

DESFORMACION DE LOS SISTEMAS PLANOS

POR

Carlos A. Ninci

Ingeniero Civil

Profesor Titular de Estabilidad de Construcciones en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

PROLOGO

Al reunir en este folleto, a manera de acotaciones de Clase, todo cuanto me es posible presentar al lector una ordenación clara sobre el tema **Desformación de los Sistemas Planos**, no pretendo en modo alguno escribir un texto completo, sino más bien juntar en un solo trabajo, los Apuntes que en forma dispersa he publicado en la "Revista de la Universidad" y en el "Boletín de la Facultad", ampliando o aclarando los conceptos, introduciendo modificaciones que simplifican y generalizan los procedimientos y realizando algunos ejercicios aclaratorios sobre todo en la que se refiere al manejo de las unidades en que deben medirse las magnitudes numéricas que se utilizan.

Sobre el tema que tratamos existe una copiosa y erudita bibliografía pero las circunstancias por que atraviesa actualmente el mundo, la aleja del alcance del estudiante en particular y del profesional en general.

He creído prudente, dedicar un primer capítulo al estudio de la cinemática de la chapa rígida, con el fin de establecer los elementos básicos indispensables para seguir sin dificultades el es-

tudio que realizamos, admitiendo una sola notación y una convención de signos uniforme en todo su desarrollo.

Daremos preferente atención a los métodos gráficos sin restar importancia a los procedimientos analíticos que en la mayoría de los casos son los fundamentos de aquéllos.

Si este trabajo es de utilidad a profesionales y a estudiantes, habríanse satisfecho las más caras aspiraciones y anhelos de quien, como yo, tiene el alto honor de pertenecer al Profesorado de la Facultad.

Córdoba, Diciembre de 1944.

Carlos A. Ninci.

INTRODUCCION

El conocimiento de las deformaciones que experimenta una estructura constructiva como consecuencia de la elasticidad de su material y en virtud de los esfuerzos que sobre ella provocan las fuerzas exteriores que la solicitan (cargas y reacciones) y que por principio de **estabilidad** deben formar un conjunto en equilibrio, lleva al ingeniero a la solución de un doble problema: establecer la forma final que adquiere la estructura una vez que ha llegado al estado de equilibrio entre fuerzas y deformaciones, es decir, establecer numéricamente los **desplazamientos**, en magnitud, dirección y sentido, de cada uno de los puntos del sistema, y finalmente, abrir un camino claro, fácil y preciso para dar solución a aquellos sistemas que en razón de contener vínculos superabundantes, presentan más de **tres** incógnitas a la solución estática, tornándose insuficiente la aplicación de las conocidas ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma M (F) = 0 \quad ; \quad \Sigma F_x = 0 \quad ; \quad \Sigma F_y = 0$$

La primera cuestión.—el conocimiento de los desplazamientos en sí— no presenta un interés inmediato, desde que sabemos de antemano que si hemos proyectado una estructura dimensionándola de modo tal que las **fatigas** (σ) o esfuerzos moleculares internos están por debajo del **límite de elasticidad** del material y aún más, están dentro de los valores que la práctica y la prudencia aconsejan adoptar, las deformaciones **elásticas** que experimentará aquella estructura, no podrán jamás llegar a provocar su destrucción ni siquiera atentar contra su estética.

El conocimiento de tales desplazamientos es de utilidad como

elemento de comprobación una vez la obra ejecutada y sometida a las cargas previstas en su cálculo, comprobación que puede ser de orden puramente científico para estudiar exactitud o eficacia del cálculo, o de orden práctico para cerciorarse de la calidad de los materiales.

La segunda cuestión —la solución de los sistemas hiperestáticos o estáticamente indeterminables— presenta en cambio, un enorme interés, desde que el estudio de las deformaciones es el **único** camino que conduce a establecer las $(n - 3)$ ecuaciones que hacen falta, a más de las de estática, para determinar las (n) incógnitas.

Es frecuente dimensionar algunas estructuras, como los sistemas en enrejado, por ejemplo, introduciendo en los cálculos ciertas hipótesis simplificativas tendientes a hacerlos menos laboriosos o a dar al problema una primera solución aproximada. Si esas hipótesis no se realizan al ejecutar la obra, o sea realizan parcial o imperfectamente, aparecen en los miembros de la estructura, esfuerzos **secundarios** adicionales que es necesario investigar y que sólo pueden ponerse en evidencia mediante el estudio de las deformaciones del sistema y hé aquí, entonces, otro aspecto interesante del estudio que realizamos.

Los sistemas hiperestáticos encuentran propicio campo de aplicación en la concepción de grandes estructuras, debido a su gran rigidez y estabilidad de forma y por la apreciable economía de material que con ellas se consigue. Sin embargo, debe evitarse el empleo de estructuras de esta naturaleza, toda vez que no se tenga la certeza de la inmovilidad de los apoyos, pues los asentamientos del terreno de fundación sobre todo, provocan efectos que posiblemente no hayan sido tenidos en cuenta en el cálculo, dando lugar a fatigas adicionales, muchas veces de importancia.

Para realizar el estudio que nos proponemos, hemos de considerar que todas las fuerzas que actúan sobre la estructura están contenidas en el plano de su eje longitudinal, vale decir que solamente se desarrollan en las secciones, momentos flectores (M) ,

esfuerzos de corte (T), esfuerzos normales (N) y que en ningún caso hay torsión.

Dejaremos establecido una vez para siempre, que en lo sucesivo consideraremos solamente las deformaciones elásticas que provocan desplazamientos **infinitésimos**, que desaparecen totalmente cuando cesa la causa que los origina.

Finalmente: con respecto a las fuerzas exteriores, debemos aceptar:

a) Que ellas estran a actuar sobre el sistema en forma gradualmente creciente desde cero hasta su intensidad final;

b) Que durante la acción progresiva de las fuerzas, no se producen saltos bruscos ni choques que provoquen variación de fuerza viva;

c) Que a pesar de que los puntos de aplicación de las fuerzas, experimenten desplazamientos, aquéllas conservan la misma posición que la que tenían antes de producirse la deformación del sistema.

Demás está decir que como consecuencia de lo establecido al principio de este párrafo, el estudio de las deformaciones se llevará sobre estructuras dimensionadas en base a fatigas que no sobrepasen los valores adoptados en la práctica de la construcción. A tales estructuras, puede aplicarse la ley de Clapeyron relativa al trabajo de deformación

$$T = \frac{1}{2} \sum P \cdot \delta$$

en la que (P) es una fuerza y (δ) es el desplazamiento de su punto de aplicación, proyectado sobre su dirección.

CAPITULO I

DESPLAZAMIENTO DE LA CHAPA RIGIDA

1. — **Movimiento del punto.** — Designaremos con el nombre de **chapa rígida**, o simplemente con el de **chapa**, una superficie material no susceptible de cambiar de forma bajo la acción de las causas que le imprimen o tiendan a imprimirle un movimiento cualquiera. Podemos definirla también diciendo que es un conjunto de puntos materiales cuyas distancias mutuas permanecen invariables.

El movimiento de un punto (a) de una chapa (Fig. 1) que-

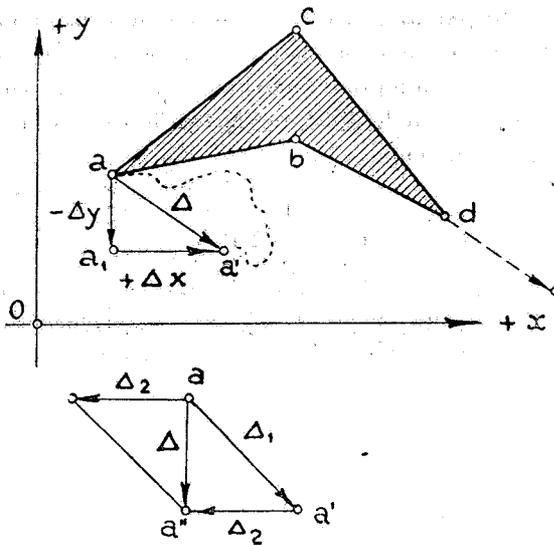


Fig. 1

da definido por un vector ($a \rightarrow a' = \Delta$) que determina las posiciones inicial y final del mismo, en magnitud, dirección y sentido y con independencia del camino recorrido durante ese movimiento. El valor numérico de (Δ) se llama **desplazamiento** del punto (a) de la chapa.

Si por una causa cualquiera, el punto (a) experimentara un desplazamiento (Δ_1) y por otra causa experimentara otro desplazamiento (Δ_2), el desplazamiento total será el que resulte de **componer** ambos vectores, o sea el resultante de sumarlos vectorialmente. En efecto: imaginemos que aplicamos primeramente la causa que provoca (Δ_1) con lo cual el punto (a) pasará a la posición (a'); enseguida, hagamos actuar la causa que provoca (Δ_2) con lo cual el punto —ahora en (a')— pasa a su posición final (a''). El desplazamiento será ahora ($a \rightarrow a'' = \Delta$); inversamente: un desplazamiento puede descomponerse en dos direcciones daads.

Para que el desplazamiento de un punto quede más claramente definido, es conveniente referirlo a un sistema de ejes coordenados y tomar sus componentes (Δx) y (Δy) según las respectivas direcciones, atribuyéndoles los signos correspondientes. Así, los desplazamientos de (a) serán: ($a_1 = -\Delta y$); ($a_1 a' = +\Delta x$).

Si otro punto de la chapa se desplazara de una cantidad igual, paralela y del mismo sentido que (Δ), la chapa experimentará una **traslación**.

El movimiento de una chapa quedará determinado cuando se conozcan los desplazamientos de dos de sus puntos, o lo que es lo mismo, las respectivas componentes.

• 2. — **Rotación**. — Sea (Fig. 2) una chapa rígida (a b c d) que por una causa cualquiera ha pasado de su posición inicial o primitiva, a su posición final ($a' b' c' d'$).

El desplazamiento (Δa) del punto (a) puede ser considerado como que (a) describa un arco de círculo cuyo centro (O_a) debe estar sobre una recta normal a ($a a'$) y trazada por su punto medio. Esta recta será el lugar geométrico de los infinitos centros de rotación en torno de los cuales puede girar el punto (a).

En igual forma, el desplazamiento (Δd) del punto (d) puede ser considerado como un arco de círculo cuyo centro (O_b) debe estar sobre una recta normal a ($d d'$) y trazada por su punto medio. Esta recta será el lugar geométrico de los infinitos centros de rotación en torno de los cuales pueda girar el punto (d).

Pero la rigidez de la chapa exige que durante el movimiento se mantenga invariable la distancia ($a d$) entre los dos puntos con-

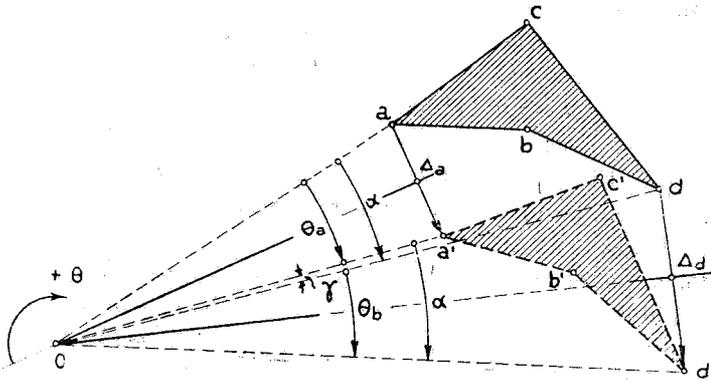


Fig 2

siderados y para que esta condición se verifique, es necesario que los arcos de círculo descriptos por ambos puntos, sean concéntricos; el centro común no puede estar sino en la intersección (O) de las rectas antes mencionadas. Este punto se llama **polo** del movimiento y el giro de la chapa en torno de él, se llama **rotación** y está expresada por un ángulo.

Pueden enunciarse, entonces, los siguientes principios fundamentales:

- a) el desplazamiento de una chapa rígida puede considerarse como una rotación en torno de un polo único;
- b) en el desplazamiento de la chapa, el polo no experimenta desplazamiento alguno.

Llamaremos rotaciones positivas ($+ \theta$) aquellas que hagan gi-

rar la chapa en el sentido del movimiento de las agujas del reloj, y negativas ($-\theta$) a las que la hagan girar en sentido contrario.

Sean ahora:

θ_a la rotación del punto (a)

θ_d la rotación del punto (d)

Producido el desplazamiento de la chapa, en virtud de su rigidez, el ángulo (a.O.d) debe ser igual al ángulo (a'.O.d'); sea (γ) el ángulo (a'.O.d). La figura nos da:

$$\alpha = \theta_a + \gamma$$

$$\alpha = \theta_b - \gamma$$

de donde

$$\theta_a = \theta_b$$

es decir que en el desplazamiento de la chapa rígida, todos los puntos experimentan igual rotación, que llamaremos (θ).

3. — **Desplazamientos infinitésimos.** — Imaginemos ahora (Fig. 3) que la chapa, en virtud de la rotación (θ) efectúa un movimiento en torno del polo (O).

Puesto que hemos de considerar en lo sucesivo, desplazamientos pequeños con relación a las dimensiones de la chapa, podemos reemplazar el arco de círculo descrito por el punto (a), por ejemplo, y cuyo centro es el polo (O), por su proyección sobre la tangente en (a), de tal manera que el desplazamiento, en vez de ser (a a') sea (a a'') puesto que son cantidades prácticamente iguales. Se tiene entonces:

$$\Delta_a = a \rightarrow a''$$

y este desplazamiento muy pequeño se denomina **desplazamiento infinitésimo**. La rotación (θ) es también muy pequeña por lo cual se llama rotación infinitésima.

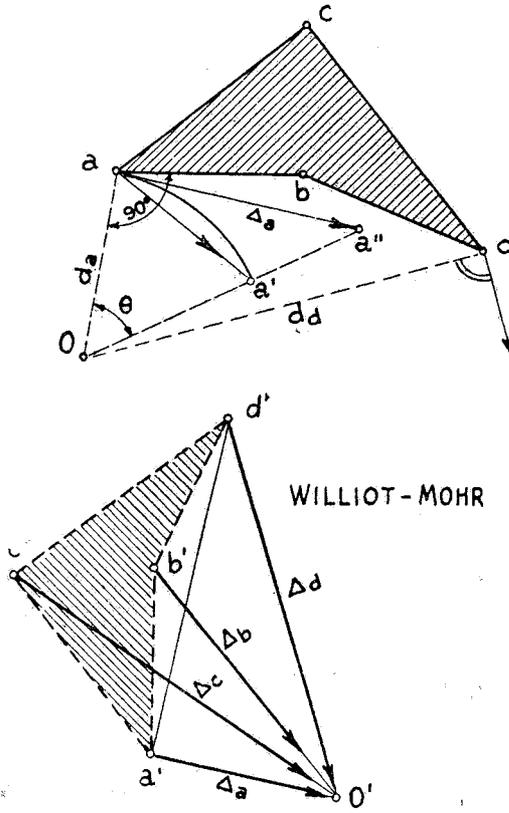


Fig. 3

Sea (d_a) la distancia del polo al punto (a). La figura nos da

$$\frac{\Delta_a}{d_a} = \text{tg. } \theta$$

pero tratándose de cantidades infinitésimas, se puede poner.

$$\text{tg. } \theta = \sim \theta$$

de donde:

$$\frac{\Delta_a}{d_a} = \theta \quad \therefore \quad \Delta_a = \theta \cdot d_a$$

lo cual nos dice que la rotación se mide ahora por un número abstracto o sea por la tangente trigonométrica del ángulo.

Como hemos dicho que la rotación (θ) es la misma para todos los puntos de la chapa, tendremos:

$$\Delta_a = \theta \cdot d_a$$

$$\Delta_b = \theta \cdot d_b$$

$$\Delta_c = \theta \cdot d_c$$

$$\Delta_d = \theta \cdot d_d$$

de las que se deduce, en función de (Δ_a)

$$\Delta_b = \Delta_a \frac{d_b}{d_a}$$

$$\Delta_c = \Delta_a \frac{d_c}{d_a}$$

$$\Delta_d = \Delta_a \frac{d_d}{d_a}$$

Estos dos últimos grupos de expresiones, nos permiten establecer los dos principios fundamentales siguientes relativos a desplazamientos infinitésimos:

- a) Los desplazamientos son proporcionales a las respectivas distancias de los puntos, al polo.
- b) Conocida la posición del polo con respecto a la chapa, o sean conocidas las distancias (d), y el desplazamiento de **un punto**, quedan determinados los desplazamientos de todos los demás puntos. Además, el desplazamiento de un punto **es normal** a la recta que lo une con el polo.

a) Los principios anteriormente enunciados permiten la determinación gráfica del desplazamiento de todos los puntos de una chapa, mediante el llamado diagrama o polígono de Williot-Mohr.

Supongamos conocido el desplazamiento (Δ_a). Por un punto cualquiera (O') llamado también polo), llevemos **hacia él** un vector que lo represente en una determinada escala. Por el mismo polo (O') llevemos rectas indefinidas ($O b'$), ($O c'$) etc., paralelas a las **direcciones** de los desplazamientos de los puntos (b), (c) etc., es decir, normales a las rectas ($O b$), ($O c$) etc.

Si por (a') llevamos una perpendicular a la recta que une (a) con (d), por ejemplo, se encuentra el punto (d') y como los triángulos ($O a d$) y ($O' a' d'$) son semejantes, se tiene:

$$\frac{d' O'}{d_a} = \frac{\Delta_a}{d_a}$$

de donde

$$d' O' = \Delta_a \frac{d_a}{d_a}$$

o sea que; según lo hemos visto:

$$d' O' = \Delta_d$$

con lo que está determinado el desplazamiento del punto (d).

Procediendo en igual forma con todos los puntos de la chapa se obtiene la figura ($a' b' c' d'$), semejante a la figura ($a b c d$), que hace con ella un ángulo de 90° . y da en magnitud, dirección y sentido, los desplazamientos de todos los puntos de la chapa.

Haremos notar aquí, que para el Williot-Mohr, o sea para encontrar la figura semejante, sólo sería necesario determinar un punto cualquiera, el (d') por ejemplo. Para hallar (c') llevaríamos ($a' c'$) \perp ($a c$) y ($d' c'$) \perp ($d c$) y tendríamos ($c' O' = \Delta_c$) y así para los demás puntos.

El trazado de Williot-Mohr es fundamental en el estudio de la deformación de los sistemas planos, en alma llena, en enrejado o mixtos y en adelante su aplicación será frecuente.

4. — **Representación de los desplazamientos.** — Hemos visto en el N°. 1 que para que un desplazamiento quede claramente determinado, conviene referirlo a dos ejes coordenados y definirlo por sus componentes (o proyecciones) según las direcciones y sentidos de ellos.

Sea (Fig. 4) una chapa que experimenta una rotación (θ) en torno del polo (O).

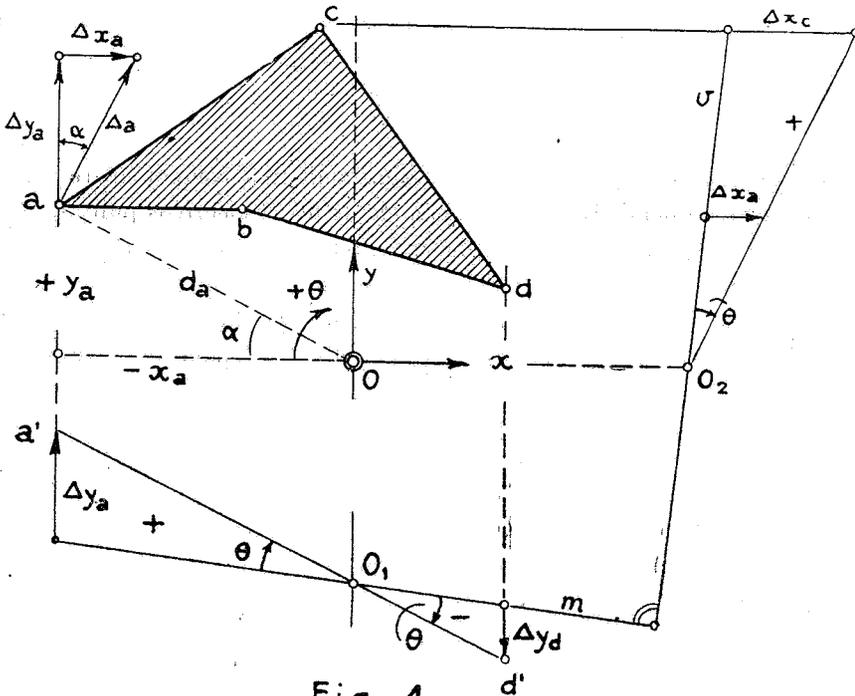


Fig. 4

El desplazamiento de (a) es

$$\Delta_a = \theta \cdot d_a$$

y si lo descomponemos en uno vertical y en otro horizontal, tenemos

$$\begin{aligned}\Delta y_a &= \Delta a \cdot \cos \alpha = \theta \cdot d_a \cdot \cos \alpha \\ \Delta x_a &= \Delta a \cdot \sin \alpha = \theta \cdot d_a \cdot \sin \alpha\end{aligned}$$

pero.

$$\begin{aligned}d_a \cdot \cos \alpha &= x_a \\ d_a \cdot \sin \alpha &= y_a\end{aligned}$$

o sea a las coordenadas de (a) según ejes cuyo origen es el polo (O), luego:

$$\begin{aligned}\Delta y_a &= \theta \cdot x_a & \frac{\Delta y_a}{\Delta x_a} &= \frac{x_a}{y_a} \\ \Delta x_a &= \theta \cdot y_a\end{aligned}$$

con lo que se expresa que los desplazamientos componentes son funcionales lineales de las coordenadas de los respectivos puntos.

Para representar los desplazamientos (Δy) bastará entonces, tomar una línea de referencia (m) cualquiera, preferentemente horizontal y sobre ella, en la vertical de (a), llevar a escala el desplazamiento (Δy_a). Bajaremos la vertical del polo hasta su encuentro en (O_1) con (m) y trazaremos la recta ($a'O_1$) cuyas ordenadas representan los desplazamientos (Δy) de todos los puntos de la chapa.

En efecto: para el punto (d) tenemos

$$\Delta y_d = \theta \cdot x_d$$

y la figura nos da:

$$\frac{\Delta y_d}{x_d} = \frac{\Delta y_a}{x_a} \quad \therefore \quad \Delta y_d = \Delta y_a \frac{x_d}{x_a}$$

Lo mismo: los desplazamientos horizontales (Δx) pueden referirse a una recta (v) a partir de la cual se llevará ($\Delta x_a = \theta \cdot y_a$); la recta que pasando por el polo (O_2) dará los desplazamientos horizontales de todos los puntos de la chapa.

Si observamos la figura, vemos que de una manera general,

los desplazamientos están dados en magnitud y sentido por las expresiones:

$$\begin{array}{l} \Delta y = - \theta \cdot x \\ \Delta x = + \theta \cdot y \end{array} \quad (1)$$

quedando sujeto, el signo del desplazamiento, al signo de (θ) , (x) é (y) .

Se puede formar así el siguiente cuadro:

θ	x	y	Δy	Δx
+	+	+	-	+
+	-	+	+	-
+	+	-	-	+
-	+	+	+	-
-	-	+	-	+
-	+	-	+	-
+	-	-	+	-
-	-	-	-	+

Supongamos ahora, colocado en el polo (O) un vector $(+\theta)$ actuando según el eje de las (y) ; su momento estático con respecto al punto (a) es

$$m_y = - \theta \cdot x_a$$

y según las ecuaciones (1) se tendrá

$$\Delta_y = - (+ \theta) \cdot (- x_a) = + \theta \cdot x_a$$

o sea:

$$\Delta_y = - m_y$$

Si suponemos aplicado en el polo, un vector $(+ \theta)$ actuando según el eje de las (x) , su momento estático con respecto al punto (a) será

$$m_x = - \theta \cdot y_a$$

y como

$$\Delta_x = + (+ \theta) \cdot (+ y_a) = + \theta \cdot y_a$$

$$\Delta_x = - m_x.$$

De ello deducimos la siguiente regla general para conocer el signo de un desplazamiento: **El signo del desplazamiento según una dirección dada, es contrario al signo del momento estático de un vector (θ) colocado en el polo y de la misma dirección.** Debe tenerse presente el signo de (θ) para asignarle sentido al vector.

Los dos diagramas representativos de los desplazamientos verticales y horizontales de los puntos de la chapa, se denominan **elaciones** y también **elásticas** aunque esta última denominación parece adolecer aquí de alguna impropiedad, pero más adelante, al estudiar los desplazamientos originados por la elasticidad del material, hallaremos la razón de llamarlas así.

a) El polígono funicular nos proporciona también un medio interesante y de gran aplicación, para determinar los desplazamientos de una chapa conociendo la posición del polo y la rotación (θ) .

Sea (Fig. 5) la chapa que experimenta la rotación $(-\theta)$ en torno del polo (O). Imaginemos que en el polo aplicamos un vector vertical igual en magnitud y signo a la rotación. Como sabemos, la expresión

$$\Delta y_a = \theta \cdot x_a$$

expresa el **momento estático** de este vector con respecto al punto (a). Tomemos entonces a una escala cualquiera el valor de la rotación y con distancia polar arbitraria (H) dibujemos el funicular de lados (1) y (2), el que por lo que sabemos nos dará

$$\Delta y_a = \eta_a \cdot H$$

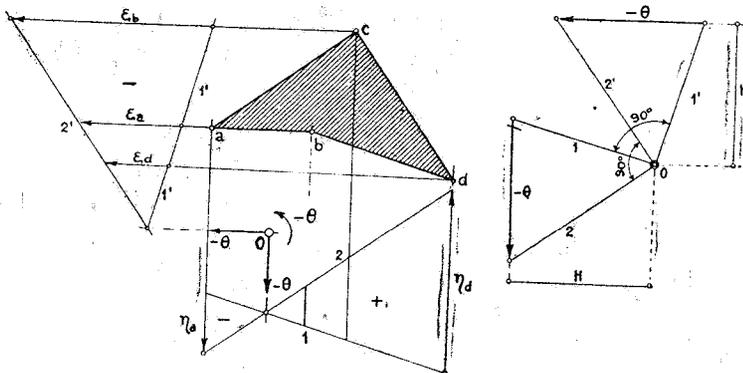


Fig 5

Si con la rotación aplicada según el eje horizontal, hacemos igual construcción, se obtiene

$$\Delta x_a = \epsilon_a \cdot H$$

es decir que los lados (2) y (2') referidos a los lados (1) y (1') respectivamente nos dan los diagramas de desplazamientos.

En esta construcción, se confirma la regla de signos establecida anteriormente.

5. — **Composición de rotaciones.** — La composición de rotaciones es quizás el problema que con más frecuencia se nos presenta en el estudio de la deformación de los sistemas planos,

Sea (Fig. 6) una chapa rígida que experimenta simultáneamente una rotación (θ_1) en torno del polo (O_1) y una rotación (θ_2) en torno del polo (O_2).

Imaginemos que actúa primeramente la rotación (θ_1) y que

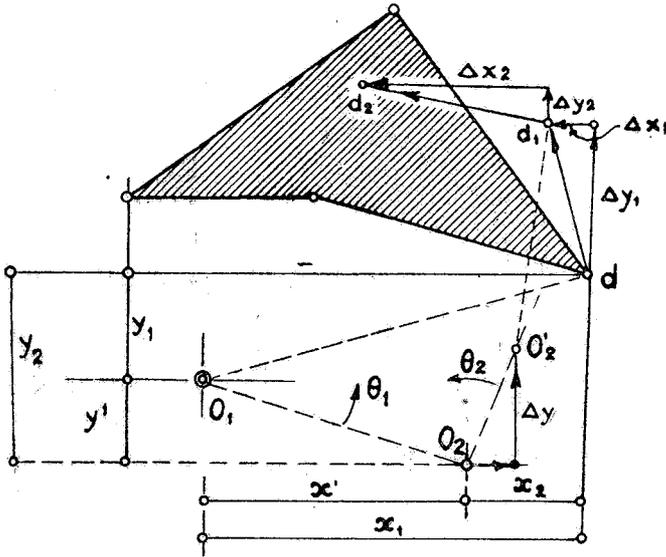


Fig. 6

los ejes coordenados tienen por origen (O_1); un punto cualquiera (d) experimentará los desplazamientos:

$$\Delta y_1 = \theta_1 \cdot x_1 \quad \Delta x_1 = \theta_1 y_1$$

y el polo (O_2) tendrá por componentes de su desplazamiento:

$$\Delta y = \theta_1 x' \quad \Delta x = \theta_1 y'$$

con lo cual habrá tomado la posición (O'_2).

Considerando ahora estas nuevas posiciones, apliquemos la ro-

— 1641 —

tación (θ_2), tomando ahora como polo el punto (O'_2). Los desplazamientos del punto (d) ahora en (d_1) serán:

$$\begin{aligned}\Delta y_2 &= \theta_2 (x_2 - \Delta x - \Delta x_1) \\ \Delta x_2 &= \theta_2 (y_2 - \Delta y + \Delta y_1)\end{aligned}$$

Efectuando los productos y despreciando los infinitésimos de 2° orden, se tiene:

$$\begin{aligned}\Delta y_2 &= \theta_2 x_2 \\ \Delta x_2 &= \theta_2 y_2\end{aligned}$$

lo que equivale a haber aplicado la rotación (θ_2) directamente en el polo (O_2) como si él no se hubiera movido en virtud de la rotación (θ_1).

Los desplazamientos totales del punto (d) serán entonces:

$$\begin{aligned}\Delta y_d &= \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \\ \Delta x_d &= \theta_1 y_1 + \theta_2 y_2\end{aligned}$$

debiendo tenerse en cuenta los signos que resulten de la aplicación de las fórmulas (1) o de la regla establecida en el N° 4.

El movimiento final de la chapa será evidentemente una nueva rotación (θ) en torno de un cierto polo (O) cuya posición determinaremos.

Sean entonces (Fig. 7), los polos (O_1) y (O_2) y sean (a_1), (b_1), (a_2), (b_2) las distancias de ellos al polo buscado. Como éste no debe efectuar movimiento alguno, se tendrá:

$$\begin{aligned}\theta_1 a_1 - \theta_2 a_2 &= 0 \\ \theta_1 b_1 - \theta_2 b_2 &= 0\end{aligned}$$

de donde:

$$\left. \begin{aligned}\theta_1 a_1 &= \theta_2 a_2 \\ \theta_1 b_1 &= \theta_2 b_2\end{aligned} \right\} \text{(a)}$$

o sea:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

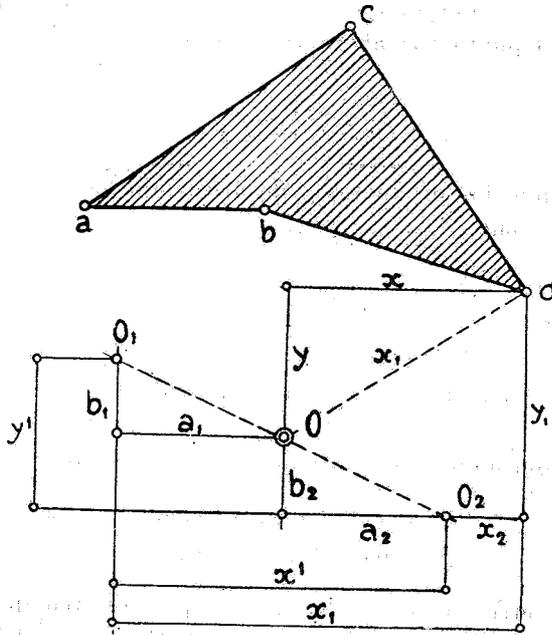


Fig 7

lo que nos dice que el polo de la rotación se encuentra sobre la recta que une los otros dos.

La posición del polo (O) queda determinada analíticamente por las expresiones (a); de ellas se saca:

$$\theta_1 a_1 = + \theta_2 (x' - a_1)$$

$$\theta_1 b_1 = + \theta_2 (y' - b_1)$$

de donde:

$$\theta_1 a_1 = + \theta_2 x' - \theta_2 a_1$$

$$\theta_1 b_1 = + \theta_2 y' - \theta_2 b_1$$

y también:

$$a_1 (\theta_1 + \theta_2) = \theta_2 x'$$

$$b_1 (\theta_1 + \theta_2) = \theta_2 y'$$

— 1643 —

o sea :

$$a_1 = + \frac{\theta_2 x'}{\theta_1 + \theta_2}$$

$$b_1 = + \frac{\theta_2 y'}{\theta_1 + \theta_2}$$

y deducimos que el polo (O) es el **centro** de los vectores (θ_1) y (θ_2) paralelos, actuando respectivamente en los polos (O_1) y (O_2).

Veamos ahora, cual es el valor de la rotación total (θ) que experimenta la chapa. Suponiendo a (θ) positivo, los desplazamientos del punto (d) serán:

$$\begin{aligned} \Delta y &= - \theta \cdot x \\ \Delta x &= + \theta \cdot y \end{aligned}$$

y suponiendo también (θ_1) y (θ_2) positivos:

$$\begin{aligned} \Delta y &= - \theta_1 x_1 - \theta_2 x_2 \\ \Delta x &= + \theta_1 y_1 + \theta_2 y_2 \end{aligned}$$

puesto que:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + x \\ x_2 &= x - a_2 \end{aligned}$$

se tiene para la primera de las anteriores:

$$\begin{aligned} - \theta x &= - \theta_1 (a_1 + x) - \theta_2 (x - a_2) \\ - \theta x &= - \theta_1 a_1 - \theta_1 x - \theta_2 x + \theta_2 a_2 \end{aligned}$$

y como hemos visto que:

$$\theta_1 a_1 = \theta_2 a_2$$

se obtiene:

$$\theta \cdot x = x (\theta_1 + \theta_2)$$

de donde:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2$$

es decir que la rotación total es igual a la **suma** de las rotaciones parciales.

a) Conforme a lo establecido anteriormente, podemos (Fig. 8) trazar las elaciones debidas a dos rotaciones.

Supongamos que la chapa experimente dos rotaciones positivas en torno de los respectivos polos. Tomemos una línea de referencia (m.n) y admitamos que actúe solamente (θ_1).

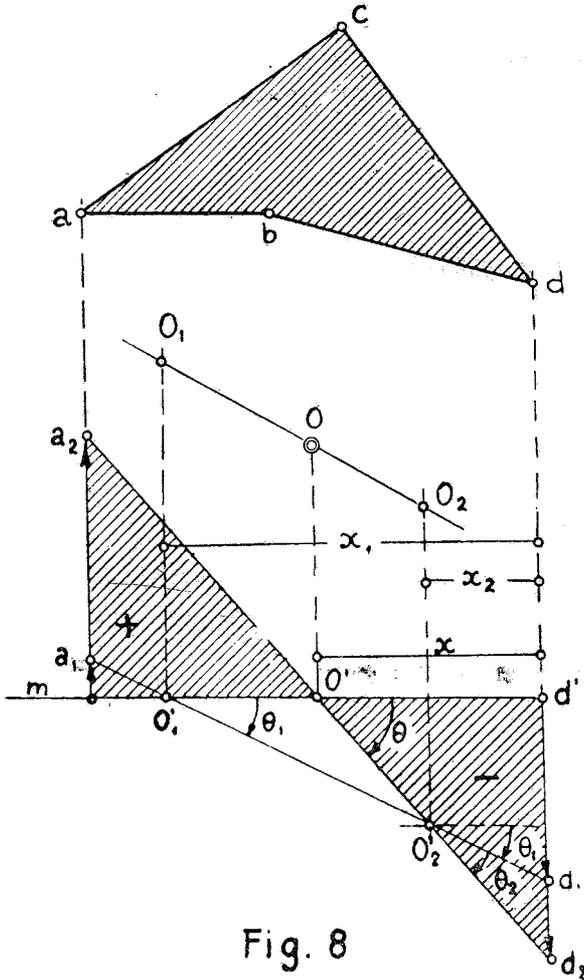


Fig. 8

En los desplazamientos verticales, el punto (d), por ejemplo, se habrá trasladado a (d_1) y el polo (O_2) se habrá trasladado a (O'_2).

Ahora, tomando como nueva línea de referencia, la recta ($a_1 O_2 d_1$) apliquemos la rotación (θ_2) con lo cual el punto (d) pasará a la posición (d_2) y el desplazamiento total será:

$$\Delta y = d' d_1 + d_1 d_2$$

o sea, como se vé en la figura:

$$\Delta y = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$$

o lo que es lo mismo, puesto que $\theta = \theta_1 + \theta_2$

$$\Delta y = \theta \cdot x$$

La elación vertical es entonces la recta ($\overline{a_2 d_2}$). En la misma forma puede trazarse la elación horizontal.

Si la chapa experimentara una tercera rotación (θ_3) en torno de otro polo (O_3), ésta se compondría con (θ) dando ($\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$) y el polo estaría sobre la recta que une (O) con (O_3).

b) El empleo del funicular nos lleva a una solución más cómoda. Sea la chapa que experimenta simultáneamente tres rotaciones (Fig. 9) en torno de los polos respectivos.

Construiremos una vectorial de las rotaciones (negativas en este caso) y con él, se trazará el funicular correspondiente. Por la intersección de los lados extremos pasa la vertical del polo (O).

Prolongando los lados extremos (1) y (4), se tiene para el punto (d) por ejemplo:

$$\Delta y = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3 = H \cdot \eta_d$$

es decir que el lado (4) referido al lado (1) es la elación vertical de la chapa.

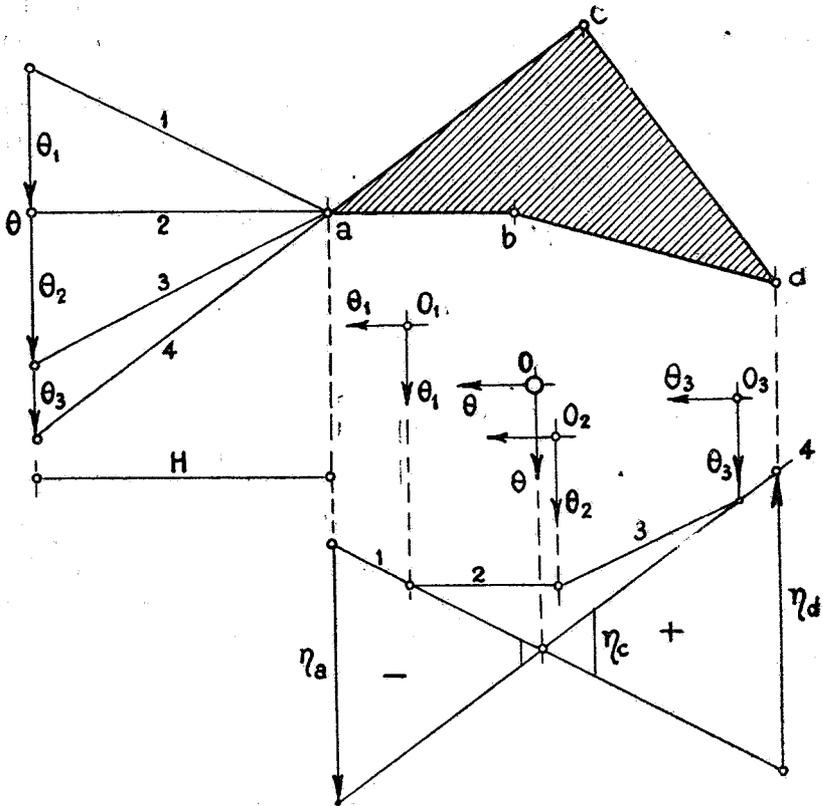


Fig. 9

Si hiciéramos girar de 90° . el vectorial hacia la derecha, hubiéramos trazado, en la misma forma, la elación horizontal. La intersección de los lados (1') y (4') nos daría la horizontal del polo (O) con lo cual queda éste determinado.

Observando la figura se vé que para el punto (d) el vector (θ) vertical dá un momento estático ($-$), luego el desplazamiento vertical es ($+$). El mismo vector horizontal dá para (d) un momento estático ($-$), luego el desplazamiento horizontal es ($+$).

c) Conviene aquí hacer una observación respecto al orden en que deben colocarse los vectores, a fin de que ubicando siempre el polo del vectorial a la derecha del polígono, no altere la convención de signos aceptada para los desplazamientos (Fig. 10).

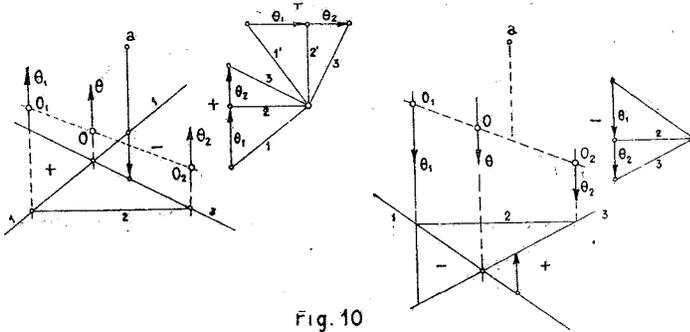


Fig. 10

En primer lugar: tomaremos los vectores comenzando por el ubicado más a la izquierda; si ellos son positivos, deben ser colocados en sentido ascendente y si ellos son negativos deben colocarse en sentido descendente. En esta forma los desplazamientos estarán medidos a partir del lado (1) siendo de signo (+) los que estén por encima de él.

La figura demuestra claramente que se realiza la regla de signos referente a los momentos estáticos del vector total (θ). Finalmente, para la elación horizontal, el polígono vectorial debe hacerse girar hacia la derecha, de un ángulo de 90° .

d) La construcción gráfica dada en el apartado anterior, nos permite calcular analíticamente la posición del polo y los desplazamientos de todos los puntos de una chapa.

Si la referimos a un sistema de ejes coordenados (Fig. 11). Sean (x) e (y) las coordenadas de los puntos; (x_n) e (y_n) las coordenadas de los polos; (a) y (b) las coordenadas del polo único en

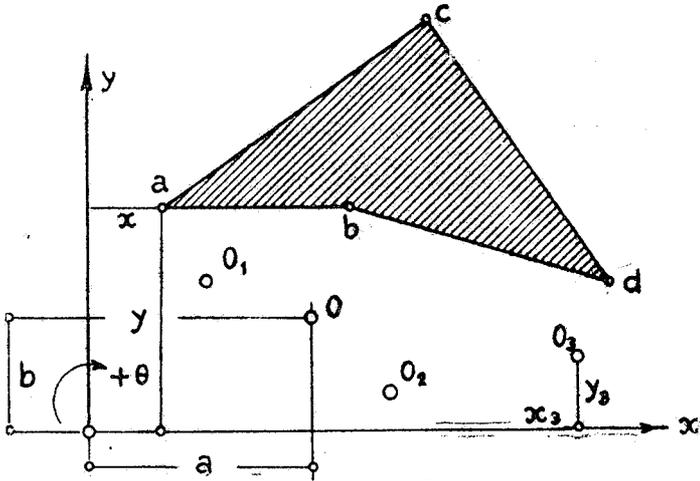


Fig. 11

torno del cual gira la chapa; (θ_n) las rotaciones en torno de los polos (O_n) .

La rotación total es

$$\theta = \sum \theta_n$$

y las coordenadas del polo serán

$$a = \frac{\sum \theta_n \cdot x_n}{\theta}$$

$$b = \frac{\sum \theta_n \cdot y_n}{\theta}$$

y los desplazamientos de un punto (x, y) , de acuerdo a las expresiones (1) serán

$$\Delta y = - \theta (a - x)$$

$$\Delta x = + \theta (b - y)$$

en las cuales se han supuesto todas las cantidades afectadas del signo (+) debiendo tenerse presente los signos que correspondan.

CAPITULO II

DESPLAZAMIENTOS DE LAS CADENAS DE BARRAS

6. — **Rotaciones de los nudos.** — Una serie de chapas rígidas (Fig. 12), ligadas una a continuación de otra por una articulación, se denomina **cadena** o **polígono de barras**, puesto que hemos de considerar cada barra, al elemento recto, real o ficticio que une dos articulaciones.

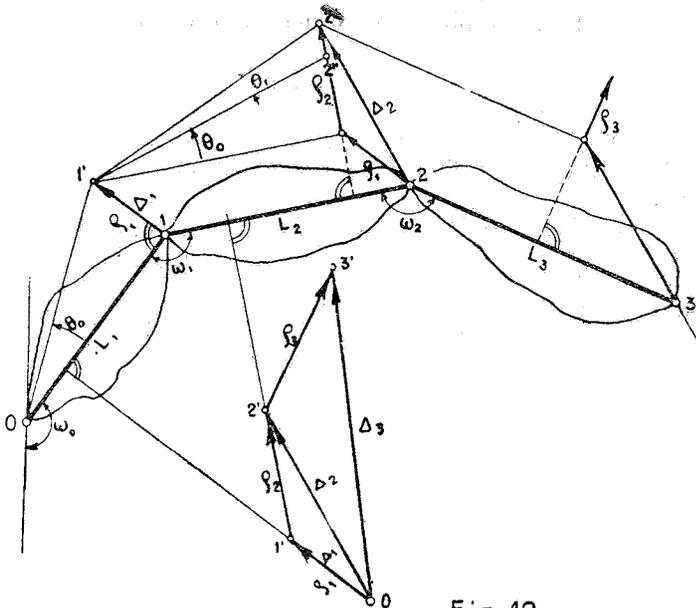


Fig. 12

El estudio de los desplazamientos de las articulaciones o nudos nos llevará a soluciones gráficas claras y sencillas para determinar la deformación de las estructuras ya sean en alma llena o en enrejado.

Sean ($L_1, L_2 \dots$) las distancias entre las articulaciones, o longitudes de las barras que, supuestas inextensibles, pueden substituir a las chapas rígidas. Sean en general (ω) los ángulos que forman entre sí las barras; (ω_0) el que hace la barra (1) con una dirección o eje de referencia; (θ_0), (θ_1)... (θ_{n-1}) las variaciones que, por causas cualesquiera, pueden experimentar los ángulos (ω), es decir la rotación que cada barra puede efectuar en torno de la articulación que le precede a su izquierda.

Ahora bien, supongamos fijo el nudo (O) de tal manera que él no experimente desplazamiento alguno, y que sean también invariables los ángulos ($\omega_1 \omega_2 \dots$). Si sólo varía (ω_0) en un infinitésimo (θ_0), lo que equivale a suponer toda la cadena como una sola chapa rígida, el desplazamiento del nudo (1) será

$$\Delta_1 = s_1 = \theta_0 L_1$$

y su posición final será en (1'). Llamaremos a (s_1), rotación del nudo (1).

Como la barra (2) ha experimentado la rotación (θ_0) por pertenecer al sistema supuesto rígido, la posición del nudo (2) será (2''), es decir el resultado de una traslación paralela a sí misma y de una rotación (θ_0) en torno de (1').

Consideremos ahora el nudo (1) en (1') e invariables los ángulos ($\omega_2, \omega_3 \dots$) suponiendo que sólo varía en (θ_1) el ángulo (ω_1) lo que equivale a imaginar que la cadena (1-2-3...) es una chapa rígida articulada, únicamente en (1). La rotación del nudo (2) será ahora

$$s_2 = (\theta_0 + \theta_1) L_2$$

y el nudo (2) habrá tomado su posición definitiva en (2'). Su des-

plazamiento $(2 \rightarrow 2') \equiv \Delta_2$ será, como se vé en la figura, el que resulte de componer (s_1) y (s_2) .

Razonando en idéntica forma para el nudo (3) se tendrá:

$$s_3 = (\theta_0 + \theta_1 + \theta_2) L_3$$

Haciendo ahora:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\equiv \theta_0 \\ \varphi_2 &\equiv \theta_0 + \theta_1 \equiv \varphi_1 + \theta_1 \\ \varphi_3 &\equiv \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 \equiv \varphi_2 + \theta_2 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

tendremos las expresiones:

$$\begin{aligned} \varphi_n &\equiv \varphi_{n-1} + \theta_{n-1} \equiv \sum_0^{n-1} \theta \\ s_n &\equiv \varphi_n \cdot L_n \end{aligned}$$

debiendo tenerse presente que las rotaciones (s) son **normales** a las direcciones de las barras.

7. — **Desplazamientos de los nudos.** — El conocimiento de los valores (φ) nos permite determinar los desplazamientos (Δ) de los nudos. En efecto (Fig. 12) por un origen (o polo) arbitrario, llevemos a una escala conveniente la rotación (s_1) en dirección normal a la barra (1); a continuación de ella, llevaremos $(O \rightarrow 2' \equiv \Delta_2)$ pues no hemos hecho sino reconstruir la figura superior.

Si continuamos en la misma forma, obtendremos los desplazamientos de los demás nudos, siempre medidos a partir del polo (O).

8. — **Elásticas de la cadena.** — Basados en los razonamientos anteriores, podemos ahora trazar las elásticas vertical y horizontal de una cadena o polígono de barras con el solo conocimiento de las rotaciones (θ) , o sea con las variaciones angulares de cada uno de los nudos.

Sea (Fig. 13) la cadena cuyos nudos experimentan rotaciones negativas en el caso propuesto.

Si referimos los desplazamientos verticales a una recta cualquiera ($0_1 . 3'$), apliquemos primeramente la rotación (θ_0) a to-

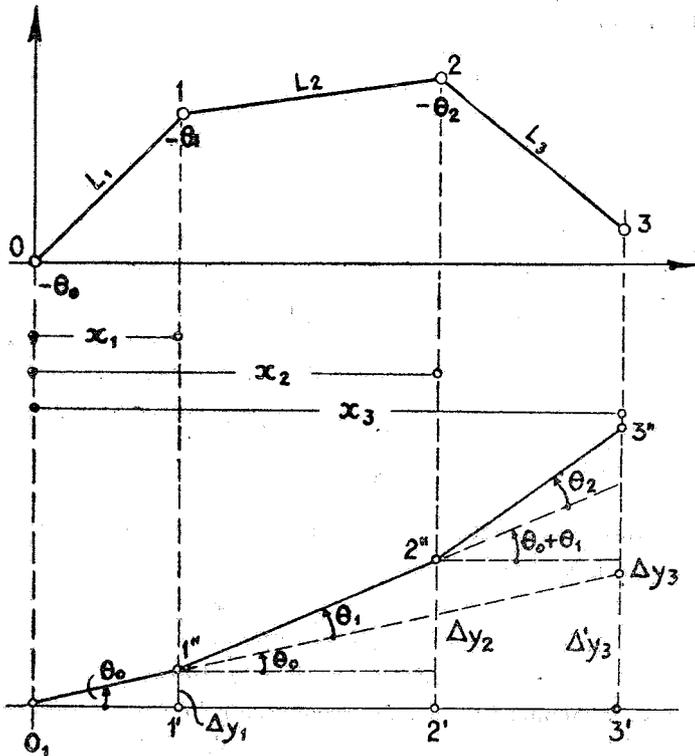


Fig. 13

do el sistema considerado como una chapa rígida, con lo cual los desplazamiento verticales de los nudos serán:

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= \theta_0 x_1 \\ \Delta' y_1 &= \theta_0 x_2 \\ \Delta' y_2 &= \theta_0 x_3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Aplicando ahora la rotación (θ_1), al conjunto de barras (1, 2, 3...) considerado como chapa rígida, los desplazamientos de los nudos serán:

$$\begin{aligned} \Delta'' y_2 &= \theta_1 (x_2 - x_1) \\ \Delta'' y_3 &= \theta_1 (x_3 - x_1) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Aplicando, finalmente, la rotación (θ_3) al conjunto de barras (2, 3...) considerado también como chapa rígida, los desplazamientos, serán:

$$\begin{aligned} \Delta''' y_3 &= \theta_2 (x_3 - x_2) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Sumando ahora los desplazamientos originados en cada nudo por cada una de las rotaciones, se tienen los desplazamientos verticales totales:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_1 &= \theta_0 x_1 \\ \Delta y_2 &= \theta_0 x_2 + \theta_1 (x_2 - x_1) \\ \Delta y_3 &= \theta_0 x_3 + \theta_1 (x_3 - x_1) + \theta_2 (x_3 - x_2) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

lo que nos permite poner en forma general para el nudo (n):

$$\boxed{\Delta y_n = - \sum_0^{n-1} \theta_x (x_n - x)} \quad (2)$$

significando con (x) las abscisas de todas los nudos que preceden al nudo (n) considerado y habiéndose precedido la fórmula del signo (—) teniendo en cuenta las fórmulas (1).

Razonando del mismo modo, los desplazamientos horizontales serían:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 &= \theta_0 y_1 \\ \Delta x_2 &= \theta_0 y_2 + \theta_1 (y_2 - y_1) \\ \Delta x_3 &= \theta_0 y_3 + \theta_1 (y_3 - y_1) + \theta_2 (y_3 - y_2) \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

o sea en forma general para el nudo (n)

$$\Delta x_n = + \sum_{\theta_x}^{n-1} \theta_x (y_n - y) \quad (3)$$

Los desplazamientos dados por las expresiones (2) y (3), llevarán el signo que corresponda, según sean los signos de (θ), de ($x_n - x$) y de ($y_n - y$) en cada uno de los términos de las sumatorias.

a) Veremos ahora que las elásticas vertical y horizontal de un polígono de barras, pueden obtenerse (Fig. 14) por polígonos funiculares de vectores (θ) supuestos aplicados a los nudos respectivos, y que los desplazamientos son, a una determinada escala, las ordenadas y abscisas de la curva funicular, referidas al primer lado.

En efecto, la interpretación vectorial de las expresiones (a) y (b) o de las fórmulas (2) y (3), nos dice que en general, los desplazamientos vertical y horizontal, son los momentos estáticos con respecto al nudo considerado, de los vectores (θ) que actúan a su izquierda.

Según esto, los polígonos de vectores darían

$$\begin{aligned} \Delta y_n &= H \cdot \eta_n \\ \Delta x_n &= H \cdot \epsilon_n \end{aligned}$$

debiendo medirse (H) en la escala adoptada para los vectores (θ) y (η) o (ϵ) en la escala de longitudes.

No debe confundirse el caso del polígono de barras con el de la chapa rígida al que nos hemos referido en el N°. 5.b, puesto que en el que estamos tratando, la rotación (θ_1) no tiene influencia

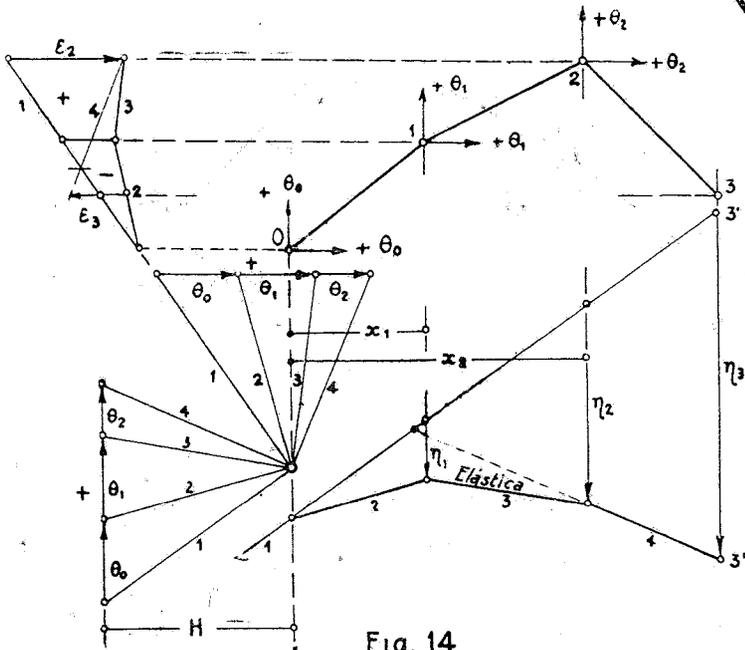


Fig. 14

sobre el desplazamiento del nudo (O) ; la rotación θ_2 no influye sobre el desplazamiento de los nudos (O) y (1) y así sucesivamente.

b) De la construcción anterior pueden deducirse las rotaciones (s). En efecto (Fig. 15), supongamos haber trazado la elástica a la escala (H). Sabemos por de pronto que las rotaciones (s) son normales a las barras ; para el nudo (1) el desplazamiento es

$$\Delta_1 = s_1$$

y como conocemos su componente vertical (Δy_1), llevando por (3') una normal a la barra (1) quedará determinado (s_1).

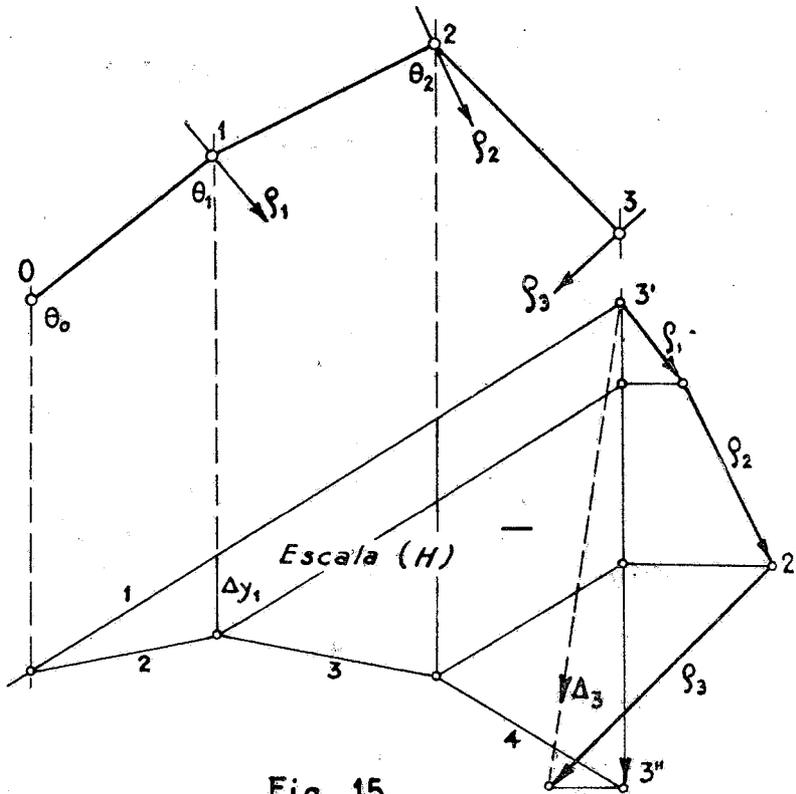


Fig. 15

Ahora bien: el desplazamiento del nudo (2) resulta de componer las rotaciones (s_1) y (s_2); llevando entonces, por el extremo de (s_1) una normal a la barra (2) se hallará (s_2) y así sucesivamente. Nótese, en concordancia con la figura 12 que en la vertical del nudo (3) y a partir de ($3'$) se miden los desplazamientos verticales de todos los nudos.

(Continuará).