# OPERACIONES PRACTICAS DE ASTRONOMIA ESFERICA

(*Continuación*)

## *Primer método — Pasaje de la Luna por el meridiano*

Este consiste en observar la hora del pasaje de un borde de la Luna y aplicar el procedimiento que se indica claramente en la Connaissance des Temps (pág. 688 — año 1919). Un ejemplo hará ver el modo de operar.

El día 12 de enero de 1919, en Villa Allende, se observó el pasaje del borde Oeste de la Luna a las $9^h\ 02^m\ 43^s$, tiempo local. Se pide la longitud del lugar.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Pasaje | | $9^h\ 02^m\ 43^s$ | |
| | $\frac{D}{2}$ | $+\ 1^m\ 12^s,8$ | |
| Pasaje centro: | | $9^h\ 03^m\ 55^s,8$ | |
| Adelanto cronóm. | | $-\ 12^s,0$ | |
| Hora local paso | | $9^h\ 03^m\ 55^s,8$ | $= t$ |

$$t_o = 8^h\ 53^m\ 07^s \quad V_o = 148^s,5 \quad D_1 = +\ 0^s,4$$

$$\text{Valor aproximado de } m = \frac{t - t_o}{V_o} =$$

$$= \frac{9{,}03{,}43{,}8 - 8{,}53{,}07}{148{,}5} = \frac{10^m\ 36^s,8}{148{,}5} = \frac{636{,}8}{148{,}5} = 4{,}288$$

AÑO 8. Nº 3-4-5. MAYO-JUNIO-JULIO DE 1921



Valor exacto de $V$ =

$$V_o + \frac{m}{2p} D_1 = 148{,}5 + \frac{4{,}288}{12} 0{,}4 = 148{,}64$$

$$\left( m = \frac{\text{intervalo entre hora pasaje y hora tabular}}{\text{Variación para } 1^h \text{ de longitud}} \right)$$

$p = 6^h$

Luego la longitud será:

$$10^m\ 36^s{,}8 : 148{,}64 = \frac{636{,}80}{148{,}64} = 4^h{,}284 \qquad \text{y}$$

$$1 \doteq 4^h\ 17^m\ 03^s \text{ Oeste (Greenwich)}$$

---

*Segundo método — Por distancias lunares*

Consiste este método, como sabemos, en lo siguiente: medir con un instrumento de reflexión (sextante, círculo, etc.), la distancia entre los bordes iluminados del Sol, y de la Luna, o de este astro y un planeta o estrella, y simultáneamente las alturas de ambos, anotando con toda precisión la hora local de la observación. De este modo conoceremos solamente la *distancia aparente,* que debemos reducir a *verdadera* por cualquiera de los métodos conocidos.—Indicamos dos en los ejemplos que siguen.—En seguida calcularemos, por las fórmulas de Mr. Guyou, la hora correspondiente del primer meridiano (Greenwich), para esa distancia, y la diferencia entre ésta y la hora local nos dará la longitud que buscamos.—Conviene, para la mayor exactitud de los cálculos, tomar primero dos o tres alturas de Luna y otras tantas de Sol o del otro astro; en seguida, dos o tres distancias y después otras dos o tres alturas. El promedio de las primeras alturas lo consideraremos como alturas aparentes de ambos astros y el promedio de las horas de observación, como hora efectiva correspondiente a cada una de ellas. Idéntica cosa haremos con las distancias y con las alturas y horas que se tomaron después de medir aquellas.—Después, por interpolación, reduciremos las alturas a ser contemporáneas con el promedio de las horas de las distancias y obtendremos así, una altura aparente del borde de la Luna, una distancia entre ambos astros, otra altura del Sol o estrella y una hora *única* (el promedio de las correspondientes a las distancias lunares, como se ha dicho), como elementos para los cálculos subsiguientes. Después reduciremos las alturas a verdaderas, aplicando a la Luna las correcciones de refracción, paralaje, semidiámetro y al otro astro las que correspondan, y estaremos en condiciones de efectuar el cálculo de la *distancia verdadera,* y en seguida, la de la *hora del primer meridiano.*

*Ejemplo*:

El día 18 de noviembre de 1918, se tomó una distancia lunar entre este astro (borde Poniente) y Aldebarán, la que resultó ser igual a 7° 04' 00'' y la hora correspondiente local (la que indicaba el cronómetro en ese instante) $10^h 27^m 25^s$.—Además, se tomaron las siguientes alturas de ambos astros y horas correspondientes, antes de tomar la distancia lunar:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Aldebaran | ✱ | h = 31° 28' | Hora: | $10^h 21^m 30^s$ |
| Luna | $\underline{☾}$ | H = 27° 12' | » | $10^h 24^m 35^s$ |

después, la distancia lunar $\Delta$ y en seguida las alturas y horas que se indican a continuación:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Aldebarán | | h = 32° 33' | Hora: | $10^h 30^m 45^s$ |
| Luna | $\underline{☾}$ | H = 28° 08' | » | $10^h 31^m 41^s$ |

El *estado absoluto* del cronómetro, era el 10 de noviembre de 1918, igual a + $1^m 14^s$ y la *marcha diurna* + $2^s$.—Se pide la hora del *primer meridiano* (de Greenwich) y la *longitud.*

*Cálculos preparativos*

| | | |
|---|---|---|
| Aldebarán | $h = 31° 28'$ | Hora: $10^h 21^m 30^s$ |
| » | $h = 32° 33'$ | » $10^h 30^m 45^s$ |
| △ entre ☾ y Aldebarán $7° 04' 00''$ | | Hora: $10^h 27^m 25^s$ |
| ☾ $H = 27° 12'$ | | » $10^h 24^m 35^s$ |
| » $H = 28° 08'$ | | » $10^h 31^m 41^s$ |

Con estos datos de las observaciones, vàmos a transformar las alturas de los astros, de modo que sean contemporáneas con la distancia lunar; es decir, que vamos a determinar cuáles deben ser aquellas para la hora de la distancia lunar $(10^h 27^m 25)^s$, suponiendo que sus variaciones en alturas son proporcionales a los tiempos, lo que puede admitirse siempre que los intervalos sean pequeños, como en el caso actual, y así tendremos:

*Altura de Aldebarán*

$$(10^h 30^m 45^s - 10^h 21^m 30^s) : (32° 33' - 31° 28') : : (10^h 27^m 25 - 10^h 21^m 30^s) : x \quad 9^m 15^s : 1°^m 05^s : : 5^m 55^s : x$$

$$9^m, 15 : 1°, 083 : : 5^m, 91 : x = 0°, 699 = 0° 41' 56''$$

$$y \ h_a \,(\text{alt. apar.}) = 31° 28' 00'' + 0° 41° 56'' = \underline{32° 09' 56''}$$

*Altura de la Luna* (borde inferior)

$$(10^h 31^m 41^s - 10^h 24^m 35^s) : (28° 08' - 27° 12') :: (10^h 27^m 25^s - 10^h 24^m 35^s) : x = 0° 22' 18'' \quad y$$

$$\underline{☾} \ H = 27° 12' + 0° 22' 18'' = \underline{27° 34' 18''}$$

La altura al centro de la Luna será para ese día:

$$27° 34' 18'' + 0° 16' 29'' = 27° 50' 47'' \ (H_a)$$

(Ver C. des T. pág. 171).—

Semi-diámetro $\frac{1}{2}$ D $= 0° 16' 29''$

*Distancia lunar aparente*

La distancia del centro de la Luna a Aldebarán, será:

$$\triangle_a = 7^\circ\ 04' - 0^\circ\ 16'\ 29'' = 6^\circ\ 47'\ 31''$$

*Corrección de las alturas*

Aldebarán:

$$h_v = h_a - R\,(\text{refracción}) = 32^\circ\ 09'\ 56'' - 1'\ 35'' = 32^\circ\ 08'\ 21''$$

Luna:

$$H_v = (H - R) + P\,(\text{paral. en altura}) + \frac{D}{2}\,(\text{semi-diámetro})$$

$$H_v = (27^\circ\ 34'\ 18'' - 1'\ 55'') + 0^\circ\ 53'\ 33'' + 16'\ 29' = 28^\circ\ 42'\ 25''$$

*Resumen*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $h_v$ Aldebarán | $32^\circ\ 08'\ 21''$ | Hora: | $10^h\ 27^m\ 25^s$ |
| $H_v$ Luna | $28^\circ\ 42^\circ\ 25''$ | Hora: | $10^h\ 27^m\ 25^s$ |
| $\triangle_a$ (entre estrella y centro Luna) | | | |
| | $6^\circ\ 47'\ 31''$ | » | id |

*Hora corregida del conjunto de observaciones*

Hora del cronómetró: $10^h\ 27^m\ 25^s$

Estado absoluto el 10 Noviembre $+ 1^m\ 14^s$

Marcha diurna $+ 2^s$

Corr. para 8 días $(+ 2^s \times 8) = + 0^m\ 16^s$

Suma $= + 1^m\ 30^s$ — $0^h\ 01^m\ 30^s$

Hora media loc. $= 10^h\ 25^m\ 55^s$

*Cálculo de la distancia verdadera*

$(\triangle_v)$

Para ello emplearemos la fórmula que da Fracoeur en su Geodesie, (pág. 445).

Fórmulas:

(1) $\text{sen } \frac{1}{2} \triangle_v = \cos \frac{1}{2} ( h_v + H_v ) \cos \varphi$

$$(2) \quad \text{sen } \varphi = \frac{\sqrt{\frac{\cos h_v \cos H_v}{\cos h^a \cos H^a} \cos m \cos ( m - \triangle_a )}}{\cos \frac{1}{2} ( h_v + H_v )}$$

en las que:

$\triangle_v$ = distancia verdadera
$h_v$ = altura verdadera, astro (sol, planeta, estrella, etc)
$H_v$ = ” ” Luna
$h_a$ = altura aparente, astro (sol, planeta, etc.)
$H_a$ = ” ” Luna

$$m = \frac{h_a + H_a + \triangle_a}{2}$$

Para nuestro caso, tendremos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $h_a = 32^\circ\ 09'\ 56''$ | comp. log. cos $h_a$ | 0.0723661 | |
| $H_a = 27^\circ\ 50'\ 47''$ | » » $H_a$ | 0.0534480 | |
| $\triangle_a = 6^\circ\ 47'\ 31''$ | log. cos m | 9.9215976 | |
| $2m = 66^\circ\ 48'\ 14''$ | » cos $(m - \triangle_a)$ | 9.9513744 | |
| $m = 33^\circ\ 24'\ 07''$ | » cos $h_v$ | 9.9277596 | |
| $H_v + h_v = 60^\circ\ 50'\ 46''$ | » » $H_v$ | 9.9430432 | |
| $\frac{1}{2}(H_v + h_v) = 30^\circ\ 25'\ 23''$ | Suma | 9.8695889 | |
| log cos $\frac{1}{2} ( h_v + H_v )$ 9.9356634 | Mitad | 9.9347944 | |
| log cos $\varphi$ 8.8006964 | comp. log $\frac{1}{2} (h_v + H_v)$ | 0.0643366 | |
| log sen $\frac{1}{2} \triangle_v$ 8.7363598 | log sen $\varphi$ | 9.9991310 | |
| $\frac{1}{2} \triangle_v$ $3^\circ\ 07'\ 26''$ | $\varphi$ = | $86^\circ\ 22'\ 36''$ | |
| $\triangle_v = 6^\circ\ 14'\ 52''$ | | | |

## *Cálculo de la "hora de Greenwich" correspondiente y de la "longitud"*

La C. des T., hasta el año 1905, traían tablas que facilitaban mucho el cálculo de la hora; pero, debido a que este método se emplea poco, hoy, en la navegación, a causa de que, a bordo, por medio de la telegrafía sin hilos, puede obtenerse del puerto más próximo, la hora correspondiente a ese punto y deducir de ésta la hora del primer meridiano (Greenwich), se han suprimido aquéllas.—En consecuencia, no nos queda otro recurso que aplicar, sino el método de Mr. Guyou ú otro para ello. (Ver C. des T., pág. 771 — 1918).

Excuso entrar en explicaciones sobre estos métodos, por cuanto en la obra citada se exponen con toda precisión y claridad. Solo repetiremos que es necesario conocer aproximadamente la longitud del lugar, lo que siempre es posible, y que con horas que comprendan por defecto y por exceso la supuesta del primer meridiano, efectuaremos los cálculos correspondientes, que nos darán dos valores.—Interpolando, obtendremos la hora del *primer meridiano* que buscamos. Entonces el problema podemos plantearlo de la siguiente manera:

1°. — En Córdoba, longitud aproximada $4^h\,18^m\,50^s$ al Oeste de Greenwich, el 18 de noviembre de 1918 a $10^h\,25^m\,55^s$, tiempo medio local; la distancia verdadera de la Luna a Aldebarán, fué de $6°\ 14'\ 52''$.—Determinar la hora correspondiente a Greenwich y la longitud.

### *Aplicación del primer método*

Fórmulas:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sen}(S - P)\operatorname{sen}(S - P')}{\operatorname{sen} P \operatorname{sen} P'}$$

$$2S = \Delta_v + P + P'$$

en la que

A = diferencia de ascención recta de ambos astros.

P y P' = distancias polares de los mismos.

$\triangle_v$ = distancia lunar verdadera.

Siendo la longitud aproximada igual a $4^h\,18^m\,50^s$, la hora de Greenwich en el momento de la observación, será igual a $4^o\,18^m\,50^s + 10^h\,25^m\,55^s = 14^h\,44^m\,45^s$, más o menos.

Adoptando entonces para $t_1$ y $t_2$, $14^h\,40^m$ y $14^h\,50^m$, dispondremos el cálculo del siguiente modo:

| | $t_1$ | $t_2$ |
|---|---|---|
| Hora: | 14h 40m | 14h 50m |
| Var $\alpha$ (1m) | 2s, 6571 | 2s, 6570 |
| (1) $\alpha$ a 14h | 4h 18m 31s, 7 | 4h 18m 31s, 7 (pág. 125. C. des T.) |
| Corr. para 40 y 50 | 0h 01m 46s, 3 | 0h 02m 12s, 8 |
| (1) $\alpha$ | 4h 20m 18s | 4h 20m 44s, 5 |
| (2) $\alpha'$ | 4h 31m 18s, 2 | 4h 31m 18s, 2 |
| A | 0h 11m 0s, 2 | 0h 10m 33s, 7 |
| 1/2 A | 0h 05m 30s | 0h 05m 17s |
| 1/2 A (en arco) | 1° 22' 30" | 1° 19' 15" |
| Var $\delta$ (1m) | 2", 962 | 2", 962 |
| (3) $\delta$ a 14h | 22° 0' 13", 4 | 22° 0' 13", 4 |
| Corr. para 40 y 50 | 0° 1' 58", 4 | 0° 2' 28", 1 |
| (3) $\delta$ | 22° 02' 11", 8 | 22° 2' 41", 5 |
| (4) $\delta'$ | 16° 20' 53", 5 | 16° 20' 53", 5 |

| | 14h 40m | 14h 50m |
|---|---|---|
| P | 112° 02' 11", 8 | 112° 02' 41", 5 |
| P' | 106° 20' 53", 5 | 106° 20' 53", 5 |
| $\triangle_v$ | 6° 14' 52" | 6° 14' 52" |
| 2S = | 224° 37' 57" | 224° 38' 27" |
| S = | 112° 18' 58" | 112° 19' 13" |
| S—P = | 0° 16' 46" | 0° 16' 33" |
| S-P' = | 5° 58' 05" | 5° 58' 20" |

(1) ascensión recta Luna
(2) » » estrella
(3) declinación Luna
(4) » estrella

*Cálculo*

| | | |
|---|---|---|
| Log sen (S – P) | 7.6881711 | 7.6820849 |
| » » (S – P') | 9.0169246 | 9.0172266 |
| Col. sen P | 0.0329466 | 0.0329715 |
| Col. sen P' | 0.0179236 | 0.0179236 |
| Log sen² 1/2 A' | 6.7559659 | 6.7502064 |
| » sen 1/2 A' | 8.3779829 | 8.3751032 |
| 1/2 A' | 1° 22'.05'' | 1° 21' 33'' |

Por consiguiente, tenemos que:

$1/2\ A'_1 = 1°\ 22'\ 55''$ $\qquad 1/2\ A'_2 = 1°\ 21'\ 33''$

y (Ver pág· 76) $1/2\ A_1 = 1°\ 22'\ 30''$ $\qquad 1/2\ A_2 = 1°\ 19'\ 15''$

Aplicando la fórmula de interpolación:

$$t = t_1 + (t_2 - t_1)\frac{A'_1 - A_1}{(A'_1 - A_1) - (A'_2 - A_2)}$$

$$t = 14^h\ 40^m + \left[10^m \times \frac{2°\ 44'\ 10'' - 2°\ 45'\ 00''}{(2°\ 44'\ 10'' - 2.45) - (2°\ 43'\ 06'' - 2°\ 38'\ 30'')}\right]$$

$$t = 14^h\ 40^m + \left(10^m \times \frac{-50''}{-50'' - 4'\ 36''}\right) =$$

$$t = 14^h\ 40^m + 10^m\ \frac{50}{326} = 14^h\ 40^m + 1^m\ 32^s =$$

$$= 14^h\ 41^m\ 32^s$$

Por consiguiente, esta es la hora de Greenwich. Luego, la longitud será:

$$1' = 14^h\ 41^m\ 32^s - 10^h\ 25^m\ 55^s = 4^h\ 15^m\ 37^s \text{ Oeste}$$

*Aplicación del segundo método*

Fórmulas:

$$\operatorname{sen}\varphi\ \operatorname{sen}\frac{\Delta}{2} = \operatorname{sen}\frac{P + P'}{2}\ \operatorname{sen}\frac{A}{2}$$

$$\cos\varphi\ \operatorname{sen}\frac{\Delta}{2} = \operatorname{sen}\frac{P - P'}{2}\ \cos\frac{A}{2}$$

Para la aplicación de estas fórmulas, se efectúan los cálculos de la misma manera que en el primer método, hasta llegar a la determinación de P y P' y se prosiguen en la forma siguiente:

| | $14^h\ 40^m$ | $14^h\ 50^m$ |
|---|---|---|
| P + P' | 218° 23' 05" | 218° 23' 35" |
| P — P' | 5° 41' 18" | 5° 41' 48" |
| ½ (P + P') | 109° 11' 32" | 109° 11' 47" |
| △ | 6° 14' 52" | |
| ½ △ | 3° 07' 26" | |

*Aplicación de las fórmulas*

| | $(t_1)$ $14^h\ 40^m$ | | $(t_2)$ $14^h\ 50^m$ | |
|---|---|---|---|---|
| log sen ½ A | 8.3801384 | (1) | 8.3626869 | (1) |
| log sen ½ (P+P') | 9.9751657 | (2) | 9.9751546 | (2) |
| log cos ½ A | 9.9998749 | (3) | 9.9998850 | (3) |
| log sen ½ (P—P') | 8.6956540 | (4) | 8.6962892 | (4) |
| log sen φ sen ½ △ | 8.3553041 | (1+2) | 8.3378415 | (1+2) |
| log sen φ | 9.6186129 | (5) | 9.6035263 | |
| log cos φ sen ½ △ | 8.6955289 | (3+4) | 8.6961742 | (3+4) |
| log tg φ | 9.6597752 | $\left(\frac{1+2}{3+4}\right)$ | 9.6416672 | $\left(\frac{1+2}{3+4}\right)$ |
| φ | 24° 32' 12" | | 23° 39' 46" | |
| log sen ½ △ | 8.7366912 | ((1+2)-5) | 8.7343152 | |
| ½ $△_1$ | 3° 07' 35" | ½ $△_2$ | 3° 06' 33" | |

Luego tenemos que:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ½ △ | 3° 07' 26" | △ | 6° 14' 52" |
| ½ $△_1$ | 3° 07' 35" | $△_1$ | 6° 15' 10" |
| ½ $△_2$ | 3° 06' 33" | $△_2$ | 6° 13' 06" |

Aplicando la fórmula:

$$t = t_1 + (t_2 - t_1)\frac{\Delta - \Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1} =$$

$$= 14^h\,40^m + 10^m \times \frac{6^\circ\,14'\,52'' - 6^\circ\,15'\,10''}{6^\circ\,13'\,06'' - 6^\circ\,15'\,10''} = 14^h\,40^m + 10^m \times \frac{-18''}{2'\,04''}$$

$$= 14^h\,40^m + 10^m \times \frac{18}{124} = 14^h\,40 + \frac{180}{124} = 14^h\,40^m + 1^m\,27^s$$

$$= 14^h\,41^m\,27^s$$

y la longitud será:

$$1 = 14^h\,41^m\,27^s - 10^h\,25^m\,55^s = 4^h\,15^m\,32^s \text{ Oeste}$$

---

Hemos interpolado también para un intervalo $(t_2 - t_1) = 5^m$ y obtenido para $t$, $14^h\,41^m\,24^s$.

Adoptando para valor de $l$ el promedio aritmético, tenemos:

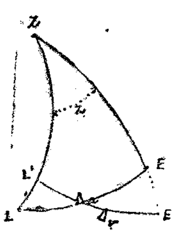
$$1 = 4^h\,15^m\,28^s$$

Si en vez de una distancia lunar, hubiéramos tomado varias, adoptando el promedio de los resultados para valor de la longitud, los errores se hubieran repartido y obtenido un valor más cerca del valor real de la hora del primer meridiano.

---

*Otro método para calcular* $\Delta_v$

Fig 10.




En el triángulo Z E L, sea *Z E* la *distancia zenital aparente* de la estrella, *Z L* la de la Luna y *L E* la *distancia lunar* aparente.— Vamos a calcular el ángulo *Z*.— Para ello emplearemos la siguiente fórmula:

S = perímetro

$$(1)\ \cos \tfrac{1}{2} Z = \sqrt{\frac{\text{sen } \tfrac{1}{2}\delta \times \text{sen } (\tfrac{1}{2}\delta - LE)}{\text{sen } LZ \text{ sen } EZ}} \text{ ; de donde}$$

$$\log \cos \tfrac{1}{2} Z = \tfrac{1}{2} (\log \text{sen } \tfrac{1}{2}\delta + \log \text{sen } (\tfrac{1}{2}\delta - LE) + \text{colog sen } LZ + \text{colog sen } EZ).-$$

Ahora, en este triángulo conocemos el ángulo $Z$, la *distancia zenital verdadera Z E' de la estrella* y la de la Luna $Z\ L'$; por consiguiente, podemos calcular $L'\ E'$ o sea $\Delta v$, aplicando las fórmulas siguientes:

$$(2)\ \cos L'E' = \frac{\cos ZE' \cos (ZL' - \varphi)}{\cos \varphi}$$

$$(3)\ \text{tg } \varphi = \text{tg } E'Z \cos Z$$

Primero calcularemos el valor de $\varphi$ con la fórmula (3) y después $L'E'$ ($\Delta v$) con la (2).

---

*Observación importante*: — Cuando en vez de emplear el sextante u otro instrumento de reflexión, trabajamos con el *teodolito*, se simplifica el cálculo de $\Delta v$, por cuanto al medir la distancia, no obtenemos la que figura en las fórmulas anteriores, como distancia aparente $\Delta v$, sino su proyección horizontal; es decir, que la que obtenemos es el valor del ángulo $Z$ directamente. Luego, nos bastará aplicar las fórmulas (2) y (3) únicamente, para tener la distancia verdadera $L'E' = \Delta v$.

---

*Indicaciones prácticas*: — Se procurará que las alturas de los astros sean próximamente iguales y no inferiores a 20°, para evitar los errores que se cometen en las correcciones de paralaje, refracción, etc.

Cuando el astro más elevado es el situado al Oeste, debe aguardarse para observar a que las alturas sean próximamente iguales.—Si es él más bajo, ha pasado ya el momento favorable y debe hacerse la observación lo más pronto posible.

Convendrá, para promediar, observar la distancia de la Luna a dos estrellas, situadas una al Este y la otra al Oeste de la Luna.

Para conocer si se ha cometido algún error de importancia al corregir la distancia, hay que tener presente que la diferencia entre la distancia *observada* y *verdadera,* no debe exceder de la suma de las correcciones que se aplican a las alturas aparentes centrales. En nuestro caso tenemos:

$\triangle_a - \triangle_v = 32' \ 39$ Correc. h (E) $+ \ 1' \ 35''$

" H (L) $+ \ 51' \ 38''$

$32' \ 39 < 53' \ 13''$ $+ \ 53' \ 13''$

Luego vemos que no hay errores de consideración que temer.

Los errores en la observación de las alturas no tienen influencia sensible en la longitud, si no exceden de 5'.—Por consiguiente, se procurará, lo que es fácil con un buen instrumento, obtener las alturas con 1' de aproximación.

Lo que debe procurar medirse con la mayor exactitud posible, son las distancias, por cuanto un error de 1', produce en la hora un error de $1^m, 56^s$, término medio. Por último, debemos observar que, cuando la longitud obtenida por distancias, difiere mucho de la estimada con que se halló la hora reducida y se calcularon los elementos de las efemérides, debe repetirse el cálculo.

He dado extensión a este método por ser muy elegante y porque con un poco de práctica, cuidado en las observaciones, y repetición de ellas, pueden obtenerse muy buenos resultados y reducir mucho el error de $1^m,56$, que hemos indicado.

# GRADO DE PRECISION DE LOS RESULTADOS

*(Errores probables)*

## MERIDIANA

Cuadro N.º 1

| Número de observacs. | Resultados (0) | Apartamientos ( E = o — x' ) | | Observaciones |
|---|---|---|---|---|
| | | + | — | |
| 1 | 13º 53' 00" | 0. 00. 09, 6 | ——— | |
| 2 | 13º 52' 42" | ——— | 0. 00. 08, 4 | |
| 3 | 13. 53. 08 | 0. 00. 17, 6 | ——— | |
| 4 | 13. 52. 34 | ——— | 0. 00. 16. 4 | |
| 5 | 13. 52. 48 | ——— | 0. 00. 02, 4 | |
| Totales $\lessgtr$ 0 = | 69. 24. 12 | 0. 00. 27, 2 | 0. 00. 27, 2 | |

$$\text{Promedio: } X' = \frac{\lessgtr 0}{N} = \frac{69.\ 24.\ 12}{5} = 13^{\circ}\ 52'\ 50''\ 4$$

Cuadro N.º 2

| Apartamientos (E') | Cuadrados apartamientos ( E'² ) | Nº de apartemientos iguales (n) | Productos ( n E'² ) |
|---|---|---|---|
| 2", 4 | 5, 76 | 1 | 5. 76 |
| 8", 4 | 70, 50 | 1 | 70. 50 |
| 9", 6 | 92, 10 | 1 | 92. 10 |
| 16", 4 | 268, 90 | 1 | 268. 90 |
| 17", 6 | 309, 80 | 1 | 309. 80 |
| Totales | ——— | N = 5 | $\lessgtr$ E'² = 747. 06 |

$$\text{Error medio cuadrático: } e_2 = \pm\sqrt{\frac{\lessgtr E'^2}{N-1}} = \pm\sqrt{\frac{747.\ 06}{4}} =$$

$$= \pm\ 13'',\ 6$$

Luego vemos que el error probable cometido, es de, más o menos, 14'', en la dirección de la meridiana.

Para tener una mayor seguridad, determinemos cuál debe ser el número de observaciones que se necesitan efectuar para tener aquella diferencia (o error).

La fórmula correspondiente, es:

$$N = \left(\frac{e}{e_m}\right)^2 \quad (A)$$

en la cual:

N = número de observaciones

e = error medio probable de una observación aislada.

$e_m$ = error que no queremos sobrepasar o grado de precisión de los resultados.

En nuestro caso, el mayor apartamiento es de 17'',6; para obtener el número de observaciones que es necesario efectuar para reducirle al error medio cuadrático $\pm$ 13'',6, reemplacemos en la fórmula (A) las letras por sus valores y tendremos:

$$N = \left(\frac{17.6}{13.6}\right)^2 = \frac{309.8}{184.96} = 2 \text{ observaciones más o menos.}$$

Veamos aplicando esta nueva fórmula, qué error corresponde para 5 observaciones, y tendremos:

$$e_m^2 = \frac{e^2}{N} = \frac{309.8}{5} = \pm 60.$$

$$e_m = \pm \sqrt{60} = \pm 7'',7$$

Podemos admitir, pues, que el error es menor que los 13'' hallados en la primera fórmula.

## LATITUD

(Cuadro I)

| Número de observacs. | Resultados (0) | Apartamientos $E' = o - X'$ | | Observaciones |
|---|---|---|---|---|
| | | + | − | |
| 1 | 31. 24. 56 | ——— | 0° 00. 06" | |
| 2 | 31. 25. 01 | ——— | 0. 00. 01" | |
| 3 | 31. 24. 50 | ——— | 0. 00. 12" | |
| 4 | 31. 24. 56 | ——— | 0. 00. 06" | |
| 5 | 31. 25. 12 | 0. 00. 10 | ——— | |
| 6 | 31. 25. 17 | 0. 00. 15 | ——— | |

Totales $\Sigma\, 0 =$ 188. 30. 12   0. 00. 25   0. 00. 25

$$\text{Promedio } X' = \frac{\Sigma\, 0}{N} = \frac{188.\ 30.\ 12}{6} = 31^{\circ}\ 25'\ 02''$$

(Cuadro II)

| Apartamientos (E') | Cuadrados apartamientos ($E'^2$) | Nº de apartamientos iguales (n) | Productos ($n\, E'^2$) |
|---|---|---|---|
| 1", 0 | 1.00 | 1 | 1.00 |
| 6", 0 | 36.00 | 2 | 72.00 |
| 10", 0 | 100.00 | 1 | 100.00 |
| 12", 0 | 144.00 | 1 | 144.00 |
| 15", 0 | 225.00 | 1 | 225.00 |
| Totales: | ——— | N. = 6 | $\Sigma\, E'^2 = 542.00$ |

$$\text{Error medio cuadrático: } e_2 = \pm \sqrt{\frac{\Sigma\, E'^2}{N - 1}} = \pm \sqrt{\frac{542.00}{5}}$$

$$= \pm\ 10'',4$$

## LONGITUD

(Cuadro I)

| Número de observacs. | Resultados (0) | Apartamientos ($E' = 0 - X'$) + | Apartamientos ($E' = 0 - X'$) — | Observaciones |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $4^h$ 16. 48 | ——— | 0. 00. 02 | |
| 2 | 4. 16. 45 | ——— | 0. 00. 05 | |
| 3 | 4. 16. 50 | 0. 00. 00 | 0. 00. 00 | |
| 4 | 4. 16. 52 | 0. 00. 02 | ——— | |
| 5 | 4. 16. 48 | ——— | 0. 00. 02 | |
| 6 | 4. 16. 56 | 0. 00. 06 | ——— | |
| 7 | 4. 16. 53 | 0. 00. 03 | ——— | |
| 8 | 4. 16. 47 | ——— | 0. 00. 03 | |
| 9 | 4. 16. 51 | 0. 00. 01 | ——— | |
| Totales: $\Sigma 0 =$ | 38. 51. 50 | 0. 00. 12 | 0. 00. 12 | |

Promedio: $X' = \frac{\Sigma\, 0}{N} = \frac{38.\,51.\,30}{9} = 4^h\ 16^m\ 50^s$

(Cuadro II)

| Apartamientos ($E'$) | Cuadrados apartamientos ($E'^2$) | Nº de apartamientos iguales ($n$) | Productos ($n\ E'^2$) |
|---|---|---|---|
| $1^s$ | 1 | 1 | 1 |
| $2^s$ | 4 | 3 | 12 |
| $3^s$ | 9 | 2 | 18 |
| $5^s$ | 25 | 1 | 25 |
| $6^s$ | 36 | 1 | 36 |
| Totales: | ——— | $N = 8$ | $\Sigma E'^2 = 92$ |

Error medio cuadrático: $e_2 = \pm \sqrt{\frac{\Sigma E'^2}{N-1}} = \pm \sqrt{\frac{82}{7}} =$

$= \pm\ 3,^s 6$

## RESÚMEN

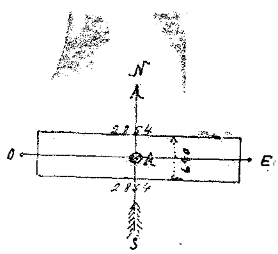
Los errores medios cuadráticos, son los siguientes:

| | |
|---|---|
| En la meridiana | $\pm$ 13'',6 |
| En la latitud | $\pm$ 10'',4 |
| En la longitud | $\pm$ $3^s$,6 |

Si se considera que el instrumento empleado apreciaba solo *minutos,* pueden notarse los buenos resultados obtenidos en el presente trabajo.

En cuanto a la situación verdadera del punto de observación, puede decirse que no sale del rectángulo siguiente, orientado de Norte a Sur y cuyas dimensiones son: 2854 m. de Este a Oeste y 640 m. de Norte a Sur.

Fig. 11.




$$A = \text{punto de estación} \begin{cases} \varphi = \pm\ 31.25.02.\ S \\ 1 = \pm\ 4^h\,16.50.\ O \end{cases}$$

*Observación*: — La verdadera posición del punto y que, mi ilustrado colega y amigo Ing. Juan Morra, me ha proporcionado, obteniéndola de muchos trabajos efectuados, es:

$$\varphi = -\ 31^\circ\ 24'\ 42''$$
$$1 = \quad 4^h\ 16^m\,.\ 47^s$$

Como vemos, hay en la latitud una diferencia en *más*, de 20'' y $3^s$ también en *más* en la longitud.

Vuelvo a repetir: el instrumento empleado apreciaba minutos y el cronómetro era un buen reloj de bolsillo.

Si el instrumento hubiera sido un teodolito de apreciación angular de 20'', los apartamientos podrían haberse reducido al tercio y obtener con el mismo número de observaciones anteriores, una aproximación de la mitad, más o menos, de los errores probables calculados. Es claro que, multiplicando las observaciones, podríamos llegar a resultados de una precisión más que suficiente para las necesidades corrientes de las operaciones geodésicas.

---

## CONCLUSION

Del estudio precedente, se deduce que, para obtener las coordenadas del punto, debe procederse en el siguiente orden:

1° — A la determinación de la meridiana:

a) Por alturas correspondientes;

b) Por mayores elongaciones (método de las 4 tangentes).

2° — A la determinación de la latitud (por alturas zenitales):

3° — A la determinación nuevamente de la meridiana:

a) Por alturas absolutas (conociendo $\varphi$);

b) Por mayores elongaciones (conociendo $\varphi$).

Repetir después estas observaciones el número de veces que sea necesario para obtener muchos valores y tomar su promedio.

En seguida, se determinará:

4° — La hora local por el paso de una estrella por el meridiano, ya sea conociendo aproximadamente la longitud del lugar o la hora del primer meridiano en el instante de la observación, o bien por el pasaje del sol, si no se conocieran ninguno de esos elementos.—Después, se procederá a la determinación:

5° — De la latitud:

a) Por alturas equizenitales;
b) Por mayores elongaciones;
c) Por alturas circunmeridianas;
d) Por reducción al meridiano;
e) Por una altura y conocimiento del tiempo.

El promedio de estos resultados será la latitud del punto de observación.

En seguida se determinará la longitud, calculando la hora local por los siguientes métodos (si se conoce la hora del primer meridiano):

a) Pasajes de astros por el meridiano;
b) Alturas correspondientes;
c) Alturas absolutas.

Si no se conoce la hora del primer meridiano, se determinará la longitud por:

A) Pasajes de la luna por el meridiano;
B) Distancias lunares.

Los promedios aritméticos de los resultados de la serie de observaciones y sus cálculos, los adoptaremos como coordenadas del punto de estación.

---

Finalmente calcularemos los errores probables cometidos, para saber el grado de precisión de los resultados obtenidos.

(*Continuará*)

FRANCISCO ROQUE
Ingeniero Civil