AÑO 25. Nº 5-6 JULIO-AGOSTO 1938

Sobre las integrales determinantes ordinarias y generalizadas

POR

Carlos Biggeri (Buenos Aires)

(Conclusión)

CUARTA PARTE

Demostración del teorema 11°).

Ante todo; recordaremos que, según el teorema 14°.), (demostrado en la primera parte), si se verifican las hipótesis del teorema 11°.), entonces, *las abscisas de convergencia* (*simple*) *de las tres integrales determinantes*:

$$(6) \qquad \int_0^\infty a(t) \,.\, e^{-z \,.\, \lambda(t)} \,.\, dt$$

$$(6') \qquad \int_0^\infty |a(t)| \,.\, e^{-z \,.\, \lambda(t)} \,.\, dt$$

$$(6'') \qquad \int_0^\infty \alpha(t) \,.\, e^{-z \,.\, \lambda(t)} \,.\, dt$$

son iguales; (siendo: $a(t) \equiv \alpha(t) + i \,.\, \beta(t)$).

El punto:

$$z = C + 1$$

es *interior* al semiplano de convergencia (*) de la integral (6), por lo tanto dicho punto es *regular* para $f(z)$, y se puede escribir entonces:

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(z - C - 1)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(C+1) \tag{168}$$

La derivada enésima de f (z) se calcula (como es sabido) por la fórmula:

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n \cdot \int_0^{\infty} a(t) \cdot \lambda^n(t) \cdot e^{-z \cdot \lambda(t)} \cdot dt \tag{169}$$

Por lo tanto, según (168) y (169) se tiene:

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(C+1-z)^n}{n!} \cdot \int_0^{\infty} a(t) \cdot \lambda^n(t) \cdot e^{-(C+1) \cdot \lambda(t)} \cdot dt \tag{170}$$

Todo se reduce a demostrar que: *el radio de convergencia de esta serie es precisamente igual a la unidad;* y demostraremos esto por reducción al absurdo.

Si el punto:

$$z = C$$

fuese *regular* para $f(z)$, la serie del segundo miembro de (170) sería convergente en un cierto semientorno lateral a la izquierda de dicho punto, sobre el eje real; es decir, existe un valor real mayor que la unidad, al cual llamaremos d, tal que para cualquier valor real z_0 que cumpla la condición:

$$C + 1 - d < z_0 < C$$

(*) Puesto que en este caso es: $C = C_1 = C_2$, no hay ambigüedad en hablar simplemente de *semiplano de convergencia*, sin especificar de qué clase de convergencia (simple o absoluta o uniforme) se trata.

la serie (170) es *convergente;* esto es, se tiene:

$$f(z_0) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(C+1-z_0)^n}{n!} \cdot \int_o^{\infty} a(t) \cdot \lambda^n(t) \cdot e^{-(C+1) \cdot \lambda(t)} \cdot dt \qquad (171)$$

Pongamos:

$$g_n(t) \equiv \frac{(C+1-z_0)^n}{n!} \cdot a(t) \cdot \lambda^n(t) \cdot e^{-(C+1) \cdot \lambda(t)} \qquad (172)$$

Evidentemente, se tiene:

$$\sum_{n=o}^{\infty} g_n(t) = a(t) \cdot e^{-(C+1) \cdot \lambda(t)} \cdot \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(C+1-z_0)^n}{n!} \cdot \lambda^n(t) \qquad (173)$$

Sea A un número arbitrario positivo pero fijo; la serie:

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(C+1-z_0)^n}{n!} \cdot \lambda^n(t)$$

converge *uniformemente* en el intervalo:

$$o \leq t \leq A$$

pues:

$$\frac{(C+1-z_0)^n}{n!} \cdot \lambda^n(t) \leq \frac{(C+1-z_0)^n}{n!} \cdot \lambda^n(A)$$

(por ser $\lambda(t)$ función creciente), y la serie:

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(C+1-z_0)^n}{n!} \cdot \lambda^n(A) \equiv \sum_{n=o}^{\infty} \frac{[(C+1-z_0) \cdot \lambda(A)]^n}{n!}$$

es una serie numérica convergente (cuya suma es: $e^{(C+1-z_0)\,.\,\lambda(A)}$)

Por lo tanto, la inversión:

$$\int_0^A \left(\sum_{n=o}^{\infty} g_n(t) \right) . \, dt = \sum_{n=o}^{\infty} \left(\int_0^A g_n(t) \, . \, dt \right) \qquad (174)$$

es legítima, para todo $A \geq o$.

La serie:

$$\sum_{n=o}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} g_n(t) \, . \, dt \right) \qquad (175)$$

es convergente, pues tal serie es la misma del segundo miembro de (171), la cual, según vimos, es convergente, (y su suma es $f(z_0)$).

Luego la parte real de la serie (175), o sea, la serie:

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(C+1-z_0)^n}{n!} \, . \int_0^{\infty} \alpha(t) \, . \, \lambda^n(t) \, . \, e^{-(C+1)\,.\,\lambda(t)} \, . \, dt \qquad (176)$$

es, también, convergente.

Puesto que, por hipótesis, es:

$$\alpha(t) \geq o, \qquad \text{(hipótesis a));}$$

la serie (176) es de términos positivos, luego la serie:

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(C+1-z_0)^n}{n!} \, . \int_A^{\infty} \alpha(t) \, . \, \lambda^n(t) \, . \, e^{-(C+1)\,.\,\lambda(t)} \, . \, dt \qquad (177)$$

también converge.

Según la hipótesis b), se verifica:

$$| a(t) | < \sqrt{1 + K^2} \, . \, \alpha(t) \qquad (178)$$

siendo *K* una cierta constante.

Según 178) y teniendo en cuenta que la serie (177) es convergente, se deduce que la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_A^{\infty} | g_n(t) | \, . \, dt \right) \qquad (179)$$

también converge.

De la convergencia de la serie (179) se infiere la convergencia absoluta de la serie (175).

Luego, se obtiene:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} g_n(t) \, . \, dt \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{A} g_n(t) \, . \, dt \right) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_A^{\infty} | g_n(t) | \, . \, dt \right)$$

de donde:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} g_n(t) \, . \, dt \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{A} g_n(t) \, . \, dt \right) \right.$$

$$\left. \right| \leq \sum_{n=0}^{N} \left(\int_A^{\infty} | g_n(t) | \, . \, dt \right) - \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\int_A^{\infty} | g_n(t) | \, . \, dt \right) \qquad (180)$$

Sea, ahora, un número positivo ε arbitrariamente tomado. En virtud de la convergencia de la serie (179), existe un:

$$N \equiv N(\epsilon)$$

tal que:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\int_{A}^{\infty}|\,g_n(t)\,|\,.\,dt\right)<\frac{\epsilon}{2} \tag{181}$$

Las integrales que figuran en el minuendo del segundo miembro de (180) son convergentes (basta con tener en cuenta la igualdad de las abscisas, simple y absoluta, de la integral (6)), y puesto que:

$$\int_{A}^{\infty}|\,g_n(t)\,|\,.\,dt \equiv \frac{(C+1-z_0)^n}{n!}\,.\int_{A}^{\infty}|\,a(t)\,|\,.\,\lambda^n(t)\,.\,e^{-(C+1)\cdot\lambda(t)}\,.\,dt$$

y que cada una de las *N + 1* integrales (convergentes):

$$\int_{A}^{\infty}|\,a(t)\,|\,.\,\lambda^n\,(t)\,.\,e^{-(C+1)\,.\,\lambda\,(t)}\,.\,dt$$

se puede hacer menor que:

$$\frac{\epsilon}{2\,.\,e^{C+1-z_0}}$$

tomando *A* suficientemente grande; se tiene:

$$\sum_{n=o}^{N}\left(\int_{A}^{\infty}|\,g^n(t)\,|\,.\,dt\right)<\frac{\epsilon}{2\,.\,e^{C+1-z_0}}\,.\sum_{n=o}^{N}\frac{(C+1-z_0)^n}{n!}$$

$$<\frac{\epsilon}{2\,.\,e^{(C+1-z_0)}}\,.\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(C+1-z_0)^n}{n!}=\frac{\epsilon}{2} \tag{182}$$

Según (180), (181) y (182) se tiene:

$$\left| \sum_{n=o}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} g_n(t) \, . \, dt \right) - \sum_{n=o}^{\infty} \left(\int_0^{A} g_n(t) \, . \, dt \right) \right| < \epsilon \tag{183}$$

tomando A suficientemente grande. Teniendo presente la convergencia de la serie (175) y la desigualdad (183), es:

$$\lim_{A \to \infty} . \left\{ \sum_{n=o}^{\infty} \left(\int_0^{A} g_n(t) \, . \, dt \right) \right\} = \sum_{n=o}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} g_n(t) \, . \, dt \right) \tag{184}$$

Según (184) y teniendo en cuenta la legitimidad de la inversión (174), se obtiene:

$$\lim_{A \to \infty} \left\{ \int_0^{A} \left(\sum_{n=o}^{\infty} g_n(t) \right) . \, dt \right\} = \sum_{n=o}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} g_n(t) \, . \, dt \right)$$

de donde:

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=o}^{\infty} g_n(t) \right) . \, dt = \sum_{n=o}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} g_n(t) \, . \, dt \right) \tag{185}$$

Recordando (172) se tiene:

$$\sum_{n=o}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} g_n(t) \, . \, dt \right) = \sum_{n=o}^{\infty} \left\{ \frac{(C+1-z_0)^n}{n!} \, . \right.$$

$$\left. \int_0^{\infty} a(t) \, . \, \lambda^n(t) \, . \, e^{-(C+1) \, . \, \lambda(t)} \, . \, dt \right\} \tag{186}$$

Según (186) y la inversión (185):

$$\int_0^\infty \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \right) . dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^\infty g_n(t) . dt \right) =$$

$$= \int_0^\infty a(t) . e^{-(C+1) . \lambda(t)} . \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(C+1-z_0)_n}{n!} . \lambda^n(t) \right) . dt =$$

$$= \int_0^\infty a(t) . e^{-(C+1) . \lambda(t)} . e^{(C+1-z_0) . \lambda(t)} . dt =$$

$$= \int_0^\infty a(t) . e^{-z . \lambda(t)} . dt$$

es decir, la integral (6) converge (y su suma es f (z_0)) en el punto:

$$z = z_0$$

siendo:

$$z_0 \equiv \text{número real} < C$$

lo que contradice el hecho de que es C la abscisa de convergencia de la integral (6).

Luego el punto:

$$z = C$$

es *singular* para $f(z)$; lo que demuestra el teorema 11°.).

Como dijimos, en la introducción, hemos demostrado *directamente* el teorema 11°), sin apoyarnos en nuestro criterio, para ver, por comparación, la ventaja, que desde el punto de vista de la síntesis, reporta tal criterio.

Agregaremos solamente, en lo que se refiere a la "teoría de las singularidades de las funciones analíticas definidas por integrales determinantes ordinarias y generalizadas" la siguiente observación: a cada teorema que establece un criterio para reconocer la igualdad de las abscisas de convergencias simple y absoluta de la integral (3), o de la (6), se puede hacer *corresponder* otro teorema que asegura la singularidad del punto real de la recta de convergencia, para la función analítica que define dicha integral. En este orden de ideas, el teorema 11°.) viene a ser el *correspondiente* de uno de los corolarios del teorema 14°.). Por lo tanto, a cada uno de los teoremas 14°.), 15°.), 16°.), 17°.), 18°.), 19°.) y 20°.), *corresponderán* otros tantos teoremas sobre singularidades. Limitémonos a enunciar, solamente uno de ellos: *Si existe límite ordinario, para* $t \rightarrow \infty$, *de la derivada del argumento,* $\varphi(t)$, *de la función generatriz,* $a(t)$, *de la integral determinante ordinaria* (3), *entonces: el punto real de su recta de convergencia es singular para* $f(z)$.

La observación anterior nos plantea un doble problema; a saber:

1°.) obtener criterios, distintos de los *correspondientes* de los teoremas 14.°), 15.°), 16.°), 17.°), 18.°), 19.°) y 20.°), para reconocer la singularidad del punto real de la recta de convergencia, en el caso de que sean *iguales* las abscisas de convergencia simple y absoluta;

2°.) obtener criterio, para reconocer la singularidad del punto real de la recta de convergencia simple en el caso de que sean *distintas* las abscisas de convergencia simple y absoluta. (Este 2°. problema es, evidentemente, más difícil que el 1°.)

La solución de este problema (que, naturalmente, se basa en nuestro criterio, puesto que él constituye condición *necesaria y suficiente*) la exponemos en otro trabajo; en el cual, también, estudiaremos la repercusión que, sobre la *naturaleza analítica* del punto real de la recta de convergencia simple, tiene la igualdad o la desigualdad de las abscisas de convergencia simple y uniforme y de las abscisas de convergencia uniforme y absoluta (lo que implica un problema muchísimo más complicado que el doble problema anterior, y cuya solución consiste en un empleo sistemático de nuestro criterio y en un método original de prolongación analítica de integrales determinantes, ordinarias o generalizadas, mediante integrales impropias funcionales de un cierto tipo, que llamaremos, de *tipo determinante*).