AÑO 6. Nº 4-5. JUNIO-JULIO DE 1919

RESOLUCION GENERAL

DE LA

ECUACION DE QUINTO GRADO (*)

I

Introducción

1. *Hoené Wronski*, uno de los más notables matemáticos y filósofos del siglo pasado, nació en 1778 en Posen y murió en 1853 el 9 de Agosto en Neuilly-sur-mer, a la edad de setenta y cinco años, habiendo descubierto la ley suprema de las Matemáticas, resuelto el problema universal de esas ciencias y planteado la ley teleológica

(*) El eminente matemático peruano, que nos honra con su colaboración, no necesita ser presentado a los intelectuales americanos; sus numerosas monografías científicas han dado relieve a su personalidad ya difundida fuera del continente.

Figura en la pléyade de ilustres profesores de la Universidad Mayor de San Marcos, y es actualmente decano (por segunda vez) de la Facultad de Ciencias.

Se asocia en forma elocuente, por medio del presente trabajo, a nuestra iniciativa de internacionalismo universitario americano.

Es el fragmento aquí inserto, parte de su trabajo sobre un tema de matemáticas puras: "la resolución general de las ecuaciones del quinto grado empleando el método teleológico de Wronski". Constará de cinco de ellas, que son las tres leyes fundamentales de las Matemáticas, las comunicó a la Clase de Ciencias del Instituto francés y en el informe presentado el lunes 15 de Octubre de 1810 por *Lagrange y Lacroix*, se resolvió que de la fórmula de *Wronski* se deducían, como casos particulares, todas las que se conocían hasta entonces; pero como en ese informe se le disminuía su generalidad, pidió reconsideración el autor, lo que produjo un desacuerdo, a lo que siguió una lucha en la que *Wronski* refutó la *Teoría de las funciones analíticas de Lagrange* en 1812 y criticó la *Teoría de las funciones generatrices de Laplace* en 1819; el Instituto decidió que el problema universal de las Matemáticas carecía de demostración y estaba en términos inintelegibles, según el informe de *Legrendre* y de *Arago* el lunes 11 de Noviembre de 1811. Habiendo publicado *Wronski* varias obras, entre ellas la *Introducción a la Filosofía de las Matemáticas* en 1811 y *Teoría de la Algoritmia* en 1815 a 1817 en que demostró que el Instituto no había comprendido sus importante descubrimientos; los académicos franceses se vengaron destruyendo las obras, hostilizando a *Wronski* y procurando que su nombre no pasase a la posteridad, lo que no han conseguido.

2. En 1812 *Wronski* publicó un opúsculo sobre la *Resolución*

---

partes: 1°. Introducción en que se perfila a ese notable filósofo y matemático, muy poco conocido; 2°. La resolución de Wronski en 1827, sin embargo de que hasta hoy algunos matemáticos creen que solo se puede resolver hasta las ecuaciones de cuarto grado; 3°. La demostración de su método que su autor ocultó por la polémica que sostuvo con los académicos de París a quienes refutó y criticó; 4°. Factores de un grado inmediato inferior, de manera que la ecuación de quinto grado se reduce a la de 4°. grado m menos uno; 5°. Factor de dos grados inferior al de las ecuaciones en que la de quinto grado se puede descomponer en el producto de una de segundo grado por otra de tercero; habiendo consistido en esto los trabajos infructuosos de otros matemáticos; 6°. ejemplo numérico, en que tomando las cifras del año 1918 como coeficiente de una ecuación de quinto grado, aplicando el método, obtiene que una de las raíces es 0' 124787, y dá la ecuación de cuarto grado cuya resolución dá las otras cuatro raíces. (N. de la D.)

general de las ecuaciones, que postergando el interés científico ante los intereses particulares se procuró que no se tomase en consideración. En 1827 en otro opúsculo titulado *Cánon de logaritmos,* aprovechando unas cuatro páginas se limitó *Wronski* a dar la resolución de la ecuación de quinto grado y finalmente en 1847 en el tercer tomo de la *Reforma del saber humano* insistió sobre la resolución general de las ecuaciones algébricas de todos los grados, empleando tres métodos: el primero fundado en el método supremo de las Matemáticas que llamó *método hevrístico;* el segundo que denominó *método fundamental,* en que dió la forma general de las raíces de todas las ecuaciones y el tercero es el *método especial* fundado en la ley teleológica, que descompone las ecuaciones en sus factores, que es el que vamos a exponer, traduciendo la publicación de 1827, porque esto dará una idea de la manera como procedió *Wronski* ante la gran oposición, que le hicieron los sabios franceses, en que ocultaba las demostraciones, daba las fórmulas generales y las aplicaciones en las que no se podía negar los resultados.

3. En 1886 el señor *Emilio West* publicó una exposición de los métodos generales en Matemáticas y la resolución e integración de las ecuaciones y aplicaciones diversas según *Hoené Wronski* que es la reunión de una serie de artículos publicados en el Diario de Matemáticas puras y aplicadas y dice en el prefacio: "Hoené Wronski hace treinta años que ha muerto y las causas que han desviado la atención de sus trabajos ya no existen, nuestra generación ya no se interesa en querellas ya antiguas y acogerá los trabajos verdaderamente notables de un sabio y profundo geómetra". Resuelve *West* siete problemas de ecuaciones diferenciales y acepta y defiende la distinción de la *Teoría* y de la *Técnica* debida enteramente a *Wronski,* no se trata de la distinción ordinaria de la teoría y de la práctica, como se cree, porque la *Teoría* contiene el conjunto de principios necesarios a una ciencia y la *Técnica* es el conjunto de los medios generales aplicables a los casos que se ofrecen en la práctica. *West* añade: los geómetras desde *Newton* y *Leibnitz* hasta principios del siglo XIX han cultivado la teoría y la técnica de las

Matemáticas, después se han dedicado exclusivamente hácia la teoría, lo que explica los resultados infructuosos que han obtenido para constituir métodos generales.

4. Al publicar el artículo de *Wronski* de 1827 sobre las ecuaciones de quinto grado, indicaremos que el autor llamó función *schin* a los determinantes actuales; funciones *aleph* a la potencia de la suma de varias cantidades, sustituyendo los coeficientes por la unidad, estas funciones las señalaba con las letras hebreas así llamadas; denominaba *agregados* a la suma del producto de las potencias de varias cantidades cuyos exponentes sumaban una cantidad constante; además empleaba la notación de los factoriales; *Vandermonde* en 1772 llamó al producto de los términos de una progresión aritmética: *potencias de segundo orden; Kramp* lo llamó *facultades numéricas; Arbogaste* distinguió a estos productos con el nombre de *factoriales* que generalizó *Wronski* para el producto de varias funciones en que la variable independiente formaba una progresión aritmética y lo llamaba *facultades algorítmicas.* Por ejemplo: el *determinante* que algunos indican colocando antes una D.

$$\begin{vmatrix} a. & a' \\ b. & b' \end{vmatrix} = a\,b' - b\,a' = D\,(a.b)$$

Wroski, en lugar de D ponía la letra hebrea *schin,* que como se ve es una suma combinatoria. A la suma de las potencias de varias cantidades, prescindiendo de los coeficientes y que no tienen nombre especial, las llamaremos *wroskianos,* marcándolos con la letra w, en lugar de la letra hebrea *aleph* empleada por *Wronski;* así:

$$W(1) = a + b \qquad W(2) = a^2 + b^2 + a\,b \qquad W(3) = a^3 + b^3 + a^2\,b + b^2\,a$$

$$W(4) = a^4 + b^4 + a^3\,b + b^3\,a + a^2\,b^2$$

poniendo después de w el exponente entre paréntesis. El agregado lo marcaba *Wronski* con las primeras letras de la palabra; así:

$$agreg.\ \frac{a.^p\,b.^2}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots q} \text{ con } p + q = n$$

siendo n un número entero dado; $p.$ $q.$ dos variables que suman n, cuyos valores se ponen en los elementos del agregado para hacer la suma. La notación de factoriales es poner como exponentes dos números, el primero indica el número de factores y el segundo la diferencia que se va agregando; así separados por una rayita vertical.

$$a.^{3|1} = a.(a+1).(a+2) \quad \text{es un } \textit{factorial}$$

$$\varphi(x)^{4|2}\ \varphi(x).\varphi(x+2).\varphi(x+4).\varphi(x+6) \quad \text{es una } \textit{facultad algoritmica}$$

En que la variable x va aumentando 2 sucesivamente y el número de las funciones es 4.

Esta notación es mejor que: 5' para el producto 1. 2. 3. 4. 5. que se escribe

$$1.^{5|1} = 1.2.3.4.5$$

que es una generalización del exponente, pues cuando la diferencia es cero se convierte en una potencia; así el factorial que tiene por exponente $3|2$; es un cubo cuando el 2 es cero

$$a^{3|2} = a.(a+2).(a+4) \qquad a^{3|0} = a^3$$

Los factoriales, tienen sus reglas especiales, para multiplicarlos, dividirlos, elevarlos a potencias y extracción de raíces, resultados que conducen a ciertos imaginarios.

II

Resolución de Wronski en 1827

5. He aquí la traducción: "Sea propuesta la ecuación general de quinto grado (1).

$$0 = x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E$$

y sean formadas con los coeficientes de esta ecuación, las funciones *alephs*, a saber: w(1), w(2), w(3),... etc.; que hemos enseñado a formar en el opúsculo (de 1812) sobre la Resolución general de las Ecuaciones y que según esta construcción, tienen por elementos las raíces de la ecuación propuesta (1). Pero debemos prevenir aquí, que las funciones alephs de exponente negativo no son todas iguales a cero, como lo habíamos creído cuando su descubrimiento. En el caso presente se tiene (2)

$$W(0)=1 \quad , \quad W(-1)=0 \quad , \quad W(-2)=0 \quad , \quad W(-3)=0 \quad , \quad W(-4)=0$$

$$W(-5)=\frac{1}{E}$$

y las funciones ulteriores de exponente negativo, siguen en su generación progresiva a la ley (3).

$$W(-\rho)=\frac{D}{E}.W(1-\rho)-\frac{C}{E}.W(2-\rho)+\frac{B}{E}.W(3-\rho)-\frac{A}{E}.$$

$$W(4-\rho)+\frac{1}{E}.W(5-\rho)$$

siendo p un número entero cualquiera. En cuanto a las funciones alephs de exponente positivo, hemos visto, en la indicada Resolución general de las ecuaciones bajo la marca (23) que la ley que sigue su generación progresiva, es esta (4).

$$W(\varphi)=A.W(\varphi-1)-B.W(\varphi-2)+C.W(\varphi-3)-D.W(\varphi-4)$$

$$+E.W(\varphi-5)$$

siendo φ de nuevo un número entero cualquiera y los presentes valores iniciales (2) deben igualmente ser aplicados a esta generación.

6. "Pero designando por u un número indefinidamente grande la resolución de la ecuación de quinto grado (1) es ofrecida inmediatamente por las dos ecuaciones de cuarto grado (5)

$$0=x.^4\,W(u-4)-x.^3\left\{A.W(u-4)-W(u-3)\right\}+x.^2\left\{W(u-2)-A.W(u-3)+B.W(u-4)\right\}-$$

$$-x\left\{D.W(u-5)-E.W(u-6)\right\}+E.W(u-5)$$

$$0 = x.^4\,W(-u-4) - x.^3 \left\{ A.W(-u-4) - W(-u-3) \right\} + x.^2 \left\{ W(-u-2) - A.W(-u-3) + B.W(-u-4) \right\} -$$
$$-x \left\{ D.W(-u-5) - E.W(-u-6) \right\} + E.W(-u-5)$$

La primera de estas ecuaciones conteniendo aquellas raíces de la propuesta (1) reales o ideales (imaginarias) que son las más pequeñas entre ellas y la segunda aquellas raíces que son más grandes entre ellas. En efecto, basta buscar los divisores comunes entre la propuesta (1) y las ecuaciones respectivas (5) para tener la solución completa del problema.

7. "Que los geómetras no se espanten de ver entrar en esta solución, cuando ella debe ser rigurosa, el número indefinidamente grande *u* pensando que las resoluciones de las ecuaciones de segundo, de tercero y de cuarto grado y generalmente todas las cantidades irracionales y transcendentales, cuando son considerados como determinadas rigurosamente no pueden ser concebidas de otro modo, que por números indefinidamente grandes contenidos explícitamente o a lo menos implícitamente en sus expresiones.

Por ejemplo, en la determinación rigurosa de la naturaleza del logaritmo natural de un número *n* que *Halley* ha dado por la bella expresión (6).

$$L.n = u\left(n^{\frac{1}{u}} - 1\right)$$

el número u, cuando esta determinación debe realmente ser rigurosa es un número indefinidamente grande; lo que no impide que no se pudiese tomar, para *u* un número finito, más y más grande para obtener por esta expresión (6), el valor del logaritmo del número *n* con una exactitud progresiva a voluntad más y más grande hasta el infinito.

8. "Todavía, nuestras actuales funciones alephs tienen la ventaja sobre todas las expresiones conocidas de las cantidades irracionales y transcendentes, en que para su evaluación y aún para su construcción en función de los coeficientes A. B. C. D. E. de la

ecuación propuesta (1) no exigen sino las primeras cuatro operaciones aritméticas. No tenemos aquí lugar para decir más sobre esta resolución general de las ecuaciones de quinto grado, sobre todo para lo que concierne a las diversas circunstancias de esta resolución, tales como la exclusión de las raíces iguales, la separación o introducción de una diferencia arbitraria entre las raíces, la reducción ulterior de las ecuaciones (5) y otras semejantes. Tampoco podemos discutir aquí el caso en que las raíces de la propuesta (1) reales o ideales, tengan la unidad por valor numérico; caso en que ellas puedan reducirse a un grado inferior. Nos limitaremos, por consiguiente, a prevenir esencialmente que para evitar que las ecuaciones reducidas no se vuelvan defectuosas en que sus coeficientes se reducen a cero, como sucede en ciertos casos, es necesario transformar la ecuación propuesta (1) en otra cuyo último término E, sea igual a la unidad, ecuación transformada que se debe considerar aquí como siendo de *ecuación normal* a la cual debe aplicarse este método de la resolución general de las ecuaciones. Y para aplicarse este método teniendo que resolver una ecuación cualquiera de quinto grado (7).

$$\Theta = z^5 - P.z^4 + Q.z^3 - R.z^2 + S.z - T$$

basta establecer entre su incógnita z y la incógnita x de la ecuación (1) a la cual es necesario aplicar el presente método transformándola así en ecuación normal la relación (8) $z = K - bx$ en la cual K es una cantidad arbitraria cualquiera comprendido el cero, y b una cantidad determinada por la expresión (9)

$$b = \sqrt{} \left\{ K^5 - P.K^4 + Q.K^3 - R.K^2 + S.K - T \right\}$$

Observando que la elección conveniente de la cantidad arbitraria K para facilitar los cálculos, por ejemplo, cuando en ciertos casos se determina esta cantidad arbitraria K por la ecuación (10).

$$\Theta = P.K^4 - QK^3 + R.K^2 - S.K + T$$

Sobre todo cuando en la ecuación propuesta (7) el coeficiente P es cero, como se puede siempre hacerlo, caso en el cual la relación (8) se vuelve simplemente (11).

$$z = K\ (1 - x)$$

Añadiremos aquí, que si se determina la cantidad arbitraria K por la ecuación

$$\Theta = K^5 - P.K^4 + Q.K^3 - R.K^2 + S.K$$

se tendrá al principio el valor $K = O$ y los otros valores de K se encontrarán así determinados por una ecuación de cuarto grado y entonces la resolución general (8) se volverá

$$z = K + x\sqrt[5]{T}$$

y sus cinco determinaciones diferentes bastarán para abrazar todos los casos. De esta manera, por la relación general (8), la ecuación (1) se volverá aquí la *ecuación normal*, mediante que su último término E se convierte así igual a la unidad y teniendo raíces diferentes, se tendrá entonces una parte que serán más grandes que la unidad y otra parte que serán más pequeñas que la unidad y por consiguiente las dos ecuaciones reducidas (5) hallarán entonces una explicación general e inmediata para esta ecuación normal (1) determinada de esta manera para que su último término sea $E = 1$.

9. "Por consiguiente, sin tener que buscar los divisores comunes entre la ecuación normal (1) y las dos ecuaciones reducidas (5), basta de resolver por los métodos conocidos estas reducidas (5) de cuarto grado, cuando sus coeficientes permanezcan constantes para diferentes valores del número arbitrario *u* más y más grandes, o bien en el caso contrario, sus reducidas ulteriores del tercero y aún de segundo grado, en los cuales estos coeficientes llegan a ser al fin constantes para todos los grandes valores de *u*.

Las raíces que se obtengan tendrán así una forma finita y no diferirán de aquellas, que se obtengan para las ecuaciones de los grados inferiores al quinto, sino en que ellas contendrán las nuevas funciones alephs, que precisamente volverán posible esta resolución superior de las ecuaciones del quinto grado y que para la práctica de los cálculos eminentemente simples pueden ser determinados tan exactamente como se le desee, dando al número arbitrario *u* valores más y más grandes."

10 "Después Wronski da las fórmulas generales para determinar la función aleph de un grado cualquiera positivo o negativo, en función de los coeficientes de la ecuación y termina diciendo:

"Concluimos este resumen, notando, que la presente resolución general de la ecuación de quinto grado, muestra claramente, porque hasta hoy no se ha podido lograr la resolución del problema. En efecto se ve sobre todo en las expresiones generales, que esta resolución superior exige *una generación algorítmica indefinida* por medio de los coeficientes de la ecuación propuesta; pero tal, que se pueda realizarla progresivamente con una exactitud a voluntad por exponente *u* más y más grandes generación indefinida que la ciencia en su imperfección actual no podía determinar *ni aún concebir*".

FEDERICO VILLARREAL
Profesor de la Universidad de Lima

(*Continuará*)