

# Revista de Educación Matemática

## Consejo Editorial

### *Editor Ejecutivo*

Leandro Cagliero, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

### *Editores Asociados*

Mónica Villarreal, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

### *Comité Editorial*

Abraham Arcavi, Weizmann Institute of Science, Israel

Antonio Cafure, Universidad Nacional de General Sarmiento - CONICET, Argentina

Carlos D'Andrea, Universitat de Barcelona, España

Rocío Díaz Martín, Vanderbilt University, Estados Unidos

Cristina Esteley, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

José Nicolás Gerez Cuevas, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

Susana Paula Graça Carreira, Universidade do Algarve, Portugal

Patricio Herbst, Universidad de Michigan, Estados Unidos

Teresa Krick, Universidad de Buenos Aires - CONICET, Argentina

Ricardo Podestá, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Nélia Maria Pontes Amado, Universidade do Algarve, Portugal

Juan Pablo Rossetti, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Gabriel Rubén Soto, Fac. de Ingeniería, U. Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Argentina

Jhony Alexander Villa-Ochoa, Universidad de Antioquia, Colombia

Registro Nacional de la Propiedad Intelectual N° 168024

ISSN 0326-8780 (versión impresa)

ISSN 1852-2890 (en línea)

Página web: <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index>

Correo electrónico: [revm@famaf.unc.edu.ar](mailto:revm@famaf.unc.edu.ar)

# Revista de Educación Matemática

Volumen 39, N° 3 – 2024

---

## ÍNDICE

---

### ARTÍCULOS

- **DATOS CORRELACIONADOS ESPACIALMENTE: ANÁLISIS ESTRUCTURAL**  
*Rodrigo García Arancibia, Pamela Llop, Mariel Lovatto* ..... 5
- **LA RECTA NUMÉRICA: ANÁLISIS DE LAS CONCEPCIONES DE ESTUDIANTES EN LOS INICIOS DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICA**  
*M. Carolina Benito, Mara Cedrón, Betina Duarte, Uriel Kasman, Cecilia Lamela, María Cecilia Montes de Oca* ..... 41
- **LA DERIVADA DE FUNCIONES DEFINIDAS POR TRAMOS**  
*Marilina Carena* ..... 81

---

### SECCIONES FIJAS

- **¿Sabías que...?**  
*por Leandro Cagliero y Ricardo Podestá* ..... 79
  - **Sección de Problemas**  
*por Diego Sulca* ..... 94
-



---

# DATOS CORRELACIONADOS ESPACIALMENTE: ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Rodrigo García Arancibia, Pamela Llop, Mariel Lovatto

---

**RESUMEN.** En este artículo introducimos y estudiamos el marco teórico subyacente para datos espacialmente correlacionados. Más precisamente, definimos el proceso que genera los datos, estudiamos sus diferentes estructuras de covarianza y caracterizamos las diferentes clases de estacionariedad consideradas habitualmente para este tipo de datos. Además, estudiamos en profundidad el semivariograma teórico y empírico, la herramienta tal vez más utilizada para medir correlación espacial. Consideramos que este trabajo puede ser un material útil para el estudio y la enseñanza de los datos espaciales y sus principales características, que potencialmente pueden introducirse en un curso moderno de estadística.

**ABSTRACT.** We introduce and investigate the underlying theoretical framework for spatially correlated data in this article. More specifically, we characterise the mechanism that generates the data, investigate its various covariance structures, and characterise the many stationarity classes that are typically considered for this type of data. Furthermore, we investigate the theoretical and empirical semivariogram, which is likely the most extensively used tool for measuring spatial correlation. We believe that this work can be a valuable resource for the study of spatial data and its primary properties, which might be integrated into a modern statistics course.

## §1. Introducción

En la era del Big Data, la disponibilidad y variedad de los datos es cada vez mayor, especialmente en lo que respecta a los datos georreferenciados. Esto se debe tanto al rápido avance tecnológico actual (como la agricultura de precisión y las imágenes satelitales) como al interés social en considerar la espacialidad como fuente de variabilidad de diferentes fenómenos. Por lo cual, creemos que incluir el estudio de los datos espaciales en un curso introductorio de estadística puede ser motivador a partir de aplicaciones reales más actuales. Para ello, este trabajo brinda herramientas para comprender los fundamentos teóricos subyacentes del fenómeno espacial en el contexto de procesos estocásticos como generador de este

---

*Palabras clave:* Proceso estocástico, Datos Espacialmente Correlacionados, Estacionariedad.

*Keywords:* Stochastic Process, Spatially Correlated Data, Stationarity.

tipo de datos. Los datos espaciales son aquellos cuya particularidad es que cada observación está asociada a una unidad espacial, como ser coordenadas o áreas geográficas. Por ello es imprescindible contar no solo con el dato en sí mismo (i.e. el valor observado de la/s variable/s de interés) sino también con información sobre la posición o referencia geográfica indexada a cada observación. Con esta caracterización de los datos espaciales surge, de forma natural, el concepto de lo que llamaremos valor regionalizado, definido como el valor de la variable de interés en el lugar o punto geográfico donde fue medido.

Dentro del contexto estadístico, la estadística espacial (o geoestadística) es, en parte, la aplicación de la teoría de procesos estocásticos a datos espaciales o, dicho de otra forma, a datos correlacionados espacialmente. Según Wackernagel (2006), la necesidad de tener en cuenta al espacio como fuente de variabilidad se originó a mediados del siglo XX en el campo de la minería y la geología, al tratar de analizar la distribución de las reservas de oro en un depósito mineral a partir de muestras tomadas en algunas ubicaciones espaciales, la cual resultó ser sesgada, revelando la omisión del espacio como fuente de variabilidad. A pesar de que las aplicaciones de la geoestadística han estado tradicionalmente más relacionadas con estudios de fenómenos geológicos y ambientales, recientemente se ha incorporado como una herramienta más de la geografía, la economía y otras ciencias sociales, sea con el objetivo de predecir y completar mapas de datos regionales, como también para modelar la variación espacial de una variable de interés (R. Haining, 2013; R. P. Haining, Kerry, y Oliver, 2010). En particular, los métodos geoestadísticos han tenido un importante alcance en la denominada ciencia regional (Atkinson y Lloyd, 2014). Así, por ejemplo, para la construcción de índices socio-económicos a nivel regional (Montes-Rojas, 2012), para el mapeo de precios de tierras (Derdouri y Murayama, 2020; Morales, Stein, Flacke, y Zevenbergen, 2020; Tsutsumi y Seya, 2008) y análisis de precios de vivienda (Chica-Olmo y Cano-Guervos, 2020; Dubin, 1992; Gámez, Montero, y Rubio, 2000; García Arancibia, Llop, y Lovatto, 2023; Valente, Wu, Gelfand, y Sirmans, 2005), para el análisis de índices de criminalidad (Fernández-Avilés, 2009; Kerry, Goovaerts, Haining, y Ceccato, 2010), o bien para el mapeo de niveles de pobreza o enfermedades utilizando datos regionales (Berke, 2004; Goovaerts, 2008; Vasan y Alcantara, 2016), entre otros. De esta manera, existen múltiples aplicaciones en diferentes ramas de la ciencias aplicadas, que motivan el estudio de datos correlacionados espacialmente.

En este trabajo definimos algunos conceptos y definiciones claves en el estudio de datos espaciales, como así también el marco teórico sobre el cual suelen modelarse. Con este análisis buscamos introducir las herramientas teóricas y metodológicas básicas para el tratamiento de datos espaciales, especificando los supuestos teóricos sobre los que descansan mayormente las tareas de inferencia y predicción estadística, restringiendo la atención en los denominados procesos estacionarios. Asimismo,

sobre la base de este marco teórico, se derivan herramientas de visualización y descripción para el estudio del fenómeno espacial de interés.

Siempre que sea posible, se utilizarán los clásicos datos del río Meuse ([Rikken y Van Rijn, 1993](#)) como caso de estudio para ilustrar definiciones y conceptos. Este conjunto de datos proporciona, entre otras variables, mediciones de cuatro tipos diferentes de metales en la capa superior del suelo en una llanura aluvial del río Meuse, cerca del pueblo de Stein (Países Bajos), medida en diferentes localizaciones espaciales, las cuales están identificadas con coordenadas geográficas (latitud y longitud). Nuestro interés será estudiar el comportamiento de uno de esos cuatro metales, el zinc, y en particular su logaritmo. En general, este conjunto de datos se utiliza para predecir el valor de alguno de esos metales en una locación espacial donde el mismo no fue medido. Particularmente, estos datos son utilizados para ejemplificar el método de predicción espacial clásico, denominado *Kriging* ([Bivand, Pebesma, Gómez-Rubio, y Pebesma \(2008\)](#)). A través de todo el trabajo nos referiremos a este ejemplo como *Ejemplo del río Meuse*.

Este trabajo está organizado como sigue: en la Sección 2 introducimos algunos aspectos básicos que caracterizan a los datos espaciales mientras que en la Sección siguiente mostramos algunas herramientas para un primer análisis exploratorio de los mismos. En la Sección 4 definimos el proceso espacial, sus momentos y los tipos de estacionariedad que pueden presentarse. En la Sección 5 establecemos el modelo que asumiremos para el proceso, definiendo la estructura de correlación que suele asumirse en los modelos paramétricos, el semivariograma. Finalmente, la Sección 6 fue dedicada a las conclusiones del trabajo. Todas las demostraciones y resultados auxiliares se encuentran en el Apéndice.

## §2. Introducción a los datos espaciales

La forma más directa e intuitiva de visualizar a los datos espaciales es a través de los mapas, y nuestro acercamiento a los mismos empieza en muy temprana edad con la escolaridad elemental. En primer lugar, la maestra de primaria nos pide llevar un cierto tipo de mapa (en general, físico y/o político) de una región en particular, como ser el mapa del país o provincia que habitamos. Luego, ya en clases, la maestra nos enseña a colorear o rellenar el mapa en cuestión con algunos atributos que se estén estudiando, delimitando regiones (provincias o localidades), asignando un nombre particular a lo que se delimita, marcando con puntos, líneas o áreas un lugar con algún aspecto que lo hace especial, como ser las capitales o los ríos más importantes. Es así que desde la infancia entramos en contacto con el *dato espacial*, en formato físico y palpable, siendo incluso generadores de nuestra *propia base de datos espaciales* al momento en que al mapa lo cargamos con determinados atributos que nos informan sobre algún aspecto de interés (natural-geológico o político social) en cierto punto o región dentro del mismo. De esta

manera, en su forma más primitiva, un dato espacial es aquel que vincula una ubicación geográfica con una cierta propiedad o atributo descriptivo (Fischer y Wang, 2011). Por ello, marcar con un punto el centro de una ciudad capital de una cierta provincia argentina, es un dato espacial donde en una cierta ubicación (latitud y longitud) se describe un atributo particular (e.g., ciudad capital).

Hoy en día la georreferenciación forma parte de lo cotidiano, haciendo que los datos espaciales cumplan todo tipo de funciones, desde las más simples, como ser la comunicativa (e.g. mandar ubicación para pasar una dirección domiciliaria), a las más complejas, como ser aquellas abocadas a predecir fenómenos de diversa naturaleza, sean delitos, fenómenos ambientales, rendimientos de cultivos, precios de inmuebles o impactos u alcance de ciertas políticas sociales, entre otros. A su vez, en cierta ubicación geográfica podemos tener información de un solo o de varios atributos. En el primer caso, estamos ante la presencia de un dato espacial **univariado**, mientras que en el segundo el dato es **multivariado**. Por ejemplo, para los datos del río Meuse, podríamos analizar solamente la concentración de zinc (problema univariado), o bien considerar concentraciones de varios sólidos como ser de zinc, cadmio, plomo, cobre y sodio, entre otros (problema multivariado). Además, tales atributos pueden ser de naturaleza continua (e.g., niveles de concentración de sólidos en el agua, rendimientos de cultivos, precios de viviendas, salarios medios, etc.) o bien discreta (e.g. categorías de uso de la tierra, tipo de cultivo, presencia de un tipo de sólido, partido o corriente política gobernante en cierta localidad, cantidad de delitos reportados, etc.).

Los datos espaciales pueden clasificarse de varias maneras. Una de ellas, está relacionada con la representación geográfica del **dominio**  $D$  en el espacio  $\mathbb{R}^d$ . Esto es, la forma en que las localizaciones son indexadas en el espacio (Longley, 2005). Cuando se asume un dominio **continuo**, el número de localizaciones o sitios donde podemos observar un atributo es no numerable (Zhang, Atkinson, y Goodchild, 2014). Esto es, el atributo puede estar medido (continuamente) en todas partes del espacio. El caso del ejemplo del río Meuse se corresponde con esta caracterización, dado que entre dos mediciones de concentración de zinc en lugares diferentes, potencialmente existen infinitos valores de tal atributo que podrían medirse. Estos datos continuamente espaciados son los comúnmente denominados **datos geoestadísticos** y, en general, el principal interés en este tipo de datos es la interpolación espacial. No obstante, en la práctica se cuenta con una versión discretizada del dominio, pues en general se tienen puntos muestreados en ubicaciones discretas pero que representa un campo de variación continuo (Fischer y Wang, 2011).

Por otra parte, para un dominio  $D$  **discreto**, se asume que el número de sitios o localizaciones para el cual podemos observar un atributo es a lo sumo numerable (finito o infinito numerable). En general, estos datos resultan de agregar la medición

de una/s variable/s en localizaciones finitas, y entre dos consecutivas no existe espacio con puntos que puedan ser medidos o muestrados. Este tipo de datos se denomina **datos reticulares** (en inglés, *lattice data*). Ejemplo de datos reticulares son las tasas de fecundidad o mortalidad por localidad/departamento, tasa de deserción en escuelas/universidades, producción de una región, el rendimiento en un área o el color de un pixel de una imagen satelital, entre otros.

Es interesante observar que los datos geoestadísticos pueden ser transformados a datos reticulares, por ejemplo, generando un teselado del dominio continuo y tomando como dato reticular el centro de la celda, comúnmente denominado **centroide**. No obstante, debe notarse que la elección de los centroides podría influir en la medición de la distancia (Zhao y Wall, 2004) pudiendo incluso modificar la estructura de dependencia espacial existente en los datos. El reverso de esta operación ya no es posible, pues la interpolación espacial podría no tener sentido partiendo datos reticulares.

Tanto para datos geoestadísticos como reticulares, el dominio  $D$  es fijo. Si  $D$  es aleatorio se está en presencia de los denominados **patrones puntuales** (en inglés, *point patterns data*). En este caso las localizaciones son generadas por algún proceso aleatorio, como ser la ubicación de árboles o nidos para estudiar una especie, epicentros de terremotos o caídas de rayos.

Otra clasificación útil de los datos espaciales es aquella que los encuadra de acuerdo a diferentes formatos u objetos geométricos; esto es, puntos, líneas o polígonos. Para el primero se tiene un punto en el espacio medido por coordenadas geográficas (latitud y longitud). Para el segundo se tiene un conjunto ordenado de puntos, conectados o no, que forma un segmento, medido por la longitud del mismo. Por último, los polígonos son representados por medio de puntos conectados que encierran una cierta área. Estos diferentes formatos se corresponden con las estructuras cartográficas básicas para los datos vectoriales del sistema de información geográfica GIS.

Más allá de la clasificación dada previamente, en este trabajo consideraremos datos espaciales para un dominio  $D$  fijo. Para este tipo de dominios, nos centraremos en el análisis de un sólo atributo o variable medida en una ubicación representada por una coordenada  $\mathbf{s} \in D \subset \mathbb{R}^d$ . Esto quiere decir que para algún punto espacial  $\mathbf{s}_0$  fijo, trabajaremos sobre el atributo  $Z(\mathbf{s}_0, v)$  univariado para todo  $v$  en un espacio muestral  $\Omega$ . Este enfoque se sitúa en el contexto de **procesos estocásticos espaciales** que será definido formalmente en la Sección 4.

### §3. Análisis exploratorio

En los últimos años, con el desarrollo de software y la posibilidad de manejar grandes cantidades de datos es posible realizar una primera visualización gráfica de los mismos. Como es bien sabido, el análisis exploratorio de datos es la primera



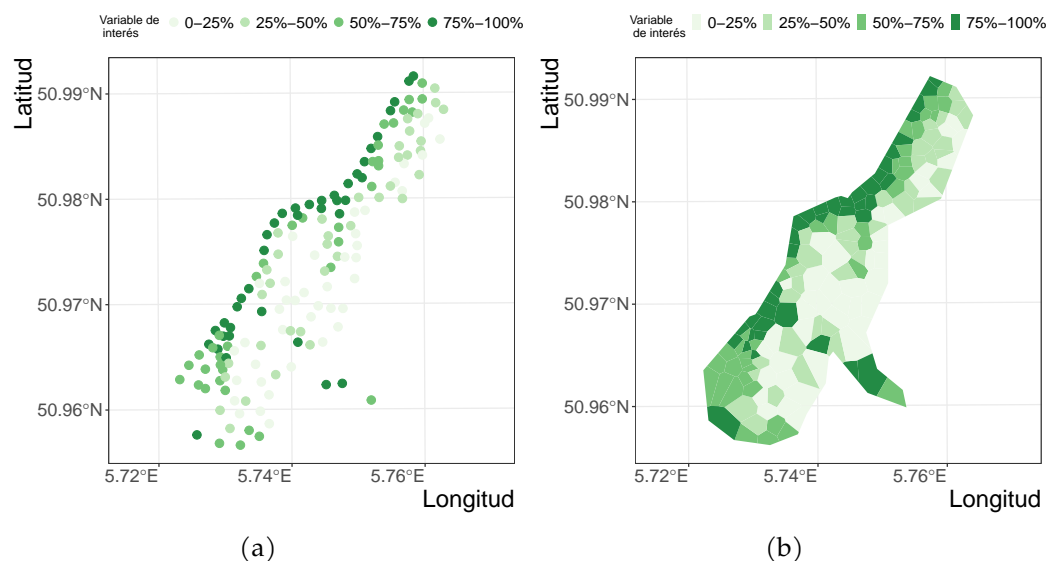


FIGURA 1. Mapas de caja: (a) para coordenadas geográficas; (b) para polígonos.

herramienta que nos permite conocer y resumir los datos de la muestra y con ello poder descubrir errores en la codificación, determinar casos atípicos, comprobar supuestos (e.g. estacionariedad) e incluso encontrar pistas para la modelización. Nuestro principal objetivo en el análisis exploratorio de datos será identificar, si existe, una estructura de correlación en los datos. Más precisamente, queremos cotejar si los valores cercanos son parecidos, y si dicha similitud desaparece a medida que los mismos se alejan. Como veremos en la Sección 4.2, las funciones de semivariograma o covariograma del proceso son la forma de representar esta asociación, estimando relaciones espaciales en lo que es llamado análisis estructural (Sección 4). Para ello, es necesario ver qué nos dicen los datos sobre la existencia o no de una estructura de correlación, de algún patrón estacionario o de tendencias.

En esta sección presentamos, a partir del ejemplo del río Meuse, algunos gráficos y medidas que podrían ser útiles en esta parte del análisis. Los gráficos nombrados en esta sección son solo algunos de los que se pueden utilizar para un análisis exploratorio espacial, sin embargo no son los únicos (ver por ejemplo los libros Banerjee, Carlin, y Gelfand (2004); Chiles y Delfiner (2012); Cressie (1993)).

### 3.1. Tipos de gráficos exploratorios

Como primera etapa en el estudio exploratorio se puede realizar un gráfico de los datos muestreados sobre mapas o graficando solamente los mismos sobre las unidades espaciales, ya sean puntos o polígonos. Los **gráficos de puntos** están definidos por sus coordenadas geográficas (latitud y longitud) y pueden ser, por ejemplo, estaciones meteorológicas, inmuebles, un punto en la tierra para medir

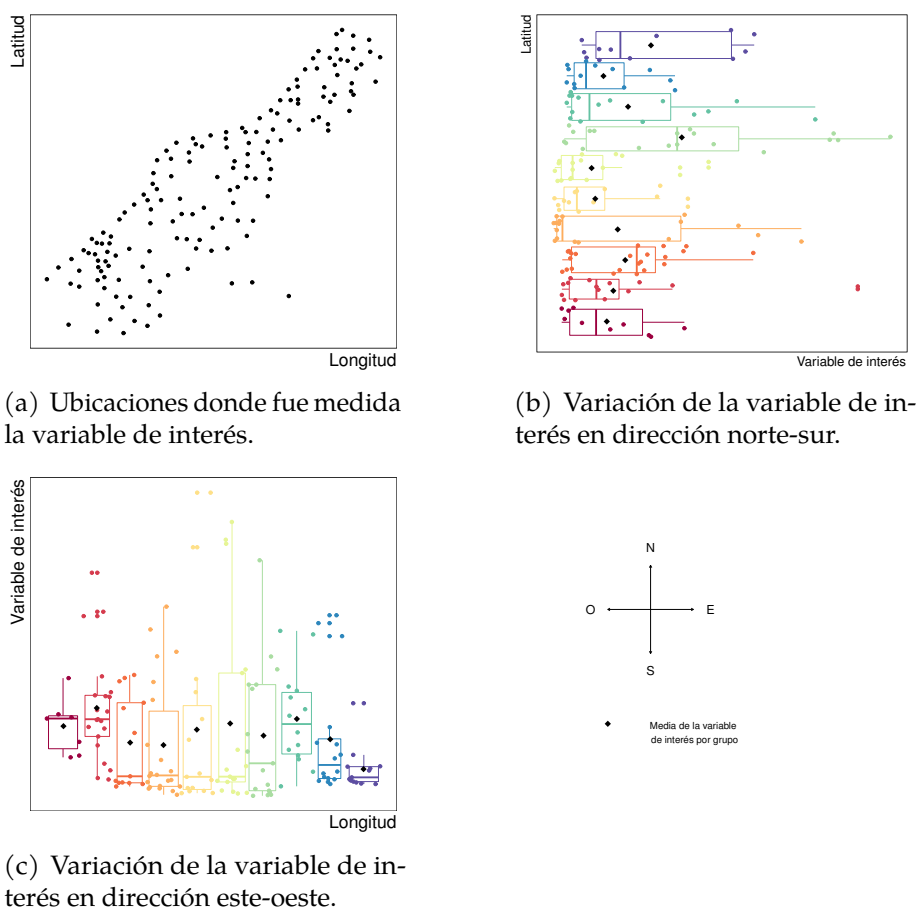
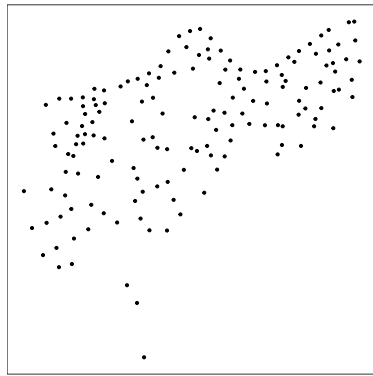


FIGURA 2. Distribución de la variable concentración de zinc de los Datos Meuse en función de las coordenadas (Cressie, 1993, pág. 37).

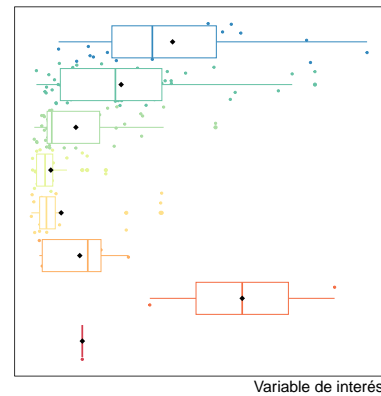
diferentes componentes de la misma como es el caso del ejemplo del río Meuse donde se mide la concentración de zinc (Figura 1 (a)). Los **polígonos** son áreas delimitadas por líneas como por ejemplo países, departamentos, estados, radios censales, o algún teselado sobre el espacio como observamos en la Figura 1 (b).

En este tipo de gráficos, para el análisis de la distribución espacial de la variable de interés, los valores de la misma se pueden categorizar de acuerdo a diferentes intervalos que se calculan a partir de percentiles y luego colorear cada polígono o punto en función de la categoría a la que pertenece. Si dichos intervalos están particionados a partir de los cuartiles, el gráfico se llama **mapa de caja**. En la Figura 1 (a) y (b) podemos observar cada caso, detectando cómo los colores se concentran en ciertas zonas, lo cual nos da una pista de la posible correlación espacial existente, esto quiere decir que los valores de la variable de interés son parecidos si están cerca espacialmente.

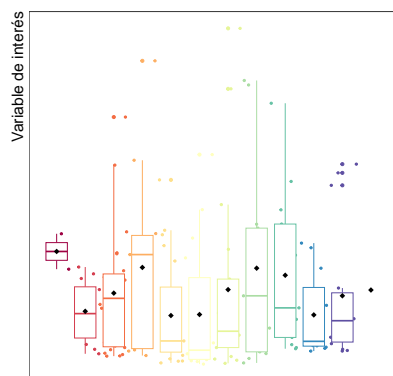
### 3.2. Tendencia



(a) Ubicaciones donde fue medida la variable de interés girados 45 grados en sentido horario.



(b) Variación de la variable de interés en dirección sureste - noroeste.



(c) Variación de la variable de interés en dirección suroeste - noreste.

FIGURA 3. Distribución de la variable concentración de zinc de los Datos Meuse en función de las coordenadas (Cressie, 1993, pág. 37).

Si bien los gráficos exploratorios nos dan una idea de cómo es la distribución espacial de los datos, puede tornarse difícil detectar cambios en el comportamiento del promedio o en la variabilidad de los mismos. Para los datos del río Meuse, en términos de tendencia nos interesa estudiar el comportamiento del promedio del logaritmo del zinc como función de las coordenadas. Como para estos datos contamos con una sola medición de la variable de interés por ubicación, no podemos realizar un gráfico del promedio por ubicación espacial. En este caso, lo que hacemos es agrupar los datos en ambas direcciones geográficas (oeste-este y norte-sur) de manera tal de poder calcular el promedio y poder graficar diagrama de cajas que nos muestren el comportamiento de los datos en ambas direcciones. Tales gráficos fueron realizados en las Figuras 2 (b) y 2 (c), respectivamente. Los puntos negros sobre cada diagrama de caja representan la media según el agrupamiento de los

datos por latitud o longitud. De esta visualización particular no observamos tendencia en ninguna dirección lo cual nos estaría indicando que el comportamiento promedio de estos datos es constante en las direcciones consideradas.

No obstante, si rotamos el mismo gráfico en  $45^\circ$  en sentido horario, podemos observar cierta tendencia. En particular, como se observa en la Figura 3 (b), la concentración de zinc decrece de noroeste a sureste, revelando así una mayor concentración del metal a orillas del río la cual se disipa a medida que nos alejamos del mismo. Este comportamiento también se puede apreciar en la Figura 1. De este análisis se desprende la importancia de realizar un análisis exploratorio exhaustivo para obtener conclusiones más robustas. No obstante, como veremos más adelante, existen herramientas complementarias que permiten enriquecer este análisis.

### 3.3. Variabilidad espacial

A partir de los aportes de Waldo Tobler con la primera ley de la geografía que establece que todo está relacionado con todo lo demás, pero las cosas cercanas están más relacionadas que las lejanas (Siabato y Guszmán-Manrique, 2019), podemos inferir que dos puntos cercanos asumen valores similares porque estos se generaron en condiciones similares. Por el contrario, a grandes distancias las condiciones son diferentes y se esperan mayores variaciones.

La herramienta más utilizada para medir esta variabilidad es el conocido **semivariograma** empírico. Este gráfico es fundamental a la hora de describir la variación espacial de los datos. Dada la importancia del semivariograma en la geoestadística, tanto la versión empírica como luego la versión teórica del mismo serán introducidas y estudiadas en detalle en las Secciones 4 y 5.

En este apartado introduciremos otra herramienta también utilizada para visualizar la variabilidad espacial presente en los datos, los **diagramas de dispersión  $h$** . Aquí (ver luego Sección 5)  $h$  indica una distancia y dichos diagramas describen la relación de una misma variable medida en sitios que se encuentran separados por cierta distancia  $h$ .

La Figura 4 muestra varios paneles donde hemos graficado el logaritmo del zinc para el ejemplo del río Meuse y su asociación para diferentes rangos de la distancia  $h$ . Como puede observarse, para distancias chicas la asociación es mayor y la misma desaparece a medida que  $h$  aumenta. La recta observada es la recta de regresión cuya pendiente tiende a cero cuando la distancia entre sitios aumenta.

## §4. Análisis estructural

En el apartado anterior mostramos, a través del ejemplo del río Meuse, cómo es posible obtener información a partir del análisis exploratorio de los datos espaciales. Dicho análisis sólo genera información sobre la muestra de los datos

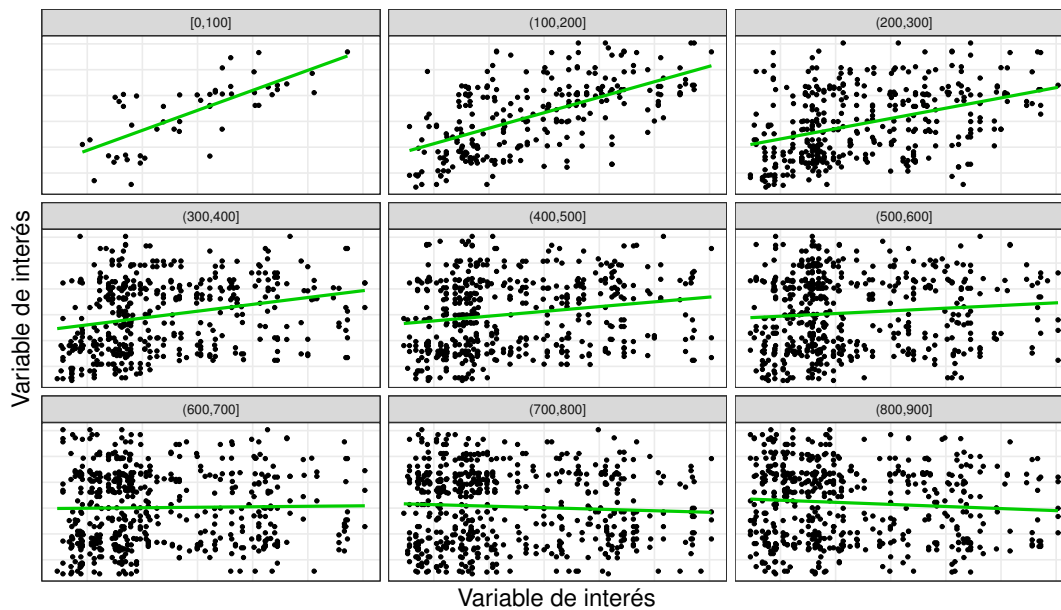


FIGURA 4. Gráfico de dispersión  $h$  para los datos Meuse.

observados los cuales, como veremos en esta sección, se denominan **valores (datos) regionalizados**. Unos de los objetivos de la estadística en general y nuestro en particular, es poder obtener información general acerca del fenómeno (social, económico, ambiental, geológico) que genera los datos y así obtener información independiente de la muestra obtenida. Para ello consideramos un enfoque probabilístico, esto quiere decir que el conjunto de los datos regionalizados con los que contamos pueden considerarse como el resultado de un mecanismo aleatorio, al cual llamaremos **proceso estocástico espacial**. En la bibliografía también podemos hallarlo con el nombre de función aleatoria o campo aleatorio (Montero, Fernández-Avilés, y Mateu (2015), Wackernagel (2003)). Para comprender mejor las características de este proceso, los supuestos subyacentes y sus implicancias sobre el tratamiento de datos espaciales nos focalizamos, en esta sección, en la formalización del mismo y de sus propiedades.

#### 4.1. Proceso estocástico espacial

Con el objetivo de poder estudiar estos datos de manera analítica y desde un marco estadístico formal, asumimos entonces que los mismos son el resultado de un mecanismo aleatorio. Específicamente, dado  $d \in \mathbb{N}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^d$  y  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad, se llama **proceso estocástico espacial** al conjunto

$$\{Z(\mathbf{s}, v) : \mathbf{s} \in D, v \in \Omega\},$$

con  $Z$  una función a valores reales tal que  $Z : D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Tomando al valor regionalizado como resultado de un proceso estocástico, obtenemos dos caracterizaciones del mismo. En particular, si fijamos una localización

$\mathbf{s}_0 \in D$ , tenemos una variable aleatoria  $Z(\mathbf{s}_0, \cdot)$  con su variabilidad asociada. Si en su lugar fijamos  $v_0 \in \Omega$ , entonces tenemos la realización  $z : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , denominada comúnmente como **variable regionalizada o regionalización** (e.g. [Wackernagel \(2006\)](#)). Esta doble caracterización nos permite tener en cuenta las diferentes fuentes de variabilidad del proceso. Por un lado, la variabilidad del fenómeno en cada sitio, entender que el dato existe con cierta probabilidad y que existen otros valores posibles para cada localización. Por otro lado, formalizar la variabilidad entre sitios, considerando las distancias entre ellos y la forma de la dependencia con la variable de interés.

En el siguiente diagrama ilustramos estas definiciones junto con la notación a ser utilizada. Cabe aclarar que el símbolo  $\doteq$  se utiliza, y se utilizará a lo largo del artículo, para introducir nueva notación.

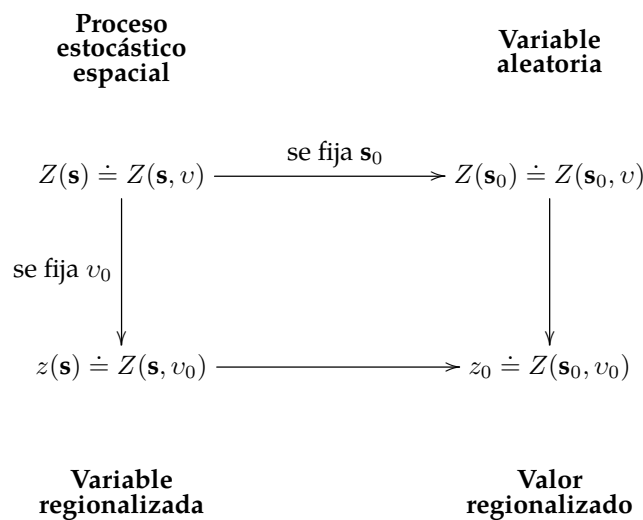


FIGURA 5. Diagrama resumen de las definiciones junto con la notación a ser utilizada a lo largo de todo el trabajo ([Wackernagel, 2003](#), pág. 28.)

Con esta caracterización, si fijamos un conjunto de localizaciones  $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n\}$  y un  $v_0 \in \Omega$ , tenemos un vector  $(z_1, \dots, z_n)^T = (Z(\mathbf{s}_1, v_0), \dots, Z(\mathbf{s}_n, v_0))^T$  de **valores regionalizados** los cuales representan los **datos empíricos**.

Para el ejemplo del río Meuse,  $d = 2$  ya que las mediciones de la concentración de zinc fueron tomadas para determinadas coordenadas geográficas, esto es, latitud y longitud. La región  $D$  es el dominio del proceso, en este caso representado por la región sobre la cual tenemos información. Más precisamente, en la Figura 6 presentamos una adaptación de los datos Meuse en la región  $D$ . En el panel izquierdo de la misma observamos una variable regionalizada  $Z(\mathbf{s}, v_0)$  para un  $v_0$  fijo y

para todo  $\mathbf{s} \in D$  y en el panel derecho un conjunto de los valores regionalizados nombrados anteriormente y corresponden a los datos con los que contamos.

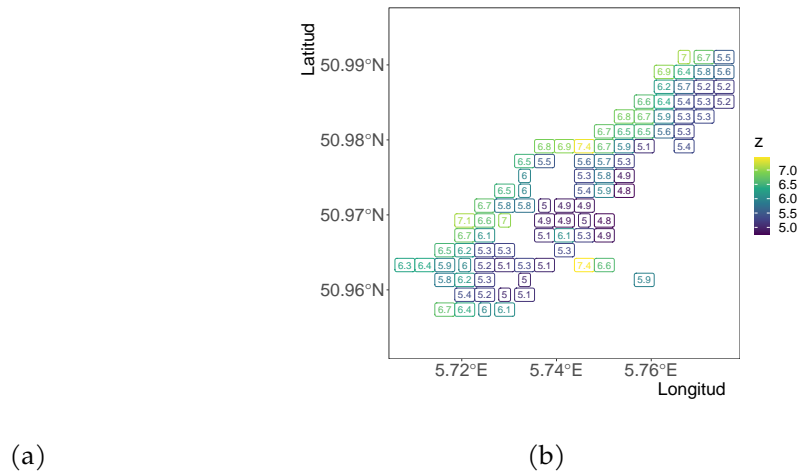


FIGURA 6. Para el ejemplo del río Meuse: (a) variable regionalizada; (b) conjunto de valores regionalizados.

Dado que un proceso estocástico espacial queda determinado por sus distribuciones finito dimensionales, resulta fundamental definir su función de distribución para así poder estudiar al proceso en el contexto estadístico.

Específicamente, podemos definir la **distribución del proceso estocástico**  $Z(\mathbf{s})$  como la colección de distribuciones conjuntas de dimensión finita de vectores aleatorios  $(Z(\mathbf{s}_1), \dots, Z(\mathbf{s}_n))^T$ , para conjuntos finitos de sitios  $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n\}$ ,

$$\begin{aligned}
 F_{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n}(z_1, \dots, z_n) &\doteq \mathbb{P}(\{v : Z(\mathbf{s}_1, v) \leq z_1, \dots, Z(\mathbf{s}_n, v) \leq z_n\}) \\
 (4.1) \qquad \qquad \qquad &= \mathbb{P}(Z(\mathbf{s}_1) \leq z_1, \dots, Z(\mathbf{s}_n) \leq z_n).
 \end{aligned}$$

De esta manera, con la especificación (4.1) para todos los posibles conjuntos de puntos de muestreo  $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n\}$  y para todo  $n$  tenemos una caracterización completa de un proceso estocástico. Un caso particular de especial importancia es el denominado **proceso gaussiano** donde las distribuciones de dimensión finita definidas en la Ecuación (4.1) son normales multivariadas. Para denotar la **función de densidad o función de probabilidad puntual conjunta** de las variables aleatorias obtenidas en localizaciones específicas  $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n\}$ , usaremos  $p_{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n}(z_1, \dots, z_n)$  y  $p_{\mathbf{s}}(z)$  para la densidad o probabilidad puntual de  $Z(\mathbf{s})$ , para cada  $\mathbf{s} \in D$ .

Es bien sabido que al estudiar una variable o un conjunto de variables, determinar su función de distribución es un problema en sí mismo. Dicha complejidad reside en que la medición experimental de las distribuciones de probabilidad multidimensionales (e incluso unidimensionales) es una tarea muy complicada,

resultando excesivamente costoso estimar dicha función en todo su dominio. Por ejemplo, conocer la distribución completa del proceso estocástico que dio lugar a la concentración de zinc a orillas del río Meuse, puede ser muy complejo. Sin embargo, este problema suele simplificarse estudiando algunas medidas que caracterizan a la distribución y que de hecho están involucradas con las medidas de centralidad y variabilidad de los datos. Estas medidas son los momentos.

El primer momento, **valor esperado**, **función media** o simplemente **media**, denotado por  $\mu(\mathbf{s})$ , es la función que describe la variación no aleatoria (o tendencia) del proceso  $Z(\mathbf{s})$ . De esta manera, para  $\mathbf{s} \in D$  la media de  $Z(\mathbf{s})$  está dada por

$$\mu(\mathbf{s}) = \mathbb{E} [Z(\mathbf{s})] = \int_{-\infty}^{\infty} zp_{\mathbf{s}}(z)dz.$$

Para un proceso de valores discretos, la integral se reemplaza por la suma y en este caso  $p_{\mathbf{s}}(z)$  es la función de probabilidad puntual de  $Z(\mathbf{s})$ . Aunque no lo volveremos a mencionar, este comentario se replicará cada vez que aparezcan integrales.

En la Sección 3.2 observamos que, exploratoriamente, no existe tendencia en la concentración de zinc a orillas del río Meuse, y a esto lo hemos observado a partir de los promedios, es decir, los primeros momentos medidos en cada dirección.

Si bien la media es una medida que caracteriza de una manera simple la centralidad del proceso, no es completamente informativa para describir el comportamiento del mismo. Por ejemplo, podríamos tener dos regiones con la misma concentración media de zinc pero con una dispersión muy diferente como se muestra en la Figura 7. En la misma hemos graficado datos simulados sobre una cuadrícula en  $D$  para el ejemplo del río Meuse, utilizando para ello un proceso con media constante 6 para todo  $\mathbf{s}$ . En el panel izquierdo observamos que los datos simulados se alejan de la media de una manera homogénea sobre la región de interés. En cambio, en el panel derecho, los datos se comportan de forma diferente, esto es, a medida que aumenta la longitud (coordenada  $x$ ) los mismos se alejan de la media.

Para modelar esta variabilidad es necesario definir los tres momentos de segundo orden más utilizados en geoestadística que son la varianza, la covarianza (o la covarianza normalizada, que comúnmente se conoce como correlación) y el variograma. Para  $\mathbf{s} \in D$ , la **varianza** de  $Z(\mathbf{s})$  está dada por

$$\text{Var} (Z(\mathbf{s})) \doteq \mathbb{E}[(Z(\mathbf{s}) - \mu(\mathbf{s}))^2] = \mathbb{E} [Z^2(\mathbf{s})] - \mu^2(\mathbf{s}),$$

donde,

$$\mathbb{E} [Z^2(\mathbf{s})] = \int_{-\infty}^{\infty} z^2p_{\mathbf{s}}(z)dz.$$



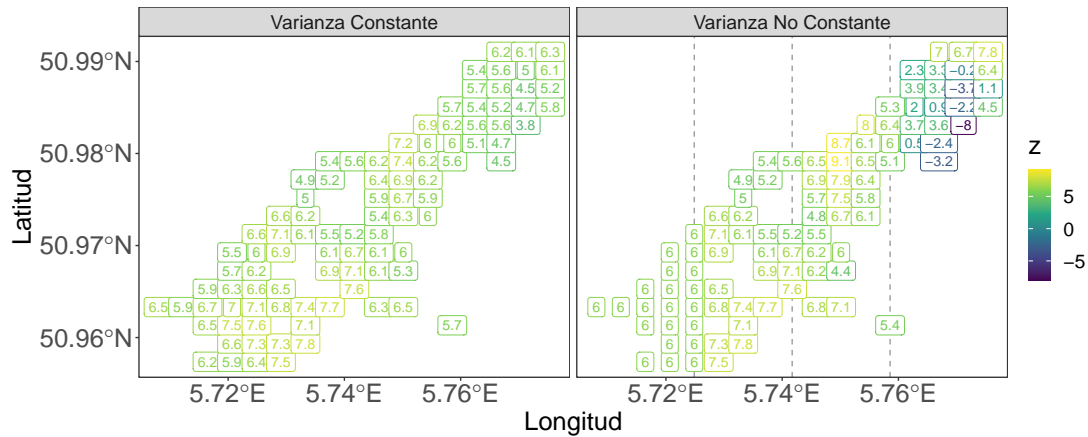


FIGURA 7. Datos simulados sobre las coordenadas de los datos Meuse. Panel izquierdo: varianza constante. Panel derecho: varianza no constante.

La varianza es un caso particular de la **covarianza o autocovarianza**  $C : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual queda definida, para todo  $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \in D$ , como

$$\begin{aligned} C(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) &\doteq \text{Cov}(Z(\mathbf{s}_i), Z(\mathbf{s}_j)) \\ &= \mathbb{E}[(Z(\mathbf{s}_i) - \mu(\mathbf{s}_i))(Z(\mathbf{s}_j) - \mu(\mathbf{s}_j))] \\ &= \mathbb{E}[Z(\mathbf{s}_i)Z(\mathbf{s}_j)] - \mu(\mathbf{s}_i)\mu(\mathbf{s}_j), \end{aligned}$$

donde,

$$\mathbb{E}[Z(\mathbf{s}_i)Z(\mathbf{s}_j)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_i z_j p_{\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j}(z_i, z_j) dz_i dz_j.$$

La covarianza mide el grado de dependencia espacial existente en los datos. Por ejemplo, para los datos del río Meuse, mide cuánto afecta la concentración de zinc medida en cierta localización a los valores de la misma medidos en localizaciones vecinas. En este sentido, podría ser de interés modelar si a distancias mayores los niveles de zinc tienen relación, lo cual veremos con más detalle en la Sección 5.

Asociado a la covarianza tenemos el **variograma** del proceso el cual, para todo  $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \in D$ , está definido como

$$\begin{aligned} 2\gamma(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) &\doteq \text{Var}(Z(\mathbf{s}_i) - Z(\mathbf{s}_j)) \\ &= \text{Var}(Z(\mathbf{s}_i)) + \text{Var}(Z(\mathbf{s}_j)) - 2\text{Cov}(Z(\mathbf{s}_i), Z(\mathbf{s}_j)). \end{aligned}$$

La función  $\gamma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  es conocida como el **semivariograma** del proceso  $Z(\mathbf{s})$  y es una herramienta clásica muy utilizada ya que cuantifica la disimilaridad del proceso para diferentes locaciones. Como lo hemos mencionado anteriormente, tanto  $Z(\mathbf{s}_i)$  como  $Z(\mathbf{s}_j)$  son variables aleatorias y por lo tanto la diferencia  $Z(\mathbf{s}_i) - Z(\mathbf{s}_j)$  también lo es. Por lo tanto, dado que el variograma es la varianza de dicha diferencia, el mismo proporciona una medida de dependencia espacial.

Dados dos sitios a cierta distancia, si las variables  $Z(\mathbf{s}_i)$  y  $Z(\mathbf{s}_j)$  toman valores similares, la variabilidad de la diferencia será pequeña, lo que resultará en valores bajos del semivariograma. Valores altos se observarán cuando exista una mayor diferencia entre los valores de la variable. Si pensamos el variograma en función de las distancias entre sitios, y suponemos dependencia espacial, lo que esperamos es que para distancias cercanas a cero los valores del semivariograma sean pequeños y aumenten a medida que las distancias entre los sitios crezcan. Por ello el semivariograma es el primer paso en todo análisis geoestadístico ya que nos permite visualizar la existencia o no de dicha dependencia, aunque no es su único uso. Por ejemplo, en predicción espacial, más precisamente en *Kriging*, la estimación del semivariograma es imprescindible para el cálculo de los pesos utilizados en la combinación lineal pesada que lo define.

Finalmente, se define la **función de correlación o autocorrelación** que no es más que la covarianza estandarizada, normalizada o libre de unidades. La misma se define, para todo  $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \in D$  como

$$\rho(i, j) \doteq \frac{C(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)}{\sqrt{\text{Var}(Z(\mathbf{s}_i)) \text{Var}(Z(\mathbf{s}_j))}}.$$

## 4.2. Estacionariedad

Supongamos que para el ejemplo del río Meuse nos interesa estudiar si la función de distribución del proceso que generó los datos es exactamente la misma para cualquier locación, o podría considerarse alguna relajación de este supuesto. En esta dirección, detallamos tres tipos de estacionariedad comúnmente descriptos en la literatura ([Banerjee y cols. \(2004\)](#); [Chiles y Delfiner \(2012\)](#); [Cressie \(1993\)](#); [Montero y cols. \(2015\)](#); [Wackernagel \(2003\)](#)). Los supuestos de estacionariedad intentan describir el comportamiento de una amplia gama de fenómenos imponiendo condiciones a los momentos del proceso. En general, la estacionariedad es adoptada por un amplio abanico de modelos y métodos para datos dependientes, ya que permite simplificar el análisis y hacer inferencias más sólidas sobre el comportamiento del proceso.

El tipo de estacionariedad más fuerte que podemos considerar para un proceso  $Z(\mathbf{s})$  es la **estacionariedad en sentido estricto** o simplemente **estacionariedad estricta**. La misma implica que dado un proceso  $Z(\mathbf{s})$  con esperanza y varianza finita y un conjunto de localizaciones  $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_k\}$ , para cualquier vector de separación  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ ,  $(Z(\mathbf{s}_1), \dots, Z(\mathbf{s}_k))$  y  $(Z(\mathbf{s}_1 + \mathbf{h}), \dots, Z(\mathbf{s}_k + \mathbf{h}))$  tienen la misma función de distribución conjunta para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Un tipo de estacionariedad más débil que la estricta es la conocida como **estacionariedad débil o de segundo orden**. Más precisamente, diremos que un proceso  $Z(\mathbf{s})$  es **estacionario de segundo orden** o **débilmente estacionario**, si tiene

momento de segundo orden finito, es decir,  $\mathbb{E}[Z^2(\mathbf{s})] < \infty$  y verifica las siguientes dos condiciones:

(i) Para todo  $\mathbf{s} \in D$ , la esperanza de  $Z(\mathbf{s})$  existe y es constante. Es decir,

$$(4.2) \quad \mathbb{E}[Z(\mathbf{s})] = \mu.$$

(ii) Para todo  $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \in D$  y cada par de variables  $Z(\mathbf{s}_i), Z(\mathbf{s}_j)$  medidas en esos sitios, la covarianza existe y solo depende del vector de separación  $\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j$  entre los sitios  $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j$ . Esto es,

$$(4.3) \quad \text{Cov}(Z(\mathbf{s}_i), Z(\mathbf{s}_j)) \doteq C(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j).$$

En este caso la función  $C(\cdot)$  es llamada **covariograma** o **función de covarianza estacionaria**. Para simplificar la notación, definimos a dicho vector de separación como  $\mathbf{h} \doteq \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j$ , a partir de lo cual, para todo  $\mathbf{s} \in D$ , tenemos que

$$C(\mathbf{s} + \mathbf{h}, \mathbf{s}) = \text{Cov}(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}), Z(\mathbf{s})) \doteq C(\mathbf{h}).$$

En lo que resta del artículo utilizamos esta notación donde  $\mathbf{s} + \mathbf{h}$  y  $\mathbf{s}$  son sitios que están a separación  $\mathbf{h}$ .

Como lo mencionamos anteriormente, la estacionariedad de segundo orden es más débil que la estacionariedad estricta en el sentido de que si un proceso es estrictamente estacionario entonces es débilmente estacionario.

Dado que los momentos de segundo orden de un proceso débilmente estacionario son finitos, la varianza del mismo existe, es finita y constante,

$$\text{Var}(Z(\mathbf{s})) = \text{Cov}(Z(\mathbf{s}), Z(\mathbf{s})) = C(\mathbf{0}) \doteq \sigma^2 < \infty, \quad \forall \mathbf{s} \in D.$$

En este contexto el variograma está dado por

$$\begin{aligned} 2\gamma(\mathbf{s}, \mathbf{s} + \mathbf{h}) &= \text{Var}(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s})) \\ &= \text{Var}(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})) + \text{Var}(Z(\mathbf{s})) - 2\text{Cov}(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}), Z(\mathbf{s})) \\ &= C(\mathbf{0}) + C(\mathbf{0}) - 2C(\mathbf{h}) && \text{(por (4.3))} \\ (4.4) \quad &= 2(C(\mathbf{0}) - C(\mathbf{h})), \end{aligned}$$

por lo que el semivariograma de un proceso débilmente estacionario solo depende del vector de separación  $\mathbf{h}$  y queda expresado como

$$(4.5) \quad \gamma(\mathbf{s}, \mathbf{s} + \mathbf{h}) = C(\mathbf{0}) - C(\mathbf{h}) \doteq \gamma(\mathbf{h}).$$

Otra propiedad importante de la función de covarianza  $C$ , en el marco de los procesos estacionarios de segundo orden, es que está acotada por su valor en el origen. Esto es,

$$(4.6) \quad |C(\mathbf{h})| \leq C(\mathbf{0}).$$

En efecto, de  $0 \leq \text{Var}(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s})) = 2(C(\mathbf{0}) - C(\mathbf{h}))$  se tiene que  $C(\mathbf{h}) \leq C(\mathbf{0})$  y, análogamente, de  $0 \leq \text{Var}(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) + Z(\mathbf{s})) = 2(C(\mathbf{0}) + C(\mathbf{h}))$  se tiene que  $-C(\mathbf{0}) \leq C(\mathbf{h})$  de donde se sigue (4.6).

Observemos además que si el proceso  $Z(\mathbf{s})$  es estacionario de segundo orden,  $\gamma(\mathbf{h})$  también está acotada pues, de (4.5) y (4.6) se tiene que,

$$|\gamma(\mathbf{h})| = |C(\mathbf{0}) - C(\mathbf{h})| \leq |C(\mathbf{0})| + |C(\mathbf{h})| \leq 2C(\mathbf{0}).$$

Esto nos dice que si  $\gamma(\mathbf{h})$  no está acotada, el proceso  $Z(\mathbf{s})$  no puede ser estacionario de segundo orden pues en ese caso no existiría la covarianza.

De la Ecuación (4.5) se revela que un semivariograma queda determinado a partir de una función de covarianza. Sin embargo, el recíproco no es cierto ya que el semivariograma puede crecer indefinidamente mientras que la covarianza no. A modo de ejemplo, (Wackernagel, 2003, Ejemplo 7.1, pág. 52) el proceso llamado movimiento browniano fraccional tiene un variograma de la siguiente forma,

$$(4.7) \quad \gamma(\mathbf{h}) = b\|\mathbf{h}\|^p, \quad \text{con } 0 < p < 2 \text{ y } b > 0.$$

Dicha función no podría dar lugar a una función de covarianza ya que crece sin límites. Esta función de semivariograma supera el marco de los procesos débilmente estacionarios; esto es,  $\gamma(\mathbf{h})$  existe pero  $C(\mathbf{h})$  no. Esto significa que existe un conjunto de procesos que no son débilmente estacionarios pero que sin embargo podemos modelar su autocorrelación a partir de la función de semivariograma  $\gamma(\mathbf{h})$ . Describimos dicho conjunto a continuación.

Dado que las hipótesis de media constante y de varianza finita, asumidas por la estacionariedad débil, pueden resultar muy restrictivas en varios contextos, es que suele considerarse un tercer (y más débil) tipo de estacionariedad que es llamada **estacionariedad intrínseca**. Esto permite, por ejemplo, tratar con procesos con capacidad de variación infinita, a partir de suponer la finitud de la varianza de sus diferencias  $Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s})$ . Formalmente, diremos que un proceso  $Z(\mathbf{s})$  es **intrínsecamente estacionario** o simplemente **intrínseco** si, para todo  $\mathbf{s} \in D$  verifica que

(i) La esperanza del proceso diferencia es nula. Es decir,

$$(4.8) \quad \mathbb{E}[Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s})] = 0.$$

(ii) El variograma depende solo del vector de separación  $\mathbf{h}$ . Esto es,

$$(4.9) \quad 2\gamma(\mathbf{s}, \mathbf{s} + \mathbf{h}) = \text{Var}(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s})) \doteq 2\gamma(\mathbf{h}).$$

Una identidad muy utilizada para procesos intrínsecos se desprende de las Ecuaciones (4.8) y (4.9) y es la siguiente:

$$(4.10) \quad \gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}\text{Var}(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s})) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}))^2].$$

A partir de todo lo anterior, es sencillo probar que todo proceso estacionario de segundo orden es intrínsecamente estacionario pues, la condición (4.8) es una consecuencia inmediata de (4.2) y la condición (4.9) de (4.4).

El recíproco de este resultado es falso. Es decir, existen procesos intrínsecamente estacionarios que no son estacionarios de segundo orden. Por ejemplo, hemos visto que la función de semivariograma dada en (4.7) no es acotada y como consecuencia no cuenta con una función de covarianza asociada, lo que hace que supere el marco de los procesos débilmente estacionarios. Sin embargo, esta función de semivariograma podría estar asociada a un proceso intrínseco. Otro ejemplo es el proceso discreto de Wiener-Levy (Montero y cols., 2015, pág. 17) dado por  $Z_{k+1} = Z_k + \epsilon_k$ , con  $\epsilon_k \sim N(0, 1)$  variables aleatorias independientes, indexado en los naturales  $k$  con  $Z_0 = 0$ , el cual puede probarse (ver Lema 8.1 en el Apéndice) que es un proceso intrínsecamente estacionario pero no débilmente estacionario.

Es importante destacar que, a lo largo de todo el artículo, cuando consideramos que la función de semivariograma  $\gamma(\mathbf{h})$  o el covariograma  $C(\mathbf{h})$  existen, estamos asumiendo que las mismas están asociadas a algún proceso intrínsecamente estacionario o débilmente estacionario, respectivamente.

## §5. Modelo espacial

Luego de realizar el análisis exploratorio de la concentración de zinc en la llanura aluvial del río Meuse, podemos hacer varias afirmaciones acerca de la tendencia y la dependencia espacial existente en los datos, y con ello, poder encontrar un modelo teórico para el proceso espacial subyacente. Como es bien sabido, modelar correctamente un experimento nos permite luego poder inferir y predecir eventos de manera eficiente. En esta dirección es usual descomponer al proceso  $Z(\mathbf{s})$  como una suma de dos componentes, esto es,

$$(5.1) \quad Z(\mathbf{s}) = \mu(\mathbf{s}) + e(\mathbf{s}),$$

donde la función media  $\mu(\mathbf{s}) = \mathbb{E}[Z(\mathbf{s})]$  es continua y determinística y el proceso de error  $e(\mathbf{s})$  es estocástico con media cero y cierta estructura de dependencia espacial:

- Si  $e(\mathbf{s})$  es débilmente estacionario, para todo  $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \in D$  tendremos que

$$\text{Cov}(e(\mathbf{s}_i), e(\mathbf{s}_j)) = C(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j).$$

- Si  $e(\mathbf{s})$  es intrínsecamente estacionario, para todo  $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \in D$  tendremos que

$$\text{Var}(e(\mathbf{s}_i) - e(\mathbf{s}_j)) = 2\gamma_e(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j),$$

donde  $2\gamma_e(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)$  es el **variograma del residuo** el cual es llamado así ya que, en la práctica, en lugar de usar los datos originales para hallarlo, se

utilizan los residuos obtenidos a partir de la estimación de la función media (Wackernagel, 2006, pag. 181).

El proceso de error  $e(\mathbf{s})$  además de capturar la variación espacial a pequeña escala explica, en parte, el error de medición que puede ocurrir en el proceso de recopilación de datos. Este componente generalmente no tiene estructura espacial, por lo tanto, para algunos propósitos puede ser deseable separarlo explícitamente de la componente espacialmente dependiente. Es decir, podemos escribir

$$(5.2) \quad e(\mathbf{s}) = \eta(\mathbf{s}) + \epsilon(\mathbf{s}),$$

donde  $\eta(\cdot)$  y  $\epsilon(\cdot)$  son independientes,  $\eta(\cdot)$  es la componente que mide la dependencia espacial y  $\epsilon(\cdot)$ , comúnmente conocido como **efecto pepita** o proceso de ruido blanco, es un proceso con media cero, espacialmente no correlacionado y que modela el error de medición. Más precisamente, su función de covarianza está dada por

$$\text{Cov}(\epsilon(\mathbf{s}), \epsilon(\mathbf{s} + \mathbf{h})) = \begin{cases} \sigma_\epsilon^2 \geq 0, & \text{si } \mathbf{h} = \mathbf{0}, \\ 0, & \text{si } \mathbf{h} \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Conociendo los supuestos sobre el proceso de error  $e(\mathbf{s})$  y la función media  $\mu(\mathbf{s})$ , podemos deducir el comportamiento del proceso  $Z(\mathbf{s})$ . Más precisamente, si  $\mu(\mathbf{s})$  es constante, entonces el proceso  $Z(\mathbf{s})$  hereda las propiedades de  $e(\mathbf{s})$ . Esto es, si el proceso  $e(\mathbf{s})$  es estacionario de segundo orden (intrínsecamente estacionario), entonces  $Z(\mathbf{s})$  es estacionario de segundo orden (intrínsecamente estacionario). Formalmente estos enunciados se encuentran sintetizados en los Lemas 8.2 y 8.3, respectivamente, cuyas demostraciones están dadas en el Apéndice.

En la práctica, el semivariograma y el covariograma se estiman empíricamente a partir de los datos como lo veremos en la próxima sección.

### 5.1. Semivariograma y covariograma empíricos

En muchos casos, incluso en aquellos donde se cuenta con información suficiente para suponer que el proceso es débilmente estacionario, se prefiere utilizar el semivariograma antes que el covariograma pues este último requiere conocer la media del proceso  $Z(\mathbf{s})$ . En la práctica, ésta es desconocida y debe estimarse a partir de los datos, lo que introduce un sesgo en la estimación del covariograma. Para demostrar este hecho, definimos primero las versiones empíricas del covariograma y semivariograma de un proceso  $Z(\mathbf{s})$ .

Bajo las condiciones de estacionariedad intrínseca (4.8) y (4.9) o las condiciones de estacionariedad de segundo orden (4.2) y (4.3), los estimadores empíricos del semivariograma y el covariograma son construidos a partir del método de los momentos. Específicamente, dado un conjunto de sitios  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$  y una dirección  $\mathbf{h}$ , un estimador del semivariograma está dado por,

$$(5.3) \quad \hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} (Z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}_i))^2$$

y un estimador del covariograma por (Smith, 2014),

$$(5.4) \quad \hat{C}(\mathbf{h}) = \frac{1}{N(\mathbf{h}) - 1} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} (Z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h}) - \bar{Z}_{\mathbf{h}})(Z(\mathbf{s}_i) - \bar{Z}_{(\mathbf{h})}),$$

donde

$$(5.5) \quad \bar{Z}_{\mathbf{h}} \doteq \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} Z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h}) \quad \text{y} \quad \bar{Z}_{(\mathbf{h})} \doteq \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} Z(\mathbf{s}_i),$$

y  $N(\mathbf{h})$  es la cantidad de pares de puntos que están a una distancia  $\mathbf{h}$  los cuales, y sin pérdida de generalidad, suponemos que se presentan en el siguiente orden  $\{(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1 + \mathbf{h}), \dots, (\mathbf{s}_{N(\mathbf{h})}, \mathbf{s}_{N(\mathbf{h})} + \mathbf{h})\}$ .

Observemos que el covariograma empírico (5.4) a diferencia del variograma, utiliza la media muestral haciendo que  $\hat{C}(\mathbf{h})$  sea sesgado. Por otro lado, podemos probar que el semivariograma empírico  $\hat{\gamma}(\mathbf{h})$  definido en (5.3) es insesgado. Estos resultados se exponen en el siguiente lema, cuya demostración se encuentra en el Apéndice.

**Lema 5.1.** *El semivariograma empírico definido en (5.3) satisface que*

$$\mathbb{E}[\hat{\gamma}(\mathbf{h})] = \gamma(\mathbf{h}),$$

y el covariograma empírico definido en (5.4) satisface que

$$\mathbb{E}(\hat{C}(\mathbf{h})) = C(\mathbf{h}) - \frac{1}{N(\mathbf{h})(N(\mathbf{h}) - 1)} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} \sum_{j \neq i}^{N(\mathbf{h})} \text{Cov}(Z(\mathbf{s}_i), Z(\mathbf{s}_j + \mathbf{h}))$$

Entonces, a partir de los datos disponibles podemos calcular el semivariograma empírico (5.3), el cual resume la relación espacial presente en los datos.

Dado el vector de separación  $\mathbf{h}$ , para cada dirección podemos graficar los llamados **semivariogramas direccionales**, los cuales juegan un papel muy importante en el análisis de datos espaciales pues brindan información acerca de la variabilidad del proceso en cada dirección. Si éstos son diferentes para cada una de ellas, entonces el semivariograma (5.3) depende de  $\mathbf{h}$  no sólo en magnitud sino también en dirección, dando lugar a lo que se conoce como comportamiento **anisotrópico**. Por otro lado, si dicho gráfico se mantiene constante para cada dirección decimos que el semivariograma depende solo de la magnitud  $h \doteq \|\mathbf{h}\|$  que es la **distancia** a la cual se encuentran los datos, y es llamado **isotrópico**. En este caso construimos un único semivariograma al cual llamamos **semivariograma omnidireccional** (o

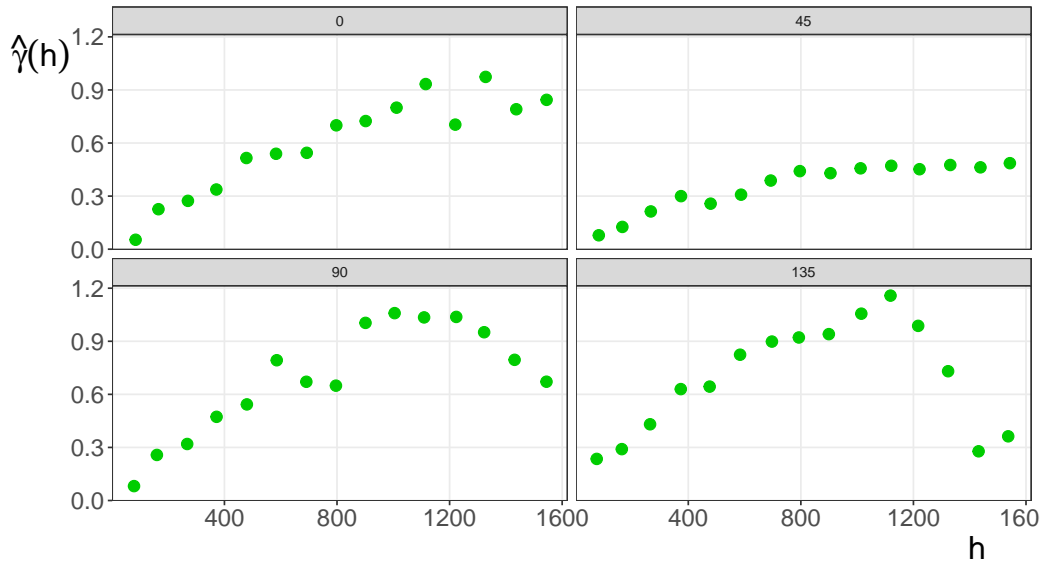


FIGURA 8. Semivariograma empírico para los datos del río Meuse.

simplemente semivariograma) y que se construye considerando todos los puntos que se encuentran a cierta distancia sin fijar una dirección.

En la Figura 8 graficamos los semivariogramas empíricos para los datos del río Meuse para diferentes direcciones (para cada panel), fijando una distancia máxima  $h_{max}$  la cual, generalmente, se toma como un tercio de la distancia espacial máxima existente entre los datos. Para realizar cada uno de estos gráficos se divide el intervalo  $[0, h_{max}]$  en subintervalos  $[h_i, h_j]$  de forma tal que en cada uno de ellos exista una cantidad mínima de pares de sitios  $N(\mathbf{h})$  cuyas distancias se encuentren en ese intervalo. Luego, para cada subintervalo se calcula  $\hat{\gamma}(h)$  tal que  $h \in [h_i, h_j]$ . En primer lugar se hallan diferentes semivariogramas para distintas direcciones (Figura 8) con el objetivo de explorar sobre la anisotropía o no del proceso subyacente a los datos. En el caso que sea isotrópico calculamos el semivariograma omnidireccional  $\hat{\gamma}(h)$  que observamos en la Figura 9.

En la Figura 8 podemos observar que tanto los valores del semivariograma para distancias cercanas a cero como la distancia a partir de la cual dichos valores se estabilizan son aproximadamente similares. No obstante, en la orientación noreste-suroeste ( $45^\circ$ ), no solo se alcanzan valores máximos menores en comparación con otras direcciones, sino que también se registra una tasa de crecimiento más moderada. Este último detalle sugiere una correlación inferior entre las variables en esta dirección. Este hecho también puede apreciarse en la Figura 1, en la cual se observa que en la dirección noreste-suroeste, los valores son similares, indicando una variabilidad reducida. En contraste, en la dirección sureste-noroeste, puede notarse un aumento de los valores del logaritmo del zinc indicando que la variabilidad espacial explicada en la dirección noreste-suroeste es menor que



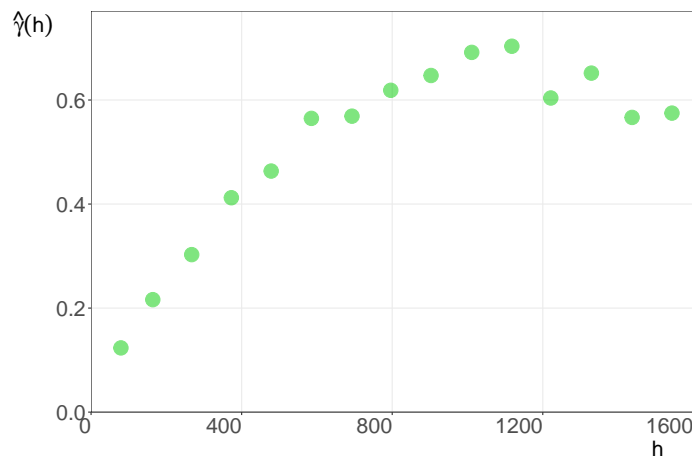


FIGURA 9. Semivariograma empírico omnidireccional para los datos del río Meuse.

en las otras direcciones. Como primer acercamiento al análisis de estos datos y para simplificar el mismo, concluiremos que, dado que tres de los cuatro semivariogramas observados son similares y el cuarto contribuye con poco peso a la variabilidad espacial explicada no consideraremos un comportamiento anisotrópico en el proceso subyacente de los datos. Entonces, en este caso, construimos un único semivariograma omnidireccional el cual puede apreciarse en la Figura 9. Sin embargo, existen herramientas que permitirían hacer un análisis específico de anisotropía que excede este trabajo.

## 5.2. Modelos teóricos de semivariograma

Como puede observarse en la Figura 9, la versión empírica del semivariograma no nos brinda información sobre la correlación espacial de variables definidas en sitios cuyas distancias no hayan sido observadas (i.e. no es continuo en  $h$ ). Por lo tanto, es necesario asumir la existencia de un modelo teórico continuo de semivariograma. En esta dirección, si bien existen métodos de estimación no paramétrica de los mismos ([García Soidán, Febrero Bande, y González Manteiga, 2004](#)), los modelos más utilizados son los paramétricos. En este trabajo nos centraremos en estos últimos, y para ello, utilizaremos la notación  $\gamma(\mathbf{h}, \boldsymbol{\theta})$  la cual hace hincapié en que el semivariograma no es más que una función paramétrica con una expresión analítica simple que depende del vector de separación  $\mathbf{h}$  y de un vector de parámetros  $\boldsymbol{\theta}$ .

Para ser considerada una función de semivariograma válida de un proceso intrínsecamente estacionario, la función  $\gamma(\mathbf{h}, \boldsymbol{\theta})$ , debe satisfacer las siguientes propiedades. Para cada  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ , donde  $\Theta$  es el espacio de parámetros,  $\gamma(\mathbf{h}, \boldsymbol{\theta})$  debe satisfacer:

- 1)  $\gamma(\mathbf{0}, \boldsymbol{\theta}) = 0$ ;

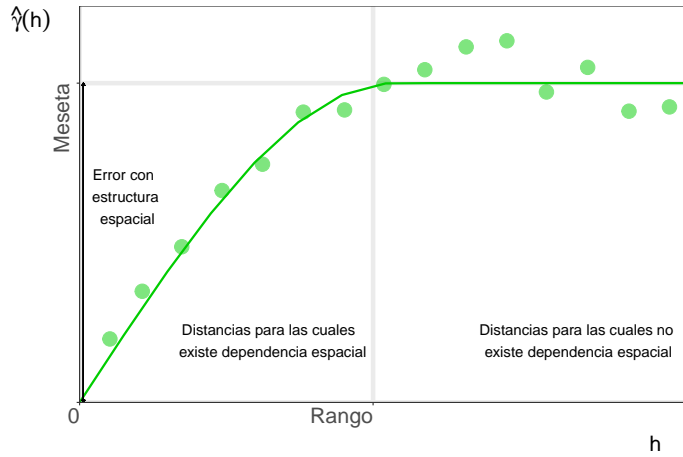


FIGURA 10. Semivariograma empírico y semivariograma estimado, a partir de un modelo esférico para los datos del río Meuse.

- ii)  $\gamma(\mathbf{h}, \boldsymbol{\theta}) \geq 0$ ;
- iii)  $\gamma(-\mathbf{h}, \boldsymbol{\theta}) = \gamma(\mathbf{h}, \boldsymbol{\theta})$ ;
- iv)  $\gamma$  es condicionalmente definido negativo. Esto es, para cualquier vector  $\mathbf{a}^T = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$  que verifique  $\mathbf{a}^T \mathbf{1} = 0$ , se tiene que  $\mathbf{a}^T \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{a} \leq 0$ , donde  $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz semivariograma entre localizaciones tal que  $\Gamma_{i,j} \doteq \gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j, \boldsymbol{\theta})$  para  $i, j = 1, \dots, n$ ,

ya que estas son las propiedades que cumple el semivariograma teórico de un proceso intrínsecamente estacionario. Las tres primeras propiedades se prueban fácilmente mediante la definición de  $\gamma$ . En el Apéndice se puede encontrar el detalle de la prueba de la Propiedad iv.

Si bien existe una gran variedad de modelos que satisfacen los requisitos de validez antes mencionados, en la práctica es común utilizar los modelos isotrópicos ya que simplifican el análisis. Recordemos que en este caso el semivariograma empírico solo depende de la distancia  $h = \|\mathbf{h}\|$  y no de la dirección por lo que solo es necesario ajustar un único semivariograma teórico el cual denotaremos  $\gamma^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Una característica que tienen los datos espaciales es que, generalmente, la dependencia decrece con la distancia, por lo que el covariograma es una función decreciente de la misma. Por lo tanto, a partir de la Ecuación (4.5), tenemos que el semivariograma es una función creciente respecto a  $\mathbf{h}$ , y es lo que se tiene en cuenta a la hora de proponer una función de semivariograma válida. Por ejemplo, para los datos de río Meuse, en la Figura 10 hemos graficado el semivariograma empírico y su ajuste paramétrico a partir de un modelo esférico para  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$

con  $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0$ , dado por.

$$(5.6) \quad \gamma^*(h, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \theta_1 \left[ \frac{3h}{2\theta_2} - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{\theta_2} \right)^3 \right], & \text{si } 0 < h \leq \theta_2, \\ \theta_1, & \text{si } h > \theta_2. \end{cases}$$

En dicho gráfico ilustramos los parámetros asociados al comportamiento del semivariograma a grandes distancias, estos son la meseta y el rango, los cuales definiremos a continuación, y en este caso coinciden con  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . La tasa de crecimiento del semivariograma refleja el grado de disimilaridad entre valores cada vez más distantes, la misma puede mantenerse si la variabilidad del fenómeno no tiene límite a grandes distancias o puede tender a desaparecer a partir de cierto valor de  $h$  en cuyo caso el semivariograma se estabiliza en lo que llamamos meseta. El valor a partir del cual el semivariograma se estabiliza es el rango y ese valor constante que alcanza o se aproxima el semivariograma es la meseta. Formalmente se llama **meseta** de  $\gamma^*(h, \boldsymbol{\theta})$  al límite

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma^*(h, \boldsymbol{\theta}),$$

siempre que el mismo exista. Los semivariogramas de procesos estacionarios de segundo orden alcanzan este límite en los que permanecen a partir de un cierto  $h$  si la covarianza tiende a cero cuando  $h$  tiende a infinito. Esto es, si

$$\lim_{h \rightarrow \infty} C(h) = 0.$$

Por lo tanto, y a partir de la Ecuación (4.5), tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma^*(h, \boldsymbol{\theta}) = C(\mathbf{0}),$$

por lo que a priori y en muchos casos la meseta está determinada por la varianza del proceso. El caso en el que el semivariograma empírico sea no acotado puede ser un indicio de la invalidez del supuesto de estacionariedad débil como ya lo hemos mencionado anteriormente.

Si la meseta se alcanza, como es el caso de la Figura 10, entonces el **rango** de  $\gamma^*(h, \boldsymbol{\theta})$  es el valor más pequeño de  $h$  para el cual  $\gamma^*(h, \boldsymbol{\theta})$  es igual a su meseta. Formalmente,

$$\text{mín} \{ h_0 : \gamma^*(h_0, \boldsymbol{\theta}) = \lim_{h \rightarrow \infty} \gamma^*(h, \boldsymbol{\theta}) \}.$$

En este contexto, el modelo esférico (5.6) tiene por definición un rango igual a  $\theta_2$ . Si la meseta no se alcanza, como es el caso de la Figura 11 para los datos del río Meuse, se dice que el rango no existe (en el sentido estricto). No obstante, cuando ello ocurre, se tiene una medida relacionada, llamada **rango efectivo**, que se define como el mínimo valor de  $h$  para el cual  $\gamma^*(h, \boldsymbol{\theta})$  es igual al 95 % de la meseta. Puede

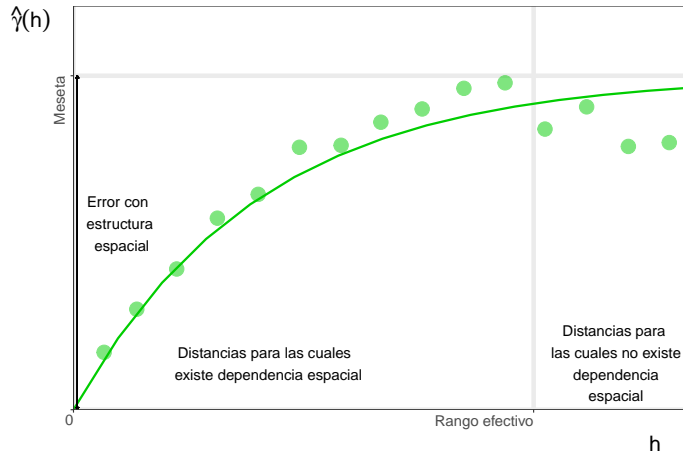


FIGURA 11. Semivariograma empírico y semivariograma estimado a partir de un modelo exponencial para los datos del río Meuse.

probarse que el modelo exponencial (Figura 11) dado por

$$\gamma^*(h, \boldsymbol{\theta}) = \theta_1 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h}{\theta_2}\right) \right],$$

donde  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$  con  $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0$ , tiene rango efectivo de aproximadamente 3 veces el rango  $\theta_2$ , esto es,  $3\theta_2$ . En efecto, si igualamos  $\gamma^*(h, \boldsymbol{\theta})$  al 95 % de la meseta tenemos que,

$$\theta_1 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h}{\theta_2}\right) \right] = 0,95\theta_1,$$

de donde se sigue que,

$$h = -\ln(0,05)\theta_2 \approx 3\theta_2.$$

Con respecto al comportamiento del semivariograma cerca del origen, como mencionamos en la Propiedad 1) una condición para que  $\gamma^*(h, \boldsymbol{\theta})$  sea una función de semivariograma válida es que

$$\gamma^*(0, \boldsymbol{\theta}) = 0.$$

En la práctica esto muchas veces no sucede como por ejemplo en el semivariograma dado en la Figura 9, donde los valores del mismo cuando  $h$  se acerca a 0 parecen acercarse a algún valor estrictamente positivo. Por esto, y a diferencia de la Figura 10, el ajuste que observamos en la Figura 12 es diferente ya que consideramos para el mismo combinar el modelo que elegimos para la estructura de covarianza de estos datos, por ejemplo el modelo esférico con el modelo pepita puro, dado por

$$(5.7) \quad \gamma^*(h, \theta_3) = \begin{cases} \theta_3, & \text{si } h \neq 0, \\ 0, & \text{si } h = 0, \end{cases}$$

donde  $\theta_3 > 0$ .

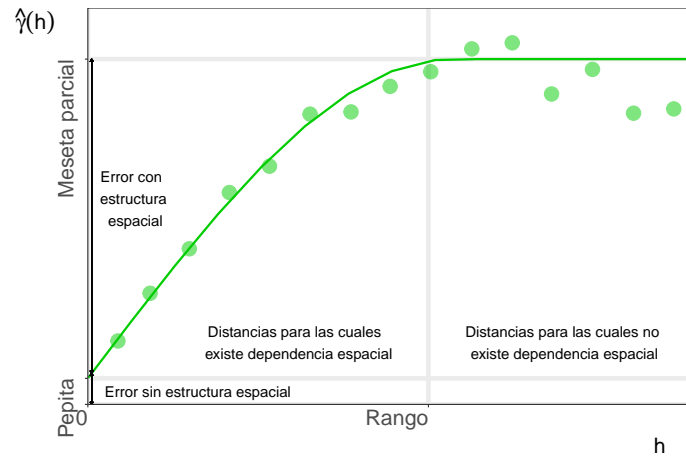


FIGURA 12. Semivariograma empírico y semivariograma estimado, a partir de una combinación entre el modelo pepita puro y un modelo esférico, para los datos del río Meuse.

Podemos formalizar esta decisión de combinar modelos a partir de la descomposición del error dada en (5.2), esto es

$$\begin{aligned}
 \gamma_e^*(h, \boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2} \text{Var} [e(\mathbf{s} + h) - e(\mathbf{s})] \\
 &= \frac{1}{2} \text{Var} [\eta(\mathbf{s} + h) + \epsilon(\mathbf{s} + h) - \eta(\mathbf{s}) - \epsilon(\mathbf{s})] \\
 &= \frac{1}{2} \text{Var} [\eta(\mathbf{s} + h) - \eta(\mathbf{s})] + \frac{1}{2} \text{Var} [\epsilon(\mathbf{s} + h) - \epsilon(\mathbf{s})] \quad (\eta \text{ y } \epsilon \text{ independientes}) \\
 (5.8) \quad &= \gamma_\eta^*(h, \boldsymbol{\theta}) + \gamma_\epsilon^*(h, \boldsymbol{\theta}),
 \end{aligned}$$

donde  $\gamma_\eta^*(h, \boldsymbol{\theta})$  es el semivariograma del proceso que captura la variabilidad espacial y  $\gamma_\epsilon^*(h, \boldsymbol{\theta})$  es el semivariograma del proceso asociado al error de medición, el cual es el que hemos llamado **efecto pepita**. Si en el semivariograma empírico observamos que los valores del mismo no se acercan a cero cuando  $h$  sí lo hace y además el comportamiento cercano a cero es aproximadamente lineal, una buena opción para el ajuste puede ser la combinación de modelos en términos de (5.8) donde  $\gamma_\epsilon^*(h, \boldsymbol{\theta}_3)$  está generalmente dado por el modelo pepita puro (5.7), quien modela la variabilidad del proceso  $\epsilon(\mathbf{s})$  el cual suponemos que no cuenta con variabilidad espacial. Por otro lado,  $\gamma_\eta^*(h, \boldsymbol{\theta})$  puede ser modelado a partir de cualquier función válida de variograma, por ejemplo, un modelo esférico (5.6). Luego a partir de (5.7) y (5.6), (5.8), el modelo para el semivariograma del residuo está dado por

$$\gamma_e^*(h, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} 0, & \text{si } h = 0, \\ \theta_3 + \theta_1 \left[ \frac{3h}{2\theta_2} - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{\theta_2} \right)^3 \right], & \text{si } 0 < h \leq \theta_2, \\ \theta_3 + \theta_1, & \text{si } h > \theta_2. \end{cases}$$

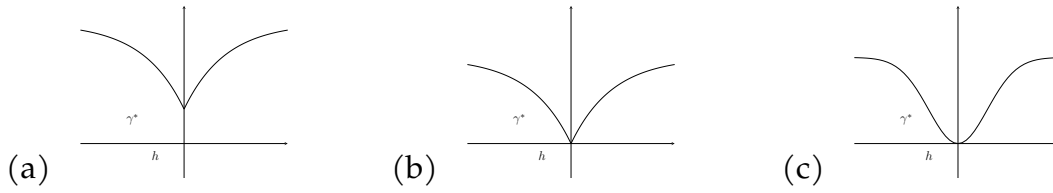


FIGURA 13. Comportamiento del semivariograma cerca al origen: (a) intersección positiva (pepita); (b) comportamiento lineal continuo, no diferenciable; (c) comportamiento parabólico, continuo y diferenciable.

donde  $\theta_3$  es el efecto pepita, que no es más que el parámetro meseta en el modelo (5.7), y  $\theta_1$  la meseta del modelo esférico, llamada **meseta parcial**, con lo cual la meseta del modelo  $\gamma_e^*(h, \theta)$  es  $\theta_3 + \theta_1$ , esto es, la meseta se divide en meseta parcial y efecto pepita, lo cual podemos observar en la Figura 12. Por ello y si elegimos ajustar un semivariograma teórico que considere un efecto pepita, tendremos que estimar tres parámetros: la meseta parcial y el rango dados por  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , respectivamente, y el efecto pepita que parametrizamos como  $\theta_3$ .

Para elegir el mejor modelo que se ajuste a los datos es importante analizar el comportamiento del semivariograma cerca del origen, y particularmente en el origen, ya que esto nos brinda información sobre intervalos de distancias donde la dependencia espacial es grande. Dicho comportamiento es analizado a través de qué tan suave es la superficie generada por el proceso subyacente, la cual clásicamente se caracteriza a partir de la continuidad y diferenciable del mismo. Por ejemplo, si el comportamiento de  $\gamma^*(h, \theta)$  cerca de cero es lineal, estamos asumiendo una variable regionalizada menos suave que en el caso de considerar un comportamiento parabólico para las distancias cercanas a 0. Estos comportamientos se observan en las Figuras 13 (b) y (c). Si consideramos que el semivariograma tiene un efecto pepita, tendremos una discontinuidad en el origen como la observada en la Figura 13 (a). En este caso asumimos que la variable regionalizada presenta irregularidades para distancias pequeñas.

Un tipo de continuidad muy utilizada es la **continuidad en media cuadrática** que se define como

$$\mathbb{E} [(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}))^2] \rightarrow 0, \quad \text{cuando } \|\mathbf{h}\| \rightarrow 0,$$

en cuyo caso diremos que el proceso  $Z(\mathbf{s})$  es continuo en media cuadrática. A partir de esta definición podemos afirmar que si el semivariograma  $2\gamma(\cdot)$  es continuo en el origen entonces el proceso  $Z(\mathbf{s})$  es continuo en media cuadrática, ya que, por (4.10),  $\mathbb{E} [(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}))^2] \rightarrow 0$  si y sólo si  $2\gamma(\mathbf{h}) \rightarrow 0$  cuando  $\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$ . Los modelos más utilizados están definidos de manera tal que  $\gamma^*(h, \theta) \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Además, por la Propiedad 1)  $\gamma^*(0, \theta) = 0$ , por lo que son funciones continuas. Esto

significa que el proceso subyacente asociado a dichas funciones de semivariograma genera superficies suaves.

**5.3. Semivariograma estimado** Por último es necesario determinar cómo estimamos los parámetros del semivariograma (pepita, meseta y rango) para lograr el mejor ajuste al semivariograma empírico. Como lo afirman los autores Webster y Oliver (2007, pág. 101), elegir modelos y ajustarlos a los valores del semivariograma empírico se encuentra entre los temas más controvertidos en geoestadística. Este trabajo se puede tornar difícil ya que la precisión de cada estimación varía debido a las diferencias de tamaños de muestra; la variabilidad puede no ser la misma en todas las direcciones; la gráfica del semivariograma empírico puede mostrar mucha fluctuación punto a punto; la mayoría de los modelos no son lineales en uno o más parámetros y se deben usar métodos iterativos para estimar los mismos.

A partir de todos estos problemas es que se sugiere (Montero y cols., 2015; Wackernagel, 2006; Webster y Oliver, 2007) dos formas de ajustar el modelo: la inspección y ajuste manual del mismo y los correspondientes métodos estadísticos. La forma manual consiste en utilizar métodos gráficos, los valores del semivariograma empírico, el conocimiento del fenómeno ya que la forma analítica específica del semivariograma no importa tanto como el hecho de que respete las características principales del fenómeno. El valor del efecto de pepita se puede obtener a partir de los primeros valores del semivariograma empírico extrapolando hasta que corten el eje de las ordenadas. Este valor, el cual representa el comportamiento cerca del origen (para distancias inferiores a la distancia mínima en la muestra), es otra decisión central en el ajuste manual porque tiene una gran influencia en los resultados de la predicción, por ejemplo. La pendiente del semivariograma en el origen puede derivarse también de los primeros valores del semivariograma empírico. En cuanto al comportamiento para distancias grandes, representado por el rango (o rango práctico en caso de tener una meseta asintótica) y la meseta, generalmente se detectan fácilmente, especialmente en el caso estacionario de segundo orden: la distancia más allá de la cual el semivariograma se estabiliza y el valor del semivariograma cuando se estabiliza, respectivamente. Estas cuestiones traen consigo el problema de la subjetividad por parte del investigador. La forma no manual tiene que ver con la utilización de métodos estadísticos conocidos:

- **Métodos de mínimos cuadrados:** ordinarios (OLS, Ordinary Least Square), generalizados (GLS, Generalized Least Square) y pesados (WLS, Weighted Least Square).
- **Métodos basados en la máxima verosimilitud:** incluyen los métodos de máxima verosimilitud (ML, Maximum Likelihood) y los de máxima verosimilitud restringida (REML, Restricted Maximum Likelihood).

Si el objetivo es encontrar el modelo que mejor se ajuste al semivariograma empírico para cada variable, y no tenemos información a priori del fenómeno, se utilizan dichos métodos estadísticos. Si contamos con información a priori del comportamiento de nuestra variable de interés, puede ser interesante realizar un ajuste manual de los modelos al semivariograma empírico. Gallardo (2006) sostiene que si el objetivo del trabajo es comparar los cambios en el semivariograma según los parámetros, la utilización de modelos diferentes resulta poco útil. Hay que tener en cuenta que, por ejemplo, los rangos del modelo esférico y el exponencial no son directamente comparables.

El modelo esférico es el más utilizado en geoestadística, ya que alcanza la meseta. Si observamos las Figuras 11, 10 y 12, donde hemos ajustado un modelo exponencial, esférico y esférico con efecto pepita, respectivamente, para los datos Meuse, vemos que el que mejor se ajusta es el esférico con efecto pepita. Considerando dicho ajuste, podemos concluir que a partir de 900 metros (valor del rango) no existe correlación espacial en los datos. Por otro lado, podemos afirmar que  $\hat{\sigma}_\epsilon^2 = 0,05$  que es la estimación de la varianza del efecto pepita indicando que posiblemente exista un error de medición en los datos.

## §6. Conclusiones

En este trabajo definimos el marco teórico subyacente a los datos espacialmente correlacionados, comenzando por el modelo considerado para el proceso estocástico que da lugar a los mismos e imponiendo diferentes funciones que modelan su estructura de covarianza. Definimos además herramientas exploratorias las cuales sirven como punto de partida para el análisis de variables con dependencia espacial, que permiten visualizar tendencia, variabilidad y asociación espacial de los datos. Todo lo expuesto se ejemplificó con los clásicos datos del río Meuse, los cuales contienen, entre otras variables, la concentración de zinc en la capa superior del suelo en una llanura aluvial del río Meuse, cerca del pueblo de Stein (Países Bajos), medida en diferentes coordenadas geográficas.

## §7. Agradecimientos

Este trabajo fue realizado en el marco del Proyecto PICT-2019-00301 financiado por la ANPCYT.

## §8. Apéndice: Resultados auxiliares y demostraciones

Para una lectura más autocontenida del trabajo, en este apéndice incluiremos resultados auxiliares y demostraciones del mismo.



**Lema 8.1.** El proceso estocástico discreto de Wiener-Levy  $\{Z_k\}_{k \geq 0}$  con  $k \in \mathbb{N}$ , cumple que

$$(8.1) \quad Z_{k+1} = Z_k + \epsilon_k,$$

donde  $\epsilon_k$  tiene distribución normal  $N(0, 1)$  y son independientes para todo  $k$  y  $Z_0 = 0$ . Dicho proceso es intrínsecamente estacionario pero no débilmente estacionario.

*Demostración.* Comencemos probando que el proceso (8.1) satisface las condiciones de estacionariedad intrínseca (4.8) y (4.9). En primer lugar tenemos que

$$(8.2) \quad \begin{aligned} Z_{k+h} &= Z_{k+h-1} + \epsilon_{k+h-1} \\ &= Z_{k+h-2} + \epsilon_{k+h-2} + \epsilon_{k+h-1} \\ &\vdots \\ &= Z_k + \epsilon_k + \epsilon_{k+1} + \cdots + \epsilon_{k+h-1}. \end{aligned}$$

Luego

$$(8.3) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}[Z_{k+h} - Z_k] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{h-1} \epsilon_{k+i}\right] = 0, \\ \text{Var}(Z_{k+h} - Z_k) &= \text{Var}\left(\sum_{i=0}^{h-1} \epsilon_{k+i}\right) = h. \end{aligned}$$

Sin embargo, para este proceso, la covarianza no depende solo de  $h$  pues,

$$(8.4) \quad \begin{aligned} \text{Var}(Z_{k+h}) &= \text{Var}(Z_k + \epsilon_k + \epsilon_{k+1} + \cdots + \epsilon_{k+h-1}) && \text{de (8.2)} \\ &= \text{Var}(Z_k) + \text{Var}\left(\sum_{i=0}^{h-1} \epsilon_{k+i}\right) && \text{por independencia} \\ &= \text{Var}(Z_k) + h. && \text{de (8.3)} \end{aligned}$$

Despejando la covarianza de la siguiente ecuación,

$$\text{Var}(Z_{k+h} - Z_k) = \text{Var}(Z_{k+h}) + \text{Var}(Z_k) - 2\text{Cov}(Z_{k+h}, Z_k),$$

y utilizando (8.4) y (8.3) se tiene que,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_{k+h}, Z_k) &= \frac{1}{2} \left( \text{Var}(Z_{k+h}) + \text{Var}(Z_k) - \text{Var}(Z_{k+h} - Z_k) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \text{Var}(Z_k) + h + \text{Var}(Z_k) - h \right) \\ &= \text{Var}(Z_k), \end{aligned}$$

de donde se sigue que la covarianza no depende solo de  $h$  y por lo tanto no puede ser un proceso débilmente estacionario.  $\square$

**Lema 8.2.** Si el proceso  $e(\mathbf{s})$  es estacionario de segundo orden y  $\mu(\mathbf{s}) \doteq \mu$  es constante entonces el proceso  $Z(\mathbf{s})$  también es estacionario de segundo orden.

*Demostración.* A partir del modelo (5.1) tenemos que

$$\mathbb{E}(Z(\mathbf{s})) = \mu + \mathbb{E}(e(\mathbf{s})) = \mu,$$

y

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}), Z(\mathbf{s})) &= \text{Cov}(\mu(\mathbf{s} + \mathbf{h}) + e(\mathbf{s} + \mathbf{h}), \mu(\mathbf{s}) + e(\mathbf{s})) \\ &= \text{Cov}(e(\mathbf{s} + \mathbf{h}), e(\mathbf{s})) \\ &= C(\mathbf{h}), \end{aligned}$$

luego  $Z(\mathbf{s})$  es estacionario de segundo orden. □

**Lema 8.3.** Si  $e(\mathbf{s})$  es intrínsecamente estacionario y  $\mu(\mathbf{s}) \doteq \mu$  constante entonces el proceso  $Z(\mathbf{s})$  también es intrínsecamente estacionario.

*Demostración.* A partir del mismo razonamiento que en el Lema anterior, tenemos que

$$\mathbb{E}[Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s})] = \mathbb{E}[\mu(\mathbf{s} + \mathbf{h}) + e(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - \mu(\mathbf{s}) - e(\mathbf{s})] = \mathbb{E}[e(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - e(\mathbf{s})] = 0,$$

y

$$\begin{aligned} \text{Var}[Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s})] &= \text{Var}([\mu(\mathbf{s} + \mathbf{h}) + e(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - \mu(\mathbf{s}) - e(\mathbf{s})]) \\ &= \text{Var}([e(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - e(\mathbf{s})]) = 2\gamma_e(\mathbf{h}), \end{aligned}$$

con lo cual se prueba que  $Z(\mathbf{s})$  es intrínsecamente estacionario. □

*Demostración del Lema 5.1.* Partiendo de la Ecuación (5.3) tenemos que,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\gamma}(\mathbf{h})] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} (Z(\mathbf{s}_i) - Z(\mathbf{s}_j))^2\right] \\ &= \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} \frac{1}{2} \mathbb{E}[(Z(\mathbf{s}_i) - Z(\mathbf{s}_j))^2] \\ &= \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} \frac{1}{2} \text{Var}[Z(\mathbf{s}_i) - Z(\mathbf{s}_j)] \\ &= \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} \gamma(\mathbf{h}) \\ &= \gamma(\mathbf{h}). \end{aligned}$$

Por otro lado, para el caso del covariograma consideremos  $\tilde{C}(\mathbf{h}) = \frac{N(\mathbf{h})-1}{N(\mathbf{h})} \hat{C}(\mathbf{h})$  y tenemos que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\tilde{C}(\mathbf{h})) &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} (Z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h}) - \bar{Z}_{\mathbf{h}}) (Z(\mathbf{s}_i) - \bar{Z}_{(\mathbf{h})}) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} (Z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h})Z(\mathbf{s}_i) - Z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h})\bar{Z}_{(\mathbf{h})} - Z(\mathbf{s}_i)\bar{Z}_{\mathbf{h}} + \bar{Z}_{\mathbf{h}}\bar{Z}_{(\mathbf{h})}) \right] \\
 &= \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} \mathbb{E} [Z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h})Z(\mathbf{s}_i)] - \mathbb{E} \left[ \bar{Z}_{(\mathbf{h})} \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} Z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h}) \right] \\
 (8.5) \quad &- \mathbb{E} \left[ \bar{Z}_{\mathbf{h}} \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} Z(\mathbf{s}_i) \right] + \mathbb{E} [\bar{Z}_{\mathbf{h}}\bar{Z}_{(\mathbf{h})}] \\
 &= \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} \mathbb{E} [Z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h})Z(\mathbf{s}_i)] - \mathbb{E} [\bar{Z}_{\mathbf{h}}\bar{Z}_{(\mathbf{h})}]. \quad (\text{por (5.5)})
 \end{aligned}$$

Calculamos la esperanza  $\mathbb{E} [\bar{Z}_{\mathbf{h}}\bar{Z}_{(\mathbf{h})}]$  considerando el proceso  $Z(\mathbf{s})$  estacionario de segundo orden, esto es,  $\mathbb{E}[Z(\mathbf{s})] = \mu$  y  $\text{Cov}(Z(\mathbf{s}_i), Z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h})) = C(\mathbf{h})$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\bar{Z}_{\mathbf{h}}\bar{Z}_{(\mathbf{h})}) &= \text{Cov}(\bar{Z}_{\mathbf{h}}, \bar{Z}_{(\mathbf{h})}) + \mathbb{E}(\bar{Z}_{\mathbf{h}})\mathbb{E}(\bar{Z}_{(\mathbf{h})}) \\
 &= \frac{1}{N(\mathbf{h})^2} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} \sum_{j=1}^{N(\mathbf{h})} \text{Cov}(Z(\mathbf{s}_i), Z(\mathbf{s}_j + \mathbf{h})) + \mu^2 \\
 &= \frac{1}{N(\mathbf{h})^2} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} \text{Cov}(Z(\mathbf{s}_i), Z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h})) \\
 &\quad + \frac{1}{N(\mathbf{h})^2} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} \sum_{j \neq i}^{N(\mathbf{h})} \text{Cov}(Z(\mathbf{s}_i), Z(\mathbf{s}_j + \mathbf{h})) + \mu^2 \\
 (8.6) \quad &= \frac{1}{N(\mathbf{h})} C(\mathbf{h}) + \frac{1}{N(\mathbf{h})^2} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} \sum_{j \neq i}^{N(\mathbf{h})} \text{Cov}(Z(\mathbf{s}_i), Z(\mathbf{s}_j + \mathbf{h})) + \mu^2.
 \end{aligned}$$

Luego reemplazamos (8.6) en (8.5) y, teniendo en cuenta que

$$\mathbb{E} [Z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h})Z(\mathbf{s}_i)] = C(\mathbf{h}) + \mu^2,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tilde{C}(\mathbf{h})) &= \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} \mathbb{E}[Z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h})Z(\mathbf{s}_i)] - \mathbb{E}[\bar{Z}_{\mathbf{h}}\bar{Z}_{(\mathbf{h})}] \\ &= C(\mathbf{h}) + \mu^2 - \left( \frac{1}{N(\mathbf{h})}C(\mathbf{h}) + \frac{1}{N(\mathbf{h})^2} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} \sum_{j \neq i}^{N(\mathbf{h})} \text{Cov}(Z(\mathbf{s}_i), Z(\mathbf{s}_j + \mathbf{h})) + \mu^2 \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{N(\mathbf{h})}\right) C(\mathbf{h}) - \frac{1}{N(\mathbf{h})^2} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} \sum_{j \neq i}^{N(\mathbf{h})} \text{Cov}(Z(\mathbf{s}_i), Z(\mathbf{s}_j + \mathbf{h})). \end{aligned}$$

Por último usando la definición de  $\tilde{C}(\mathbf{h})$  obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{C}(\mathbf{h})) &= \frac{N(\mathbf{h})}{N(\mathbf{h}) - 1} \mathbb{E}(\tilde{C}(\mathbf{h})) \\ (8.7) \quad &= C(\mathbf{h}) - \frac{1}{N(\mathbf{h})(N(\mathbf{h}) - 1)} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} \sum_{j \neq i}^{N(\mathbf{h})} \text{Cov}(Z(\mathbf{s}_i), Z(\mathbf{s}_j + \mathbf{h})). \end{aligned}$$

Con lo cual podemos observar que el estimador  $\hat{C}(\mathbf{h})$  es sesgado. Solo en el caso particular de que las covarianzas sean nulas (datos independientes) o la suma de las mismas de cero por covarianzas positivas y negativas, el estimador no sería sesgado. Sin embargo, para el caso más clásico de dependencias espaciales no negativas, todas las covarianzas en el segundo término de (8.7) deben ser positivas o cero, con lo cual es sesgo es negativo (Smith, 2014).  $\square$

*Demostración de la Propiedad iv.* A partir de la condición de estacionariedad intrínseca (4.10) y que la sumatoria de los  $a_i$  es cero, resulta que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{a} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \mathbb{E}[(Z(\mathbf{s}_i) - Z(\mathbf{s}_j))^2] \quad (\text{de (4.10)}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_j \right) a_i (Z(\mathbf{s}_i))^2 \right] \\ &\quad - \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j Z(\mathbf{s}_i) Z(\mathbf{s}_j) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[ \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) a_j (Z(\mathbf{s}_j))^2 \right] \\ &= -\mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j Z(\mathbf{s}_i) Z(\mathbf{s}_j) \right] \quad \left( \text{pues } \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j = 0 \right) \\ &= -\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n a_i Z(\mathbf{s}_i) \right)^2 \right] \leq 0. \end{aligned}$$

Lo cual prueba que  $\gamma$  es condicionalmente definido negativo. □

### Bibliografía

- Atkinson, P. M., y Lloyd, C. D. (2014). Geostatistical models and spatial interpolation. En M. M. Fischer y P. Nijkamp (Eds.), *Handbook of regional science* (pp. 1461–1476). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-642-23430-9\_75
- Banerjee, S., Carlin, B. P., y Gelfand, A. E. (2004). *Hierarchical Modeling and Analysis for Spatial Data*. Chapman and Hall/CRC.
- Berke, O. (2004). Exploratory disease mapping: Kriging the spatial risk function from regional count data. *International journal of health geographics*, 3, 18. doi: 10.1186/1476-072X-3-18
- Bivand, R. S., Pebesma, E. J., Gómez-Rubio, V., y Pebesma, E. J. (2008). *Applied spatial data analysis with r*. Springer.
- Chica-Olmo, J., y Cano-Guervos, R. (2020). Does my house have a premium or discount in relation to my neighbors? a regression-kriging approach. *Socio-Economic Planning Sciences*, 72, 100914. doi: 10.1016/j.seps.2020.100914
- Chiles, J.-P., y Delfiner, P. (2012). *Geostatistics: modeling spatial uncertainty*. John Wiley & Sons.
- Cressie, N. (1993). *Statistics for spatial data*. John Wiley and Sons, Inc.
- Derdouri, A., y Murayama, Y. (2020, 05). A comparative study of land price estimation and mapping using regression kriging and machine learning algorithms across fukushima prefecture, japan. *Journal of Geographical Sciences*, 30, 794-822. doi: 10.1007/s11442-020-1756-1
- Dubin, R. A. (1992). Spatial autocorrelation and neighborhood quality. *Regional Science and Urban Economics*, 22(3), 433-452. doi: [https://doi.org/10.1016/0166-0462\(92\)90038-3](https://doi.org/10.1016/0166-0462(92)90038-3)
- Fernández-Avilés, G. (2009). Spatial regression analysis vs. kriging methods for spatial estimation. *International Advances in Economic Research*, 15, 44-58. doi: 10.1007/s11294-008-9189-0
- Fischer, M. M., y Wang, J. (2011). *Spatial data analysis: models, methods and techniques*. Springer Science & Business Media.
- Gallardo, A. (2006). Geostadística. *Ecosistemas*, 3.
- Gámez, M., Montero, J., y Rubio, N. (2000). Kriging methodology for regional economic analysis: Estimating the housing price in albacete. *International Advances in Economic Research*, 6, 438-450. doi: 10.1007/BF02294963
- García Arancibia, R., Llop, P., y Lovatto, M. (2023). Nonparametric prediction for univariate spatial data: Methods and applications. *pre-print*, 1-45.

- García Soidán, P., Febrero Bande, M., y González Manteiga, W. (2004, 03). Non-parametric kernel estimation of an isotropic variogram. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 121, 65-92. doi: 10.1016/S0378-3758(02)00507-4
- Goovaerts, P. (2008). Geostatistical analysis of health data: State-of-the-art and perspectives. En A. Soares, M. J. Pereira, y R. Dimitrakopoulos (Eds.), *Geostatistics for environmental applications: Proceedings of the sixth european conference on geostatistics for environmental applications* (pp. 3–22). Dordrecht: Springer Netherlands. doi: 10.1007/978-1-4020-6448-7\_1
- Haining, R. (2013). Spatial data and statistical methods: A chronological overview. En M. M. Fischer y P. Nijkamp (Eds.), *Handbook of regional science* (pp. 1277–1294). Springer Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-642-23430-9\_71
- Haining, R. P., Kerry, R., y Oliver, M. A. (2010). Geography, spatial data analysis, and geostatistics: An overview. *Geographical Analysis*, 42(1), 7-31. doi: 10.1111/j.1538-4632.2009.00780.x
- Kerry, R., Goovaerts, P., Haining, R., y Ceccato, V. (2010). Applying geostatistical analysis to crime data: Car-related thefts in the baltic states. *Geographical analysis*, 42, 53-77. doi: 10.1111/j.1538-4632.2010.00782.x
- Longley, P. (2005). *Geographic information systems and science*. John Wiley & Sons.
- Montero, J.-M., Fernández-Avilés, G., y Mateu, J. (2015). *Spatial and spatio-temporal geostatistical modeling and kriging*. John Wiley and Sons, Ltd.
- Montes-Rojas, G. V. (2012). Optimal spatial prediction and the construction of regional indexes. *The Journal of Economic Asymmetries*, 9(1), 1-21. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jeca.2012.01.001>
- Morales, J., Stein, A., Flacke, J., y Zevenbergen, J. (2020). Predictive land value modelling in guatemala city using a geostatistical approach and space syntax. *International Journal of Geographical Information Science*, 34, 1-24. doi: 10.1080/13658816.2020.1725014
- Rikken, M., y Van Rijn, R. (1993). *Soil pollution with heavy metals - an inquiry into spatial variation, cost of mapping and the risk evaluation of copper, cadmium, lead and zinc in the oodplains of the meuse west of stein*. Utrecht: Department of Physical Geography, Utrecht University.
- Siabato, W., y Guszmán-Manrique, J. (2019). La autocorrelación espacial y el desarrollo de la geografía cuantitativa. *Cuadernos de Geografía: Revista Colombiana de Geografía*, 28(1), 1-22.
- Smith, T. (2014). *Notebook on spatial data analysis*. Descargado de <https://www.seas.upenn.edu/~tesmith/NOTEBOOK/index.html>
- Tsutsumi, M., y Seya, H. (2008). Measuring the impact of large-scale transportation projects on land price using spatial statistical models. *Papers in Regional Science*, 87(3), 385-401. doi: <https://doi.org/10.1111/j.1435-5957.2008.00192.x>
- Valente, J., Wu, S., Gelfand, A., y Sirmans, C. (2005, 02). Apartment rent prediction using spatial modeling. *Journal of Real Estate Research*, 27, 105-136. doi:

10.1080/10835547.2005.12091148

- Vasan, S., y Alcantara, A. (2016). Gis-based methods for estimating missing poverty rates & projecting future rates in census tracts. *Review of Economics & Finance*, 3, 1-13.
- Wackernagel, H. (2003). *Multivariate geostatistics*. Springer.
- Wackernagel, H. (2006). Geostatistics. En *Encyclopedia of statistical sciences*. American Cancer Society. Descargado de <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/0471667196.ess5085.pub2> doi: 10.1002/0471667196.ess5085.pub2
- Webster, R., y Oliver, M. (2007). *Geostatistics for environmental scientists* (2th ed.). Wiley.
- Zhang, J., Atkinson, P., y Goodchild, M. F. (2014). *Scale in spatial information and analysis*. CRC Press.
- Zhao, Y., y Wall, M. M. (2004). Investigating the use of the variogram for lattice data. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 13(3), 719–738.

RODRIGO GARÍA ARANCIBIA

Instituto de Economía Aplicada Litoral (IECAL-FCE)

Universidad Nacional del Litoral y CONICET

(✉) [r.garcia.arancibia@gmail.com](mailto:r.garcia.arancibia@gmail.com)

PAMELA LLOP

Facultad de Ingeniería Química

Universidad Nacional del Litoral y CONICET

(✉) [lloppamela@gmail.com](mailto:lloppamela@gmail.com)

MARIEL LOVATTO

Facultad de Ingeniería Química

Universidad Nacional del Litoral y CONICET

(✉) [marielguadalupelovatto@gmail.com](mailto:marielguadalupelovatto@gmail.com)

---

Recibido: 7 de julio de 2023.

Aceptado: 6 de diciembre de 2024.

Publicado en línea: 20 de diciembre de 2024.

---

---

## LA RECTA NUMÉRICA: ANÁLISIS DE LAS CONCEPCIONES DE ESTUDIANTES EN LOS INICIOS DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICA

María Carolina Benito, Mara Cedrón, Betina Duarte, Uriel Kasman,  
Cecilia Lamela, María Cecilia Montes de Oca

---

**RESUMEN.** En este artículo, presentamos un análisis de las respuestas a un cuestionario y de un conjunto de entrevistas de profundización realizadas a estudiantes que finalizan el primer año de la formación del profesorado de matemática universitario. El objetivo es comprender cuáles son sus concepciones sobre los números reales, la recta numérica y la recta geométrica, así como los vínculos que establecen entre ellos. Identificamos que si bien la mayoría acuerda con la doble dimensión de la recta –ideal y material– esto no es tan claro al tratarse de los puntos de la recta. Analizamos los obstáculos que genera la representación decimal infinita de los números al considerar su representación en la recta numérica y exploramos estas ideas en vínculo con la densidad en  $\mathbb{R}$ . Esta indagación forma parte de un proyecto de investigación que tiene por objetivo estudiar un proceso de conceptualización del objeto recta real, de modo que sea accesible y al mismo tiempo potente para docentes de matemática en formación, a través del diseño de una secuencia de enseñanza. Poner en evidencia estas conceptualizaciones en estudiantes del primer año nos permitirá, en una etapa posterior, avanzar en el diseño de la propuesta.

**ABSTRACT.** In this article, we present an analysis of the answers to a questionnaire and a set of in-depth interviews developed with students who are completing the first year of university-level mathematics teacher education. The aim is to understand their conceptions about real numbers, the number line, and the geometric line, as well as the connections they establish between them. We identified that, although most of them agree with the double dimension of the line, ideal and material, this is not so clear when it concerns the points on the line. We analyse the obstacles generated by the infinite decimal representation of numbers when considering their representation on the number line and explore these ideas in relation to the density in  $\mathbb{R}$ . This inquiry is part of a research project that aims to study a process of conceptualisation of the real line object, in a way that is accessible and at the same time powerful for mathematics teachers' education, through the design of a teaching sequence. The evidence of these conceptualisations in first year students will allow us, at a later stage, to advance in the design of the proposal.

---

*Palabras clave:* Recta numérica, Números reales, Infinito, Formación docente.

*Keywords:* Number line, Real numbers, Infinity, Teacher education.



## §1. Introducción

La representación de los números en la recta numérica se inicia en la educación elemental como un problema de índole práctico. La actividad de ubicar números, que suele estar presente en la escolaridad primaria y secundaria, se soporta en el tratamiento de la recta como un objeto tangible y por lo tanto material: tal ubicación de números requiere del dibujo de una recta, de la manipulación de escalas y medidas sobre ese dibujo. Esta actividad, en este momento de la escolaridad, permitiría al estudiante construir comprensiones sobre relaciones entre los números. Al mismo tiempo, en este proceso formativo se construyen ideas sobre el objeto recta numérica dotándola tanto de propiedades matemáticas como de propiedades heredadas de esa recta material. A modo de ejemplo, desde la enseñanza se propone que, al comparar dos números, el mayor es aquel que se encuentra ubicado a la derecha en la recta numérica sin importar su signo. De esta manera la recta adquiere y refleja el orden numérico. Así, las concepciones de estudiantes sobre la recta numérica se elaboran en vínculo con las ideas que construyen sobre los números reales. Estas concepciones pueden funcionar como herramientas para el avance, pero también pueden obstruir algunos aprendizajes posteriores.

Al considerar la representación de los números reales en la recta numérica nos encontramos con un problema teórico: se trata de asignar a un concepto matemático –la recta geométrica– la estructura de otro concepto –el conjunto de los números reales–. En este sentido, la completitud de los reales se asume en la continuidad de la recta geométrica. Dada esta complejidad, la representación de los números reales en la recta adquiere una mayor dificultad que otras representaciones, al menos en la escuela secundaria (Bergé, 2004; Scaglia, 2000). A partir de estas consideraciones postulamos que la comprensión de las propiedades matemáticas que adquiere la recta numérica, en tanto objeto matemático, a través de la relación número-punto conlleva un proceso de abstracción del cual debe hacerse cargo la enseñanza (Benito et al., 2023; Cedrón et al., 2021). Efectivamente, mientras la recta sea visualizada como un objeto material que puede ser dibujado, sus propiedades matemáticas resultan opacas (Zazkis & Sirotic, 2004) para el estudiante.

El avance en la formación matemática, especialmente en el contexto de la formación de un futuro profesor, requiere que la representación de los números reales en la recta numérica se constituya en un problema teórico. Aceptar que cada número real tiene un (único) lugar –idealmente exacto– en la recta numérica configura un problema matemático no exento de complejidades y de cuestionamientos. Consideramos que la posición construida durante la formación inicial del futuro profesor de matemática frente al saber matemático será una referencia al momento de elaborar su proyecto de enseñanza. Desde esta posición hemos concebido un proyecto de investigación *Los números reales en la formación de futuros profesores. La comprensión*

de la recta real como un objeto matemático–didáctico<sup>1</sup> en el cual nos planteamos estudiar condiciones didácticas que resulten favorables para que los y las estudiantes del profesorado alcancen una concepción robusta y estabilizada de la recta real en tanto objeto matemático. En una etapa previa al diseño de una propuesta de enseñanza para futuros profesores, comenzamos analizando los vínculos entre la recta numérica y los números reales construidos por estudiantes universitarios del primer año del profesorado de Matemática. Con este propósito se elaboró un cuestionario (ver Anexo) y se llevaron adelante entrevistas. En este artículo presentaremos los resultados de esta parte de la investigación.

## §2. Antecedentes

Un recorrido histórico acerca de las intuiciones sobre lo continuo en la recta numérica nos permite comprender los obstáculos que han estado presentes en distintos momentos y su evolución. Vergnac (2013) postula que algunos de estos conflictos podrían estar presentes en estudiantes del nivel secundario. *¿Cómo es posible que una línea infinita esté compuesta por puntos de longitud cero? ¿Y cómo es posible que entre dos números ubicados en la recta haya una cantidad infinita de números?* son algunas de las preguntas que ponen de manifiesto la dificultad de hacer convivir nociones de la recta real en vínculo con la intuición geométrica de la recta.

Castela (1997) en su investigación acerca de la enseñanza de los números reales en la escuela secundaria en Francia, señala el hecho de que algunas características intuitivas de la recta en tanto objeto geométrico son asumidas desde la enseñanza para ser trasladadas a características del conjunto de los números reales. La autora pone de relieve que esta estrategia se sustenta en considerar, por ejemplo, que la correspondencia número–punto no comporta complejidad para las y los estudiantes. Sin embargo, en su estudio identifica concepciones de estudiantes del nivel secundario según las cuales esta correspondencia no está establecida en ambos sentidos. Mientras que un gran número de estudiantes muestra dificultad para asignar a un número con expresión decimal infinita un punto de la recta, son más quienes aceptan que a cada punto le corresponda un número. En su indagación también releva ideas intuitivas sobre la recta: considerarla naturalmente continua, no atomista, y sobre la que se “ubican” los puntos, o bien que está formada por puntos que la constituyen. Además, identifica que los puntos de la recta tampoco poseen –para los y las estudiantes– los atributos de continuidad y densidad. En este sentido, la autora sostiene que el marco numérico parece ser el más favorable para que los y las estudiantes conceptualicen la densidad del orden, siendo esta propiedad luego transferida a los puntos de la recta, y no al revés. Por último, esta identificación entre puntos y números favorece lo que Castela denomina el “pasaje clandestino” de  $\mathbb{R}$  por la *escuela secundaria* (esto es, un trabajo escolar que se lleva

<sup>1</sup>Proyecto de Investigación PI UNIFE 22-23/14, Programación Científica 2022-2023, UNIFE

a cabo sin definir explícitamente a  $\mathbb{R}$  ni problematizar las características de este conjunto numérico).

Bergé (2004) en su tesis de doctorado recupera distintos autores que estudian la recta numérica como objeto de enseñanza en los niveles secundario y superior. Sus principales conclusiones ponen de relieve que la correspondencia entre puntos y números no es evidente para las y los estudiantes quienes pueden conceptualizar de maneras diferentes a la recta real (y por consiguiente a los puntos) dando lugar a objetos con diferentes atributos y propiedades.

En relación a lo continuo en la recta, desde una construcción intuitiva y geométrica es posible considerarlo como lo que no tiene agujeros ni saltos (Vergnac, 2013). Si bien esta caracterización permite distinguir lo continuo de lo discreto, no necesariamente permite distinguirlo de lo denso. Por ejemplo, no es posible distinguir visualmente la recta racional, que es densa pero no continua, de la recta real que es continua. Esta concepción es considerada por Durand-Guerrier (2018) y Vergnac (2013) como la “díada continuo/discreto” en la cual –según la visión de los y las estudiantes– entre lo discreto y lo continuo “no hay nada”. Las autoras sostienen que un estudio de la densidad de  $\mathbb{Q}$  permitiría considerar la “tríada discreto/denso/continuo” que sería un punto de apoyo para la conceptualización del conjunto de los números reales.

Montoro et al. (2017) estudian las concepciones de estudiantes de educación secundaria y universitaria sobre la naturaleza de la recta numérica en tanto representación de los números reales. Para ello diseñan y administran cuestionarios donde proponen una tarea que toma en cuenta actividades desarrolladas por Robinet (1986) y Romero (1996) y en la que piden a estudiantes analizar el fenómeno de amplificar infinitamente la imagen de una recta (en el estilo de la herramienta de *zoom* en GeoGebra). Esta experiencia permite hacer emerger las imágenes mentales disponibles de los y las estudiantes. Aunque la tarea se hace cargo de ubicarlos en una posición teórica, el pedido de dibujos que den cuenta de lo que imaginan como posible tensiona el problema hacia una situación concreta. Nos interesa esta tensión y la consideramos constitutiva del asunto que investigamos. Por último, la variedad de edades y orientaciones da como resultado una distribución de concepciones entre modelos de recta dibujada o material, discreta, densa y continua. Las autoras encuentran una relación entre estas concepciones y un mayor nivel de estudio en matemática.

A través de una investigación sobre enseñanza de los números reales para la escuela secundaria, Benito et al. (2023) consideran distintos procedimientos de representación de números en la recta y observan que mientras los números racionales disponen de un método con una cantidad finita de pasos, no sucede lo mismo con los números irracionales. De este modo, la tarea de ubicar a estos números en la recta numérica trae nuevas ideas para los y las estudiantes. En efecto,

la posibilidad de tener una ubicación teórica y precisa de ciertos números en la recta, constituye una problematización de la recta en tanto objeto matemático. Es necesario concebir un lugar “ideal” de todos los números en la recta numérica más allá de la representación efectiva. En este mismo sentido analizan una práctica usual en la escuela secundaria en Argentina: la ubicación de raíces cuadradas no enteras en la recta numérica apoyados en el teorema de Pitágoras. Para estos autores, esta práctica puede vivir simplemente como una técnica, pero también puede utilizarse como punto de apoyo para la conceptualización de los reales a partir de una propuesta que invite a un posicionamiento teórico por parte de los y las estudiantes.

Mencionamos previamente que los desarrollos decimales infinitos pueden representar un obstáculo al considerar su ubicación en la recta. La concepción de estudiantes sobre el infinito se torna así en un asunto a tener en cuenta para pensar la representación en la recta numérica de los números reales. Tomamos investigaciones (Garbin, 2005; Kidron & Tall, 2015; Sierspínska, 1987) que señalan distintas concepciones del infinito tanto en estudiantes de nivel secundario como superior: por un lado, la percepción del infinito potencial que no considera que el proceso esté completo y, por el otro, la aceptación del infinito en tanto proceso finalizado. Montoro y Ferrero (2022) reconocen otras concepciones del infinito al indagar en estudiantes de los últimos años de la escuela secundaria y primeros años de la universidad. Identifican en estudiantes con menor formación en matemática dos concepciones finitistas predominantes: percibir al infinito como un número muy grande o extender la propiedad de los conjuntos finitos a los infinitos. Además, recuperan de estudios anteriores la concepción de “infinito es todo” en tanto percepción según la cual un conjunto con cardinal infinito precisa incluir a todo elemento en consideración. Las autoras señalan que la diferenciación entre infinito y todo “necesita de cierta profundidad en el estudio de matemática”. Por otra parte, en investigaciones que consideran estudiantes universitarios de distintas carreras, Montoro y Scheuer (2004) identifican otras concepciones donde el infinito se asocia a lo “no determinado” o imposible de prever. En la indagación que presentamos en este artículo estas concepciones del infinito se revelan frente a la necesidad de considerar la ubicación exacta de las expresiones decimales infinitas.

En particular, Garbin (2005) analiza el impacto que tienen algunas representaciones –tales como modelos, dibujos y figuras– en la comprensión del infinito tomando de Fischbein una explicación que resulta de interés en nuestro estudio. Según esta autora, apelamos a imágenes mentales que pueden generar conflicto con los conceptos matemáticos en juego, por ejemplo, sabemos que los puntos no tienen dimensión, aunque los visualizamos con una pequeña superficie. Es en este sentido que Fischbein advierte una dificultad de índole psicológica en el gesto de liberarnos de algunas imágenes, dificultad que vemos reflejada en las

contradicciones del grupo de estudiantes que entrevistamos, quienes sostienen que la recta no tiene grosor mientras que dotan a los puntos de una diminuta superficie.

En vínculo con las ideas acerca del infinito queremos abordar algunas cuestiones del estudio de la densidad de los reales. Interpretar la propiedad de densidad obliga a romper con la idea del infinito como algo en expansión (Vergnac, 2013) que subyace por ejemplo en la construcción de los conjuntos de números enteros. Comprender y atrapar la existencia de infinitos números entre dos dados supone una percepción del infinito que puede no resultar evidente para estudiantes particularmente de escuela secundaria (Cedrón et al., 2021). Benito et al. (2023) proponen un estudio de la densidad de los números reales apoyado tanto en la representación decimal de los números y el orden en la numeración posicional (Castela, 1997; Cedrón et al., 2021) como en la representación de puntos en la recta numérica, por ejemplo considerando en  $\mathbb{Q}$  el punto medio entre dos puntos racionales. Así, las ideas del infinito –tanto en la representación decimal de los números como en la posibilidad de ubicar infinitos puntos entre dos dados– se entrelazan en la conceptualización de la recta en tanto representación de los números reales.

Algunos estudios sobre futuros profesores de matemática se han detenido en sus conocimientos formales e intuitivos de la irracionalidad. Peled y Hershkovitz (1999) indican que, aunque estos/as estudiantes conocen las características básicas y las definiciones de los irracionales, fallan en tareas que requieren un uso flexible de sus distintas representaciones. A su vez, Zazkis y Sirotic (2004) muestran que grupos de estudiantes de nivel avanzado del profesorado confunden en determinadas representaciones la condición de racional/irracional. Las conclusiones enfatizan la necesidad de sostener desde la enseñanza las distintas representaciones de los números dotadas de propiedades que fundamenten las equivalencias entre éstas. Para nuestro estudio nos interesa también recuperar la distinción que realizan las autoras entre representaciones opacas y transparentes de los números: una representación es transparente con respecto a una determinada propiedad si la misma puede derivarse a partir de la representación dada y, es opaca respecto a una característica, si ésta queda oculta en esa representación. Así, la representación de  $0,10100100010000\dots$ , es una representación transparente respecto a la irracionalidad de ese número, mientras que la representación  $0,61802575107\dots$  del número  $144/233$  que posee un período de 232 dígitos resulta opaca respecto a la racionalidad.

Por otra parte, en Sirotic y Zazkis (2007) se indagan las ideas de futuros profesores frente a la representación en la recta numérica de números irracionales; en particular, para el número  $\sqrt{5}$ . En su estudio muestran que solo el 20% –sobre un total de 46– logra ubicarlo de manera exacta. La mayoría de los futuros profesores se apoya en ubicaciones aproximadas del número en la recta y dudan de la posibilidad de una ubicación exacta dado que el desarrollo decimal no tiene fin. Las

autoras identifican que predomina en estos estudiantes la concepción de una recta racional. Además consideran que la representación de números irracionales a través del teorema de Pitágoras colaboraría con atrapar el concepto de irracionalidad al vincularlo con una representación específica del objeto (punto en la recta numérica a una distancia irracional de 0). Este método para representar ciertos números en la recta se constituye en una alternativa frente a un desarrollo decimal infinito no periódico que se concibe como un proceso sin fin. En el estudio que presentamos en este artículo nos detenemos a identificar y analizar las preguntas y conflictos que genera la (necesaria) puesta en relación de esta diversidad de representaciones, luego de que sean objeto de una primera instancia de aprendizaje.

Para precisar qué entendemos en este artículo sobre la noción de concepción tomamos el aporte de Artigue (1982, 1990) para quien la concepción constituye una idea construida por los y las estudiantes acerca de un objeto matemático en vínculo con situaciones de aprendizaje que ofrece la enseñanza. Así la concepción es local, ligada al conocimiento en juego en la enseñanza.

Cuando Castela (1997) indica que algunos/as estudiantes tienen una concepción de los puntos en la recta como “pince à linge” (pinzas para la ropa) se interesa por el modo en el que se imaginan a los puntos en la recta. La concepción involucra en este caso una visualización.

Las concepciones son movilizadas por un sujeto, en algunos casos con una consciencia personal de ellas, por ejemplo cuando las explicita para argumentar sobre algo; otras veces implícitamente cuando las utiliza durante un procedimiento: en este caso las pone en acto (concepción en acto).

Así, la concepción remite a interpretaciones y visualizaciones de un sujeto que resulta coherente desde su perspectiva en el espectro de un conjunto de ideas que ese sujeto tiene sobre alguna cuestión.

A continuación presentamos los propósitos y objetivos que nos planteamos para el desarrollo de los cuestionarios y entrevistas que compartimos en este artículo.

### §3. Propósito y Objetivos

Como venimos señalando, diversas investigaciones afirman la necesidad de problematizar desde la enseñanza y de conceptualizar desde el aprendizaje el objeto matemático denominado “recta real” como una dimensión imprescindible en la comprensión de los números reales. Mencionamos en la Introducción que comprender la biyección número–punto configura un problema matemático complejo. Ahora bien, la problematización de este objeto en la formación de los futuros profesores de matemática no resulta evidente. Es por esto que nos propusimos como proyecto de investigación, estudiar condiciones didácticas favorables para que estudiantes del profesorado de matemática alcancen una concepción robusta y estabilizada de la recta real.

Con este propósito, comenzamos indagando en estudiantes que estaban terminando el primer año de formación qué concepciones tienen sobre los números reales, la recta numérica y la recta geométrica, y qué vínculos establecen entre ellos. Esto nos ofrece una base para diseñar, una secuencia de enseñanza destinada a futuros docentes de matemática donde la recta numérica esté dotada de las propiedades matemáticas necesarias para reflejar una comprensión profunda de los números reales.

Presentaremos aquí un análisis de esta primera indagación donde nos propusimos relevar información sobre conocimientos, ideas y dificultades que tienen los y las estudiantes acerca de:

- la recta y sus puntos en tanto objetos ideales: ¿distinguen la recta en tanto objeto ideal de la matemática de su representación concreta y material? En la misma línea, ¿distinguen a los puntos ideales de su representación concreta?
- la correspondencia entre números y puntos de una recta: ¿cómo conciben la distribución de números en la recta numérica?, ¿creen que los números completan toda la recta? ¿O, por el contrario, consideran que hay más puntos en la recta que números que se puedan ubicar en ella? ¿O piensan que existen más números que puntos en la recta?
- la ubicación de los números en la recta: ¿qué dificultades plantea pensar la ubicación exacta de números en la recta? En particular, ¿qué problemas detectamos en relación con las características de los números para determinar su ubicación? Puntualmente nos interesó estudiar el rol de la escritura decimal infinita en la comprensión de la representación de los reales en la recta.
- la densidad del conjunto de los números reales ( $\mathbb{R}$ ): ¿qué ideas dominan sobre la densidad del conjunto de los números racionales ( $\mathbb{Q}$ ) en sí mismo, de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$  y de los irracionales en  $\mathbb{R}$ ? ¿Y sobre otros subconjuntos de  $\mathbb{R}$  como las expresiones decimales finitas?
- las representaciones de números reales: ¿qué representaciones de números aceptan o reconocen como número real? En particular, ¿qué dificultades produce la notación decimal para reconocer un número real?

En el siguiente apartado ampliaremos las decisiones metodológicas para llevar adelante nuestra indagación.

#### §4. Metodología

Para indagar las nociones sobre la recta numérica de estudiantes que finalizan un primer año, tomamos en cuenta que la institución tiene acceso irrestricto a la carrera. Por esta razón, los y las estudiantes inician su formación apoyados en sus experiencias anteriores poniendo en juego en cada asignatura sus ideas construidas en el nivel secundario. Respecto a la población de ingresantes su

formación de base es diversa al igual que su edad. En algunos casos han finalizado el secundario hace pocos años y en otros llevan más de diez años de terminada dicha formación. La posibilidad de recuperar nociones estudiadas mucho tiempo atrás y no utilizadas desde entonces es una cuestión de la que se hace cargo la propuesta formativa universitaria durante el primer año. En efecto, en este período la formación del profesorado de matemática de la UNIPE realiza una propuesta en la que se consolidan nociones centrales de la geometría, los números enteros, racionales e irracionales, y las funciones de variable real; todas estas cuestiones forman parte de la currícula del nivel secundario.

Elaboramos un cuestionario que fue suministrado a 18 estudiantes, quienes finalizando el segundo cuatrimestre del primer año, cursaron –parcial o totalmente– las asignaturas del programa de formación. Fue respondido en forma presencial (en papel) en la última clase de una de las materias del primer año en la que las docentes son parte del equipo de investigación. El cuestionario tiene como propósito documentar aspectos de las conceptualizaciones de un grupo de estudiantes construidas durante el cursado de estas asignaturas y también en su formación previa. Por otra parte, el análisis de estas conceptualizaciones sirve como insumo para identificar problemáticas a abordar en el diseño de una secuencia de enseñanza sobre los números reales a desarrollar en una asignatura que corresponde al segundo año de la formación, año en el cual se introduce el cálculo. Por lo que este grupo de estudiantes no ha estudiado las nociones de límite, continuidad, derivación y/o integración al momento de completar el cuestionario.

El cuestionario se organiza en dos secciones. En la primera, se presentan siete afirmaciones y se solicita indicar el grado de acuerdo con cada una de ellas pudiendo elegir entre las siguientes opciones: estás totalmente de acuerdo, estás parcialmente de acuerdo, no estás de acuerdo, no podrías tomar posición al respecto. A partir de los objetivos de la investigación y del análisis *a priori* de las afirmaciones solicitamos una explicación por escrito de la opción seleccionada para dos de estas afirmaciones. La segunda parte consiste en cuatro consignas abiertas. En ellas esperamos que los y las estudiantes: muestren en qué se apoyan para distinguir a los números reales de otros conjuntos contenidos en  $\mathbb{R}$ , identifiquen números reales a partir de diferentes escrituras, ubiquen números en la recta apelando a técnicas de representación que se apoyan en los teoremas de Thales o de Pitágoras y generalicen sus procedimientos adaptando las construcciones.

Las respuestas al cuestionario fueron analizadas con foco en: el grado de coherencia entre las distintas elecciones y explicaciones, la explicitación de nociones teóricas para sostener elecciones, el uso de ejemplos –concretos o genéricos– para sostener afirmaciones generales, las concepciones de infinito actual o potencial puestas en juego para considerar, por ejemplo, la ubicación de puntos en la recta.



Este análisis permitió identificar diferentes posturas a partir de las cuales seleccionamos dos grupos de 4 estudiantes para realizar entrevistas individuales<sup>2</sup>. Un grupo se caracteriza por cierto posicionamiento teórico, por emplear propiedades en sus explicaciones escritas, aunque no siempre de manera completa o abarcando la generalidad involucrada, pero se evidencia una coherencia con las respuestas dadas en las consignas abiertas y las que dieron a las consignas cerradas. En el otro grupo, ubicamos a estudiantes cuyas respuestas presentaron algunas contradicciones, los conceptos teóricos que mencionaron y los ejemplos utilizados nos resultaron menos accesibles para entender su posición.

En el diseño de la entrevista elaboramos un conjunto de preguntas para avanzar sobre las respuestas brindadas en el cuestionario y, además, una serie de ejemplos a proponer en caso de ser necesario para poner a prueba su posicionamiento. Algunas preguntas fueron diseñadas para todas las entrevistas mientras que otras fueron específicas para estudiantes en particular con la intención de avanzar en la comprensión de sus explicaciones o también dilucidar concepciones puntuales esbozadas en el cuestionario.

Cada entrevista fue pautaada en forma individual con cada estudiante una vez finalizada la etapa de exámenes del profesorado. Se realizó en un formato híbrido: el/la estudiante asistió a un espacio de la universidad donde era recibido por un entrevistador del equipo de investigación que no pertenecía al grupo de docentes de ese primer año. En el encuentro participaba conectado de manera remota otro investigador–entrevistador y docente del estudiante. Decidimos esta combinación para dar cierta contención a los entrevistados quienes habían dado conformidad para participar de esta indagación en la cual sus docentes eran parte del equipo de investigación. Las entrevistas semiestructuradas fueron videograbadas, aplicadas tres semanas después de completados los cuestionarios y duraron 45 minutos. Durante la entrevista, cada estudiante tuvo disponible sus respuestas las cuales se fueron leyendo como parte de la conversación. En algunos casos cambiaban de posición releendo sus respuestas y ese cambio de posición se registró por escrito.

Por último, cada entrevista fue desgrabada y las transcripciones, junto con los videos, fueron el material analizado a la luz de las preguntas formuladas para el estudio, en forma conjunta con los cuestionarios completados, también cruzando respuestas de los distintos entrevistados hasta lograr visualizar y caracterizar concepciones del grupo de estudiantes.

## §5. Análisis y resultados

**5.1. El cuestionario.** En este apartado nos centraremos en las siete afirmaciones presentadas en la primera sección del cuestionario. Analizaremos las posiciones tomadas por los y las estudiantes y sus argumentaciones interpretando posibles

<sup>2</sup>Finalmente 7 de los 8 estudiantes se presentaron a las entrevistas.

concepciones que pueden comandar sus respuestas. Estas interpretaciones constituyen una primera evidencia sobre sus concepciones.

En las distintas investigaciones que se proponen conocer conceptualizaciones de estudiantes sobre números reales y la recta (Castela, 1997; Montoro et al., 2017; Scaglia, 2000) se presenta una regularidad: cuando la pregunta que se formula o la afirmación que se analiza refiere a representaciones materiales de objetos ideales, la formulación puede ser compleja y difícil de comprender para los y las estudiantes. No obstante, consideramos que la indagación en sus concepciones necesita pasar ineludiblemente sobre estos aspectos.

Afirmación 1: “Al trazar una recta, la línea que dibujamos es una representación material y como tal tiene grosor pero la recta es un objeto ideal y por lo tanto no tiene grosor”.

Esta afirmación nos permite distinguir una posición de los y las estudiantes más próxima a lo ideal o a lo material, en cuanto a la concepción de la recta. Quienes distinguen entre objetos materiales e ideales estarían totalmente de acuerdo, mientras que alguien que no reconoce un objeto ideal podría no tomar posición al respecto o estar en desacuerdo. Si consideran a la recta como un objeto de representación material estarían en desacuerdo con que la recta no tiene grosor.

El 61 % estuvo totalmente de acuerdo con la afirmación y ningún estudiante se manifestó en desacuerdo. El 28 % seleccionó la opción “parcialmente de acuerdo”, mientras que el resto no pudo tomar posición. A partir de estos resultados consideramos que la mayoría concibe a la recta en una doble dimensión, por un lado la material y por el otro la ideal. Las entrevistas ofrecen matices a esta primera síntesis.

Afirmación 2: “Los puntos de la recta ocupan una diminuta superficie.”

En este caso, en el enunciado no se distingue si se trata de objetos materiales o ideales para dar la oportunidad al grupo de estudiantes a poner en juego estas dimensiones ya compartidas en la afirmación anterior. Es por ello que la respuesta a esta afirmación se puede analizar en vínculo con la primera. Quienes consideran que los puntos y la recta son objetos materiales, estarían de acuerdo. Quienes sostienen que la recta ideal no tiene grosor podrían pensar que los puntos ideales no tienen superficie y, en tal caso, no estarían de acuerdo. Quienes distinguen entre objetos ideales y objetos materiales, podrían no tomar posición al respecto o estar parcialmente de acuerdo porque consideran que falta información. De las respuestas obtenidas, el 50 % estuvo totalmente de acuerdo, el 22 % parcialmente de acuerdo, el 22 % no estuvo de acuerdo y un único estudiante no respondió.

En vínculo con las respuestas de la afirmación 1 y considerando el 61 % que está de acuerdo con su enunciado, notamos que la mitad dice estar totalmente de

acuerdo en que los puntos ocupan una diminuta superficie. Es decir, estos estudiantes pueden reconocer a la recta como objeto matemático, pero cuando responden sobre un enunciado sin distinciones optan por una concepción material de los puntos que la componen. En los antecedentes, hicimos referencia a la advertencia de Vergnac (2013) sobre la complejidad que implica concebir una línea infinita a partir de puntos sin superficie. Este grupo podría estar en una posición intermedia entre una mirada ideal y una material. Las lógicas subyacentes a estas posiciones se hicieron evidentes en las entrevistas.

Afirmación 3: “La recta numérica es el conjunto infinito de puntos que señalan a distintos números y si quitamos un punto generamos un agujero en la recta porque se pierde un número real.”

Con esta afirmación nos proponemos indagar acerca de las ideas de los y las estudiantes sobre la correspondencia entre puntos y números de la recta. Creemos que alguien que tiene una idea –intuitiva al menos– sobre la biyección entre números y puntos estaría de acuerdo con la afirmación. Quienes supongan la existencia de puntos en la recta libres de correspondencia con números podrían estar en desacuerdo –total o parcialmente– considerando que el punto que se saca podría no quitar números de la recta. Por otro lado, podrían suponer que, habiendo infinitos puntos en la recta, sacar uno no genera un agujero. Este argumento puede estar apoyado en la idea de que los puntos son “tantos” que resulta imperceptible quitar uno de ellos o bien, que al ser infinitos los puntos se “redistribuyen” y “ocupan” ese lugar. En este caso no estarían de acuerdo con la afirmación.

En síntesis, según nuestro análisis *a priori* de esta afirmación podemos anticipar que quienes están de acuerdo, tendrían construida alguna idea sobre la biyección número–punto mientras que las concepciones que subyacen a cualquier otra respuesta son diversas y por lo tanto menos evidentes.

Los resultados del cuestionario muestran una situación equilibradamente dividida: el 50 % del grupo estuvo de acuerdo con la afirmación, el 10 % estuvo parcialmente de acuerdo y el 40 % no estuvo de acuerdo.

Dado que en el enunciado se consideran puntos de la recta en vínculo con números, esta afirmación no resulta eficaz para indagar la posición que algún grupo de estudiantes pudiera tener sobre la existencia de números sin representación en la recta.

Afirmación 4: “Si ubicamos un punto en la recta numérica y lo movemos a lo largo de toda la recta, el punto pasará por todos los números reales sin dejar ninguno afuera.”

Con esta afirmación queremos seguir indagando acerca de la idea que tienen los y las estudiantes sobre la biyección número–punto. Si tienen construida esta biyección, estarían de acuerdo. No obstante, si consideran que la recta tiene puntos que

no se corresponden con números, también estarían de acuerdo con la afirmación. Tuvimos en cuenta esta alternativa para avanzar en las entrevistas.

Quienes piensan que algunos números no tienen una ubicación precisa en la recta numérica pueden dudar de la posibilidad de recorrerlos a todos al mover un punto sobre ella y en consecuencia podrían no estar de acuerdo, total o parcialmente.

El 61 % estuvo completamente de acuerdo, el 28 % en desacuerdo –parcial o totalmente– y los restantes no contestaron esta afirmación.

Comprendemos que la afirmación puede remitir al grupo de estudiantes a un conjunto de visualizaciones con matices respecto de qué significa mover un punto a lo largo de toda la recta. Advertidos por algunas investigaciones precedentes (Castela, 1997; Montoro et al., 2017) sobre esta posibilidad, nos propusimos para las entrevistas superar la visualización de los objetos involucrados en la afirmación, acercando ejemplos intencionalmente elaborados de forma que permitan medir cuán robusta está en el entrevistado la idea sobre la biyección número–punto.

**Afirmación 5:** “Es posible elegir dos puntos en la recta numérica de forma tal que no haya entre ellos un punto correspondiente a un número racional.”

Con esta afirmación queremos comprender qué nociones sobre la densidad de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$  tienen los y las estudiantes, en particular la densidad en el contexto de la representación de  $\mathbb{R}$  en la recta numérica.

Quienes estén de acuerdo no conciben la densidad del orden de los racionales en  $\mathbb{R}$ , tomando a la recta como objeto de representación. Dado que el enunciado refiere a puntos, sin especificar si corresponden a números racionales o irracionales, la afirmación requiere que cada estudiante considere distintos casos: dos números racionales, dos números irracionales o bien una combinación de ellos. Este nivel de generalidad es complejo de atrapar. Es por esto que decidimos pedir una explicación de la posición que toman.

Es posible que algún grupo de estudiantes tenga construida una idea de densidad de  $\mathbb{Q}$  en sí mismo<sup>3</sup>, “dados dos racionales hay siempre un racional entre ellos”. Sostenidos en esa idea podrían considerar en sus explicaciones, de manera explícita o implícita, dos puntos arbitrarios correspondientes a números racionales y en tal situación asegurarse un punto entre ellos –en la recta– correspondiente a un número racional. De esta forma, estarían en desacuerdo con la afirmación, pero sin diferenciar la recta real de la racional, considerando que la recta numérica está formada únicamente por puntos que se corresponden a números racionales.

Otro grupo de estudiantes podría considerar puntos que no sean racionales. En este caso encontramos a quienes conciben que todo punto de la recta representa a

<sup>3</sup>Algunos/as estudiantes que respondieron este cuestionario estaban cursando en paralelo la materia *Aritmética II. Números Racionales: orden y densidad*. En esta materia se realiza un estudio de la densidad de  $\mathbb{Q}$  en sí mismo desde las diversas representaciones de los números racionales en tanto sus escrituras (fraccionaria o decimal) como en la recta numérica.

algún tipo de número real y por lo tanto tomen también a los puntos irracionales como candidatos. Así podrían estar de acuerdo o en desacuerdo con la afirmación según los conocimientos que tengan de los números reales. Por ejemplo, podrían sostener que si se parte de puntos que representan irracionales no es posible hallar un racional entre ellos con el supuesto de que la densidad es válida sólo para los números racionales.

También podemos encontrar a quienes consideran que existen puntos en la recta que no refieren a números y en este caso podrían dudar si entre estos puntos hay o no números racionales. Podrían pensar que es posible tener un tramo de la recta sin racionales, solo compuesto por puntos que no se corresponden con números, y por lo tanto estarían de acuerdo con la afirmación.

Del total de respuestas, el 66 % está en desacuerdo y solo un 6 % está de acuerdo con la afirmación. El resto no contestó o no pudo tomar posición al respecto y no dió explicación. La mitad de quienes están en desacuerdo hace mención a la propiedad de densidad de manera implícita o explícita. Solo algunos/as identifican los puntos iniciales como racionales. Podemos conjeturar que en términos generales la densidad de los racionales es una cuestión consolidada y se activa frente a una situación que no proviene del ámbito numérico ya que se inicia en la recta. Dado que las explicaciones solo se apoyan en puntos racionales, nos queda por comprender si también consideran la densidad de  $\mathbb{R}$ . Sobre estas cuestiones decidimos avanzar a través de las entrevistas.

**Afirmación 6:** “Si elijo al azar un punto en la recta numérica es más probable que corresponda a un número racional que a un número irracional.”

Esta afirmación nos da información acerca de “cuántos” irracionales conocen. Aquellos/as que consideren que la cantidad de racionales es mayor que la de los irracionales, estarán de acuerdo con la afirmación.

Sabemos que muchos estudiantes, por su recorrido en la escuela secundaria, conocen algunos irracionales como  $\pi$ ,  $e$ ,  $\sqrt{2}$  y eventualmente algunas otras raíces de enteros que ubicaron en la recta numérica apoyados en el teorema de Pitágoras. Esto contribuye a construir la idea de que los irracionales son muchos menos que los racionales.

Sin embargo, no estar de acuerdo con esta afirmación no nos informa necesariamente que estén considerando que hay más irracionales que racionales. Podrían pensar que las cantidades infinitas son todas iguales y, apoyados en el conocimiento de las raíces de números primos y los números no periódicos expresados con leyes de formación, imaginar la infinitud de ambos tipos de números. De este modo pueden concluir que la probabilidad de encontrar números de una clase u otra es la misma.

La mitad del grupo de estudiantes no estuvo de acuerdo con la afirmación y sólo el 16 % estuvo de acuerdo. Esta distribución nos permite conjeturar que para la mayoría los irracionales no son unos pocos números. Sin embargo, a la luz de las explicaciones de la Afirmación 5, advertimos que la mayoría considera como primera o única opción que un punto arbitrario de la recta corresponde a un número racional.

**Afirmación 7:** “Los números con expresión decimal infinita no tienen una ubicación exacta en la recta numérica.”

Esta afirmación nos permite indagar sobre la incidencia que tiene la infinitud de una expresión decimal en la posibilidad de que un número con esas características tenga una ubicación exacta en la recta. En este caso pedimos una explicación de su posición para poder acceder a los distintos ejemplos de números con expresión decimal infinita que consideran las y los estudiantes, a las conceptualizaciones que tienen sobre ellos y al papel que juega el hecho de disponer o no de un protocolo de construcción para concebir la existencia de la ubicación en la recta.

Quienes estén en desacuerdo con esta afirmación podrían apoyarse en uno o más ejemplos de números con expresión decimal infinita a los cuales les asignen una ubicación exacta en la recta, tanto racionales como irracionales. En efecto, podrían recurrir a expresiones decimales periódicas que pueden representarse de modo exacto con apoyo en el teorema de Tales, o bien a números irracionales particulares, como las raíces cuadradas no enteras para los cuales también conocen un método de construcción con base en el teorema de Pitágoras<sup>4</sup>. En todos estos casos recurren a un método para aceptar la ubicación exacta en la recta.

Dentro de las personas que estén de acuerdo con la afirmación podemos encontrar a quienes las condiciones materiales no les permiten tener precisión o a quienes consideran que frente a una expresión decimal infinita todo procedimiento de ubicación no se puede concluir. En el primer caso estarían considerando un proceso concreto de ubicación en la recta que trazan en la hoja que solo les permite ubicar el número de manera aproximada y no un procedimiento ideal de ubicación de los números. En el segundo caso conjeturamos que es la conceptualización del infinito como infinito potencial la que comandaría la relación entre los números con expresión decimal infinita y su representación en la recta (Castela, 1997; Sirotic & Zazkis, 2007).

Sobre los resultados obtenidos, el 44 % acuerda con la afirmación, el 44 % está en desacuerdo y 12 % está parcialmente de acuerdo.

Entre quienes acuerdan con la afirmación, la totalidad menciona la infinitud de la expresión decimal como impedimento para encontrar la posición exacta. Utilizaron expresiones como: “el número es infinito”, “no sabemos con exactitud el número”,

<sup>4</sup>En la materia *Aritmética II. Números racionales: orden y densidad* se estudia la existencia de números irracionales y la ubicación en la recta numérica de raíces cuadradas de números enteros.

“el número no es exacto”. Estas explicaciones podrían estar mediadas por distintas concepciones del infinito, ya sea una concepción del infinito potencial (por encima del actual) o una asociación del infinito con lo no determinado o imposible de prever (Montoro & Scheuer, 2004).

Algunos/as estudiantes que estuvieron en desacuerdo exhibieron ejemplos de números periódicos y/o de raíces cuadradas no enteras como habíamos anticipado. Otros/as, mencionaron esos ejemplos pero agregaron números que consideraron que no pueden ubicarse de manera exacta, mencionando a los irracionales dados por leyes de formación. Es decir, propusieron ejemplos para los que no conocen un método de construcción y por ese motivo no tienen una ubicación exacta. En otros casos expresaron que, a pesar de no conocer un método de ubicación para algunos números, todos tienen un lugar exacto en la recta. Además, encontramos en este grupo respuestas que afirman estar en desacuerdo porque estos números pueden expresarse como fracción; es decir, consideran que los números de expresión decimal infinita son racionales sin tener en cuenta la posibilidad de que estos sean irracionales.

A partir de las explicaciones analizadas notamos que la mayoría necesita conocer un método de construcción de finitos pasos para asumir que la ubicación del número en la recta es exacta. Además, observamos que estar en desacuerdo con la afirmación no asegura que los y las estudiantes piensen que todos los números tienen una ubicación precisa en la recta.

Las respuestas al cuestionario nos permitieron tener una primera aproximación a las concepciones de los y las estudiantes sobre las ideas que mencionamos en la §3 Propósito y objetivos.

- La mayoría puede reconocer a la recta como objeto matemático en una doble dimensión, por un lado la material y por el otro la ideal. Respecto a los puntos, este posicionamiento no es tan evidente pues en su mayoría los conciben ocupando una superficie evidenciando así una concepción más material.
- Ningún estudiante considera que hay más puntos que números en la recta. En general asignan un número racional a un punto de la recta aunque esto no implica desconocer la existencia de números irracionales en la recta.
- Para algunos/as estudiantes la infinitud de una expresión decimal es un impedimento para encontrar una ubicación exacta de estos números en la recta. Para otros/as, la ubicación exacta en la recta de expresiones decimales infinitas depende de la existencia de un método de finitos pasos. Si se conoce el método (Thales o Pitágoras), tendrán una ubicación exacta en la recta y en caso contrario no la tendrán.

- La mayoría tiene consolidada la densidad de los racionales y la consideran también sobre la recta numérica<sup>5</sup>. Sin embargo, necesitamos comprender su alcance en  $\mathbb{R}$ .

Las respuestas a las afirmaciones de opción múltiple nos permitieron conocer el grado de acuerdo de los y las estudiantes con respecto a esos enunciados. Las explicaciones escritas brindaron una primera aproximación a las ideas que sustentaban sus posiciones. Estas interpretaciones iniciales fueron puestas en vínculo con nuestras anticipaciones y las entrevistas posteriores ayudaron a profundizar y encontrar matices en el alcance de sus ideas. Esto se desarrollará en el próximo apartado.

**5.2. Las entrevistas.** El análisis de las respuestas del grupo de estudiantes al cuestionario nos brindó un primer acercamiento a sus concepciones sobre: la recta real y sus puntos en tanto objetos ideales; la correspondencia entre números y puntos de una recta; la ubicación de números en la recta; la densidad de  $\mathbb{R}$  y las representaciones de los números reales.

A continuación, compartimos algunos ejes de análisis elaborados a partir del despliegue de nuevas ideas o ampliaciones que surgieron en las entrevistas realizadas a siete estudiantes de los 18 que respondieron el cuestionario. En este apartado nos referiremos a seis entrevistadas: Andrea, Cristina, Diana, Isabel, Luciana y Laura.

*5.2.1. Los puntos y su estatuto en la recta: ¿ocupan una diminuta superficie? ¿ocupan un lugar o espacio en la recta?* Como se mencionó previamente, al diseñar el cuestionario decidimos que la primera afirmación sienta una posición ya que se refiere tanto a la recta material como a la ideal. Por el contrario, en el segundo enunciado “*Los puntos de la recta ocupan una diminuta superficie*”, no se especifica si se trata del plano material o ideal esperando que el estudiante cuestione en qué dimensión hace sentido y apele al que considere apropiado o pertinente. En este apartado compartimos el análisis de las reflexiones que realizaron las estudiantes en torno a estas dos afirmaciones.

En el cuestionario, Luciana omitió contestar a la segunda afirmación. En diálogo con la entrevistadora, expresa no entender el enunciado y al releerlo afirma “el punto ocupa un lugar”. Además, plantea una diferencia entre la recta ideal y la material: mientras que en la recta material un punto ocupa una diminuta superficie en la recta ideal no.

<sup>5</sup>Este resultado puede estar en vínculo con el hecho de que la mayoría de quienes completaron el cuestionario estaba cursando en paralelo la materia *Aritmética II. Números racionales: orden y densidad*. No pudimos obtener información de las respuestas al cuestionario en los casos que no dieron explicaciones y seleccionaron estar de acuerdo o que no podían tomar posición.



Por su parte, Cristina estuvo de acuerdo con las dos afirmaciones y al reflexionar sobre el segundo enunciado, se apoya en la recta material: “En la parte material, si yo pienso en las veces que ubicamos diferentes puntos... sí, es un diminuto espacio el que ocupa un punto”. En efecto, ella imagina los puntos sobre la recta material explicitando que “es con la que trabaja” (en alusión a su trabajo como docente del nivel primario), sobre la ideal prefiere no dar una respuesta.

Durante la entrevista, Isabel asume de modo implícito una visión material de la recta. En el cuestionario indicó que acuerda con las dos afirmaciones y fundamentó su posición para la segunda explicando que los números reales<sup>6</sup> son infinitos. Ella expresa “Al lado de un número vamos a tener siempre otro número” y “todos ocupan un lugar, pero un lugar pequeñito. Podemos poner el 1,4 y al lado el 1,445 y está pegadito y 1,446 también va a estar pegadito”. A partir de esta necesidad de tener “muchos” números muy cerca, concluye que cada punto ocupa una diminuta superficie. En esta explicación, si bien coordina ideas sobre la recta, la infinitud de los conjuntos numéricos y el orden, su concepción sobre la recta es más cercana a una idea material que teórica.

En este mismo sentido, Diana acuerda con las primeras dos afirmaciones y para la segunda menciona “entre un número y otro puede haber infinitos, pero ocupan una diminuta superficie”. Diana no percibe una oposición entre la infinitud de puntos en un recinto acotado y el hecho de que cada uno ocupe una superficie.

Respecto a la afirmación 1, en el cuestionario, Andrea respondió que no puede tomar posición al respecto. Al volver sobre este enunciado en la entrevista, ella aclara que se quedó pensando y comenta algunas ideas discutidas en clases de una asignatura del Profesorado respecto a la relación material/ideal. Por ejemplo, “el triángulo es una figura idealizada” o “el círculo es una figura que se tiene en la mente, una figura ideal”. Esto la hizo pensar que podría ser lo mismo en el caso de la recta. Finalmente concluye que los objetos materiales tienen grosor y los ideales, no –tomando posición en la entrevista a favor de la afirmación 1–. Sin embargo, frente a la afirmación 2 señala que los puntos ocupan un espacio “muy chiquito” y por lo tanto “parcialmente ocupan un espacio.”

Las estudiantes que acuerdan con la doble dimensión –material e ideal– de la recta pero visualizan a los puntos ocupando un lugar o una superficie sobre ella, están –a nuestro entender– en una transición entre una concepción material y una ideal de la recta. En cierto momento asumen una mirada teórica al aceptar que la recta ideal no tiene grosor y, a la vez, están de acuerdo con que los puntos ocupan una pequeña superficie.

Todas argumentan que los puntos tienen una diminuta superficie porque son infinitos y constituyen la recta. Interpretamos que en estas ideas se pone en juego

<sup>6</sup>Si bien la afirmación se refiere a un punto en la recta, Isabel conecta punto con números y da su respuesta en el registro numérico.

una cierta materialización o imágenes mentales de los puntos pues, en su concepción, si no tienen superficie entonces la recta no existe. Retomando a Garbin (2005) comprendemos la coherencia en preguntarse, ¿cómo sería la recta compuesta por puntos sin superficie? ¿Cómo es posible que estos puntos existan sin ocupar una superficie? Por otra parte, al hablar de superficie, las estudiantes toman como equivalente ocupar un lugar y/o un espacio con la idea de ocupar una superficie. Entendemos que se produce una extensión del lenguaje natural a un contexto matemático. Aunque la entrevistadora utiliza la expresión “tienen una diminuta superficie”, las estudiantes responden en términos de lugar y espacio. Interpretamos que desde la perspectiva de ellas lo que “es o existe” tiene que ocupar un espacio, por lo que el punto es materializado para aceptar su existencia.

A su vez, encontramos una contradicción en los argumentos “los puntos de la recta ocupan una pequeña superficie porque son infinitos” y “entre dos puntos hay infinitos puntos”. La infinitud y densidad serían una razón para impedir que los puntos ocupen una superficie no nula, pues teniendo alguna superficie positiva, entre dos puntos solo podría ubicarse una cantidad finita entre ellos.

Volviendo al vínculo entre los números y la recta, entendemos que el recorrido por la escolaridad propone construir lazos entre ellos en pos de otorgarle a cada número un lugar en la recta a través de una identificación “punto–número”. También, desde el marco geométrico o funcional, los puntos son reconocidos como parte de la recta y, en cierta forma, “ocupando un lugar” en ella. Estas construcciones podrían operar en el hecho de que estas estudiantes piensen que los puntos “ocupan” una diminuta superficie en la recta.

A modo de síntesis de este apartado, hemos observado que varias estudiantes comparten algunas ideas teóricas sobre la recta (por ejemplo, que los puntos son infinitos o que entre dos puntos hay infinitos puntos) y acuerdan con la primera afirmación propuesta que distingue la recta material de la ideal. Además, para las estudiantes entrevistadas, los puntos adquieren una cierta materialidad en el momento de pensarlos como parte constitutiva de la recta, en aras de darle entidad a la propia recta. Interpretamos que considerar puntos sin superficie hace colapsar la idea de recta numérica, ella no podría existir como una unión infinita de puntos que “no se ven” y, en consecuencia, “no existen”.

Los matices que encontramos entre los dos grupos que distinguimos para hacer las entrevistas están vinculados a la explicitación de una diferencia entre la recta material e ideal. Mientras que un grupo acuerda en que los puntos ocupan una diminuta superficie sin indicar si se refieren a la recta material o ideal (asumen implícitamente una visión material), otro grupo distingue a los puntos con superficie para el caso de la recta material.

5.2.2. *La densidad en la recta numérica: ¿puede haber un racional entre dos irracionales? ¿y un irracional?* La afirmación 5, en la que se aborda la densidad, resultó compleja de interpretar para la mayoría de las estudiantes. Durante la entrevista, las alumnas muestran cierta dificultad para comprender el alcance de las ideas que involucra. Esta podría ser una de las razones por las que, en las explicaciones escritas, la mayoría consideró los dos puntos en el conjunto de los racionales y sus argumentos se basaron en la densidad de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{Q}$ . Algunas enunciaron la propiedad de densidad en forma general y otras, propusieron ejemplos en los que los números involucrados son racionales. Es importante señalar que todas las entrevistadas ya habían estudiado esta propiedad en las clases de *Aritmética II. Números racionales: Orden y densidad*.

Al diseñar la entrevista, decidimos ampliar el alcance de esta afirmación del siguiente modo: “es posible elegir dos puntos en la recta de forma tal que entre ellos no haya un punto correspondiente a un número irracional”. También acordamos preguntar por la posibilidad de encontrar un punto racional entre dos irracionales –si no habían tenido esto en cuenta– y ofrecer algunos ejemplos concretos en el caso de que las estudiantes tuvieran alguna dificultad para explicar en forma general sus ideas.

La propuesta de incluir a los puntos irracionales en esta afirmación dio lugar a que las estudiantes –en su gran mayoría– se detuvieran a explicitar las dudas que les traía el hecho de considerar la ubicación de un número irracional en la recta numérica.

Luciana indicó que no está de acuerdo con la afirmación del cuestionario y en sus argumentos enunció la propiedad de densidad de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{Q}$ . Durante el diálogo muestra confianza acerca de poder ubicar un racional partiendo de dos puntos racionales porque apela a dicha propiedad. En el caso de partir de dos puntos irracionales –algo que ella no había tenido en cuenta– tiene menos certeza. En relación con esto, ella menciona que “en algunos casos no es posible ubicar un irracional entre dos reales”. Sin embargo, construye un irracional entre dos racionales concretos recuperando un ejemplo de la clase de *Aritmética II*: “hemos construido un irracional entre uno y dos”. Cuando se le pregunta por otro caso –encontrar un irracional entre  $1/3$  y  $0,4$ – también puede hacerlo usando leyes de formación<sup>7</sup>. De este modo, Luciana muestra que puede generar sus argumentos en base a propiedades generales y también en construcciones de números en casos particulares. Si bien domina las leyes de formación para construir números irracionales, esto no le resulta suficiente para revisar su posición en el caso de partir de puntos irracionales e indica que: “entre dos irracionales no siempre es posible

<sup>7</sup>En el estudio de algunos números irracionales en el contexto de *Aritmética II. Números racionales: Orden y densidad* los y las estudiantes aprendieron a construir números dados por sus expresiones decimales infinitas a partir de determinar alguna ley que caracteriza la formación de esa expresión, lo que puede dar lugar tanto a una expresión periódica como a un número irracional.

encontrar un número irracional". Sus conocimientos sobre números irracionales son más recientes en su trayectoria de estudio respecto a los que dispone de los racionales y por eso entendemos que son menos estables o sólidos, así como también su posibilidad de generalizar estas ideas.

Por otra parte, Luciana comparte con las entrevistadoras que le cuesta aceptar la existencia de infinitos irracionales en la recta frente a la presencia de infinitos racionales densos. Concibe la infinitud de los números irracionales considerando sus escrituras decimales, pero se le genera un conflicto a partir de la representación en la recta de dichos números. No entiende cómo es posible que, teniendo la recta infinitos racionales, haya lugar para irracionales. Al respecto Luciana se pregunta "¿en qué lugar entran los irracionales en la recta (si ya hay infinitos racionales)?" Le parece que hay una contradicción entre ambos hechos. Vemos en ella una asimilación entre la densidad de  $\mathbb{Q}$  y la continuidad en la recta, un señalamiento hecho por investigaciones precedentes (Durand-Guerrier, 2018; Vergnac, 2013) que tuvimos presente para esta indagación. También puede deberse a una concepción sobre el infinito según la cual "infinito es todo" (Montoro & Ferrero, 2022).

Observamos que poner en juego la noción de densidad en vínculo con la recta, contribuye a precisar la diferencia entre una recta ideal y una material. En efecto, en la recta material no es posible ubicar infinitos puntos entre otros dos fijos mientras cada punto tenga una superficie (diminuta, pero distinta de cero). En el caso de Luciana, la dificultad que le trae concebir la ubicación de los puntos irracionales en la recta nos permite entender el papel que tiene este conflicto en su construcción de una recta ideal. Sin embargo, interpretamos que su visión se aleja de una recta material ya que acepta la idea teórica de que los infinitos números racionales densos tienen un lugar en la recta.

Andrea también se apoyó en la densidad de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{Q}$  para explicar que entre dos puntos racionales siempre se puede encontrar un punto correspondiente a un número racional. Al revisar la afirmación y su respuesta, advierte que le faltó considerar el caso en el que se parte de puntos irracionales. Al respecto, ella se pregunta:

"Si tenemos dos números infinitos y no sabemos en qué momento terminan, ¿cómo los ubicamos? Porque ponele que son "consecutivos" (ella hace comillas con la mano), el último número cambia, pero... ¿y si vos no lo sabés? ¿Cómo encontrás entre dos números irracionales que sean más o menos consecutivos? ¿Cómo encontrás otro? Si son infinitos digamos... son decimales infinitos".

Andrea intenta aplicar estrategias para el orden de las expresiones decimales finitas en casos que involucran expresiones decimales infinitas. Para adaptarse a este nuevo contexto, imagina cómo detectar irracionales "consecutivos" para ubicar entre ellos otro número. Entonces supone que una expresión decimal infinita tiene

un último dígito y el problema es que no lo puede conocer. Esto le permite a ella hacer viable la existencia de un siguiente. Más adelante avanza y expresa:

“Si vamos mirando el orden en el que van los dos números que tenemos (hace un gesto comparando los dígitos después de la coma de cada número, lugar a lugar), si en un lugar encontramos ponele 1 y 3 podemos poner el 2 y ahí ya encontrás un número, entre medio de esos dos”.

Pareciera generarle dudas que siempre sea posible encontrar entre las cifras decimales de esos irracionales una diferencia que le permita armar ahí otro número dado que esas cifras son desconocidas.

Por su parte, Laura entiende que siempre podrá ubicar un número racional entre otros dos sin importar si parte de dos puntos racionales o irracionales. En la primera situación se apoya en la propiedad de densidad vista en Aritmética II y, en la segunda, simplemente afirma que sí aunque no da argumentos generales. Con la misma confianza considera que puede encontrar un irracional entre dos racionales y entre dos irracionales. Para favorecer que realice alguna explicación le proponemos abordar la afirmación considerando dos puntos particulares racionales:  $1/3$  y  $1/6$ . En esta situación convierte estas fracciones a su expresión decimal periódica y se apoya en el orden para armar una expresión decimal infinita no periódica a través de una ley de formación. Esto le permite afirmar que entre dos racionales puede encontrar un irracional. Es el orden y la escritura decimal lo que activa esta explicación.

Para finalizar este apartado queremos mencionar que ampliar la afirmación 5 al conjunto de los irracionales en la entrevista, nos permitió comprender que el hecho de no disponer de un método para ubicar a todos los irracionales en la recta (así como es posible con los racionales) plantea un escenario desafiante para elaborar la idea de densidad de este conjunto en sí mismo o en  $\mathbb{R}$ , apoyándose en la recta. Volveremos a la ubicación de los irracionales en la recta en el siguiente apartado.

5.2.3. *¿Tienen los números una ubicación exacta y precisa en la recta?* La afirmación 7 del cuestionario, que hace referencia a la ubicación exacta de números con expresión decimal infinita, también nos permitió indagar acerca de las ideas que tienen los y las estudiantes sobre la recta en tanto objeto ideal y material. No obstante, en las entrevistas se analizó también la ubicación de otros números. Nos parece importante destacar que cuando mencionamos una ubicación exacta y precisa en la recta hacemos referencia a la recta ideal, ya que en la recta material todo es aproximado.

Durante la entrevista, Andrea comenta que puede ubicar exactamente a números con expresión decimal infinita y periódica, así como también a los que son de la forma “raíz cuadrada de un número primo”. En cambio, no puede ubicar con

precisión a los que son “al azar”<sup>8</sup> o con una ley de formación porque “son números infinitos y no sabés cómo siguen”. Aún así, da una explicación sobre cómo aproximarse a la ubicación del número en la recta, procedimiento que ella llama “ubicación por posición”. Es un proceso que consiste en ir ubicando en la recta cada expresión decimal finita que se obtiene al truncar la expresión del irracional, incorporando en cada paso una cifra decimal más. Le genera dudas que, al ser un proceso infinito, esto le permita encontrar la ubicación exacta de ese número en la recta numérica. La ausencia de un método con finitos pasos para algunos números irracionales le hace dudar de la ubicación exacta de tales números.

Para Isabel los números con expresión decimal finita son “números que terminan” –a los que refiere como definidos– y tienen una ubicación exacta en la recta. Los números que tienen una expresión decimal infinita son “números que no terminan” –a los que llama indefinidos– y no tienen una ubicación exacta en la recta. Conoce los métodos de construcción de Tales y de Pitágoras con los que puede ubicar algunos números con expresión decimal infinita, pero no confía en que le aporten el lugar exacto. Si se le ofrece un número periódico a partir de su expresión fraccionaria, Isabel confía en que apoyada en el método de construcción de Tales tiene una forma de ubicarlo en la recta numérica. Sin embargo, expresa dudas si se considera su expresión decimal. En efecto, cuando la entrevistadora le pregunta por la ubicación de  $0, \widehat{32}$ , Isabel manifiesta la dificultad de ubicarlo exactamente: “necesito poner 0,33 para ubicarlo”.

Se le advierte que 0,33 es otro número, a lo que ella responde: “Sí, es otro número. Llega ahí (el  $0, \widehat{32}$ ) y ya está al tope. Pero 0,323232 infinitamente no sé dónde lo voy a encontrar. Sé que en algún momento se va a chocar con 0,333333 o 0,323232 hasta que pueda cambiar a 0,33 el último ... pero ya va a ser otro número. Tampoco podría encontrarlo”.

A partir del diálogo con Isabel, interpretamos que los números con expresión decimal infinita están –en su concepción– en movimiento en la recta. La infinitud de sus cifras la induce a considerar sucesivos dígitos para su ubicación y, de este modo, “expande” o “mueve” al número. Por esta razón los números “indefinidos” están en movimiento y por eso no tienen un lugar exacto en la recta. Consideramos que este movimiento que visualiza Isabel frente a la infinitud de cifras se distingue de la infinitud de pasos necesarios para ir acercándose a la ubicación de un irracional que lleva a Andrea a dudar de la ubicación exacta.

Volviendo a Isabel y a la tarea de ubicar  $0, \widehat{32}$ , al pedirle la ubicación de  $32/99$  aclarando que es la expresión fraccionaria del mismo número, ella manifiesta que esta fracción puede tener una ubicación exacta. Consideramos entonces que para

<sup>8</sup>Entendemos que al referirse “al azar” interpreta que las cifras decimales se definen de manera aleatoria, sin un patrón, lo que podría generar una expresión decimal infinita no periódica.

esta estudiante, la representación del número tiene un peso en la posibilidad de encontrar una ubicación exacta en la recta.

Por otra parte, Luciana manifiesta que puede ubicar de forma exacta a los números racionales y a las raíces cuadradas, pero no ve la manera de ubicar otros irracionales<sup>9</sup>. Menciona que quizás lo que le falta es la técnica para saber ubicarlos. Sin embargo, disponer o no de técnica no es el verdadero conflicto para pensar que cada número tiene una ubicación precisa en la recta. Como fue mencionado en el apartado anterior, el verdadero problema en su visión, está en el “espacio disponible” para ubicar irracionales una vez que la recta tiene infinitos racionales que son densos.

Poniendo en vínculo lo desplegado por Luciana e Isabel, nos interesa resaltar diferencias en sus planteos. Mientras Luciana “entiende” que con un método  $\sqrt{2}$  se puede ubicar en la recta, le parece que no es posible ubicar irracionales cuando la recta está “llena” de racionales. En cambio, la duda de Isabel es diferente. Para ella, el hecho de que la expresión decimal sea infinita –tanto para periódicos como no periódicos– es lo que la hace dudar de la efectividad de un método para dar una ubicación exacta.

Cristina manifiesta conocer el teorema de Pitágoras para ubicar algunos irracionales de forma exacta en la recta numérica y además menciona que hay infinitos irracionales que “aunque no tenemos la forma de ubicarlos están en la recta también”. Por las respuestas que da Cristina en la entrevista, parece estar en una posición más teórica de la recta que sus compañeras: no necesita conocer un método o bien ubicar un número en la recta para tener cierta certeza o creencia de que igual ocupa un lugar.

Es claro que para estas estudiantes, la ubicación exacta de algunos números reales –enteros, expresiones decimales finitas– en la recta numérica no genera dudas. Nos hemos preguntado si consideran posible ubicar de forma exacta a todos los números con expresión decimal infinita tanto racionales como irracionales. Anteriormente señalamos varias investigaciones que consideran a los desarrollos decimales infinitos como un obstáculo para la ubicación de dichos números en la recta numérica. En concordancia con esto, en las respuestas a los cuestionarios también identificamos esta posición en algunos/as estudiantes. Mientras que en otros, la ubicación de expresiones decimales infinitas en la recta depende de conocer un método con finitos pasos. Las entrevistas nos permiten precisar ideas en estas diferentes posturas:

- aceptar que hay una posición exacta para todos los números aún cuando no se disponga de (o no se conozca) un método para ubicarlos

<sup>9</sup>Por la respuesta a la pregunta 3 de la segunda parte del cuestionario, Luciana se refiere por “raíces cuadradas” a aquellas que dan una expresión decimal infinita no periódica como las raíces cuadradas de números primos.

- considerar que la ubicación de los números con expresión decimal infinita no puede ser exacta pues el proceso de ubicación es infinito o bien un proceso en constante movimiento.
- rechazar que los irracionales puedan ubicarse en la recta (aún cuando conocen métodos para ubicar de manera exacta a algunos irracionales) dado que consideran que la recta está “llena” de racionales y no hay lugar para otros números más.

Por último, considerar la ubicación exacta de cualquier número, se conozca o no un método, remite a una concepción ideal de la recta. La duda acerca de poder ubicar o no a expresiones decimales infinitas (porque solo se puede aproximar o bien porque no tendrían un lugar) nos hace pensar en la transición entre una mirada material y una ideal de la recta.

*5.2.4. La relación entre números y puntos* En el apartado anterior reconocemos diferentes posiciones de las estudiantes respecto a la posibilidad de ubicar con precisión algunos números reales en la recta. Estas ideas junto con las que desplegaron sobre la densidad nos dan indicios acerca de las concepciones que tienen de la correspondencia número-punto. Con esto nos referimos al grado de aceptación que tienen respecto de la asignación uno a uno entre números reales y puntos de la recta.

Esto se recupera en la entrevista a partir de las afirmaciones 5 y 7 del cuestionario. En particular, al retomar la afirmación 5, se abordan dos nuevas cuestiones que se formulan en simultáneo para favorecer la conexión entre ambos enunciados: cómo se reconoce si un punto es racional o irracional y cómo puede decidirse si un número es racional o irracional.

Cristina explica que no puede saber si un punto de la recta se corresponde con un número racional o irracional y que solo conoce algunos puntos irracionales. Ampliando su respuesta, hace referencia a aquellos puntos irracionales que sabe construir como las raíces de números primos. En cambio, para reconocer si un número es racional o irracional ella apela a la representación decimal o bien, a la posibilidad de expresarlo o no como fracción.

Andrea explica cómo reconocer números racionales e irracionales pero en el caso de puntos no responde sobre cómo decidir. Cuando considera el problema de ubicar entre dos puntos dados un punto correspondiente a un número irracional, ella asimila puntos con números racionales ya que nos explica un procedimiento de construcción de un punto o número irracional apoyándose en una expresión decimal que revela que está pensando en un número racional.

Luciana reconoce con claridad números racionales e irracionales a través de características de las expresiones decimales en cada caso. No obstante, manifiesta dudas acerca de la correspondencia entre números irracionales y puntos de la recta



pues, como ya señalamos, la densidad de los puntos racionales se asimila para ella a la continuidad de la recta: la recta ya está “completa” cuando se “ubica” a los racionales. Partiendo de considerar puntos en la recta Lucila enuncia que “cuando un punto no es racional es irracional”. Interpretamos que, según su concepción, cada punto de la recta está en vínculo con un número real y en consecuencia no existen puntos en la recta que no representen números reales. Isabel reconoce que además de los números racionales hay irracionales en la recta, aunque para ella estos últimos no tienen un lugar fijo, tal como hemos comentado en el apartado anterior. Pensando en los puntos de la recta, Isabel acepta que pueden ser tanto racionales como irracionales y agrega “cuando hablamos de un punto no estamos hablando exactamente de un número sino de un lugar en la recta”. Con esta respuesta no resulta del todo clara la relación que establece entre números y puntos.

Ninguna de las estudiantes entrevistadas manifestó la posibilidad de considerar un punto de la recta que no se corresponda ni con un número racional ni con uno irracional. Esto nos lleva a pensar que para ellas todos los puntos de la recta se corresponden a números reales.

Lo visto hasta acá nos permite identificar que las estudiantes, aceptan y adoptan de modos más o menos explícitos la relación “número real - punto en la recta” como un hecho. En efecto, frente a ciertas tareas o afirmaciones asumen la correspondencia “número-punto”. Tal como dijimos en el inciso anterior lo que se pone en duda es la posibilidad de encontrar la ubicación exacta de números con expresión decimal infinita.

En síntesis, para estas estudiantes:

- si se les presenta un punto de la recta consideran que se trata de un número racional o irracional.
- si tienen que encontrar un punto racional o irracional entre otros dos dados, lo hacen a partir de recurrir a sus expresiones decimales lo que nos hace suponer que están pensando a esos puntos como números.
- en situaciones puntuales en donde el infinito juega algún rol (ya sea en la representación decimal o bien considerando la densidad de los números), manifiestan dudas acerca de esta relación o surgen contradicciones como una manifestación de estas dudas.

5.2.5. *El infinito en la concepción de los reales* Las expresiones decimales infinitas, la infinitud de los números naturales, enteros, racionales e irracionales, la recta y sus infinitos puntos, las infinitas fracciones equivalentes, convierten al infinito y sus formas de interpretarlo en parte de las concepciones que los y las estudiantes ponen en juego a la hora de estudiar a los números reales.

Ya mencionamos los diversos posicionamientos que encontramos en estas estudiantes ante la tarea de encontrar la ubicación exacta de las expresiones decimales infinitas en la recta. Queremos en este apartado señalar algunas posiciones respecto al infinito.

Durante el diálogo sobre la densidad Cristina explica que “en un número irracional yo no puedo materialmente ver dónde termina”. Consideramos que detrás de esta afirmación puede haber una interpretación del infinito en donde hay un final al que resulta imposible acceder. El número tiene una expresión decimal que termina en algún momento, pero no es posible acceder a ese final, en términos de Montoro y Scheuer (2004) el infinito como imposible de prever. Este posicionamiento respecto al infinito difiere de considerar que la expresión del número no termina, no tiene fin y por lo tanto no hay último elemento. Aceptar esto último representa una posición teórica, seguramente todavía en proceso en esta estudiante.

Al consultarle por la afirmación 4 para Andrea no es posible mover un punto y pasar por todos los números reales en la recta. Argumenta que “al ser infinitos no llegaríamos a pasar por todos”. El proceso de recorrer una cantidad infinita de objetos es algo inacabable, dicho en otros términos: porque son infinitos no se llega (a recorrerlos). Es la temporalidad del infinito (Sierspiska, 1987) lo que parece imposibilitar el proceso de pasar por todos los números.

En el caso particular de Diana encontramos un vínculo entre su concepción del infinito, la recta como objeto de representación de los números reales y la distinción de la recta en tanto objeto material o ideal. A propósito de las afirmaciones 1 y 2 y la superficie que pueden ocupar o no los puntos Diana afirma “aunque no se pueda representar dibujándola, ese punto ocupa una diminuta superficie ... la recta es infinita, en la recta hay infinitos números y yo no puedo representar infinitos números en un papel digamos, ahí en la recta... pero sí existen”. Para aclarar la posición de la estudiante sobre distintos objetos que ella indica como infinitos, se le repregunta “lo que vos no podés representar es una cantidad grande. Un número cualquiera ¿sí lo podés representar?” Y ella responde “un número que tiene infinitos decimales no se puede representar”. El infinito plantea a Diana una barrera que, por el momento, no puede superar. Interpretamos que, para ella, las expresiones decimales infinitas y los conjuntos infinitos de números no pueden representarse en la recta justamente por ser infinitos. Montoro y Ferrero (2022) ya identificaron en estudiantes con menor formación matemática una concepción que llamaron finitista, esto es, percibir al infinito como un número muy grande. En Diana esta idea parece predominante: “no puedo representar infinitos números en un papel”. Podríamos suponer que aún no ha entrado en la construcción del infinito potencial.

Como ya mencionamos en el apartado sobre la ubicación de los puntos en la recta, Isabel considera que “los irracionales no tienen un lugar fijo, que pueden ser

infinitos porque es un número que continua, no está exacto". Nos interesa señalar aquí que es la conceptualización del infinito como en movimiento o no determinado (Montoro & Scheuer, 2004) la que juega un rol central en su posicionamiento.

El infinito también configura en el caso de Luciana una dificultad para pensar que existen más puntos en la recta además de los infinitos puntos racionales. En efecto, ella se cuestiona –a propósito de la ubicación de los números irracionales en la recta– que “si entre dos (puntos) racionales hay infinitos (puntos) racionales, ¿dónde entran los (puntos) irracionales? O tenemos una cosa o tenemos otra”. Aquí la idea de infinito se presenta como el todo. Luciana aclara que no le es difícil aceptar la existencia de infinitos números racionales e irracionales sino la representación de ambos conjuntos infinitos en la recta.

Para finalizar este apartado, queremos destacar que el concepto de números reales se construye en la matemática a través de procesos que necesariamente hacen uso de la idea de infinito actual. En este recorrido por las respuestas de las estudiantes analizamos diversas concepciones del infinito, algunas en proceso de considerar un infinito actual, otras que funcionan como obstáculo para comprender características de los números reales.

## §6. Conclusiones

En este artículo analizamos los vínculos entre la recta numérica y los números reales que tienen construidos estudiantes universitarios de un primer año del profesorado de Matemática de la Unipe.

Nos preguntamos por las concepciones que este grupo de estudiantes tiene sobre la recta y los puntos en tanto objetos ideales. A partir de los cuestionarios y las entrevistas advertimos que la mayoría acuerda con la doble dimensión –ideal y material– de la recta. Sin embargo, este posicionamiento no es tan claro al considerar los puntos de la recta. Efectivamente, concebir puntos sin superficie entra en conflicto con la idea de la recta compuesta por infinitos puntos, llevando a una materialización del punto para aceptar su existencia.

En concordancia con otras investigaciones identificamos que las expresiones decimales infinitas resultan ser un obstáculo al considerar la representación de los números reales en la recta numérica. A continuación, señalamos algunos matices de estos obstáculos encontrados en nuestro estudio:

- En algunos casos, contar con técnicas que implican una cantidad finita de pasos (apoyadas en los teoremas de Tales y Pitágoras) brinda confianza sobre la ubicación exacta de algunas familias de números con expresiones decimales infinitas. La falta de un procedimiento de este tipo genera dudas sobre su ubicación exacta. De este modo, la percepción de la posibilidad de ubicar estos números en la recta de forma exacta estaría condicionada por

una concepción del infinito como indefinido al no contar con una técnica de finitos pasos. Así, es la existencia de un método de finitos pasos y no tanto la expresión decimal infinita la que determina la posibilidad de la ubicación exacta.

- En otros casos, se consideran procedimientos con infinitos pasos para ubicar expresiones decimales infinitas, pero al ser un proceso infinito no se acepta como ubicación exacta porque el procedimiento “no termina”. Una concepción del infinito potencial explica por qué se considera imposible representar estos números en la recta.
- En cuanto a la ubicación de los números irracionales en la recta, encontramos casos en donde no es su expresión decimal la que impide la ubicación exacta. Un estudio previo de los racionales y la densidad de  $\mathbb{Q}$  por parte de estas estudiantes les hace pensar que la recta está “llena”. Observamos así una asimilación entre la densidad de  $\mathbb{Q}$  y la continuidad de la recta, como han señalado investigaciones precedentes (Durand-Guerrier, 2018; Vergnac, 2013). A futuro, este aspecto merece ser explorado en trabajos que avancen en distinguir lo denso de lo continuo en propuestas de enseñanza para estudiantes universitarios (Benito et al., 2023; Cedrón et al., 2021).

Admitir la ubicación exacta de cualquier número, más allá de disponer o no de un método, remite a una concepción ideal de la recta. Las dudas sobre la posibilidad de ubicar números con expresión decimal infinita nos hacen pensar en una transición entre una visión material y una ideal de la recta.

Se puede considerar una propuesta de enseñanza que ponga en juego la ubicación en la recta de números irracionales, como los dados por una ley de formación, a través de la localización de intervalos de longitud cada vez más pequeña y que contenga a esos números. De este modo, se podría abordar la existencia de un punto en la recta que representa a este número apoyándose en el principio de intervalos encajados. Esto permitiría cuestionar la suposición de que algunos números con expresión decimal infinita no tienen una ubicación exacta en la recta debido a la inexistencia de una técnica con finitos pasos que determine su posición exacta.

En la primera etapa de nuestra indagación (cuestionarios) encontramos que la mayoría de estos/as estudiantes concebían y manejaban la densidad de los racionales y la consideraban también en la recta numérica. En las entrevistas exploramos el alcance de esta propiedad en  $\mathbb{R}$ .

Abordar la densidad de los números reales genera un espacio para profundizar el estudio de las expresiones decimales infinitas y los conflictos cuando emergen aspectos ligados al infinito en la escritura de estos números (Cedrón et al., 2021). Mencionamos en Antecedentes que elaborar la densidad de  $\mathbb{Q}$  apoyándose en la recta permite considerar el punto medio entre dos racionales para avanzar en la comprensión de esta propiedad (Benito et al., 2023). Este tratamiento es mucho más

desafiante al tomar dos números irracionales, no sólo porque el punto medio entre dos irracionales podría ser racional, sino también porque muchos/as estudiantes ponen en duda su ubicación exacta en la recta. En ocasiones, tal como mostramos, esa ubicación se interpreta como movable (o susceptible de desplazamiento). En este contexto resulta lógico que los y las estudiantes no confíen en la posibilidad de ubicar un número irracional entre otros dos que se mueven en la recta. Por esto concluimos que considerar la densidad para el conjunto de irracionales pone en evidencia la complejidad del vínculo entre aceptar una ubicación exacta de estos números y disponer de la propiedad de densidad de  $\mathbb{R}$  con un apoyo en la recta.

Inicialmente señalamos que las concepciones de los y las estudiantes sobre la recta numérica se elaboran en vínculo con las ideas sobre los números reales que se van construyendo y pueden ser herramientas para el avance o generar obstáculos en los aprendizajes posteriores. Nuestro objetivo fue identificar algunas de estas concepciones.

Finalmente, la recta ideal, la densidad de  $\mathbb{R}$  y el infinito actual son todas ideas de índole teórico. La discusión en torno a ellas inaugura un tratamiento teórico que, inevitablemente, se confronta con concepciones que nuestros/as estudiantes han construido durante su escolaridad y que están vinculadas a una idea de recta material. El análisis de las concepciones compartidas en este artículo sugiere la necesidad de ofrecer desde la enseñanza variadas oportunidades de hacerlas visibles, discutir las y también movilizarlas, con el propósito de construir un posicionamiento teórico sobre este conjunto de cuestiones constitutivas del objeto recta numérica.

### §7. Anexo I – Cuestionario sobre números reales

Hola, nos interesa conocer cuáles son las ideas acerca de los números reales que tiene un/a estudiante que inicia sus estudios superiores. Te agradecemos que participes en la investigación compartiendo con nosotros algunas cuestiones sobre los reales que probablemente estudiaste en la escuela secundaria. Nos parece importante aclarar que estas preguntas no constituyen una evaluación, sino que nuestro foco es el de entender qué puntos de partida y de llegada existen con respecto a esta temática. Es por eso que te pedimos que respondas a ellas desde tus ideas sin recurrir a otros medios.

Considerando las siguientes siete afirmaciones, indicá para cada una de ellas si:

1. estás totalmente de acuerdo
2. estás parcialmente de acuerdo
3. no estás de acuerdo
4. no podrías tomar posición al respecto

1. Al trazar una recta, la línea que dibujamos es una representación material y como tal tiene grosor, pero la recta es un objeto ideal y por lo tanto no tiene grosor.

1	2	3	4
---	---	---	---

2. Los puntos de la recta ocupan una diminuta superficie.

1	2	3	4
---	---	---	---

3. La recta numérica es el conjunto infinito de puntos que señalan a distintos números y si quitamos un punto generamos un agujero en la recta porque se pierde un número real.

1	2	3	4
---	---	---	---

4. Si ubicamos un punto en la recta numérica y lo movemos a lo largo de toda la recta, el punto pasará por todos los números reales sin dejar ninguno afuera.

1	2	3	4
---	---	---	---

5. Es posible elegir dos puntos en la recta numérica de forma tal que no haya entre ellos un punto correspondiente a un número racional. (Te pedimos que nos expliques por qué elegís tu opción en el espacio asignado).

1	2	3	4
---	---	---	---

6. Si elijo al azar un punto en la recta numérica es más probable que corresponda a un número racional que a un número irracional.

1	2	3	4
---	---	---	---

7. Los números con expresión decimal infinita no tienen una ubicación exacta en la recta numérica. (Te pedimos que nos expliques por qué elegís tu opción en el espacio asignado).

1	2	3	4
---	---	---	---

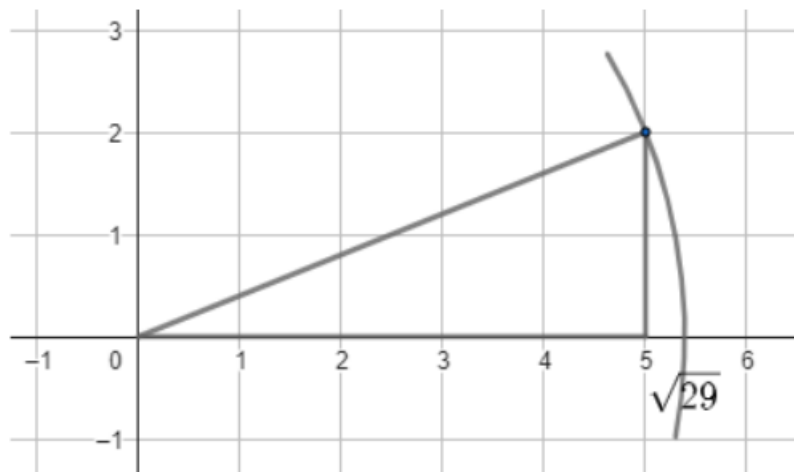
## PREGUNTAS

8. ¿Pensás que el conjunto de los números reales tiene algunas características o propiedades específicas, propias, que lo distingue de otros conjuntos tales como los naturales, los enteros y los racionales? Te pedimos que además de contestar por sí o por no nos cuentes en qué te apoyas para pensar de ese modo.
9. Te pedimos que, **sin utilizar una calculadora**, indiques cuáles de las siguientes escrituras representan números reales:

		SI	NO
a)	$\sqrt{-1}$		
b)	0,101001000100001... Nota: esta expresión decimal responde a una regla de formación que ordena en forma consecutiva todas las potencias de 10 comenzando con 10, 100, 1000, etc.		
c)	$\sqrt{\pi}$		
d)	$(2^0 - 1)^{-1}$		
e)	$\frac{2}{1-0,\overline{9}}$		
f)	$(0,5)^\pi$		
g)	$1, \hat{6}7$		

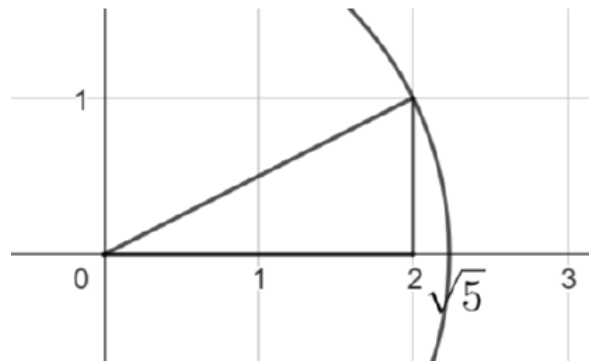
Si para responder a este punto 9 realizaste algunos cálculos te pedimos que los escribas en esta hoja.

10. El esquema muestra la representación de  $\sqrt{29}$  en la recta numérica apelando al teorema de Pitágoras:



En estos ejes cartesianos se construyó un triángulo rectángulo con catetos de medidas 5 y 2 para obtener una hipotenusa de longitud  $\sqrt{29}$  ya que según el teorema de Pitágoras “el cuadrado de la hipotenusa equivale a la suma del cuadrado de los catetos.”

Adaptando esta construcción a otros triángulos rectángulos cuyos catetos tienen longitud entera, podemos obtener la representación en la recta de otros números. Por ejemplo, la representación de  $\sqrt{5}$  utilizando un triángulo rectángulo con catetos de longitudes 2 y 1.



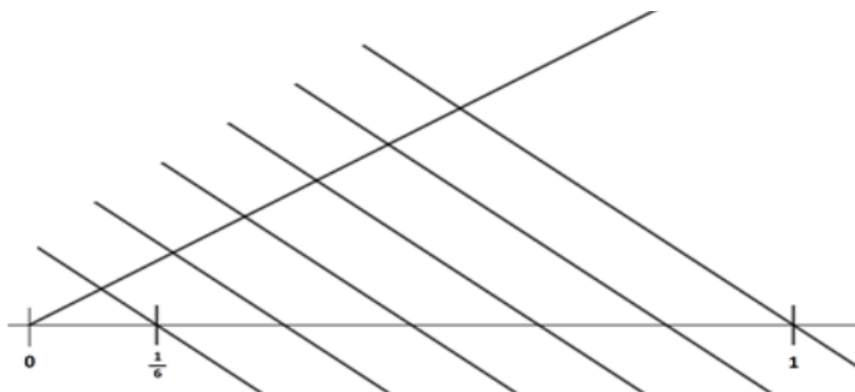
a) Te pedimos otros dos ejemplos de números irracionales que puedan representarse adaptando esta construcción a otros triángulos rectángulos **cuyos catetos tienen longitud entera**. Para cada uno de los ejemplos indicá la medida de los catetos que utilizaste en la construcción.

b) Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

Afirmación 1. Adaptando esta construcción a otros triángulos rectángulos con catetos de longitud entera podemos representar en la recta a todos los números irracionales.

Afirmación 2. Adaptando esta construcción a otros triángulos rectángulos con catetos de longitud entera podemos representar en la recta a las raíces cuadradas de infinitos números naturales.

11. El siguiente esquema muestra la representación de  $\frac{1}{6}$  apelando al teorema de Tales. Indicá qué otros números pueden representarse adecuando el esquema.



### §8. Anexo II – Posibles preguntas para las entrevistas

Las siguientes preguntas fueron diseñadas para todas las entrevistas. En algunos casos se elaboraron preguntas específicas para los y las estudiantes con la intención de avanzar en la comprensión de sus explicaciones escritas o también dilucidar



concepciones puntuales esbozadas en sus respuestas al cuestionario. Durante la entrevista, cada estudiante tuvo disponible sus respuestas al cuestionario, las cuales se fueron leyendo como parte de la conversación.

### Afirmación 1

Al trazar una recta, la línea que dibujamos es una representación material y como tal tiene grosor, pero la recta es un objeto ideal y por lo tanto no tiene grosor.

Parcialmente de acuerdo Indicaste que estás parcialmente de acuerdo:

- ¿Podés explicarnos por qué respondiste esto?
- ¿Hay alguna parte de la afirmación con la que estás de acuerdo? ¿Con qué parte de la afirmación estás de acuerdo?
- ¿Qué debería cambiar de la afirmación para que estés de acuerdo?

No puede tomar posición.

¿Por qué no podés tomar una posición al respecto?

### Afirmación 2

Los puntos de la recta ocupan una diminuta superficie.

No responde.

¿Por qué no respondiste esta pregunta?

Si respondiera que no sabe qué responder: ¿Hay algo en la afirmación que te resulte confuso?

De acuerdo.

¿Podrías ampliarnos esta idea? ¿Por qué considerarás que un punto tiene diminuta superficie?

Queremos conocer qué puntos considera, cómo los caracteriza, cuándo cree que tienen una diminuta superficie (si su descripción remite a puntos materiales o ideales).

### Afirmaciones 1 y 2

Si en las afirmaciones 1 y 2 responde totalmente de acuerdo (acuerda que la recta no tiene grosor y que es un ente ideal, a la vez que el punto tiene una diminuta superficie).

Leemos las dos afirmaciones, le decimos que respondió que está totalmente de acuerdo con ambas y le preguntamos:

Esos puntos en los que pensás con una diminuta superficie ¿los imaginás sobre la recta material o sobre la ideal según la afirmación 1?

### Afirmación 3

La recta numérica es el conjunto infinito de puntos que señalan a distintos números y si quitamos un punto generamos un agujero en la recta porque se pierde un número real.

No está de acuerdo.

No estás de acuerdo con que al retirar un punto de la recta numérica se genera un agujero. Nos interesa que nos expliques: Para vos, al sacar un punto de la recta numérica, ¿se produce algún efecto? Sí es así, ¿cuál? Si no es así, ¿por qué?

De acuerdo con esta afirmación y en desacuerdo con la afirmación 2.

En la afirmación 2 sostenés que los puntos no ocupan una superficie y en la afirmación 3 decís que quitando un punto de la recta numérica se genera un agujero: ¿Cómo te imaginás este agujero que se genera al quitar un punto?

### Afirmación 4

Si ubicamos un punto en la recta numérica y lo movemos a lo largo de toda la recta, el punto pasará por todos los números reales sin dejar ninguno afuera.

En desacuerdo.

¿Por qué no estás de acuerdo con esta afirmación?

Parcialmente de acuerdo.

¿Con qué parte de la afirmación acordás y con cuál no?

### Afirmación 5

Es posible elegir dos puntos en la recta numérica de forma tal que no haya entre ellos un punto correspondiente a un número racional. (Te pedimos que nos expliques por qué elegís tu opción en el espacio asignado.)

De acuerdo.

- ¿Podrías dar un ejemplo de dos puntos que contengan un racional entre ellos?
- ¿Podrías dar un ejemplo de dos puntos que no contengan un número racional entre ellos?
- Si elegís dos puntos en la recta, ¿a qué números podrían corresponder?

Solo responde que no está de acuerdo y no escribió una explicación.

¿Por qué no estás de acuerdo con la afirmación?

Si menciona la propiedad de densidad en la entrevista, sigue con el grupo de preguntas:

No está de acuerdo y menciona la propiedad de densidad.

- ¿Qué entendés por densidad? ¿Podrías explicarnos cómo usas la propiedad de densidad en este caso?
- Si la afirmación refiere a encontrar un punto irracional entre dos puntos ¿Te parece que esto sería posible?

#### Afirmación 6

Si elijo al azar un punto en la recta numérica es más probable que corresponda a un número racional que a un número irracional.

De acuerdo.

¿Por qué acordás con la afirmación?

¿Cuántos puntos que correspondan a números irracionales hay en la recta? ¿Cuántos números irracionales conocés?

No acuerda.

¿Por qué no acordás con la afirmación?

Si dice que porque ambos son infinitos: ¿Crees que la probabilidad de elegir un número racional respecto a un irracional es la misma o pensás que es más probable que, al elegir uno al azar, ese punto sea racional?

#### Afirmación 7

Los números con expresión decimal infinita no tienen una ubicación exacta en la recta numérica. (Te pedimos que nos expliques por qué elegís tu opción en el espacio asignado.)

Las preguntas que realicemos sobre esta afirmación dependerán de las explicaciones escritas que hayan brindado en el cuestionario. Aún así, proponemos algunas ideas:

¿Pensás que algunos números tienen una ubicación exacta/precisa y otros no?

Si sólo menciona a los números periódicos con ubicación exacta porque los piensa como fracción:

¿Pensás que los números que tienen infinitas cifras decimales no periódicas tienen una ubicación exacta en la recta?

## Bibliografía

- Artigue, M. (1982). À propos des conceptions du cercle. Présentation de situations de classes privilégiant certaines de ces conceptions (CE2 et CM). *Grand N*, 27, 45-72.
- Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 241-286.
- Benito, C., Bergé, A., Cedrón, M., Duarte, B., Herrera, R., Lamela, C., Montes de Oca, M., Morales, G., & Rey, M. (2023). *Los números reales en la escuela secundaria. Una secuencia posible*. Ciudad de Buenos Aires, UNIPE: Editorial Universitaria.
- Bergé, A. (2004). *Un estudio de la evolución del pensamiento matemático: el ejemplo de la conceptualización del conjunto de los números reales y de la noción de completitud en la enseñanza universitaria* [Tesis doctoral, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires].
- Castela, C. (1997). La droite des réels en seconde: point d'appui disponible ou enjeux clandestin? En *Brochure de l'IREM de Rouen*. Université de Rouen.
- Cedrón, M., Duarte, B., Herrera, R., & Lamela, C. (2021). Representación y densidad en los reales. Análisis de experiencias de aula. *Revista Científica EFI-DGES*, 7(12), 109-122.
- Durand-Guerrier, V. (2018). La triade discret, dense, continu dans la construction des nombres. En *Actes de la CORFEM*. Nîmes, 13-14 Juin.
- Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(2), 169-193.
- Kidron, I., & Tall, D. (2015). The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics*, 88, 183-199.
- Montoro, V., Cifuentes, M., Salva, N., & Bianchi, M. (2017). Students' understanding of the number line / Estudiantes pensando en la recta numérica. *Infancia y Aprendizaje, Journal for the Study of Education and Development*. <https://doi.org/10.1080/02103702.2017.1304879>
- Montoro, V., & Ferrero, M. (2022). Diversidad de ideas construidas por estudiantes sobre los números reales, los números irracionales, el orden y la densidad. *Revista de Educación Matemática*, 37(1), 61-92.
- Montoro, V., & Scheuer, N. (2004). ¿Cómo piensan el infinito matemático los estudiantes universitarios de distintas carreras? *Revista Epsilon*, 60, 20(3), 435-447.
- Peled, I., & Hershkovitz, S. (1999). Difficulties in knowledge integration: Revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30(1), 39-46.

- Robinet, J. (1986). Les Réels: Quels modèles en ont les élèves? *Educational Studies in Mathematics*, 17, 359-386.
- Romero, C. (1996). Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario. *Enseñanza de las Ciencias*, 14, 3-14.
- Scaglia, S. (2000). *Dos conflictos al representar números reales en la recta numérica* [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
- Sierspinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-397.
- Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers on the number line - where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(4), 477-488.
- Vergnac, M. (2013). *Les nombres réels au lycée et à l'entrée à l'université. Premier état des lieux et perspectives* [Tesis de maestría, 2 recherche, Université Montpellier II Mention "Histoire, Philosophie et Didactique des Sciences"].
- Zazkis, R., & Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: Focusing on representation. En A. Hoines & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th International Conference for Psychology of Mathematics Education* (pp. 497-505, Vol. 4). Bergen, Norway.

MARÍA CAROLINA BENITO

Universidad Pedagógica Nacional, UNIPE.

(✉) maria.benito@unipe.edu.ar

MARA CEDRÓN

Universidad Pedagógica Nacional, UNIPE.

(✉) mara.cedron@unipe.edu.ar

BETINA DUARTE

Universidad Pedagógica Nacional, UNIPE.

(✉) betina.duarte@unipe.edu.ar

URIEL KASMAN

Universidad Pedagógica Nacional, UNIPE.

(✉) uriel.kasman@unipe.edu.ar

CECILIA LAMELA

Universidad Pedagógica Nacional, UNIPE.

(✉) cecilia.lamela@unipe.edu.ar

MARÍA CECILIA MONTES DE OCA

Universidad Pedagógica Nacional, UNIPE.

(✉) maria.montes@unipe.edu.ar

---

Recibido: 1 de julio de 2024.

Aceptado: 10 de diciembre de 2024.

Publicado en línea: 20 de diciembre de 2024.

---

recientemente se ha anunciado una demostración de que la famosa disección de Dudeney del triángulo equilátero en un cuadrado de igual área usando 4 piezas no puede hacerse con sólo 3 piezas?

La siguiente figura muestra cómo recortar un triángulo equilátero en 4 piezas que forman exactamente un cuadrado.

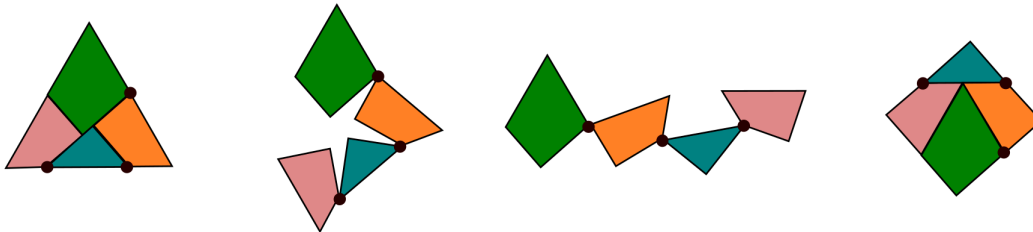


FIGURA 1. Disección encastrada de Henry Ernest Dudeney (extraída de Wikipedia).

En geometría, el concepto de *disectar* un polígono  $A$  en otro  $B$  consiste en transformar  $A$  en  $B$  mediante cortes rectos en  $A$  y, reordenando las piezas obtenidas, formar  $B$  sin superposiciones. Este concepto es simétrico: si se puede disectar  $A$  en  $B$ , entonces también se puede disectar  $B$  en  $A$ .

La disección del triángulo equilátero en el cuadrado que se muestra en la Figura 1 tiene, además, la propiedad de que no es necesario “dar vuelta” a las piezas y, más aún, es “*encastrada*” que quiere decir que se pasa del triángulo al cuadrado sin “desconectar” las piezas entre sí, ¡como si hubiera bisagras en los vértices!. Recordamos que en un ‘¿Sabías que...?’ del año 2017 (ver [1]), dimos los pasos para construir dicha disección a partir del cuadrado y explicamos por qué funciona. Te invitamos a repasar dicha construcción y su prueba.

Por supuesto, para que exista una disección entre  $A$  y  $B$ , ambos polígonos deben tener la misma área. Recíprocamente, hace ya más de dos siglos que se sabe que si dos polígonos tienen la misma área, entonces existe una disección entre ellos. Se conocen, además, varias técnicas para encontrar una efectivamente.

Sin embargo, dados dos polígonos con áreas iguales, determinar el número mínimo de piezas necesarias para una disección entre ellos es un problema sofisticado y, en general, muy difícil de resolver. Este problema ha sido objeto de estudio durante mucho tiempo y entre los pioneros destaca Henry Ernest Dudeney quien, a principios del siglo XX, publicó numerosas disecciones con relativamente pocas piezas. Una de las más notables es la hermosa disección de la Figura 1 (ver [3, 4]).

Desde entonces, los matemáticos han intentado demostrar que es imposible encontrar una disección del triángulo equilátero en un cuadrado utilizando solo

3 piezas. Invitamos al lector a encontrar una demostración de que es imposible realizarlo con solo 2 piezas.

Muy recientemente, en los primeros días de diciembre, Erik D. Demaine, Tonan Kamata y Ryuhei Uehara publicaron el artículo [2] en el que, asumiendo que no se pueden dar vuelta las piezas, demuestran que es imposible realizar una disección con 3 piezas poligonales. De este modo, queda demostrado que la disección dada por Dudeney es óptima. La demostración de este destacado resultado es laboriosa y utiliza técnicas de la Teoría de grafos.

Para quienes quieren continuar con este desafío de optimización, queda todavía abierta la pregunta de si es posible o no disectar el triángulo equilátero en un cuadrado con 3 piezas permitiendo darlas vuelta. También queda abierta la cuestión de si permitir cortes no rectos podría ayudar a conseguirlo.

#### REFERENCIAS

- [1] LEANDRO CAGLIERO, RICARDO PODESTÁ. *¿Sabías que...?* Revista de Educación Matemática **32:3** (2017), 49–50.
- [2] ERIK D. DEMAINE, TONAN KAMATA, RYUHEI UEHARA. *Dudeney's Dissection is Optimal*, arXiv:2412.03865.
- [3] H. E. DUDENEY. *Puzzles and Prizes*, 1902. April 6, April 20, May 4.
- [4] H. E. DUDENEY. *The Canterbury Puzzles and Other Curious Problems*, E. P. Dutton and Company, New York, 1908.

**Henry Ernest Dudeney** nació en el pueblo de Mayfield, East Sussex, Inglaterra. Desde muy joven se sintió atraído por la creación y resolución de acertijos, tanto de matemática como de ajedrez. Sus primeras contribuciones fueron publicadas en periódicos y revistas bajo el seudónimo "Sphinx". Dudeney tuvo una destacada columna llamada "Perplexities" en *The Strand Magazine* durante veinte años y contribuyó a otras publicaciones como *The Weekly Dispatch* y *Cassell's Magazine*. Entre sus logros más notables, se destaca la disección de un triángulo equilátero en cuatro piezas que forman un cuadrado. Murió en 1930 en Inglaterra a los 73 años de edad.

---

# LA DERIVADA DE FUNCIONES DEFINIDAS POR TRAMOS

Marilina Carena

---

**RESUMEN.** El principal objetivo de este trabajo es brindar herramientas que permitan determinar si una función definida por tramos es derivable o no en los puntos de corte, sin tener que recurrir a la definición de derivada lateral. A su vez, trabajamos en la identificación y uso correcto de condiciones necesarias y suficientes para obtener conclusiones en estos casos.

**ABSTRACT.** The aim of this paper is to provide tools that allow determining whether a piecewise-defined function is differentiable at the break points, without using the definition of the lateral derivative. Also, we work on the identification and correct use of necessary and sufficient conditions to draw conclusions in these cases.

## §1. Introducción

El concepto de derivada de una función es de suma importancia en cualquier carrera de ingeniería o relacionada con ciencias exactas o naturales, debido a sus numerosas y diversas aplicaciones. Por eso, resulta fundamental comprender su definición, su interpretación geométrica y las técnicas para calcularla. Estas últimas facilitan mucho la tarea, ya que establecen reglas que permiten determinar la derivada en puntos interiores del dominio de funciones clásicas, como las polinómicas, potencias, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, entre otras. Esto se combina con las reglas de derivación para la suma, la resta, el producto, el cociente y la composición de funciones diferenciables, para calcular la derivada de una gran cantidad de funciones sin necesidad de recurrir a la definición.

Sin embargo deben tenerse en cuenta ciertas condiciones. Por ejemplo, supongamos que  $f$  es una función racional, esto es,  $f(x) = P(x)/Q(x)$ , siendo  $P$  y  $Q$  polinomios. Las reglas mencionadas permiten obtener la derivada de  $f$  en todo valor  $x$  de su dominio, es decir, siempre que  $Q(x) \neq 0$ . Supongamos que  $x_0$  es una

---

*Palabras clave:* funciones definidas por tramos, derivada.

*Keywords:* piecewise-defined function, derivative.



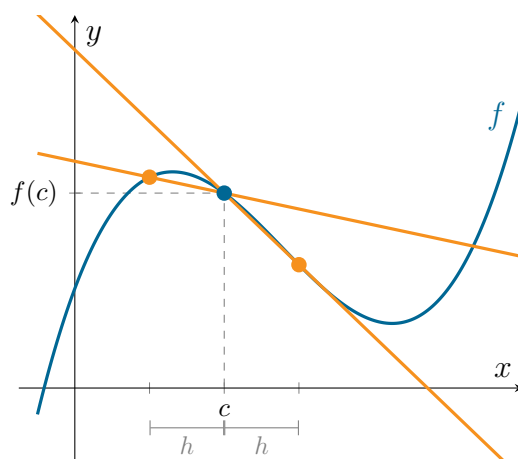
raíz de  $Q$  tal que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe. Entonces  $f$  puede extenderse de forma continua a una nueva función cuyo dominio contenga a  $x_0$ . Pero la regla del cociente no permite calcular  $f'(x_0)$ , ya que  $Q(x_0) = 0$ . Recurrir a la definición para determinar la existencia de la derivada siempre es una opción. Sin embargo, resulta útil contar con algunas herramientas que permitan obtener conclusiones para estas funciones a partir de la aplicación de las reglas conocidas en un entorno de  $x_0$ .

Antes de dar ejemplos que ilustren y aclaren todo esto, recordemos los conceptos involucrados.

Sea  $f$  una función definida en un intervalo  $(a, b)$  y sea  $c \in (a, b)$ . Para definir la derivada de  $f$  en  $x = c$  nos situamos en el punto  $(c, f(c))$  del gráfico de  $f$  y consideramos otro punto  $(c + h, f(c + h))$  perteneciente a él, que estará a la izquierda o a la derecha del primero, según el signo de  $h$ . La pendiente de la recta que une estos dos puntos es

$$m = \frac{f(c + h) - f(c)}{c + h - c} = \frac{f(c + h) - f(c)}{h},$$

cantidad que también se conoce como *cociente incremental*.



Nos preguntamos cómo varía  $m$  cuando el punto  $(c + h, f(c + h))$  se acerca a  $(c, f(c))$ , lo que equivale a analizar el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}.$$

Cuando este límite existe decimos que  $f$  es *derivable* o *diferenciable* en  $x = c$ , y denotamos su valor como  $f'(c)$ . Además, se define la *recta tangente* a la gráfica de  $f$  en el punto  $(c, f(c))$  como la recta con pendiente  $f'(c)$  que pasa por dicho punto.

De la definición de límite sabemos que la existencia de  $f'(c)$  equivale a que los siguientes límites existan y sean iguales:

$$f'(c^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}, \quad f'(c^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}.$$

El primero de ellos se conoce como *derivada lateral por derecha*, y el segundo recibe el nombre de *derivada lateral por izquierda*.

Uno de los primeros resultados importantes que aprendemos luego de conocer el concepto de derivada es que toda función derivable en  $x = c$  es continua allí. Esto es, ser continua en un punto es condición necesaria para ser derivable en él, aunque no suficiente. Un ejemplo típico sobre esto es la función valor absoluto de  $x$ , que presenta una “punta” en  $x = 0$  originada por la diferencia de pendientes con las que llegan las dos rectas ahí. Esta función puede verse como un ejemplo de lo que se conoce como *función definida por tramos*.

En el caso de las funciones que están definidas por tramos de funciones diferenciables, podemos aplicar las reglas para derivar en el interior del dominio de cada tramo. El desafío está en saber si estas funciones se “pegan” bien en los puntos de corte, determinando si la función es o no derivable allí. Por supuesto que si esta resulta discontinua allí, no será derivable. Pero si es continua, todo dependerá de cómo llegan las gráficas de las funciones desde cada lado.

El objetivo de este trabajo es estudiar condiciones necesarias y suficientes que nos permitan obtener conclusiones acerca de la derivabilidad en los puntos de corte de una función definida por tramos, a partir del análisis de los límites laterales de las derivadas correspondientes, así como la relación entre estos valores y las derivadas laterales. También se estudiará el caso en que estos límites son infinitos, y su relación con las cúspides y tangentes verticales.

## §2. Funciones definidas por tramos

Consideremos las funciones

$$g(x) = |x + 1|, \quad p(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & \text{si } x < -1; \\ 2x, & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

Observar que

$$g(x) = \begin{cases} -x - 1, & \text{si } x < -1; \\ x + 1, & \text{si } x \geq -1, \end{cases}$$

por lo que tanto  $g$  como  $p$  son de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \ell(x), & \text{si } x < c; \\ r(x), & \text{si } x \geq c, \end{cases}$$

donde  $\ell$  y  $r$  son funciones diferenciables en  $(-\infty, c)$  y  $(c, \infty)$ , respectivamente. Esto es,

$$f'(x) = \begin{cases} \ell'(x), & \text{si } x < c; \\ r'(x), & \text{si } x > c. \end{cases}$$

El desafío es, entonces, determinar si  $f$  es o no es derivable en  $x = c$ .

El siguiente criterio es uno de los más usados para comenzar a dar respuesta a esto, y su prueba puede encontrarse en la [siguiente sección](#), al igual que las del resto de los resultados.

### Criterio de derivabilidad

Sea  $f$  una función continua en  $(a, b)$  y diferenciable en  $(a, c)$  y en  $(c, b)$ , para algún  $a < c < b$ . Si  $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$  existe, entonces  $f$  es derivable en  $c$  y

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} f'(x).$$

Notar que, con la notación previa, la existencia de  $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$  es equivalente a

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow c^-} \ell'(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} r'(x).$$

Intentemos aplicar este criterio para ver si las funciones  $g$  y  $p$  dadas al inicio de la sección, ambas continuas en todo número real, resultan diferenciables en  $x = -1$ . Puesto que en el interior de cada tramo, esto es, tanto en  $(-\infty, -1)$  como en  $(-1, \infty)$ , nos encontramos con polinomios, podemos aplicar las reglas de derivación para obtener que:

$$g'(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < -1; \\ 1, & \text{si } x > -1, \end{cases} \quad p'(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{si } x < -1; \\ 2, & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g'(x) = -1 \quad \text{pero} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} g'(x) = 1;$$

mientras que para  $p$  tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} p'(x) = 3 \quad \text{pero} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} p'(x) = 2.$$

En este punto resulta importante detenernos y no obtener ninguna conclusión a partir de lo anterior, ya que el criterio de derivabilidad enuncia condiciones suficientes, pero no necesarias.

**Si falla la hipótesis en cualquier implicación verdadera, no podemos concluir de ello que la conclusión no se cumple. Simplemente no podremos aplicar este resultado, y deberemos emplear otro método.**

Para el caso particular del criterio de derivabilidad, si lo que falla es la continuidad de  $f$  en  $x = c$ , entonces podemos concluir que  $f$  no es derivable allí, no por dicho criterio sino porque ser continua es una condición **necesaria** para ser derivable. **Pero si lo que falla es solo (1), entonces no podemos concluir de ello que  $f$  no será derivable en  $x = c$** , ya que esta igualdad (junto con la continuidad) es una condición **suficiente**, pero no necesaria. En efecto, para ver que no es necesaria, analicemos el siguiente ejemplo clásico.

**Ejemplo 1** (La condición (1) no es necesaria). Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0; \\ x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Dejamos como ejercicio para el lector demostrar que  $f$  es una función continua en  $x = 0$ , y ver que

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Entonces, es claro que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ell'(x) = 0 \quad \text{pero} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} r'(x) \text{ no existe.}$$

Sin embargo, la función  $f$  sí es derivable en  $x = 0$ , pues las derivadas laterales existen y coinciden:

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = 0,$$

y

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} 0 = 0,$$

por lo que  $f'(0) = 0$ .

El ejemplo anterior prueba que no deben confundirse los límites laterales

$$L = \lim_{x \rightarrow c^-} \ell'(x) \quad \text{y} \quad R = \lim_{x \rightarrow c^+} r'(x)$$

con las derivadas laterales por izquierda y derecha en  $c$ , respectivamente.

En dicho ejemplo tenemos que  $R$  no existe, pero la derivada lateral por derecha  $f'(0^+)$  sí. También puede ocurrir que  $R$  y  $L$  existan, pero alguna de las derivadas laterales no. Esto puede verse en el siguiente ejemplo que, además, prueba que la condición (1) sola no es suficiente para garantizar la derivabilidad de  $f$  en  $x = c$ . Basta con tomar  $f$  conformada por dos rectas con igual pendiente que no se “peguen” bien en un punto, haciendo  $f$  discontinua allí y, por lo tanto, no derivable.

**Ejemplo 2** (La condición (1) no es suficiente). Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si } x < 0; \\ x + 1, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Entonces

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 0; \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

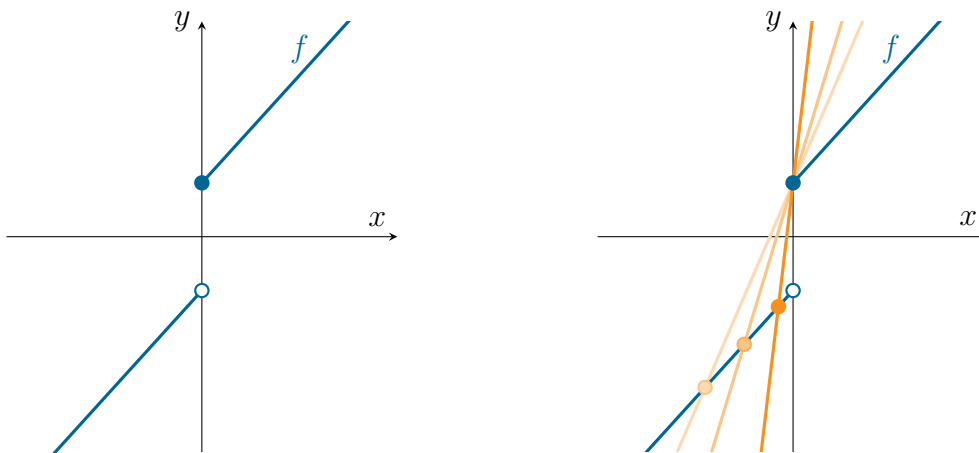
Aunque  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1$ , es claro que  $f$  no es derivable en  $x = 0$  porque es discontinua allí. Esto puede concluirse también calculando las derivadas laterales:

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h + 1 - 1}{h} = 1,$$

pero

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h - 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h - 2}{h} = \infty.$$

Puede resultar interesante “visualizar” geoméricamente este resultado infinito, recordando que la derivada lateral izquierda  $f'(0^-)$  representa la pendiente de la recta a la que tienden las pendientes de las rectas secantes a la gráfica de  $f$  cuando nos acercamos a  $x = 0$  por izquierda:



Como puede verse en el gráfico de la derecha, las rectas secantes son cada vez más verticales a medida que nos acercamos a  $x = 0$  por izquierda, por lo que el límite de sus pendientes es infinito (esto es,  $f'(0^-)$  no existe, aunque  $L = 1$ ). En cambio, si hacemos este proceso por el lado derecho, las rectas secantes son siempre la recta  $y = x + 1$ , lo que se condice con el valor obtenido para  $f'(0^+)$ .

El Ejemplo 1 muestra que la existencia del límite  $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$  no es necesaria para que  $f$  sea derivable en  $x = c$ . Sin embargo, como mencionamos en la introducción, este tipo de funciones tan caóticas no suelen ser las más frecuentes en las aplicaciones. Por el contrario, se parecen más a las funciones  $g$  y  $p$  presentadas al inicio de esta sección en el siguiente sentido: son funciones para las que los límites laterales de la derivada,  $L$  y  $R$ , existen.

Nos preguntamos si disponemos de un criterio que nos dé condiciones suficientes para concluir que una función definida por tramos de este tipo **no** es diferenciable en el punto de corte. Por supuesto, no lo será cuando sea discontinua allí, pero no es el caso de nuestras funciones  $g$  y  $p$ . Para ellas, la respuesta está en el siguiente resultado.

**Criterio de no derivabilidad**

Sea  $f$  una función definida en  $(a, b)$  que es diferenciable tanto en  $(a, c)$  como en  $(c, b)$ , para algún  $a < c < b$ . Si  $L = \lim_{x \rightarrow c^-} f'(x)$  y  $R = \lim_{x \rightarrow c^+} f'(x)$  **existen pero son distintos**, entonces  $f$  no es derivable en  $c$ .

Notar que la función presentada en el Ejemplo 1 no satisface las hipótesis de este último criterio, por lo que no podría aplicarse ni concluirse nada de él. Tampoco aplica para la función del Ejemplo 2. En cambio, las funciones  $g$  y  $p$  del inicio sí lo cumplen, y ahora podemos concluir que ninguna de ellas es diferenciable en  $x = -1$ , sin necesidad de calcular las derivadas laterales.

Sin embargo, aunque ya no debemos hacerlo, en el siguiente ejemplo vamos a calcular estas derivadas laterales con el fin de compararlas con los límites laterales  $R$  y  $L$  de las correspondientes derivadas de los tramos.

**Ejemplo 3** (Cálculo de la derivadas laterales por definición). *Hallemos las derivadas laterales de las funciones*

$$g(x) = \begin{cases} -x - 1, & \text{si } x < -1; \\ x + 1, & \text{si } x \geq -1, \end{cases} \quad y \quad p(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & \text{si } x < -1; \\ 2x, & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

Comencemos calculando por definición las derivadas laterales de  $g$  en  $x = -1$ .

$$g'(-1^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-1+h+1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$

mientras que

$$g'(-1^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1-h-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Entonces el límite bilateral que define a  $g'(-1)$  no existe, por lo que  $g$  no es derivable allí.

Ahora trabajaremos con la función  $p$ . La derivada lateral derecha es

$$p'(-1^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p(-1+h) - p(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2(-1+h) + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h}{h} = 2.$$

Para la derivada lateral izquierda tenemos que

$$p'(-1^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{p(-1+h) - p(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(-1+h)^3 - 1 + 2}{h}.$$

Desarrollando el cubo del binomio obtenemos

$$p'(-1^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^3 - 3h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h^2 - 3h + 3 = 3.$$

Esto prueba que  $p$  no es derivable en  $x = -1$ .

A diferencia de lo que ocurrió en los Ejemplos 1 y 2, para las funciones  $g$  y  $p$  podemos observar que las derivadas laterales son iguales a los límites laterales

de sus correspondientes derivadas. Esto no es coincidencia, sino consecuencia de la existencia de las cantidades involucradas (recordemos que un límite infinito es una de las formas de no existencia del límite). Esto se incluye en el siguiente resultado.

#### Valor de las derivadas laterales

Sea  $f$  una función definida en  $(a, b)$  y sea  $a < c < b$ .

- Si  $f$  es diferenciable en  $(a, c)$  y tanto  $L = \lim_{x \rightarrow c^-} f'(x)$  como  $f'(c^-)$  existen, entonces  $f'(c^-) = L$ .
- Si  $f$  es diferenciable en  $(c, b)$  y tanto  $R = \lim_{x \rightarrow c^+} f'(x)$  como  $f'(c^+)$  existen, entonces  $f'(c^+) = R$ .

### §3. Cúspides y tangentes verticales

Dada una función *continua* en  $x = c$ , hay tres tipos de no derivabilidad que dan a dicho punto un nombre o característica particular: **pico o punto anguloso; punto de cúspide o punto con tangente vertical**.

Cada uno de estos conceptos se define a partir del comportamiento de las derivadas laterales,  $f'(c^-)$  y  $f'(c^+)$ :

- **Punto anguloso:**  $x = c$  es un punto anguloso si las derivadas laterales son ambas finitas pero distintas.
- **Cúspide:** en  $x = c$  hay una cúspide cuando las derivadas laterales son infinitas pero distintas (esto es, con distinto signo).
- **Tangente vertical:** la gráfica de la función tiene una tangente vertical  $x = c$  si las derivadas laterales son ambas infinitas con igual signo.

Sin embargo, en (Salas, Hille, y Etgen, 2006) puede verse una definición diferente para los dos últimos casos, haciendo uso de las cantidades  $L$  y  $R$  que definimos previamente:

$$L = \lim_{x \rightarrow c^-} f'(x) \quad \text{y} \quad R = \lim_{x \rightarrow c^+} f'(x).$$

Por supuesto, además de la continuidad en  $x = c$ , estamos suponiendo que  $f$  es derivable en  $(a, c)$  y  $(c, b)$ , esto es, en algún entorno *reducido*  $E = (a, b) - \{c\}$  de  $c$ .

Con esta notación, en (Salas y cols., 2006) se dice que  $f$  presenta una cúspide en  $x = c$  si

$$L = \infty \quad \text{y} \quad R = -\infty,$$

o si

$$L = -\infty \quad \text{y} \quad R = \infty.$$

Análogamente, se dice que  $f$  tiene una tangente vertical  $x = c$  si

$$L = R = \infty \quad \text{o} \quad L = R = -\infty.$$

¿Serán estas definiciones equivalentes a las primeras?

En la sección anterior vimos que si  $L$  y  $R$  son finitos y las derivadas laterales en  $x = c$  existen, entonces  $L = f'(c^-)$  y  $R = f'(c^+)$ . Esto nos dice que un punto anguloso podría definirse como aquel tal que  $L$  y  $R$  son finitos pero distintos. Entonces resulta natural preguntarnos si podremos hacer lo mismo con las cúspides y tangentes verticales, tal como se hace en (Salas y cols., 2006).

El objetivo de esta sección es responder esta pregunta, para lo que comenzamos presentando un criterio que nos permite determinar si una derivada lateral es infinita a partir del estudio del comportamiento de la derivada en un entorno lateral del punto.

### Condiciones suficientes para derivadas laterales infinitas

Sea  $f$  una función definida en  $(a, b)$ , continua en  $x = c$  y derivable en  $(a, c)$  y  $(c, b)$ . Se tiene que:

- si  $R = \infty$ , entonces  $f'(c^+) = \infty$ ;
- si  $R = -\infty$ , entonces  $f'(c^+) = -\infty$ ;
- si  $L = \infty$ , entonces  $f'(c^-) = \infty$ ;
- si  $L = -\infty$ , entonces  $f'(c^-) = -\infty$ .

En pocas palabras, lo anterior dice que para determinar si el valor de una derivada lateral es infinito (positivo o negativo), es suficiente con analizar el correspondiente límite lateral de la derivada.

Esto nos permite concluir, hasta ahora, que las definiciones dadas en (Salas y cols., 2006) son más fuertes que las clásicas. El siguiente ejemplo prueba que los recíprocos del criterio anterior no siempre valen, por lo que las mismas resultan suficientes pero no necesarias para determinar derivadas laterales infinitas.

**Ejemplo 4.** Consideremos:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} + x \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Queda como ejercicio para el lector ver que  $f$  es continua en  $x = 0$ . Además,

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} + h \cos\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} + \cos\left(\frac{1}{h}\right) \right] = +\infty,$$

ya que  $\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} \rightarrow \infty$  cuando  $h \rightarrow 0$  y  $\cos\left(\frac{1}{h}\right)$  oscila pero se mantiene acotado. Esto prueba que  $f'(0) = \infty$ , lo que implica  $f'(0^+) = \infty$ . Sin embargo, para todo  $x \neq 0$ , por las reglas de derivación tenemos que:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$



Puede verse que  $R = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \neq \infty$  tomando sucesiones

$$a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \quad y \quad b_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n},$$

con  $n \in \mathbb{N}$ . Aquí  $f'(a_n) \rightarrow \infty$  mientras que  $f'(b_n) \rightarrow -\infty$ , por lo que  $R$  no es infinito. Tomando  $n$  entero negativo puede verse que lo mismo ocurre para  $L$ .

Hemos probado que  $f'(c) = \infty$  no implica  $R = \infty$  o  $L = \infty$ .

Se concluye que la definición dada en (Salas y cols., 2006) para cúspides y tangentes verticales no es la adecuada, porque deja fuera funciones como la del ejemplo previo, que tienen una tangente vertical. Sin embargo, resulta útil estudiar los valores de  $L$  y  $R$ , ya que permite detectar puntos de no derivabilidad y clasificarlos en cúspides o tangentes verticales, solo mediante el análisis de la derivada en un entorno reducido del punto, como se ve en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.** Probaremos que  $f(x) = x^{1/3}$  tiene una tangente vertical en  $x = 0$ , mientras que  $g(x) = x^{2/3}$  tiene una cúspide allí, a través del análisis de  $R$  y  $L$  en cada caso. Para ello notemos que, para  $x \neq 0$ , tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \quad y \quad g'(x) = \frac{2}{3x^{1/3}}.$$

Entonces

$$R_f = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \infty \quad y \quad L_f = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \infty,$$

por lo que  $f$  tiene una tangente vertical en  $x = 0$ . Para el caso de  $g$  tenemos

$$R_g = \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = \infty \quad y \quad L_g = \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = -\infty,$$

por lo que  $g$  presenta una cúspide en  $x = 0$ .

#### §4. Prueba de los resultados

*Demostración del criterio de derivabilidad.* Fijemos  $a < c < b$  y sea  $M = \lim_{x \rightarrow c} f'(x)$ . Queremos ver que  $f'(c) = M$ . Recordemos que

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Sea  $h \neq 0$  suficientemente chico, tal que  $c+h \in (a, b)$ . Entonces  $f$  es continua en  $[c, c+h]$  y diferenciable en  $(c, c+h)$  si  $h > 0$ , o respectivamente en  $[c+h, c]$  y  $(c+h, c)$  si  $h < 0$ . Por el teorema del valor medio existe  $x_h$  entre  $c$  y  $c+h$  tal que

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(x_h).$$

Cuando  $h$  tiende a cero,  $c+h$  tiende a  $c$ , por lo que  $x_h$  tiende a  $c$ . Esto es,  $x_h \rightarrow c$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Así, tal como queríamos ver, tenemos que

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f'(x_h) = \lim_{x_h \rightarrow c} f'(x_h) = M. \quad \square$$

Antes de probar el criterio de no derivabilidad, demos-tremos el resultado sobre el valor de las derivadas laterales.

*Demostración del valor de las derivadas laterales.* Haremos la prueba para la aproximación por el lado derecho, ya que la otra es análoga. Fijemos  $a < c < b$ , y supongamos entonces que existen los límites:

$$R = \lim_{x \rightarrow c^+} f'(x) \quad \text{y} \quad f'(c^+) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Fijemos  $x \in (c, b)$ . Por ser  $f$  derivable en  $(c, b)$ , se deduce que es continua en  $(c, x]$  y derivable en  $(c, x)$ . Además, el hecho de existir  $f'(c^+)$  implica que  $f$  es continua por derecha en  $x = c$  ya que, para cada  $h > 0$  pequeño, se tiene que

$$f(c + h) - f(c) = \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \cdot h,$$

por lo que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} [f(c + h) - f(c)] = f'(c^+) \cdot 0 = 0.$$

Así, podemos asegurar que  $f$  es continua en  $[c, x]$  y derivable en  $(c, x)$ . Por el teorema del valor medio, existe  $r_x \in (c, x)$  tal que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(r_x).$$

Además,  $r_x \rightarrow c^+$  cuando  $x \rightarrow c^+$ . Así,

$$f'(c^+) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^+} f'(r_x) = \lim_{r_x \rightarrow c^+} f'(r_x) = R,$$

como queríamos ver. □

*Demostración del criterio de no derivabilidad.* Sean

$$L = \lim_{x \rightarrow c^-} f'(x) \quad \text{y} \quad R = \lim_{x \rightarrow c^+} f'(x).$$

Sabemos que ambos existen y son distintos. Supongamos que  $f$  es derivable en  $x = c$ . Esto es, las derivadas laterales en  $x = c$  existen y coinciden:

$$f'(c^+) = f'(c^-).$$

Por el resultado demostrado previamente, tenemos que

$$R = f'(c^+) = f'(c^-) = L,$$

lo que contradice la hipótesis. Así,  $f'(c)$  no puede existir. □

*Demostración del criterio sobre condiciones suficientes para derivadas laterales infinitas.*

Probaremos solo el primer inciso, ya que los restantes son análogos. Supongamos entonces que  $R = \infty$ , esto es,  $\lim_{x \rightarrow c^+} f'(x) = \infty$ . Queremos ver que también

$f'(c^+) = \infty$ , es decir,

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \infty.$$

Para ello fijemos  $M > 0$ . Sea  $\delta > 0$  tal que si  $c < \eta < c + \delta \leq b$  entonces  $f'(\eta) > M$ , cuya existencia está garantizada porque  $R = \infty$ .

Como  $f$  es continua en  $[c, c + \delta]$  y derivable en  $(c, c + \delta)$ , sabemos que para cada  $c < x < c + \delta$  existe  $\eta_x$  en  $(c, x)$  tal que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\eta_x).$$

Así, si  $c < x < c + \delta$ , entonces

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > M,$$

lo que prueba (2). □

### §5. Conclusiones

Dada una función definida por tramos

$$f(x) = \begin{cases} \ell(x), & \text{si } x < c; \\ r(x), & \text{si } x \geq c, \end{cases}$$

donde  $\ell$  y  $r$  son funciones diferenciables en  $(-\infty, c)$  y  $(c, \infty)$ , respectivamente, nos planteamos poder determinar si  $f'(c)$  existe o no. Si  $f$  es discontinua en  $x = c$ , podemos concluir que no es derivable allí, por lo que el caso interesante es cuando sí es continua. Los resultados presentados permiten caracterizar cuándo una función así es derivable en  $x = c$ . Más precisamente, podemos resumir lo obtenido en el siguiente resultado.

#### Criterio para funciones continuas

Sea  $f$  una función continua en  $(a, b)$  y diferenciable en  $(a, c)$  y en  $(c, b)$ , para algún  $a < c < b$ . Supongamos que  $L = \lim_{x \rightarrow c^-} f'(x)$  y  $R = \lim_{x \rightarrow c^+} f'(x)$  existen. Entonces  $f$  es diferenciable en  $c$  si y solo si  $L = R$ . En caso de darse la igualdad,  $f'(c) = L = R$ .

En el Ejemplo 1 vimos la importancia de la existencia de  $L$  y  $R$ . Además, tanto allí como en el Ejemplo 2, observamos que no siempre se cumple que  $L = f'(c^-)$  y  $R = f'(c^+)$ , pero probamos que sí valen estas igualdades cuando todas las cantidades involucradas existen.

Así, si una función es continua en  $x = c$ , el estudio de los límites laterales de las derivadas,  $L$  y  $R$ , nos permite obtener conclusiones sobre la derivabilidad o el tipo de no derivabilidad de la función:

- $L$  y  $R$  finitos e iguales: derivable;
- $L$  y  $R$  finitos y distintos: punto anguloso;
- $L$  y  $R$  ambos infinitos con igual signo: tangente vertical;
- $L$  y  $R$  ambos infinitos con distinto signo: cúspide.

Los Ejemplos 1 y 4 prueban que no se puede concluir nada acerca de las derivadas laterales cuando  $L$  o  $R$  no existen por oscilación.

### Bibliografía

Salas, S., Hille, E., y Etgen, G. (2006). *Calculus. Una y varias variables* (Vol. 1). Ed. Reverté.

MARILINA CARENA

CONICET - Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (UNL)

(✉) [marilcarena@gmail.com](mailto:marilcarena@gmail.com)

---

Recibido: 21 de junio de 2024.

Aceptado: 12 de diciembre de 2024.

Publicado en línea: 20 de diciembre de 2024.

---

---

## Sección de Problemas

✉ por *Diego A. Sulca*

---

En esta edición vamos a explorar una de las series numéricas más famosas, la serie armónica. En general, dada una sucesión de números racionales o reales positivos  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , en matemática podemos darle sentido a la suma de todos estos términos. Para ello calculamos las denominadas sumas parciales

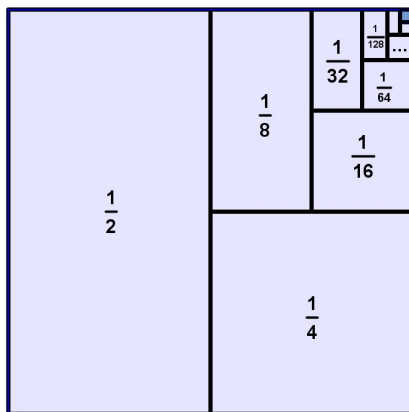
$$a_1, \quad a_1 + a_2, \quad a_1 + a_2 + a_3, \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad \dots$$

Notar que a medida que agregamos más términos el resultado se hace cada vez más grande, pues estamos asumiendo que todos los números  $a_1, a_2, a_3, \dots$  son positivos. La suma total  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  es el número al cual se aproximan cada vez más estas sumas parciales. Si por el contrario estos resultados parciales eventualmente superan cualquier barrera o cota que le pongamos, entonces se dice que la suma es infinita.

Por ejemplo,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = 1$$

En efecto, si  $S_n$  denota la suma de los primeros  $n$  términos entonces  $2S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$ , por lo que  $S_n = 2S_n - S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ . A medida que  $n$  avanza, el número  $\frac{1}{2^n}$  se hace cada vez más cercano a cero, y por lo tanto  $S_n$  se apega cada vez más y más a 1. Una forma geométrica de llegar al mismo resultado es cubriendo el área de un cuadrado de lado 1 con rectángulos de áreas  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ , tal como se muestra en la siguiente figura:



Por otro lado, si sumamos  $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$  el resultado será sin lugar a dudas infinito. En el primer ejemplo los números que vamos agregando,  $\frac{1}{2^n}$ , se vuelven cada vez más pequeños, próximos a cero. Nos podríamos preguntar si hay ejemplos de sucesiones  $a_1, a_2, a_3, \dots$  de términos que se aproximan a cero tal que  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \infty$ . La respuesta es que hay muchísimos y muy interesantes. El ejemplo más destacado y que vamos a explorar en esta serie de problemas es la llamada *serie armónica*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$


---

**Problema 1.** Mostrar las siguientes desigualdades

- (a)  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} \leq n$ .
- (b)  $1 + \frac{n}{2} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} + \frac{1}{2^n}$

(Ayuda: en (a), sumar agrupando los términos  $\frac{1}{2^{k-1}} + \dots + \frac{1}{2^k - 1}$ . Hacer algo similar en (b))

**Problema 2.**

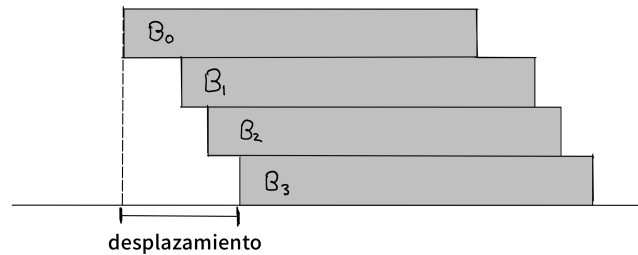
(a) Mostrar que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \infty.$$

- (b) Sin embargo, la práctica puede indicarnos lo contrario. Sea  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$ . Este número es un número racional, es decir, una fracción. La fracción  $S_{n+1}$  se obtiene sumando las fracciones  $S_n$  y  $\frac{1}{n+1}$ . Supongamos que hacer esta suma nos lleva 5 segundos. Mostrar que podríamos estar 100 años sumando sin parar y aún así  $S_n$  no podría superar 30.
- (c) Suponiendo que a una computadora le lleva 1 nanosegundo ( $= 10^{-9}$  segundos) sumar  $S_n + \frac{1}{n+1}$ , mostrar que incluso trabajando de manera ininterrumpida durante 100 años, no podría lograr que  $S_n$  supere 63.

**Problema 3.** (La escalera al cielo) Imaginen que tienen  $n$  bloques rectangulares del mismo tamaño y peso, por ejemplo, con dimensiones de  $30 \text{ cm} \times 15 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ . Queremos apilar estos bloques, uno sobre otro, con un desplazamiento hacia un mismo lado en cada nivel, formando una especie de escalera. Cada bloque deberá estar ligeramente desplazado respecto al bloque que está debajo, de manera que el bloque superior se extiende un poco más allá del bloque inferior. En la imagen

se muestra un ejemplo de 4 bloques apilados (el modo de nombrar a los bloques puede ser una ayuda para el problema a resolver).



¿Cuál es el desplazamiento máximo que se puede lograr (sin que la escalera se caiga)?

Es importante empezar analizando la situación con 3 o 4 bloques para entender mejor el problema. A continuación escribo mi sugerencia para el caso general, pero preferiría que no la leyeran, al menos en el primer intento.

Sea  $r$  la mitad del largo de un bloque.

(a) Sea  $S_i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{i}$ . Probar para todo  $i \geq 2$  que

$$S_1 + S_2 + \dots + S_{i-1} = iS_{i-1} - (i-1).$$

(b) Supongamos que hemos apilado los  $n$  bloques formando una escalera estable. Ponemos un eje de coordenadas  $x$  en la base. Llamamos a los bloques  $B_0, \dots, B_{n-1}$  desde arriba hacia abajo. Hacemos que la coordenada  $x$  del extremo izquierdo del bloque  $B_0$  sea igual a 0. Llamamos luego  $x_i$  a la coordenada  $x$  del extremo izquierdo del bloque  $B_i$ . Con esta notación,  $x_0 = 0$  y el desplazamiento de la escalera es  $x_{n-1}$ . Usando argumentos sobre la posición del centro de masa de los bloques  $B_0, \dots, B_{i-1}$  respecto del bloque  $B_i$ , probar que  $x_i \leq r + \frac{x_0 + \dots + x_{i-1}}{i}$  para todo  $1 \leq i \leq n-1$ .

(c) Probar que  $x_i \leq rS_i$  para todo  $i = 1, \dots, n-1$ . En particular, el desplazamiento para esta escalera es  $\leq rS_{n-1}$ .

(d) Dar una escalera de  $n$  bloques con desplazamiento igual a  $rS_{n-1}$ .

## SOLUCIONES

## Solución 1.

- (a) Notar que la suma  $\frac{1}{2^{k-1}} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}$  tiene  $2^{k-1}$  términos todos menores o iguales que  $\frac{1}{2^{k-1}}$ , por lo tanto es menor o igual a 1. La suma en (a) se compone de  $n$  de estos bloques, a decir,  $1, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$ ; por lo tanto es menor o igual a la suma de  $n$  unos, es decir,  $n$ .
- (b) La suma  $\frac{1}{2^{k-1+1}} + \dots + \frac{1}{2^k}$  tiene  $2^{k-1}$  términos todos mayores o iguales a  $\frac{1}{2^k}$ , por lo tanto es mayor o igual a  $\frac{1}{2}$ . La suma en (b) se compone de 1 and  $n$  de estos bloques, a decir,  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^{n-1+1}} + \dots + \frac{1}{2^n}$ , por lo tanto es mayor o igual que 1 más  $n$  veces  $\frac{1}{2}$ , es decir,  $1 + \frac{n}{2}$ .

## Solución 2.

- (a) Para superar un número  $N$  primero elegimos  $n$  tal que  $1 + \frac{n}{2} \geq N$ ; luego, por (b) del Problema 1, la suma  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n}$  supera a  $N$ . Por lo tanto las sumas parciales superan eventualmente a cualquier número positivo  $N$ , y esto quiere decir que la suma total da infinito.
- (b) (y (c)) Supongamos que calcular  $S_n + \frac{1}{n+1}$  lleva  $t$  segundos. Luego, calcular  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$  lleva  $(2^n - 2)t$  segundos. Por (a) del Problema 1, en  $(2^n - 2)t$  segundos la suma parcial todavía no supera a  $n$ .

El número de segundos en 100 años es menor que  $100 \cdot 400 \cdot 24 \cdot 60^2 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2^4 \cdot 5^2 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^4 = 2^{13} \cdot 5^6 \cdot 3^3 = 2^{13} \cdot 5^3 \cdot 5^3 \cdot 3^3 \leq 2^{13} \cdot 2^7 \cdot 2^7 \cdot 2^5 = 2^{32}$ .

Supongamos  $t = 5$ , es decir, sumamos dos fracciones en 5 segundos. Como claramente  $2^{32} \leq (2^{30} - 2)5$ , en 100 años la suma no supera a 30.

Supongamos ahora que  $t = 10^{-9}$ . Notar que  $2^{32} \cdot 10^9 = 2^{32} \cdot 2^9 \cdot 5^9 = 2^{41} (5^3)^3 \leq 2^{41} \cdot (2^7)^3 = 2^{62} < 2^{63} - 2$ . Luego  $2^{32} \leq (2^{63} - 2)t$ , por lo que en 100 años la suma parcial no supera a 63.

## Solución 3.



(a)

$$\begin{aligned}
S_1 + \cdots + S_{i-1} &= S_{i-1} + S_{i-2} + \cdots + S_1 + 0 \\
&= S_{i-1} + S_{i-1} - \frac{1}{i-1} + S_{i-1} - \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i-2} + \cdots + \\
&+ S_{i-1} - \frac{1}{i-1} - \cdots - \frac{1}{2} + S_{i-1} - \frac{1}{i-1} - \cdots - \frac{1}{2} - \frac{1}{1} \\
&= iS_{i-1} - (i-1)\frac{1}{i-1} - (i-2)\frac{1}{i-2} - \cdots - 2\frac{1}{2} - 1 \\
&= iS_{i-1} - (i-1)
\end{aligned}$$

(b) La condición para que la escalera no se caiga es que el centro de masa de  $B_0$  debe estar sobre el bloque  $B_1$ , y por lo tanto su coordenada  $x$  debe ser mayor o igual que  $x_1$ ; el centro de masa de  $B_0$  y  $B_1$  debe estar sobre el bloque  $B_2$ , y por lo tanto su coordenada  $x$  debe ser mayor o igual que  $x_2$ ; y en general, el centro de masa de  $B_0, B_1, \dots, B_{i-1}$  debe estar sobre el bloque  $B_i$ , y por lo tanto su coordenada  $x$  debe ser mayor o igual que  $x_i$ , para todo  $1 \leq i \leq n-1$ .

Ahora bien, la coordenada  $x$  del centro de masa de  $B_0, B_1, \dots, B_{i-1}$  es el promedio de las coordenadas  $x$  de los centros de masas de los bloques, es decir

$$\frac{(x_0 + r) + (x_1 + r) + (x_2 + r) + \cdots + (x_{i-1} + r)}{i}.$$

Por lo tanto, la condición del párrafo anterior se traduce en

$$x_i \leq \frac{(x_0 + r) + (x_1 + r) + (x_2 + r) + \cdots + (x_{i-1} + r)}{i} = r + \frac{x_0 + \cdots + x_{i-1}}{i}$$

para todo  $i = 1, \dots, n-1$ .

(c) Recordemos que  $x_0 = 0$ . De lo anterior sale que  $x_1 \leq r = rS_1$ . Sea  $1 < i \leq n-1$ , y supongamos que ya hemos probado que

$$(1.1) \quad x_k \leq rS_k$$

para  $k = 1, \dots, i-1$ . El siguiente argumento muestra que lo mismo vale para  $k = i$ . En efecto, por (b), (1.1) y (a) tenemos

$$x_i \leq r + \frac{x_1 + \cdots + x_{i-1}}{i} \leq r + \frac{r(S_1 + \cdots + S_{i-1})}{i} = r + \frac{r(iS_{i-1} - (i-1))}{i} = rS_i$$

Luego podemos decir que la igualdad es válida para todo  $i = 1, \dots, n-1$ . En particular, el desplazamiento total es a lo sumo  $rS_{n-1}$ .

(d) Ubicando los bloques  $B_0, \dots, B_{n-1}$  de modo que  $x_i = rS_i$  para todo  $i$ , es fácil ver que el centro de masa de  $B_0, \dots, B_{i-1}$  queda exactamente sobre el extremo izquierdo de  $B_i$ . Por lo tanto, esta escalera es estable con desplazamiento  $rS_{n-1}$ .