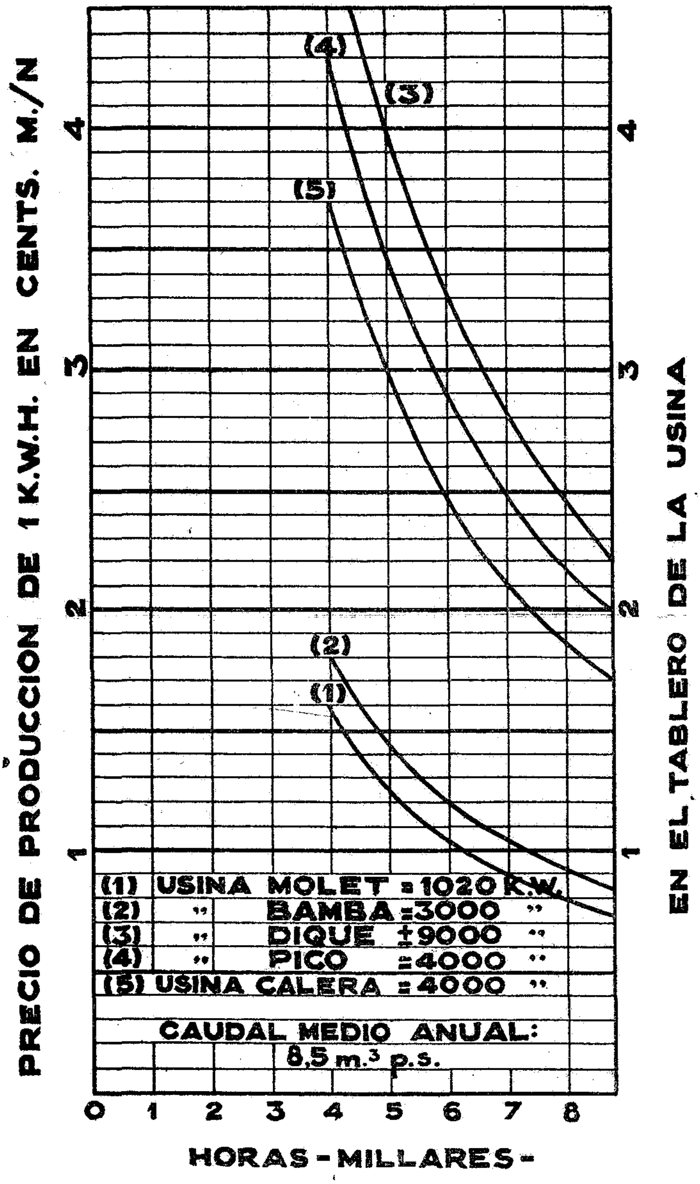
-D-
ENTRADAS BRUTAS Y GASTOS
MILLONES
0
0.5
1
1.5
2
2.5
AÑOS.
1925
1926
1927
1928
1929
1930
B
III
I
III
C
E
VI
D
D
IV
II
A
B
C
E
VI
VI
V
V
A
I
CIA. L. Y F.
CIA. G. E. C.


K.W.H. ANUALES
- E -
MILLONES
0
4
8
12
16
20
24
28
32
36
40
1925
1926
1927
1928
1929
1930
I
I
II
VI
V
II
III
IV
VII
VI
VII
VI
CIA. L. Y F.
CIA. G.E.C.

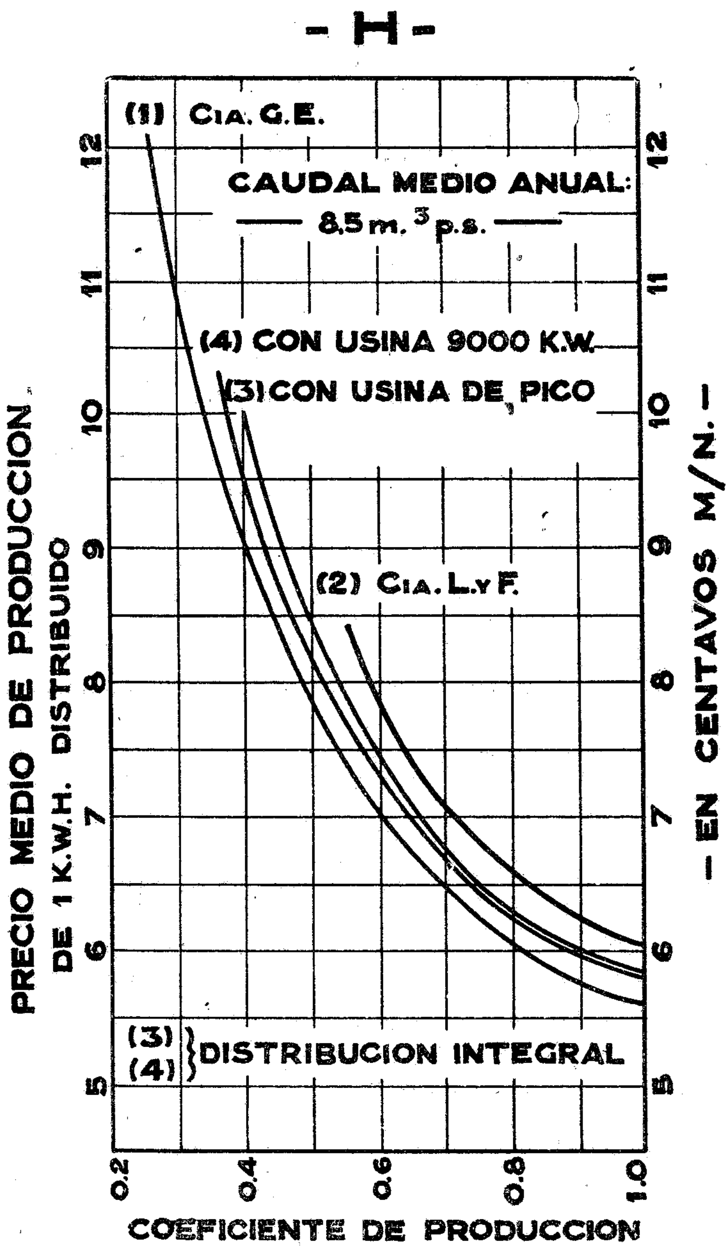
PRECIO MEDIO DE VENTA Y PRECIO ° DEL K.W.H. DISTRIBUIDO



- G -



PRECIO DE PRODUCCION DE 1 K.W.H. EN CENTS. M./N
EN EL TABLERO DE LA USINA
1
2
3
4
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(1) USINA MOLET = 1020 K.W.
(2) " BAMBA = 3000 "
(3) " DIQUE ±9000 "
(4) " PICO = 4000 "
(5) USINA CALERA = 4000 "
CAUDAL MEDIO ANUAL:
8,5 m.³ p.s.
0 1 2 3 4 5 6 7 8
HORAS - MILLARES -


- H -
(1) CIA. G.E.
CAUDAL MEDIO ANUAL:
8,5 m.³ p.s.
(4) CON USINA 9000 K.W.
(3) CON USINA DE PICO
(2) CIA. L. y F.
(3) (4) DISTRIBUCION INTEGRAL
PRECIO MEDIO DE PRODUCCION DE 1 K.W.H. DISTRIBUIDO
- EN CENTAVOS M/N. -
COEFICIENTE DE PRODUCCION
12
11
10
9
8
7
6
5
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

AÑO 18. Nº 9-10. NOVIEMBRE-DICIEMBRE 1931

SEGUNDA PARTE.

UN CAPITULO DE TRIGONOMETRIA

CAPITULO PRIMERO

RELACIONES ENTRE LOS ELEMENTOS PRINCIPALES DEL TRIANGULO.

§ I. — NOCIONES PRELIMINARES.

152. — Elementos y notaciones. — Los tres lados y los tres ángulos constituyen lo que llamamos *elementos principales del triángulo*. Las medidas de los lados las representaremos por los números a, b, c, y las de los ángulos opuestos por los A, B, C respectivamente. En el triángulo rectángulo A designará el ángulo recto y a la hipotenusa; y en el triángulo isósceles, A el ángulo en el vértice y a la base.

Elementos secundarios son los demás elementos del triángulo, como área, perímetro, alturas, medianas, bisectrices, radios de las circunferencias circunscripta, inscripta y exincripta, etc.

Las alturas se designarán con la letra h y las medianas con la m, y un subíndice relativo al lado a que correspondan: así, h_a será la altura sobre el lado a, y m_c la mediana correspondiente al lado c.

Las bisectrices interiores se designarán con la inicial b y las exteriores con b', afectadas ambas de un subíndice que exprese el ángulo que bisecan.

El radio de la circunferencia circunscripta se representará por R, y el de la circunferencia inscripta por r; los de las circunferencias exinscriptas por r_a, r_b y r_c, designando el índice el lado a que son tangentes.

El área o superficie se designará por S y el perímetro por $2\,p$.

153. — Número de relaciones distintas entre los elementos principales del triángulo. — Se sabe por Geometría que un triángulo queda determinado cuando se conocen tres de sus seis elementos principales con tal que en ellos entre un lado; por consiguiente, entre esos seis elementos debe haber por lo menos tres ecuaciones distintas para que constituyan un sistema determinado y puedan calcularse tres en función de los otros tres. No puede haber más relaciones, porque si hubiera otra, tendríamos un sistema de cuatro ecuaciones entre seis cantidades, y bastaría conocer dos de éstas para determinar las otras cuatro, lo que no es posible, pues, dos elementos no determinan un triángulo. De aquí se deduce el siguiente:

TEOREMA. — *Entre los seis elementos principales de un triángulo, hay tres relaciones distintas, y no puede haber más.*

154. — Número posible de casos de resolución. — Como para que un triángulo quede determinado es necesario conocer tres de sus seis elementos con tal que en ellos entre un lado, se deduce que habrá tantos casos de resolución cuantas combinaciones puedan formarse con esos seis elementos tomados de tres en tres, número que como se sabe por Algebra es $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$. Formando todas esas combinaciones, separando la que resulta constituida por los tres ángulos que como no contiene un lado no responde a la cuestión, con las diez y nueve restantes pueden formarse los siguientes grupos:

I. — aBC, bAC, cAB:	*un lado y los dos ángulos adyacentes.*
II. — abC, acB, bcA:	*dos lados y el ángulo comprendido;*
III. — abA, abB, acA, acC, bcB, bcC:	*dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos;*
IV. — abc:	*los tres lados;*
V. — ABa, ABb, ACa, ACc, BCb, BCc:	*dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.*

Pero este último grupo se refunde en el I porque como en la Geometría euclidiana *la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos rectos*, conociendo dos de esos ángulos el tercero queda también determinado, y se tiene así un lado y los tres ángulos; y por consiguiente un lado y los dos ángulos adyacentes.

De manera que todos los casos posibles de resolución de los triángulos se reducen a los cuatro primeramente enumerados que se denominan *elementales* o *clásicos.*

En el caso del triángulo rectángulo, como $A = 90^\circ$, no se consideran más que los cinco elementos restantes, y de éstos es necesario conocer dos, siempre que en esos dos entre un lado, para determinar los otros tres. El número de combinaciones de esos cinco elementos tomados de dos en dos es $\dfrac{5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2} = 10$; y dejando afuera la combinación B C, las nueve restantes agrupadas como sigue, dan lugar a los cuatro casos clásicos:

I. — $b\ c$: *los dos catetos;*
II. — $a\ b,\ a\ c$: *la hipotenusa y un cateto;*
III. — $a\ B,\ a\ C$: *la hipotenusa y un ángulo agudo;*
IV. — $b\ B,\ b\ C,\ c\ B,\ c\ C$: *un cateto y un ángulo agudo.*

§ II. — Fórmulas fundamentales.

155. — Deducción correlativa de las fórmulas. — Debemos tener presente que la Geometría euclidiana, que sirve de base a nuestro estudio, los números que miden los seis elementos principales del triángulo son todos positivos, y los que miden los ángulos son del intervalo $(0, \pi)$.

I. — Consideremos ahora el triángulo $A\ B\ C$. Si proyectamos su contorno sobre un eje x, tendremos (nº 87) (*).

$$a \cos (x a) + b \cos (x b) + c \cos (x c) = 0.$$

Si hacemos coincidir x sucesivamente con a, b, c, resulta el sistema

$$\begin{aligned} a + b \cos (ab) + c \cos (ac) &= 0, \\ a \cos (ba) + b + c \cos (bc) &= 0, \quad \text{(A)} \\ a \cos (ca) + b \cos (cb) + c &= 0; \end{aligned}$$

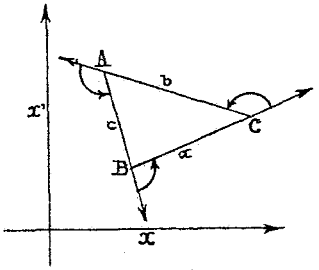


Fig. 43

pero del sentido de rotación elegido y del examen de la figura, resulta también:

(*) Para expresar el ángulo de dos direcciones x y a, empleamos la notación $(x\,a)$.

$$\left.\begin{aligned}(ab) &= \pi - C,\\ (bc) &= \pi - A,\\ (ca) &= \pi - B;\end{aligned}\right\}\begin{matrix}\text{de}\\ \text{donde}\\ (\text{n}^\circ.\ 67)\end{matrix}\quad \left.\begin{aligned}\cos(ab) &= -\cos C,\\ \cos(bc) &= -\cos A,\\ \cos(ca) &= -\cos B;\end{aligned}\right\}(\text{B})\ \text{y}\ \left.\begin{aligned}\text{sen}\,(ab) &= \text{sen}\,C,\\ \text{sen}\,(bc) &= \text{sen}\,A.\\ \text{sen}\,(ca) &= \text{sen}\,B.\end{aligned}\right\}(\text{C})$$

Por otra parte, tenemos igualmente (nº. 31, 1º)

$$\left.\begin{aligned}(ba) &= \pi + C,\\ (cb) &= \pi + A,\\ (ac) &= \pi + B;\end{aligned}\right\}\begin{matrix}\text{de}\\ \text{donde}\\ (\text{n}^\circ.\ 66)\end{matrix}\quad \left.\begin{aligned}\cos(ba) &= -\cos C,\\ \cos(cb) &= -\cos A,\\ \cos(ac) &= -\cos B;\end{aligned}\right\}(\text{D})\ \text{y}\ \left.\begin{aligned}\text{sen}\,(ba) &= -\,\text{sen}\,C,\\ \text{sen}\,(cb) &= -\,\text{sen}\,A,\\ \text{sen}\,(ac) &= -\,\text{sen}\,B.\end{aligned}\right\}(\text{E})$$

Sustituyendo ahora en el sistema (A) los valores de los cosenos dados por (B(y (D), y despejando los lados, se tiene finalmente:

$$\left.\begin{aligned}a &= b\cos C + c\cos B,\\ b &= a\cos C + c\cos A,\\ c &= a\cos B + b\cos A.\end{aligned}\right\}\quad (88)$$

Relaciones que según el teorema del n.º 86 expresan la condición necesaria y suficiente para que los seis números A, B, C, a, b y c constituyan los seis elementos principales de un triángulo, y que dan lugar al siguiente:

TEOREMA (llamado de la proyección). — *En todo triángulo rectilíneo, cada lado es igual a la suma de las proyecciones de los otros dos sobre la dirección del primero.*

II. — Si proyectamos ahora sobre un eje perpendicular al x, tendremos (n.º 87)

$$a\,\text{sen}\,(xa) + b\,\text{sen}\,(xb) + c\,\text{sen}\,(xc) = 0;$$

y haciendo coincidir x con a, b, c sucesivamente, resulta el sistema:

$$\begin{aligned}b\,\text{sen}\,(a\,b) + c\,\text{sen}\,(a\,c) &= 0,\\ a\,\text{sen}\,(b\,a) + c\,\text{sen}\,(b\,c) &= 0,\\ a\,\text{sen}\,(c\,a) + b\,\text{sen}\,(c\,b) &= 0;\end{aligned}$$

en el que si se reemplazan los senos por sus valores dados por las relaciones (C) y (E), se tiene después de transponer:

$$\frac{b}{\text{sen}\ B} = \frac{c}{\text{sen}\ C},$$

$$\frac{a}{\text{sen}\ A} = \frac{c}{\text{sen}\ C},$$

$$\frac{a}{\text{sen}\ A} = \frac{b}{\text{sen}\ B};$$

relaciones que dan lugar al siguiente:

TEOREMA (llamado del seno). — *En todo triángulo rectilíneo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.*

Como estas tres fórmulas no constituyen en rigor más que dos distintas, pues, cada una es una consecuencia de las otras dos, se une a ellas la proposición fundamental de la Geometría euclidiana relativa a la suma de los tres ángulos, y se tiene el grupo

$$\left.\begin{array}{c} A + B + C = 180^\circ, \\ \dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}. \end{array}\right\} \quad (89)$$

III. — Multiplicando cada fórmula del grupo 88 por su primer término se encuentra

$$\begin{aligned} a^2 &= a\,b \cos C + a\,c \cos B, \\ b^2 &= a\,b \cos C + b\,c \cos A, \\ c^2 &= a\,c \cos B + b\,c \cos A; \end{aligned}$$

restando de cada una de éstas la suma de las otras dos y despejando el primer lado se obtiene el sistema

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\,a\,c \cos B, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos C; \end{aligned}\right\} \quad (90)$$

que da origen al siguiente:

TEOREMA (llamado del coseno o de Carnot). — *En todo triángulo rectilíneo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el duplo de ellos por el coseno del ángulo comprendido.*

156. — Consecuencia importante. — Los tres grupos de fórmulas, 88, 89 y 90 por la forma en que se han deducido, basada en el teorema de las proyecciones (nº. 86), expresan la condición necesaria y suficiente para la existencia del triángulo, es decir, que se verifican en todo triángulo, y recíprocamente, que si esas fórmulas se verifican, los números A, B, C, a, b y c constituyen los seis elementos principales de un triángulo. De aquí se deduce entonces que para averiguar las condiciones de posibilidad de un problema de resolución de triángulo, no hay más que probar que las fórmulas dan para los lados valores positivos y para los ángulos valores positivos también y menores que π o 180°, sin necesidad de atender a ninguna otra consideración.

157. — Deducción independiente de las fórmulas. — Los tres grupos de fórmulas que acabamos de establecer pueden deducirse independientemente uno de otro, y es lo que vamos a hacer ahora; debiendo advertir que basta la deducción de una sola fórmula de cada grupo, pues, las otras dos se obtienen de manera análoga o por simple permutación circular de los elementos del triángulo.

Las demostraciones que siguen no son completas por cuanto no se demuestra la recíproca de cada teorema; pero suprimiremos esta última parte por haberla dejado bien establecida en el nº. 155.

I. — Teorema del seno. — Se sabe que en todo triángulo se verifica la relación (1)

$$a b = 2 R h_c ; \qquad (m)$$

pero en los triángulos considerados se tiene (Teorema I, nº. 54)

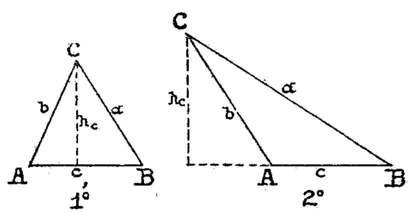


Fig. 44

en el 1^0, $h_c = a$ sen B
$= b$ sen A

y en el 2°, $h_c = a$ sen $B = b$ sen $(180^\circ - A) = b$ sen A.

Sustituyendo estos valores de h_c en (m), reduciendo y despejando resulta

$$\frac{a}{\text{sen } A} = 2 R \qquad \text{y} \qquad \frac{b}{\text{sen } B} = 2 R.$$

Como de análoga manera se encuentra $\dfrac{c}{\text{sen } C} = 2 R$, se tiene por último

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2 R.$$

Corolario I. — *En todo triángulo rectilíneo, la razón de cada lado al seno del ángulo opuesto es constante e igual al diámetro de la circunferencia circunscripta.*

Corolario II. — *En el triángulo rectángulo la hipotenusa es igual al diámetro de la circunferencia circunscripta.*

Por $A = 90°$, sen $A = 1$ y la última f. da

$$a = 2\ R.$$

II. — Teorema de la proyección. — Si en el triángulo $B\ A\ C$ consideramos el vector $B\ C$ como la resultante de los vectores consecutivos $B\ A$ y $A\ C$, tenemos la equipolencia

$$(B\ C) = (B\ A) + (A\ C),$$

que proyectada sobre $B\ C$ da

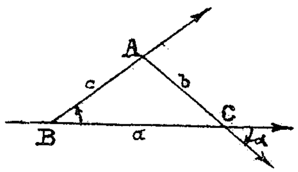


Fig. 45

$$\overline{B\ C} = \overline{B\ A}.\cos B + \overline{A\ C}.\cos(-\alpha) = \overline{B\ A}.\cos B + \overline{A\ C}\cos\alpha;$$

y por ser $\alpha = C$, se tiene reemplazando los vectores por sus medidas

$$a = c\cos B + b\cos C.$$

III. — Teorema del coseno o de Carnot. — Si en el triángulo $A\ B\ C$ tomamos el lado b como eje de las x y el vértice A como origen, y designamos por x e y las coordenadas de B, como las de C son b y o, tenemos (nº. 19)

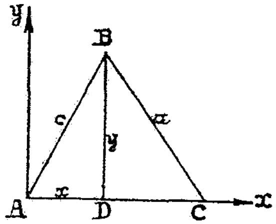


Fig. 46

$$a^2 = (x - b)^2 + (y - o)^2 = b^2 + (x^2 + y^2) - 2\ b\ (x);$$

pero en el triángulo rectángulo $A\ B\ D$ se tiene:

por el teorema de Pitágoras $x^2 + y^2 = c^2$,

y por teorema I del nº. 54 $x = c\cos A$.

Reemplazando estos valores en la igualdad anterior, resulta por último

$$a^{\circ} = b^2 + c^2 - 2\ b\ c\cos A.$$

158. — Equivalencia de los tres grupos. — Por el teorema del nº. 153 los tres grupos de fórmulas deben ser equivalentes, y así lo hemos comprobado en la deducción correlativa; pero como esto no resulta de la deducción independiente, vamos a dar una nueva demostración, deduciendo una sola fórmula de cada grupo.

I. — *Del grupo 88 deducir los 89 y 90.*

1º. — *Deducción del grupo 89.* — Multiplicando cada fórmula por su primer término, y restando de la primera así obtenida la segunda, se encuentra

$$a^2 - b^2 = c\,(a \cos B - b \cos A);$$

y si en ésta se reemplaza c por su valor dado por la tercera fórmula 88, se tiene sucesivamente

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a \cos B + b \cos A)\,(a \cos B - b \cos A) \\ &= a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A, \end{aligned}$$

o

$$a^2\,(1 - \cos^2 B) = b^2\,(1 - \cos^2 A),$$

es decir

$$a^2 \operatorname{sen}^2 B = b^2 \operatorname{sen}^2 A;$$

y como los cuatro factores son positivos, resulta

$$a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A. \qquad (m)$$

Operando de igual manera con la primera y la tercera, se encuentra

$$a \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} A. \qquad (n)$$

De (m) y (n) se deduce

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}, \qquad (p)$$

que es una de las que se buscan.

Para deducir la otra se procede así: como las tres ecuaciones dadas son homogéneas con respecto a a, b, c, pueden reemplazarse estas cantidades por las sen A, sen B, sen C que les son proporcionales según (p), lo que da

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} A &= \operatorname{sen} B \cos C + \operatorname{sen} C \cos B = \operatorname{sen}(B + C), \\ \operatorname{sen} B &= \operatorname{sen} A \cos C + \operatorname{sen} C \cos A = \operatorname{sen}(A + C), \\ \operatorname{sen} C &= \operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A = \operatorname{sen}(A + B). \end{aligned}$$

Para que dos ángulos positivos y menores que π tengan el mismo seno, es necesario que sean iguales o suplementarios; luego se debe tener

$$\begin{array}{lcl} A = B + C & \text{o} & A + B + C = \pi\,, \\ B = A + C & \text{''} & B + A + C = \pi\,, \\ C = A + B & \text{''} & C + A + B = \pi\,. \end{array}$$

Sumando ordenadamente estas dos series de igualdades y suprimiendo los factores comunes, nos dan:

$$A + B + C = 0 \qquad \text{o} \qquad A + B + C = \pi\,.$$

La primera condición es absurda porque los tres ángulos son positivos y mayores que cero; entonces se verifica la segunda.

2º. — *Deducción del grupo 90.* — La hemos efectuado en el caso III del n.º 155.

II. — *Del grupo 89 deducir los 88 y 90.*

1º. — *Deducción del grupo 88.* — De la primera fórmula del grupo propuesto se saca

$$A = \pi - (B + C)\,,$$

y de aquí se deduce

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}(B + C) = \operatorname{sen} B \cos C + \operatorname{sen} C \cos B\,;$$

pero como esta ecuación es homogénea con respecto a sen A, sen B, sen C, se los puede reemplazar por los números a, b, c, que les son proporcionales según la segunda ecuación propuesta, lo que da

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

2º. — *Deducción del grupo 90.* — Del grupo 89 se pasa al 88 como lo acabamos de efectuar, y de éste al 90 como se ha hecho en el caso III del n.º 155.

III. — *Del grupo 90 deducir los 88 y 89.*

1º. — *Deducción del grupo 88.* — Sumando de dos en dos las fórmulas del grupo dado y reduciendo se obtienen las que se buscan.

La suma de la primera y la segunda da

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2\,c^2 - 2\,c\,(b \cos A + a \cos B),$$

y de ésta se deduce

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

2°. — *Deducción del grupo 89.* — Deducido del grupo 90 el 88, de éste se pasa al 89 como se ha visto en el caso I de este número.

§ III. — FÓRMULAS DERIVADAS.

159. — Relación entre los cosenos de los tres ángulos. — En todo triángulo se tiene

$$A + B = 180° - C; \qquad (1)$$

de donde

$$\cos(A + B) = -\cos C,$$

o
$$\cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = -\cos C;$$

y transponiendo

$$\cos A \cos B + \cos C = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B.$$

Elevando al cuadrado

$$\cos^2 A \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = \operatorname{sen}^2 A \operatorname{sen}^2 B,$$

$$= (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 B),$$

$$= 1 - \cos^2 A - \cos^2 B + \cos^2 A \cos^2 B;$$

y por último

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1 \qquad (91)$$

160. — Suma de los senos de los tres ángulos. — De la relación (1) del número anterior se deduce

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} C, \qquad \operatorname{sen}\frac{A + B}{2} = \cos\frac{C}{2}$$

Con estas fórmulas y las 35, 61 y 63 se tiene sucesivamente

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen}(A + B)$$

$$= 2 \operatorname{sen}\frac{A + B}{2} \cos\frac{A - B}{2} + 2 \operatorname{sen}\frac{A + B}{2} \cos\frac{A + B}{2}$$

$$= 2 \operatorname{sen}\frac{A + B}{2}\left[\cos\frac{A - B}{2} + \cos\frac{A + B}{2}\right]$$

$$= 4 \operatorname{sen}\frac{A + B}{2} \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2}$$

$$\left.\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} \qquad\right\} \; (92)$$

161. — Teorema de las tangentes. — De la segunda fórmula del grupo fundamental 89 se deduce

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A-\operatorname{sen} B};$$

y por intermedio de la f. 65 se obtiene

$$\left.\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}.\quad\right\}\quad(93)$$

Fórmula que constituye el *teorema de las tangentes,* muy útil en la resolución de los triángulos, y que se enuncia así:

En todo triángulo rectilíneo, la suma de dos lados es a su diferencia como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos es a la tangente de la semidiferencia de los mismos.

162 — Fórmulas de Newton. — De la segunda fórmula del grupo fundamental 89 y teniendo en cuenta las fs. 35, 61 y 62, se deduce

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}=\frac{2\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}},$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\operatorname{sen} A-\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}=\frac{2\cos\dfrac{A+B}{2}\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}};$$

y como $\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$ y $\cos\dfrac{A+B}{2}=\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}$, se obtiene finalmente

$$\left.\begin{aligned}
\frac{a+b}{c} &= \frac{\cos\dfrac{A-B}{C}}{\operatorname{sen}\dfrac{2}{2}}, \\[2ex]
\frac{a-b}{c} &= \frac{\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}},
\end{aligned}\right\} \quad (94)$$

Estas fórmulas, conocidas con el nombre de **analogías de Molweide,** fueron descubiertas por Newton y publicadas en su Aritmética Universal en 1707, mientras que las obras de Molweide aparecieron recién en 1808; pero más de medio siglo antes los matemáticos F. W. Oppel (1746) y Tomás Simpson (1748) las habían introducido ya en la Trigonometría.

NOTA. — Dividiendo la primera por la segunda de estas fórmulas se llega al teorema de las tangentes.

163. — Fórmulas logarítmicas. — Como en la resolución de los triángulos se emplean las tablas logarítmico-trigonométricas por la gran simplificación que aportan a los cálculos, es necesario que las fórmulas fundamentales sean calculables por logaritmos para aprovechar eficazmente las ventajas de esa simplificación. Desde luego las fórmulas del grupo 89 lo son directamente, pues, cada elemento de una cualquiera de ellas resulta expresado en función logarítmica de los otros tres; las del grupo 88 no se emplean en esta clase de cálculos por ser sus incógnitas de eliminación difícil, pero pueden hacerse logarítmicas por un procedimiento análogo al estudiado en el nº. 131; las del grupo 90, que se utilizan para calcular los ángulos en función de los lados, se transforman como se ha explicado en el n.º 139.

Siendo p el semiperímetro, es decir, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, y aplicando la misma fórmula a los otros dos ángulos, se obtienen los cuatro grupos:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{b\ c}}, \\ \operatorname{sen}\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{a\ c}}, \\ \operatorname{sen}\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{a\ b}}; \end{aligned}\right\}(95) \qquad \left.\begin{aligned} \cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{b\ c}}, \\ \cos\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{p\,(p-b)}{a\ c}}, \\ \cos\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{p\,(p-c)}{a\ b}}; \end{aligned}\right\}(96)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p\,(p-a)}}, \\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p\,(p-b)}}, \\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p\,(p-c)}}; \end{aligned}\right\}(97) \qquad \left.\begin{aligned} \cot A &= \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{(p-b)(p-c)}}, \\ \cot B &= \sqrt{\frac{p\,(p-b)}{(p-a)(p-c)}}, \\ \cot C &= \sqrt{\frac{p\,(p-c)}{(p-a)(p-b)}}. \end{aligned}\right\}(98)$$

REFERENCIAS.

(1). Véase *Cours de Géométrie élémentaire* par F. G. M. (1912) n.° 252, y *Geometría Plana* por Wentworth y Smith n.° 305.

Nº. 19. — La distancia d entre dos puntos de coordenadas x_1 y_1 y x_2 y_2 respectivamente, es dada por la ecuación:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Nº 31, 1º. Si en el ángulo de dos direcciones se permutan entre sí el lado origen y el lado extremo, el módulo del ángulo no varía pero cambia de sentido y por consiguiente de signo, o si se conserva el sentido primitivo el ángulo se convierte en su conjugado.

Dos ángulos son conjugados cuando su suma es igual a cuatro rectos o 360º.

Nº. 66. Las funciones circulares de dos ángulos que se diferencian en π o en un múltiplo impar de π, son números opuestos, excepto las tangentes y cotangentes que son iguales.

Nº. 67. Las funciones circulares de los ángulos suplementarios son números opuestos, excepto los senos y cosecantes que son iguales.

Nº. 86. Para que un contorno poligonal plano sea cerrado, es necesario y suficiente que sus proyecciones sobre dos ejes secantes sean separadamente nulas.

Nº. 87. La expresión analítica de la condición de cierre lineal de un contorno poligonal es

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma + \ldots\ldots = 0,$$
$$a \operatorname{sen} \alpha + b \operatorname{sen} \beta + c \operatorname{sen} \gamma + \ldots\ldots = 0;$$

en que $a, b, c, \ldots.$ son los vectores lados y $\alpha, \beta, \gamma \ldots.$ los ángulos que hacen con la dirección positiva del eje.

Fórmulas citadas:

f. 35 : $\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$;

f. 61 : $\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$;

f. 62 : $\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}$.

JACINTO DEL VISO

NOTA: La presente colaboración para el número especial de esta Revista comprende el capítulo correspondiente de las lecciones que dicto en nuestra Facultad de Ciencias Exactas desde hace treinta y un años. Lo doy a la publicidad porque creo que la forma novedosa y sencilla de las demostraciones puede interesar a los estudiosos.