

Revista de Educación Matemática

Consejo Editorial

Editor Ejecutivo

Leandro Cagliero, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Editores Asociados

Juan Carlos Pedraza, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Mónica Villarreal, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Comité Editorial

Abraham Arcavi, Weizmann Institute of Science, Israel

Antonio Cafure, Universidad Nacional de General Sarmiento - CONICET, Argentina

Carlos D'Andrea, Universitat de Barcelona, España

Rocío Díaz Martín, Vanderbilt University, Estados Unidos

Cristina Esteley, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

José Nicolás Gerez Cuevas, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

Susana Paula Graça Carreira, Universidade do Algarve, Portugal

Patricio Herbst, Universidad de Michigan, Estados Unidos

Teresa Krick, Universidad de Buenos Aires - CONICET, Argentina

Ricardo Podestá, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Nélia Maria Pontes Amado, Universidade do Algarve, Portugal

Juan Pablo Rossetti, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Gabriel Rubén Soto, Fac. de Ingeniería, U. Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Argentina

Jhony Alexander Villa-Ochoa, Universidad de Antioquia, Colombia

Registro Nacional de la Propiedad Intelectual N° 168024

ISSN 0326-8780 (versión impresa)

ISSN 1852-2890 (en línea)

Página web: <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index>

Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

Revista de Educación Matemática

Volumen 39, N° 2 – 2024

ÍNDICE

ARTÍCULOS

- **LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN CÚBICA**
Marilina Carena y Ricardo Toledano 5
- **ALGUNAS CONTRIBUCIONES DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y EL USO DE LA TECNOLOGÍA AL PENSAMIENTO MATEMÁTICO: EXPERIENCIA DE AULA CON ALUMNOS UNIVERSITARIOS DE PRIMER AÑO**
Noelia Londoño Millán, José David Zaldívar Rojas y Miguel Vertiz Álvarez . 18
- **LAS PROPIEDADES ÚNICAS DEL 73**
Ricardo A. Podestá 37
- **COMPAÑERO DEL ALMA (SEMBLANZA DE JUAN CARLOS PEDRAZA)**
Carlos Borches 81

SECCIONES FIJAS

- **¿Sabías que...?**
por Leandro Cagliero y Ricardo Podestá 74
 - **Sección de Problemas**
por Diego Sulca 83
-

LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN CÚBICA

Marilina Carena - Ricardo Toledano

RESUMEN. Motivados por la pregunta de un alumno de primer año de universidad, determinamos cuándo la función cúbica $f(x) = x^3 + ax$, donde a es un número real, es biyectiva en su dominio. Para ello utilizamos algunos resultados básicos del cálculo y, con la ayuda de la resolvente de la ecuación cúbica $x^3 + mx = n$ hallada por Cardano a mediados del siglo XVI, encontramos una expresión explícita para la función inversa de f .

ABSTRACT. Motivated by a question asked by an undergraduate student we determine when the cubic function $f(x) = x^3 + ax$, with a being a real number, is bijective in its domain. For this purpose we use some basic results from calculus and by using a formula for the solution of the cubic equation $x^3 + mx = n$ found by Cardano in the 16th century, we find an explicit expression for the inverse function of f .

Introducción

Este trabajo tiene su origen en la pregunta realizada por un estudiante de primer año de una carrera de ingeniería, quien se planteó cuál sería la inversa de una función obtenida al modificar levemente una de las propuestas. La función en cuestión era $f(x) = x^3 + x$. Antes había logrado encontrar una expresión para la inversa de funciones polinómicas de grado 1 y 2, y de funciones cúbicas del tipo $g(x) = ax^3 + b$, por lo que resultó completamente natural preguntarse por la inversa de la función mencionada. Solamente se dimensiona la dificultad en este planteo si se conoce la inmensa tarea llevada a cabo por Scipiano del Ferro, Tartaglia y Cardano durante el siglo XVI para arribar a la resolución de ecuaciones cúbicas.

El objetivo de este trabajo es, justamente, poder acercar este contenido en un lenguaje accesible para alumnos de los primeros años de carreras de grado que contienen matemática, mostrando las dificultades que se presentan.

Palabras clave: Función inversa, polinomio cúbico, raíces.

Keywords: Inverse function, cubic polynomial function, roots.

Recordemos que, dada una función $f: A \rightarrow B$, en ciertas ocasiones es posible hallar otra función $g: B \rightarrow A$ que satisfaga

$$g(f(x)) = x \quad \text{y} \quad f(g(y)) = y,$$

para todo $x \in A$ y todo $y \in B$. Si esto ocurre, g es llamada *inversa* de f , es denotada como f^{-1} y puede probarse que es única.

Es bien conocido que una condición necesaria y suficiente para garantizar la existencia de inversa de una función f , es que esta sea biyectiva. Además, las gráficas de las funciones f y f^{-1} resultan simétricas con respecto a la recta $y = x$.

Una vez probado que una función es biyectiva, una técnica clásica para hallar inversas utilizada en la escuela secundaria, o en los primeros años de carreras de grado, consiste en intercambiar los roles de x e y , y despejar luego y . Por ejemplo, para hallar la inversa de la función biyectiva $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 1$, intercambiamos los roles de x e y en la igualdad $y = 2x - 1$ para obtener

$$x = 2y + 1.$$

De esta igualdad despejamos $y = \frac{1}{2}(x - 1)$, y esta es la regla para la función f^{-1} .

Para la función cuadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ ya debemos tener cuidado, porque será necesario restringir el dominio para que resulte inyectiva. Por ejemplo, consideremos a $[0, \infty)$ como dominio. Así, puesto que de $x = y^2$ se obtiene que $|y| = \sqrt{x}$, la función inversa f^{-1} está dada por

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

para $x \in [0, \infty)$. Si, en cambio, hubiéramos restringido el dominio al intervalo $(-\infty, 0]$, llegaríamos a

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$$

para $x \in [0, \infty)$. Por convención, se considera $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ y a $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ como su inversa.

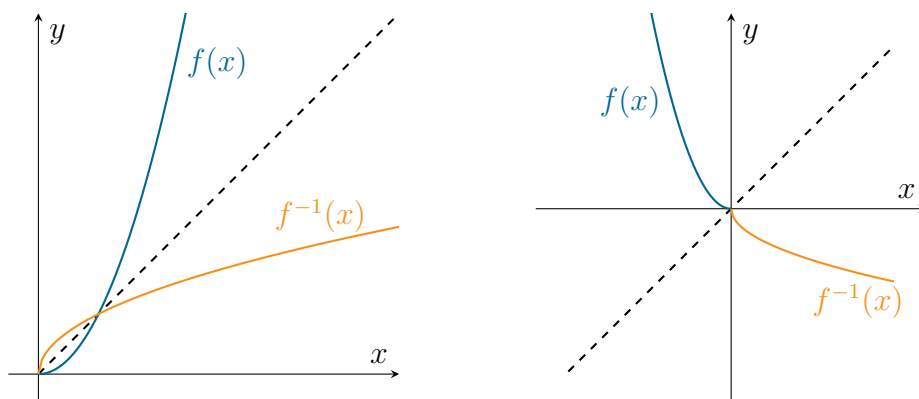


FIGURA 1. Inversa de $f(x) = x^2$, según la restricción de su dominio.

La función $f(x) = x^3$ no presenta esta complicación ya que resulta inyectiva en todo \mathbb{R} , y su inversa es $f^{-1} = \sqrt[3]{x}$.

Es sencillo también considerar funciones cuadráticas más complejas, como por ejemplo $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$. Con el fin de hallar su inversa, completamos cuadrados para obtener $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$, por lo que podremos restringir su dominio al intervalo $[1, \infty)$ para que resulte inyectiva, y así obtener su inversa definida como

$$(1) \quad f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-3}{2}} + 1,$$

para todo $x \geq 3$ (notar que, justamente, $[3, +\infty)$ es la imagen de f).

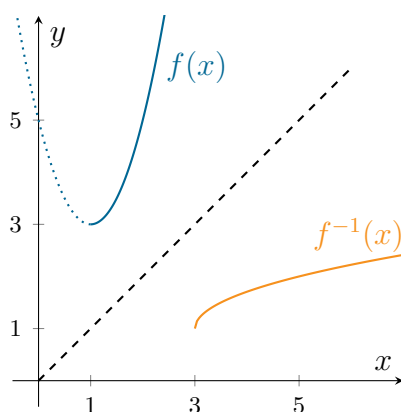


FIGURA 2. Inversa de $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$.

El hecho que la función $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ resulta inyectiva, que puede conjeturarse desde el gráfico de la Figura 2, se demuestra analíticamente de forma sencilla: si suponemos $f(x_1) = f(x_2)$, entonces

$$2(x_1 - 1)^2 + 3 = 2(x_2 - 1)^2 + 3,$$

lo que equivale a $|x_1 - 1| = |x_2 - 1|$. Esto implica $x_1 = x_2$, siempre que $x_1, x_2 \geq 1$.

La situación ya no es tan sencilla si consideramos una función polinómica de grado 3, que no sea tan simple como $f(x) = x^3 + c$. ¿Será posible obtener una expresión como la dada en (1) para la inversa de una función cúbica cualquiera? Lo expresado en (1) puede hacerse de forma general mediante la conocida regla de la resolvente, que se obtiene completando cuadrados como se hizo en el ejemplo. ¿Hay una regla como la de la resolvente para ecuaciones polinomiales de grado 3?

Teniendo en cuenta el éxito obtenido en el caso cuadrático, resulta natural preguntarse si es posible hallar una expresión para la inversa de funciones polinomiales (en un intervalo donde estas resulten inyectivas) que involucre solamente a los coeficientes de los polinomios junto a las operaciones de suma, resta, producto, división y la extracción de raíces cuadradas, cúbicas, etc.

En este artículo veremos que ya para $n = 3$ esta no es una tarea sencilla. Más precisamente, abordaremos el caso particular de una función tan simple como la definida por $f(x) = x^3 + ax$, con $a \in \mathbb{R}$, y veremos cómo y cuándo podemos hallar una expresión para f^{-1} aplicando la resolvente de una cúbica de la forma $x^3 + mx = n$, con m y n enteros, descubierta inicialmente por el matemático italiano Scipione del Ferro en el año 1515 y redescubierta años más tarde por los matemáticos italianos Nicolo Fontana (más conocido como Tartaglia) y Girolamo Cardano. Esta resolvente involucra raíces cuadradas y cúbicas, junto con operaciones de suma, resta, multiplicación y división, que es uno de nuestros requisitos. Haremos un recorrido por el método hasta llegar a una expresión para la inversa f^{-1} y, luego, veremos las opciones para trabajar con funciones cúbicas completas.

Una función cúbica particular

Como mencionamos previamente, para $a \in \mathbb{R}$ vamos a considerar la función cúbica $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^3 + ax$, e investigar cuándo esta función es biyectiva para, luego, hallar una expresión explícita de su inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ utilizando el método desarrollado por Tartaglia y Cardano en el siglo XVI para hallar la resolvente de la ecuación $x^3 + mx = n$.

Notemos primero que si $a < 0$ entonces f no es inyectiva en \mathbb{R} : en este caso podemos escribir $a = -b$ con $b > 0$, y así factorizar a f como producto de polinomios lineales con coeficientes reales

$$f(x) = x(x^2 + a) = x(x^2 - b) = x(x - \sqrt{b})(x + \sqrt{b}).$$

Esta factorización nos dice, en este caso, hay tres números reales distintos que tienen la misma imagen por f , esto es

$$0 = f(0) = f(\sqrt{b}) = f(-\sqrt{b})$$

y, en consecuencia, f no es inyectiva cuando $a < 0$. Veamos ahora que f es inyectiva en \mathbb{R} cuando $a \geq 0$. Para ver esto, utilizaremos algunos resultados básicos del cálculo diferencial de funciones reales de una variable. Antes que nada, recordemos que una función f es *estrictamente creciente* en un intervalo I si para cada par de elementos $x_1 < x_2$ de I se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$. Una función estrictamente creciente en un intervalo I es necesariamente inyectiva en I pues, si no lo fuese, habría dos elementos distintos x_1 y x_2 en I tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Pero al ser elementos distintos ocurre que o bien $x_1 < x_2$ o bien $x_2 < x_1$, con lo cual o bien $f(x_1) < f(x_2)$ o bien $f(x_2) < f(x_1)$, contradiciendo que $f(x_1) = f(x_2)$.

Veamos que $f(x) = x^3 + ax$ es estrictamente creciente en \mathbb{R} cuando $a \geq 0$. Para ello fijemos dos números reales cualesquiera $x_1 < x_2$. Por un lado es claro que $ax_1 \leq ax_2$. Además, recordemos que $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$, y que este

último factor es positivo para todo u y v que no sean ambos nulos, puesto que

$$0 \leq (u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv,$$

lo que implica

$$u^2 + v^2 > \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \geq -uv.$$

Entonces

$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) < 0,$$

de lo que se concluye que $x_1^3 < x_2^3$. Así

$$f(x_1) = x_1^3 + ax_1 < x_2^3 + ax_2 = f(x_2).$$

De esta manera queda demostrado que $f(x) = x^3 + ax$ es estrictamente creciente en \mathbb{R} cuando $a \geq 0$ y es, por lo tanto, inyectiva en \mathbb{R} .

Para el lector familiarizado con los resultados básicos del cálculo diferencial, el crecimiento de f en \mathbb{R} también puede deducirse a partir del signo positivo de la derivada de f en $\mathbb{R} - \{0\}$, más el hecho que $f(x) < 0$ para $x < 0$, $f(0) = 0$ y $f(x) > 0$ cuando $x > 0$.

Recordando que $f(x) = x^3 + ax$ no es inyectiva cuando $a < 0$, vemos que hemos demostrado en realidad que $f(x) = x^3 + ax$ es inyectiva en \mathbb{R} si y solo si $a \geq 0$.

Resta verificar que $f(x) = x^3 + ax$ es sobreyectiva como función de \mathbb{R} en \mathbb{R} . La sobreyectividad de f se cumple para todo $a \in \mathbb{R}$, pero es más sencilla la argumentación cuando $a \geq 0$, que es el caso que nos interesa pues ya vimos que f no es inyectiva cuando $a < 0$. Por lo tanto supondremos que $a \geq 0$ y, con esta condición, tenemos que demostrar que para cada $c \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$, es decir que para cada $c \in \mathbb{R}$ la ecuación

$$(2) \quad x^3 + ax = c.$$

tiene solución en \mathbb{R} .

A partir de los gráficos de nuestra función cúbica f con valores concretos del parámetro $a \geq 0$, se puede conjeturar que, efectivamente, la ecuación (2) siempre tiene solución para cada $c \in \mathbb{R}$ ya que esto significa, geométricamente, que la gráficas de f y la de la recta horizontal $y = c$ tienen un punto en común. Esto parece que siempre va a ocurrir debido a que $f(x) = x^3 + ax$ es estrictamente creciente cuando $a \geq 0$, como se observa en el gráfico contenido en la Figura 3.

Pero que una función sea estrictamente creciente en todo \mathbb{R} no significa que su gráfica tenga un punto en común con cualquier recta horizontal. Por ejemplo la función $f(x) = \arctan(x)$ (la inversa de $y = \tan(x)$ en $(-\pi/2, \pi/2)$) es estrictamente creciente en todo \mathbb{R} pero su gráfica nunca se cruza con las rectas horizontales de ecuación $y = c$, con c fuera de $(-\pi/2, \pi/2)$ (ver Figura 4).

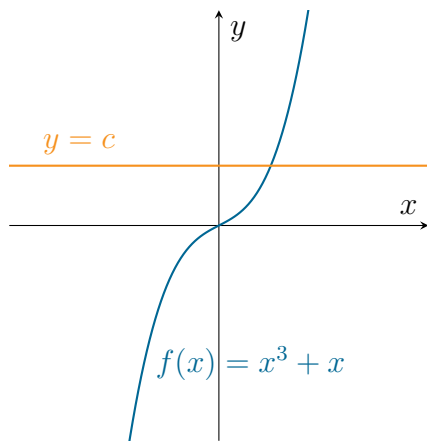


FIGURA 3

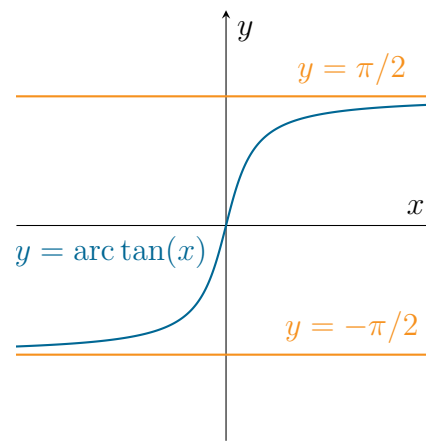


FIGURA 4

Nuestra tarea es, por lo tanto, hallar una manera rigurosa de probar que la ecuación (2) tiene solución para todo $c \in \mathbb{R}$ más allá de la “evidencia” aportada por las gráficas. Notemos que resolver (2) para un valor dado $y \in \mathbb{R}$ equivale a demostrar que la función

$$F(x) = x^3 + ax - c$$

tiene una raíz real para cada número real c fijo, pues vemos inmediatamente que tener $F(x_0) = 0$ equivale a que x_0 es una solución de (2). Con este punto de vista podemos usar las herramientas del Cálculo para funciones reales de una variable. Más precisamente, usaremos el teorema de Bolzano el cual establece que si $g(x)$ es una función continua en un intervalo $[a, b]$ tal que $g(a)$ y $g(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = 0$ (ver, por ejemplo, el Teorema 1 del Capítulo 7 de (Spivak, 1998)). Antes de utilizar el teorema de Bolzano vemos que si $a = 0$ o $c = 0$ es sencillo verificar que (2) tiene solución: si $a = 0$ entonces $x = \sqrt[3]{y}$ es solución de (2) mientras que si $c = 0$ entonces $x = 0$ es solución de (2). Podemos suponer entonces que $a > 0$ y que $c \neq 0$. Evaluando $F(x)$ en $x = c/a$ y en $x = -c/a$ vemos que

$$F\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{c^3}{a^3} \quad \text{y} \quad F\left(-\frac{c}{a}\right) = -\frac{c^3}{a^3} - 2c = -\left(\frac{c^3}{a^3} + 2c\right).$$

Así, cuando $c > 0$ tenemos que $F(c/a) > 0$ y $F(-c/a) < 0$, mientras que si $c < 0$ tenemos que $F(c/a) < 0$ y $F(-c/a) > 0$. Por ser F continua en todo \mathbb{R} vemos que, en particular, $F(x)$ es continua en el intervalo $[-c/a, c/a]$ si $c > 0$ o en el intervalo $[c/a, -c/a]$ si $c < 0$. Todo esto nos dice que estamos en las condiciones del teorema de Bolzano, con lo cual podemos asegurar que existe $x_0 \in [-c/a, c/a]$ si $c > 0$ o $x_0 \in [c/a, -c/a]$ si $c < 0$ tal que $F(x_0) = 0$. Como ya vimos antes, esto equivale a decir que x_0 es solución de (2). Hemos demostrado de esta manera que si $a \geq 0$ la función $f(x) = x^3 + ax$ es biyectiva como función de \mathbb{R} en \mathbb{R} .

Esto asegura la existencia de la función inversa de f en este caso pero, ahora, nos interesa saber si podemos hallar una expresión concreta para $f^{-1}(x)$. Tal como

vimos en la Introducción, esto se puede conseguir “despejando” x de la ecuación $x^3 + ax = y$ en función de y . Este es el objetivo de la siguiente sección, y se abordará en base al estudio de la resolvente de la ecuación $x^3 + mx = n$ para m y n enteros, realizado por Scipiano del Ferro, Tartaglia y Cardano en el siglo XVI. Para esta parte nos basaremos fundamentalmente en lo expuesto en el Capítulo 2 del excelente libro (Tignol, 2016), trabajo que también contiene una gran cantidad de referencias históricas que hemos incluido en este texto.

Ecuaciones cúbicas particulares

Antes del siglo XV se consideraba imposible resolver ciertas ecuaciones polinómicas de grado 3. Pero en el año 1545, Cardano publicó un método algebraico que permitía resolver analíticamente cualquier ecuación cúbica. La clave de este método estuvo en haber sabido hallar previamente una solución para ecuaciones cúbicas del tipo

$$(3) \quad x^3 + mx = n,$$

donde m y n son enteros. La solución algebraica de esta ecuación fue obtenida por primera vez alrededor del año 1515 por Scipione del Ferro, profesor de matemáticas en Bolonia quien, por alguna razón, decidió no hacer público su resultado. Comentó la solución solo a algunos de sus alumnos antes de su muerte en 1526. Pero en 1535, el matemático e ingeniero Niccolo Fontana (apodado “Tartaglia” por su tartamudez) encontró un método para resolver (3). Esto llegó a oídos de Gerolamo Cardano, matemático, astrónomo, biólogo, físico, químico, filósofo y escritor italiano nacido en Pavía en 1501, quien le pidió a Tartaglia que le diera su solución para poder incluirla en un tratado sobre aritmética. Tartaglia se negó inicialmente a darle su solución ya que tenía planeado escribir él mismo un libro sobre este tema. Tiempo después Tartaglia cambió de opinión, y entregó a Cardano algunas ideas del procedimiento para hallar una solución de (3) en forma de versos en un poema (¡idea muy original!).

Cardano no solo logró justificar la validez de las fórmulas de Tartaglia sino que, además, pudo encontrar un método para resolver cualquier ecuación cúbica. Publicó estos resultados en su famoso tratado de matemática “Ars Magna” en 1545, dando el debido crédito a Tartaglia y a Scipiano del Ferro, pero esto no pudo evitar el inicio de una enemistad eterna con Tartaglia, ya que este último aseguraba que Cardano le había prometido no publicar su solución (aunque Cardano afirmaba que jamás había hecho tal promesa).

El método para resolver (3) establece que es suficiente con encontrar valores t y u tales que

$$(4) \quad t - u = n \quad \text{y} \quad tu = \left(\frac{m}{3}\right)^3.$$

Luego,

$$x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}$$

es una solución real de la ecuación (2). En efecto, usando que $m = 3\sqrt[3]{tu}$, tenemos que

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u})^3 + m(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}) &= t - u - 3t^{\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}} + 3t^{\frac{1}{3}}u^{\frac{2}{3}} + mt^{\frac{1}{3}} - mu^{\frac{1}{3}} \\ &= t - u - 3t^{\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}} + 3t^{\frac{1}{3}}u^{\frac{2}{3}} + 3t^{\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}} - 3t^{\frac{1}{3}}u^{\frac{2}{3}} \\ &= t - u = n, \end{aligned}$$

como queríamos ver.

Entonces el problema se transforma en encontrar, si es que existen, valores de t y u satisfaciendo (4). Esto conduce a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} X - Y = a \\ XY = b. \end{cases}$$

Para resolverlo podemos despejar la variable Y en la primera ecuación, y luego reemplazar en la segunda para obtener que X debe satisfacer

$$X^2 - aX - b = 0.$$

Así, Cardano consigue reducir el caso cúbico al cuadrático, cuyas soluciones están dadas por

$$X = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

De aquí se obtiene $Y = X - a$.

Volviendo entonces al sistema (4), podemos hallar los valores de t y u como

$$t = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} + \frac{n}{2}, \quad u = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} - \frac{n}{2}.$$

Notar que t y u serán números reales siempre que

$$\Delta = n^2 + \frac{4m^3}{27} \geq 0.$$

Llamaremos a Δ el **discriminante** de la ecuación (3).

Es importante mencionar que no toda solución de $x^3 + mx = n$ se obtiene con esta fórmula de Cardano. El problema es sencillo de visibilizar cuando $m < 0$ ya que, como vimos en la sección anterior, la función $f(x) = x^3 + ax$ no es inyectiva cuando $a < 0$. Por lo tanto, para $m < 0$ es posible que la recta horizontal $y = n$ cruce a la gráfica de $f(x) = x^3 + mx$ en más de un punto, con lo cual la ecuación $x^3 + mx = n$ puede tener más de una solución real. Este es el caso de la ecuación $x^3 + 16 = 12x$ considerada por Cardano para ilustrar su método. Aquí estamos ante

la función $f(x) = x^3 - 12x$, que no es inyectiva. La recta $y = -16$ cruza a la gráfica de $f(x) = x^3 - 12x$ en los puntos $(-4, -16)$ y $(2, -16)$, como puede observarse en la imagen siguiente.

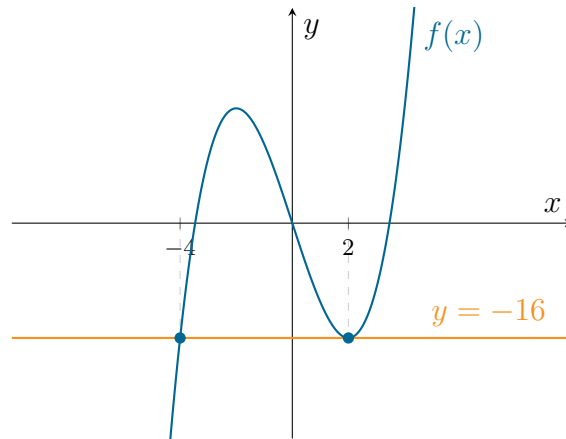


FIGURA 5. Gráfico de $f(x) = x^3 - 12x$ y de $y = -16$.

Entonces $x = -4$ y $x = 2$ son dos soluciones de $x^3 + 16 = 12x$. Este ejemplo fue construido por Cardano sabiendo que $x = 2$ es solución pero, al aplicar su fórmula, obtuvo la solución $x = -4$, ya que

$$t = \sqrt{\left(\frac{-16}{2}\right)^2 + \left(\frac{-12}{3}\right)^3} - \frac{16}{2} = \sqrt{64 - 64} - 8 = -8,$$

$$u = \sqrt{\left(\frac{-16}{2}\right)^2 + \left(\frac{-12}{3}\right)^3} + \frac{16}{2} = \sqrt{64 - 64} + 8 = 8,$$

de donde deduce que

$$x = \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{8} = -2 - 2 = -4$$

es la solución de $x^3 + 16 = 12x$ hallada con el método de Cardano. Esta situación seguramente disparó en Cardano la siguiente (muy interesante) pregunta: ¿cuántas soluciones tiene una ecuación cúbica? Esto lo condujo a investigar sobre el número de soluciones de una ecuación cúbica llegando a la conclusión de que podían llegar a tener tres soluciones como máximo. Es interesante notar que a las soluciones negativas, como $x = -4$ en el caso de la ecuación $x^3 + 16 = 12x$, Cardano las denominaba soluciones “falsas” o “ficticias”. Todavía estaban muy lejos de sus consideraciones las soluciones complejas que podían aparecer con sus fórmulas cuando el discriminante Δ es negativo. Estas eran consideradas por el mismo Cardano como expresiones “absurdas” que solamente servían para mostrar que sus fórmulas no siempre conducían a la solución esperada. Debido a esto sus fórmulas para resolver ecuaciones cúbicas tardaron mucho tiempo en ser completamente aceptadas. En este sentido vale la pena recordar que recién a mediados

del siglo XVIII las expresiones algebraicas que involucraban raíces cuadradas de números negativos comenzaron a ser tratadas y manipuladas naturalmente como números, llegándose a demostrar que estos nuevos objetos tienen estructura de cuerpo, formando lo que hoy en día conocemos como el *cuerpo de los números complejos*. Más aún, a mediados del siglo XVIII ya estaba completamente aceptado en la comunidad matemática que los números reales no son más que números complejos particulares.

Por suerte todas estas cuestiones no representan ningún problema para el principal objetivo de esta sección, que es “despejar” x de la ecuación

$$x^3 + ax = y,$$

cuando $a \geq 0$. Ya sabemos que en este caso la función $f(x) = x^3 + ax$ es biyectiva como función de \mathbb{R} en \mathbb{R} así que ya sabemos que x se puede expresar en función de y . Esto nos garantiza la existencia de tal función pero no nos da ninguna pista de cómo es. La respuesta a esta interesante pregunta la tiene la fórmula de Cardano, la cual nos dará una expresión concreta para esta función. Más precisamente, tomando

$$t = \sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{a^3}{27}} + \frac{y}{2}, \quad u = \sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{a^3}{27}} - \frac{y}{2},$$

se tiene que

$$x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{a^3}{27}} + \frac{y}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{a^3}{27}} - \frac{y}{2}}.$$

es la única solución real de $x^3 + ax = y$.

Vemos así que al aplicar el método de Cardano hallamos una expresión para la función inversa de $f(x) = x^3 + ax$ para $a \geq 0$, y está dada por

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{a^3}{27}} + \frac{x}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{a^3}{27}} - \frac{x}{2}}.$$

Como puede observarse, la expresión para la inversa de una función tan sencilla como $f(x) = x^3 + ax$ no es para nada trivial. En la Figura 6 se ilustra el caso $a = 1$.

Ecuaciones cúbicas generales

Aunque no profundizaremos demasiado en los detalles del método de Cardano para obtener todas las soluciones de

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

donde $a \neq 0$, presentaremos la idea general del mismo.

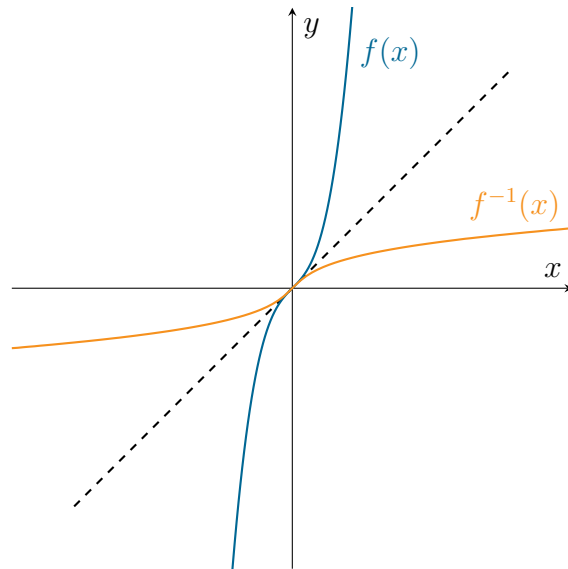


FIGURA 6. Gráfico de $f(x) = x^3 + x$ y de su inversa.

El primer paso es reescribir la ecuación en **forma normal**, dividiendo ambos miembros por a :

$$(5) \quad x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Ahora se lleva esta ecuación a lo que se conoce como **forma reducida**, que se obtiene haciendo la sustitución $x = z - \frac{b}{3a}$:

$$(6) \quad z^3 + pz + q = 0,$$

donde

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}, \quad q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

Para comprobarlo basta con reemplazar $z = x + \frac{b}{3a}$ en (6) y operar para obtener (5).

La ecuación (6) es del tipo de las estudiadas en la sección anterior, con $m = p$ y $n = q$, por lo que podemos aplicar el método de Cardano. El discriminante para esta ecuación es $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$. Dependiendo si el discriminante es positivo, negativo o igual a cero, se obtendrán las diferentes soluciones:

- Caso $\Delta > 0$: la ecuación posee una solución real y dos complejas. La solución real z se obtiene como se trabajó en la sección anterior, y también pueden darse expresiones que determinan las dos soluciones complejas conjugadas (que no incluiremos aquí).
- Caso $\Delta = 0$:
 - si $p = q = 0$, la ecuación posee una única solución real (triple) $z = 0$;
 - en caso contrario, puede probarse que la ecuación posee entonces dos soluciones reales, una simple $z_1 = \frac{3p}{q}$ y una doble $z_2 = \frac{-3q}{2p}$.

- Caso $\Delta < 0$: puede demostrarse que la ecuación tiene tres soluciones reales distintas, las que pueden determinarse explícitamente gracias a la fórmula de De Moivre (pero no incluiremos dichas soluciones en este trabajo).

Luego, a partir de los valores de z obtenidos como solución de (6), se obtienen las soluciones para (5) mediante la sustitución $x = z - \frac{b}{3a}$.

Otras ecuaciones

Todo lo expuesto anteriormente deja en evidencia la gran diferencia de dificultad que se presenta entre la resolución de ecuaciones cuadráticas y las cúbicas.

Adaptando las técnicas de Cardano, su alumno Ferrari logró obtener una fórmula para determinar raíces de polinomios de grado 4, reduciendo el problema a encontrar raíces de un polinomio de grado 3.

En terminología actual, lo que estos matemáticos italianos lograron demostrar fue que las ecuaciones de grado 3 y 4 son *resolubles por radicales*, es decir que sus raíces se pueden calcular con fórmulas que involucran solamente a sus coeficientes junto con las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y extracciones de raíces cuadradas, cúbicas, etc. Por mucho tiempo se intentó demostrar que las ecuaciones de grado 5 o superior también son resolubles por radicales, hasta que a principios del siglo XIX el matemático italiano Paolo Ruffini, y posteriormente el matemático noruego Niels H. Abel, establecieron finalmente que esto no es posible para ecuaciones polinómicas *generales* de grado mayor o igual que 5 (ver, por ejemplo, el Capítulo 13 de (Tignol, 2016)). Es importante recalcar que lo demostrado por Ruffini y Abel no implica que no se puedan encontrar ecuaciones particulares de grado 5 o superior que sean resolubles por radicales.

Si se flexibiliza el requisito de ser resolubles por radicales y se permiten otras funciones, entonces hay una resolvente para la ecuación de grado 5. Más precisamente el matemático francés Charles Hermite demuestra en 1858 que hay una resolvente para la ecuación general de grado 5 si al conjunto de la funciones admitidas en la resolución por radicales se le agregan las denominadas *funciones elípticas*, que son funciones muy especiales que aparecen en el cálculo de ciertas integrales. Todo esto y mucho más está magistralmente expuesto en el libro (Klein, 1913).

Bibliografía

- Klein, F. (1913). *Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree*. Kegan Paul. London.
- Spivak, M. (1998). *Calculus. Cálculo infinitesimal*. Ed. Reverté.
- Tignol, J.-P. (2016). *Galois' theory of algebraic equations* (Second ed.). World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ.

MARILINA CARENA

CONICET - Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (UNL)

(✉) marilcarena@gmail.com

RICARDO TOLEDANO

Departamento de Matemática. Facultad de Ingeniería Química (UNL)

(✉) ridatole@gmail.com

Recibido: 2 de junio de 2024.

Aceptado: 5 de agosto de 2024.

Publicado en línea: 30 de agosto de 2024.

ALGUNAS CONTRIBUCIONES DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y EL USO DE LA TECNOLOGÍA AL PENSAMIENTO MATEMÁTICO: EXPERIENCIA DE AULA CON ALUMNOS UNIVERSITARIOS DE PRIMER AÑO

Noelia Londoño Millán, José David Zaldívar Rojas y Miguel Vertiz Álvarez

RESUMEN. La enseñanza de las matemáticas se enriquece notablemente con la resolución de problemas, especialmente cuando se incorporan estrategias, diversas representaciones del objeto matemático y herramientas tecnológicas. Estos elementos permiten desarrollar una amplia gama de destrezas y habilidades, complementando el tradicional lápiz y papel. El propósito de este artículo es describir los procesos para abordar la solución de un problema sobre lugares geométricos, partiendo de dos elementos dados: una recta y un punto. En esta experiencia de aula, participaron diez estudiantes de segundo semestre de la carrera de Matemáticas Aplicadas en una universidad del norte de México. Se destacó el papel fundamental del software GeoGebra, que facilitó la exploración, comprobación, predicción y descubrimiento de varios tipos de soluciones, utilizando diferentes registros de representación. Además, se evidenciaron diversas formas de razonamiento matemático, desde el ensayo y error hasta el desarrollo de procesos analíticos bien estructurados, así como una variedad de estrategias de solución que requirieron el dominio de conocimientos y el uso sistemático de la tecnología.

Palabras clave: GeoGebra, resolución de problemas, estrategias.

ABSTRACT. Mathematics teaching is enriched by problem resolution, apart from knowledge, a great variety of skills and abilities are generated when strategies, representations of the mathematical object and technological tools are incorporated, added to those developed using pencil and paper. The purpose of this article is to describe the processes approaching problem solutions of geometric places from two given elements (a line and a point). Ten second-semester students of the Applied Mathematics program at a university in northern Mexico participated in the classroom experience. The role played using the GeoGebra software was notorious, which helped to explore, verify, predict and discover various types of solutions, using different representation registers, as well as different forms of mathematical reasoning ranging from trial-error to the development of well-structured analytical processes and a variety of solution strategies that involved mastery of knowledge and the systematic use of technology.

Keywords: GeoGebra, problem solving, strategies.

§1. Introducción

A pesar de los cambios realizados en los currículos oficiales de matemáticas en los últimos años, la competencia conocida como resolución de problemas ha perdurado. Esto posiblemente se debe al valor agregado que esta competencia tiene en el desarrollo de destrezas tales como la comunicación, la comprensión, la realización de cálculos y procedimientos, entre otras. Estas destrezas son resumidas por Echenique (2006) en la siguiente frase: “Una persona matemáticamente competente es aquella que comprende los contenidos y procesos matemáticos básicos, los interrelaciona, los asocia adecuadamente a la resolución de diversas situaciones y es capaz de argumentar sus decisiones” (p. 16).

Resolver problemas no es una tarea fácil, ya que implica enfrentarse a una situación desconocida, lo cual puede generar incertidumbre, desconfianza, desapego, rechazo e incluso deseos de renunciar desde el principio. Polya (1965) sugiere que para que los estudiantes resuelvan problemas, deben estar motivados para hacerlo sin recibir ayuda excesiva o insuficiente. Comienza con la comprensión y ofrece ideas a través de preguntas, incluso generales, que llevan a los estudiantes a pensar en soluciones sin decirles realmente qué hacer. Porque una característica atribuible a la resolución de problemas es precisamente el uso del razonamiento, el cual puede surgir con preguntas como: “¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?” (Polya, 1965, p. 26).

Son numerosas las contribuciones que se pueden extraer de la resolución de problemas y amplio es su impacto en los procesos didácticos en el aula de matemáticas. En particular, se destacan las ideas de Arteaga, Macías, y Pizarro (2020), quienes la caracterizan como una potente herramienta que permite articular ideas y movilizar “capacidades y habilidades como la síntesis, el análisis, la visualización, la argumentación, la fluidez, la audacia, la autonomía, etc.” (p. 279). Estos procesos se convierten en elementos clave para los estudiantes, quienes posteriormente podrán autorregular su propio trabajo intelectual y enfrentar favorablemente situaciones más generales y complejas dentro y fuera del ámbito escolar.

Otros aportes que se atribuyen a la resolución de problemas están relacionados con los procesos didácticos, donde se evidencian métodos clave del pensamiento heurístico matemático, como la “inducción, la deducción, la generalización y la particularización” (Defaz, 2017, p. 17). Son precisamente estos elementos los que se ponen en práctica durante la resolución de problemas, lo que contribuye al desarrollo cognitivo del resolutor y fomenta una postura reflexiva ante la vida. Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, reportamos una experiencia de aula realizada como parte de una investigación más amplia en la que nos planteamos describir y analizar las formas de razonamiento de los estudiantes cuando se

enfrentan a la resolución de un problema, el uso que hacen de la tecnología y el dominio de conocimientos que poseen.

§2. Dos referentes conceptuales

En este apartado se hará referencia a dos temas relevantes que se tuvieron en cuenta durante la experiencia en el aula: la resolución de problemas y el uso de la tecnología. Se destacará la importancia de ambos y su combinación. Es bien sabido que la resolución de problemas ha sido una fuente de inspiración desde la antigüedad, y en tiempos actuales no es la excepción. Varios autores (Mason, Burton, y Stacey, 1989; Santos-Trigo, 2016; Schoenfeld, 1985), entre otros, continúan manteniendo vigente esta actividad a través de su producción científica, considerándola hoy día tanto una competencia matemática como una línea de investigación.

2.1. La resolución de problemas. Aunque la literatura reporta varios autores sobre este tema, la perspectiva a considerar en este artículo es la de Schoenfeld (1985). Este autor realizó un conjunto de investigaciones donde comparó el desempeño de estudiantes de primeros semestres de carreras de matemáticas con el trabajo que ejecutan los matemáticos profesionales al resolver los mismos problemas. De sus investigaciones dedujo que en la resolución de problemas intervienen cuatro dimensiones, las cuales, ejecutadas en conjunto, hacen posible la resolución de problemas de forma exitosa. Estas dimensiones son: el dominio de conocimientos, el sistema de creencias, las estrategias heurísticas y las estrategias metacognitivas.

El dominio de conocimientos se refiere al conjunto de recursos matemáticos que posee el resolutor y que puede emplear en la resolución del problema, como axiomas, definiciones, algoritmos, teoremas, etc. Las estrategias heurísticas, definidas por Polya (1965) y retomadas por Schoenfeld (1985), son métodos de búsqueda y exploración ante lo desconocido, resultando útiles en la resolución de problemas. Ejemplos de estas estrategias son particularizar, resolver un problema más simple, estudiar casos especiales, usar ensayo y error, iniciar de atrás hacia adelante, entre otras.

Las estrategias metacognitivas se refieren a las acciones que emprende el resolutor para ejercer control sobre el proceso de solución, como monitorear si ha entendido el enunciado, revisar si los cálculos están bien ejecutados o si la respuesta obtenida corresponde a la solución del problema. En caso de encontrar algún error, el resolutor debe tener la habilidad de seleccionar otros recursos o redireccionar el proceso empleando estrategias heurísticas diferentes. El sistema de creencias es una compleja red de concepciones que tiene el resolutor y que afecta (positiva o negativamente) su desempeño en la resolución de problemas.

Por otro lado, existen diversas percepciones sobre la resolución de problemas, que van desde la negación o imposibilidad de afrontarlos hasta sentirse incompetente para hacerlo. En este sentido, es relevante lo planteado por Echenique (2006), quien refiere que en el proceso de resolución intervienen aspectos internos como el esfuerzo, la concentración, el interés, el gusto por aceptar retos, la tranquilidad para afrontarlos, la perseverancia, la creatividad, la autoconfianza, los estados emocionales, etc. Además, los propios procesos de investigación, como analizar los datos del enunciado y su relevancia, pensar en posibles vías de resolución que, aunque no forman parte de los contenidos propiamente matemáticos, desempeñan un papel importante y ayudan a resolver con éxito la tarea.

2.2. El papel de la tecnología en la resolución de problemas. Según Santos-Trigo (2016), la tecnología se ha convertido en una necesidad actual, ya que contribuye al desarrollo de habilidades cognitivas en diversas áreas del conocimiento, incluida la resolución de problemas y la creación de conjeturas. Esto no se limita a los entornos escolares, ya que también en la vida cotidiana se ha convertido en un recurso indispensable para la búsqueda de información, la comunicación de resultados y la interacción entre individuos, entre otros aspectos.

Es un hecho que la era tecnológica ha llegado para quedarse, y tanto las autoridades como los individuos tienen la responsabilidad de proporcionar las condiciones para capacitarse en su uso. En particular, al describir la competencia digital, Santos-Trigo (2016) indica que se refiere a que los estudiantes desarrollen recursos y habilidades en el uso de tecnología digital en la resolución de problemas. Este documento tiene como objetivo emitir diferentes soluciones utilizando recursos matemáticos como los teoremas, definiciones y procesos analíticos, así como aprovechar los recursos tecnológicos que proporciona la geometría dinámica.

La integración de la tecnología en las actividades, que se describirán más adelante, se asume desde la perspectiva de la Mediación Semiótica (Mariotti, 2009). Bajo este marco, se postula que un artefacto puede ser utilizado por un profesor como una herramienta de mediación semiótica con la intención de desarrollar signos matemáticos, los cuales se hallan separados del uso del artefacto pero que mantienen una relación semiótica. En este contexto, un elemento central en el medio didáctico de una actividad matemática que los estudiantes intentan resolver es el papel del profesor. Dicho papel es actuar como guía en el proceso de mediación semiótica, permitiendo que los estudiantes evolucionen en la comprensión de los signos, ya sea a través de gestos, producción oral o escrita, o construcción realizada con el uso de un software de geometría dinámica.

La mediación semiótica postula que la construcción del conocimiento es una consecuencia de una actividad instrumental donde los signos y objetos matemáticos emergen y evolucionan dentro de la actividad matemática con el apoyo de la

interacción social entre los estudiantes. Por lo tanto, el análisis del trabajo matemático de los estudiantes mientras un componente tecnológico media la actividad se centra en el uso del artefacto durante la resolución de una tarea específica, reconociendo la construcción del conocimiento dentro de la solución de la tarea. Así, el artefacto se emplea como un mediador semiótico, lo que implica que el profesor debe guiar a los estudiantes para relacionarse con los significados que emergen del funcionamiento del artefacto y los significados que se evidencian de esta experiencia mientras se intenta resolver una tarea o problema.

La resolución de problemas en sí misma aporta grandes beneficios al desarrollo del pensamiento, y cuando se combina con el uso de la tecnología, “enriquece el aprendizaje de las matemáticas” (National Council of Teachers of Mathematics NCTM, 2000, p. 26) en varios aspectos. Por un lado, permite explorar diferentes representaciones de los objetos matemáticos, como tablas, ecuaciones, gráficas, etc. Asimismo, facilita la exploración de ideas y conjeturas que pueden refutarse o aceptarse en poco tiempo. También es posible utilizar la tecnología sin tener un dominio amplio de conocimientos y habilidades en los procesos analíticos, ya que puede proporcionar ideas y orientación sobre lo que se debe buscar y utilizar.

Además, permite corroborar resultados y visualizarlos en una gran cantidad de casos, lo que constituye una representación visual incluso cuando no se dispone de una versión analítica de la situación. El uso de la tecnología hace que los procesos de búsqueda de soluciones sean más eficientes sin excederse en tiempo, como podría suceder con el lápiz y el papel.

§3. Diseño de la experiencia didáctica

En el programa oficial del curso de Geometría Analítica de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas se incluye una unidad denominada Circunferencia, precedida por otra que trata sobre la Línea Recta. Se consideró que los alumnos contaban con el dominio de conocimientos necesarios para enfrentarse a la resolución de problemas en estos temas. Además, es importante mencionar que ya tenían al menos seis meses de experiencia utilizando el software de geometría dinámica GeoGebra. Cada tema se desarrolla con el apoyo del software como mediador semiótico por parte de los alumnos y se complementa con los procesos analíticos que la asignatura requiere.

La experiencia que se reporta en el presente manuscrito involucra a un grupo de 10 alumnos de segundo semestre, que estaban cursando la asignatura de Geometría Analítica. Para la resolución del problema asignado, algunos de los estudiantes se agruparon en parejas. La tarea se llevó a cabo en el laboratorio de cómputo de la facultad, donde tenían a su disposición una computadora y varias horas de clase para explorar más opciones de solución.

En cuanto a los conocimientos previos, se asume que los alumnos contaban, en términos de Schoenfeld (1985), con un dominio de conocimientos adquiridos en el bachillerato, así como durante el curso de Geometría Euclidiana del semestre anterior, y los adquiridos hasta el momento en Geometría Analítica. Entre estos conocimientos destacan el postulado de Euclides: “con un centro y un radio se construye una circunferencia”. También sabían que:

- la distancia de un punto a una recta se representa mediante el segmento perpendicular que los une,
- una circunferencia c es tangente a una recta t en un punto P si y sólo si la perpendicular a t por P pasa por el centro de c ,
- diferentes formas de la ecuación de una recta, en particular, la ecuación normal cuya forma es: $\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$ (Lehmann, 2009), en esta ecuación los coeficientes A , B y C se obtienen de la ecuación general de la línea recta: $Ax + By + C = 0$. La forma normal es de gran utilidad para calcular la distancia de una recta a un punto (x_1, y_1) , esto se logra reemplazando las coordenadas particulares del punto en la ecuación, dando como resultado la distancia

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

- Así mismo sabían calcular la distancia entre dos puntos y conocían las diferentes formas de la ecuación de una circunferencia.

El problema propuesto fue una variante del ejercicio sobre circunferencia propuesto por Lehmann (2009) en los ejercicios del grupo 15, inciso 24: “Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A = (7, -5)$ y es tangente a la recta $x - y - 4 = 0$ en el punto $B = (3, -1)$ ” (p. 103). A este ejercicio se le realizaron dos modificaciones: en primer lugar, se eliminó el punto de tangencia B , y, en segundo lugar, se incorporó la exploración con el software GeoGebra. Por lo tanto, el nuevo enunciado fue el siguiente:

Usa GeoGebra para visualizar el problema. Describe qué procesos analíticos deben llevarse a cabo para solucionar el problema. Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A = (7, -5)$ y es tangente a la recta cuya ecuación es $x - y - 4 = 0$. ¿Cuántas soluciones tiene el problema?

La Teoría de la Mediación Semiótica propone un ciclo didáctico (Mariotti y Maffia, 2018) para la implementación de tareas y actividades matemáticas donde se empleará un mediador semiótico, que en nuestro caso es el programa de geometría dinámica GeoGebra. Dicho ciclo se adaptó a nuestras necesidades, resultando en lo siguiente:

1. Se propone a los estudiantes el problema anteriormente descrito. Para la resolución debían utilizar GeoGebra y además deben realizar soluciones analíticas.

2. Se realiza una etapa de producción de signos con el GeoGebra en parejas.
3. Se realiza una discusión con el profesor sobre las producciones realizadas y se hace entrega de los archivos generados para analizar la construcción realizada.

Para recopilar la información, los alumnos debían entregar los archivos electrónicos contruidos en GeoGebra con la o las soluciones encontradas. Estos archivos se recibieron a través de la plataforma Schoology. Además, las soluciones analíticas construidas con lápiz y papel se reportaron en físico. También se tomaron algunas fotografías durante la implementación del problema con los estudiantes, como se mostrará más adelante.

Es fundamental mencionar que la otra parte de la evidencia empírica orquestada proviene de entrevistas individuales semiestructuradas con los estudiantes que resolvieron el problema, tras revisar sus archivos y soluciones escritas. Las construcciones en GeoGebra, que conforman la evidencia, se complementan con algunas respuestas de los estudiantes, lo cual contribuye al análisis semiótico realizado. Por último, es importante destacar que la profesora titular del curso fue la encargada de rediseñar e implementar el problema, además de realizar las entrevistas. Su papel principal fue mediar durante el proceso de construcción y trabajo con el software, respondiendo a las dudas de los estudiantes y fomentando el diálogo con los equipos en los casos en los que no se observaba un progreso notable en las estrategias de solución.

§4. Resultados de la experiencia didáctica

Una vez revisadas todas las evidencias proporcionadas por los alumnos, procedimos a clasificarlas en dos categorías según el tipo de soluciones presentadas. Una categoría fue denominada soluciones particulares, las cuales se definieron así porque consistían en casos particulares de la resolución del problema. La otra categoría fue denominada soluciones generales, donde se encontraron respuestas que abarcaban a las soluciones particulares y además incluían otros lugares geométricos. En estas soluciones, se emplearon mayores elementos de conocimiento matemático y se aplicaron otras estrategias (ver Tabla 1).

A continuación, se hará referencia a los diferentes enfoques que llevaron a cabo los estudiantes. Se observó que no tuvieron dificultades para comprender el enunciado del problema; desde el principio, tuvieron claridad sobre lo que se les pedía. Sin embargo, les llevó varios minutos idear un camino de solución, ya que no era evidente de inmediato. Aquí radica la riqueza del problema, ya que no se trataba simplemente de aplicar algún algoritmo particular, sino de pensar en cómo encontrar al menos una solución. Polya indica que primero se debe comprender el problema, mientras que Schoenfeld sugiere que entender el problema puede llevar más tiempo que la propia solución. De hecho, con algunos alumnos ocurrió que

Tipo de soluciones	Tipo de estrategia	Cantidad de soluciones
Particulares	Ensayo y error	1
	Trazado de recta perpendicular	1
	Trazado de una recta paralela	2
Generales	Construcción de la Bisectriz	Infinitas
	Trazado de una recta Perpendicular	
	Rastro	
	Construcción de Parábolas	Infinitas

TABLA 1. Resumen general sobre tipos y estrategias empleadas en la resolución del problema planteado.

parecían no estar haciendo nada, cuando en realidad estaban dedicando tiempo a diseñar una estrategia para abordarlo.

4.1. Características de las soluciones particulares. La estrategia del ensayo y error estuvo presente en la resolución del problema. Los alumnos que la aplicaron explicaron el proceso seguido de la siguiente manera: “se trata de trazar una circunferencia cualquiera y mover el centro hasta que coincida con la recta dada”. En la Figura 1, se observa el uso de la técnica de ensayo y error porque la recta no es tangente a la circunferencia; esta fue construida por aproximación. Aunque el resultado no cumple con la prueba del arrastre, este método ayudó a iniciar la exploración y a realizar posteriormente trazos más acertados.

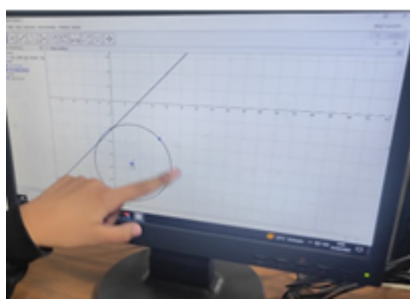


FIGURA 1. Alumnos explorando el problema mediante la estrategia ensayo-error con GeoGebra.

El uso de trazos auxiliares es común en geometría y se evidenció en las soluciones presentadas. Por ejemplo, la mayoría de los estudiantes trazó una recta perpendicular a la recta y que pasara por el punto dado $(7, -5)$. Aunque este trazo

se utilizó con diferentes propósitos, para algunos alumnos la recta perpendicular sirvió para determinar el diámetro de la circunferencia, como se muestra en el caso de la Figura 2. (Es importante aclarar que la alumna no modificó la etiqueta del punto dado $(7, -5)$, por lo que en la imagen aparece con la letra E).

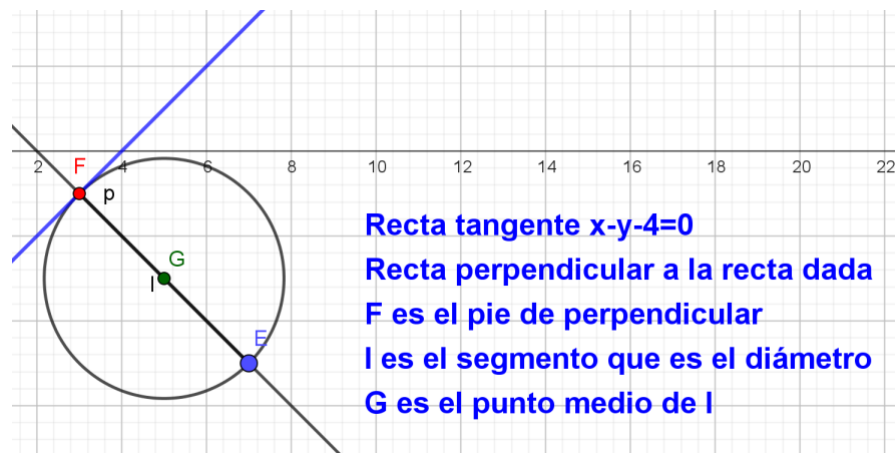


FIGURA 2. Trazado de una recta EF , perpendicular a la recta dada, que ayuda a generar el diámetro de una circunferencia solución.

Al preguntar sobre la estrategia, la alumna explica: “se utiliza una perpendicular a la recta que pase por el punto dado, esto porque la recta tangente es perpendicular al diámetro y el punto medio sería el centro de la circunferencia”. Esto es coherente con lo que Schoenfeld (1985) define como dominio de conocimientos, ya que está realizando trazos con los conceptos geométricos que posee.

Otros alumnos que también realizaron trazos auxiliares construyeron una recta perpendicular (punteada) a la recta dada que pasara por el punto dado, como se muestra en la Figura 3. Esta recta fue utilizada para hallar el radio (segmento rojo). Además, realizaron otros trazos, como una recta paralela a la recta $x - y - 4 = 0$ que pasara por el punto dado $(7, -5)$ y una circunferencia. Estas construcciones ayudaron a encontrar una solución (circunferencia azul), aunque el punto de tangencia en esta solución no es el pie de la perpendicular, como sí lo fue el caso anterior.

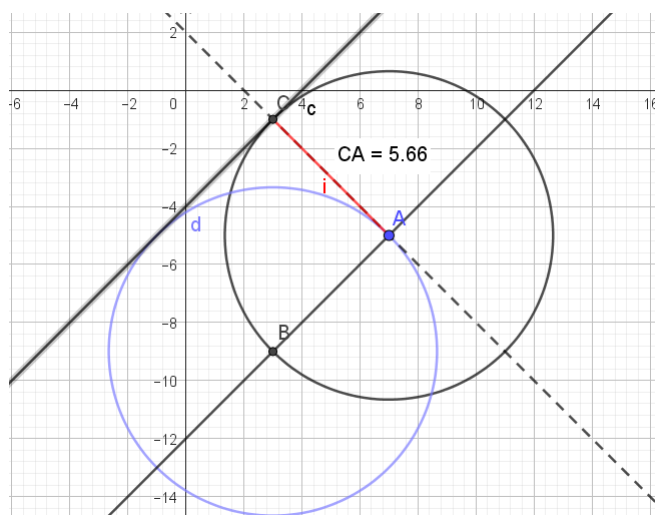


FIGURA 3. Construcción de trazos auxiliares: rectas, circunferencia y segmento.

4.2. Características de las soluciones generales. A continuación, se presentan dos resultados que se catalogaron como generales, obtenidos al explorar con el software de geometría dinámica GeoGebra. En el primero, se introducen varios trazos auxiliares como punto, recta y bisectriz, mientras que en el segundo se identificó que el centro de la circunferencia buscada pertenece a una parábola. En ambas soluciones se identifica el aporte del movimiento y una infinidad de soluciones.

4.2.1. El centro de la circunferencia pertenezca a una bisectriz. El hecho de que el centro de la circunferencia pertenezca a una bisectriz puede suscitar la pregunta inicial del lector y de nosotros mismos: ¿de qué bisectriz están hablando si en el enunciado del problema nunca se mencionó? Y tiene razón, puesto que no hay tal objeto geométrico en el enunciado, pero en la mente de los alumnos que lo exploraron sí. En términos de Santos-Trigo (2021), los alumnos activaron su esquema cognitivo y pudieron trazarlo y explorarlo en el software GeoGebra sin que representara demasiado tiempo y trabajo. El uso del software permitió la exploración de la idea de forma sencilla, ya que los métodos analíticos hubiesen requerido de procesos más elaborados.

Los alumnos Ángel y Miguel lo pensaron, optaron por hacerlo y lo explicaron con sus propias palabras de la siguiente manera:

“Se traza una recta cualquiera que no sea paralela a la recta dada y que pase por el punto A, se traza la intersección entre las rectas y se traza la bisectriz del ángulo formado. Luego se traza una perpendicular de la segunda recta que pase por el punto A, se halla la intersección entre la bisectriz y la perpendicular, y ese es el centro.”

Las palabras anteriores se ilustran en las Figuras 4 y 5. Es importante aclarar que la construcción con nombres fue realizada por los autores del artículo con el fin de mostrar gráficamente las palabras de los alumnos y hacerlas comprensibles para el lector. Además, es necesario aclarar que el punto B y la bisectriz que aparecen en la construcción fueron inventados por los alumnos. Ellos emplearon varios conceptos de la geometría euclidiana, como la idea de que el centro de una circunferencia tangente a dos rectas no paralelas pertenece a la bisectriz de uno de los ángulos formados por estas rectas.

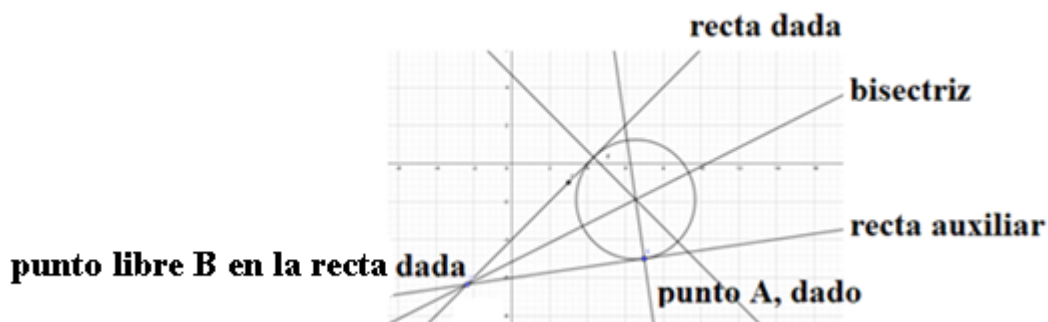


FIGURA 4. Solución general presentada por Miguel y Ángel donde el centro de la circunferencia pertenece a la bisectriz. Fuente: elaboración propia.

Con esta estrategia de trazos auxiliares, se puede observar la evolución de los significados (Mariotti, 2009) y el uso de recursos disponibles (dominio de conocimientos) como plantea Schoenfeld (1985). Por otro lado, el software GeoGebra proporciona una manera de visualizar múltiples soluciones mediante la activación del rastro. En este caso, el rastro lo deja la circunferencia cuando el punto libre B , construido sobre la recta $x - y - 4 = 0$, permanece en movimiento. Es importante aclarar que los elementos auxiliares construidos, como el punto B , la recta auxiliar y la bisectriz, fueron creación propia de los alumnos, y para ello no hubo participación ni sugerencia por parte del docente. La gama de soluciones que proporcionó esta estrategia es amplia, y parte de ellas se pueden apreciar en la Figura 5.

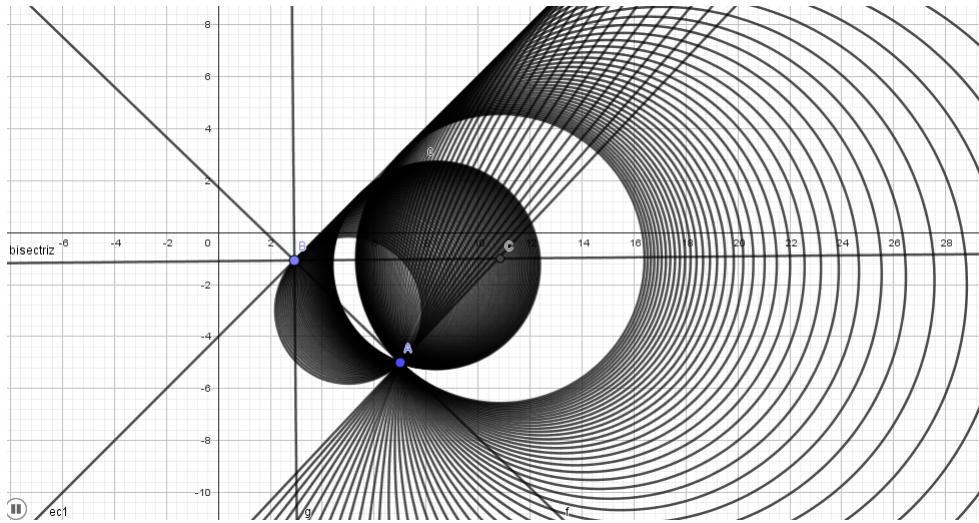


FIGURA 5. Familia de circunferencias tangentes a la recta y que pasan por el punto A , cuyo centro se encuentra en la bisectriz. Extendiendo la solución de Miguel y Ángel.

4.2.2. *El centro de la circunferencia pertenece a una parábola.* Hubo dos grupos de alumnos que coincidieron en considerar que el lugar geométrico de todos los centros de las circunferencias solución corresponde a una parábola. Miguel inició con la definición del lugar geométrico, mientras que César comenzó con el proceso analítico y lo dedujo después.

Al preguntarle al alumno Miguel sobre cómo obtuvo la idea de la parábola, menciona que recordó haber visto el tema de las secciones cónicas en el bachillerato y la definición de parábola, indicando que es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y una recta fija llamada directriz. Asoció los elementos dados en el enunciado del problema con los de la definición: la recta R es la directriz y el punto A corresponde al foco. Vale la pena destacar que en el curso de geometría analítica donde se aplicó el problema aún no se había visto la parábola, pero fue un elemento de los conocimientos previos del bachillerato que resultó útil para que el alumno presentara una solución general.

En la Figura 6 se muestra la parábola a la que se refiere Miguel. Aunque ya había realizado y solucionado el problema con GeoGebra (caso de la bisectriz), él decidió continuar explorando el problema por su cuenta en el software Desmos, que tenía instalado en su celular. Es evidente que esta parábola efectivamente corresponde a la solución general del problema, empleando una estrategia diferente y sus conocimientos previos.

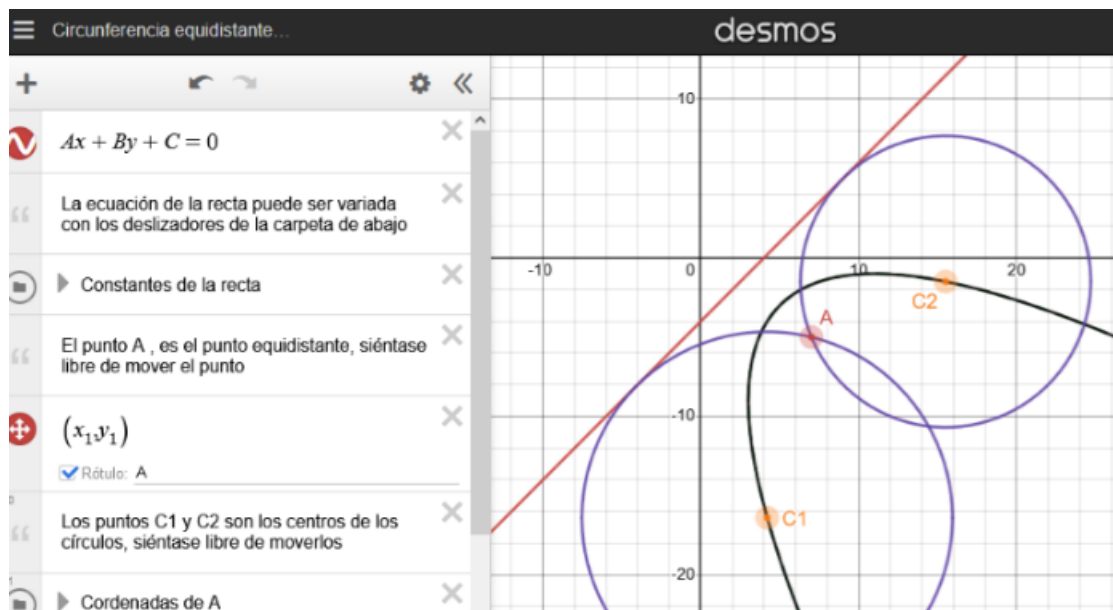


FIGURA 6. Solución general, elaborada por Miguel, que corresponde a una parábola y el uso del software Desmos.

También como solución general el alumno César presentó su respuesta de dos formas. Una de ellas fue elaborada con recursos analíticos, en la que consideró una igualdad de distancias: la primera es la distancia del punto $A = (7, -5)$ y la recta $x - y - 4 = 0$ usando la forma normal y la segunda corresponde a la distancia entre el punto A y un punto desconocido de coordenadas (x, y) . A través de este proceso el alumno halla el lugar geométrico de todos los centros de las circunferencias. Estas distancias son iguales porque ambas corresponden al radio de la misma circunferencia. A continuación (Figura 7), se muestra una imagen del manuscrito del alumno y posteriormente su transcripción para la mejor comprensión del proceso seguido.

$$D_{R,F} = D_{A,F}$$

$$\left(\frac{|1x-1y-4|}{\sqrt{2}} \right)^2 = \left(\sqrt{(x-7)^2 + (y+5)^2} \right)^2$$

$$\frac{x^2 + y^2 + 16 - 2xy - 8x + 8y}{2} = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 10y + 25$$

$$\frac{x^2 + y^2 + 16 - 2xy - 8x + 8y}{2} = x^2 + y^2 - 14x + 10y + 74$$

$$x^2 + y^2 - 2xy - 8x + 8y + 16 = 2x^2 + 2y^2 - 28x + 20y + 148$$

$$2x^2 + 2y^2 - 28x + 20y + 148 - x^2 - y^2 + 2xy + 8x - 8y - 16 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2xy - 20x + 12y + 132 = 0$$

$\therefore x^2 + y^2 + 2xy - 20x + 12y + 132 = 0$ es el lugar geométrico de todas las circunferencias tangentes a $x - y - 4 = 0$ y que pasan por $(7, -5)$

FIGURA 7. Solución analítica construida por César.

$$D_{R,F} = D_{A,F}$$

$$\left(\frac{|1x - 1y - 4|}{\sqrt{2}} \right)^2 = \sqrt{(x - 7)^2 + (y + 5)^2}^2$$

$$\frac{x^2 + y^2 + 16 - 2xy - 8x + 8y}{2} = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 10y + 25$$

$$\frac{x^2 + y^2 + 16 - 2xy - 8x + 8y}{2} = x^2 + y^2 - 14x + 10y + 74$$

$$x^2 + y^2 + 16 - 2xy - 8x + 8y = 2x^2 + 2y^2 - 28x + 20y + 148$$

$$2x^2 + 2y^2 - 28x + 20y + 148 - x^2 - y^2 - 16 + 2xy + 8x - 8y = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2xy - 20x + 12y + 132 = 0$$

Por lo tanto $x^2 + y^2 + 2xy - 20x + 12y + 132 = 0$ es el lugar geométrico de todas las circunferencias tangentes a $x - y - 4 = 0$ y que pasan por $(7, -5)$.

También César usó el software GeoGebra para hallar la solución, ver Figura 8. Es notorio que, pese a realizar exploraciones con otros recursos encontró la misma solución que había planteado en párrafos anteriores. Esta solución analítica corresponde a una parábola rotada, en la cual se encuentran todos los centros de las

circunferencias que se constituyen en una solución general al problema planteado. Es posible verificar este resultado calculando el discriminante $B^2 - 4AC$ de la ecuación cuadrática con dos variables: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ que para este caso particular corresponde a 0 por lo que representa una parábola.

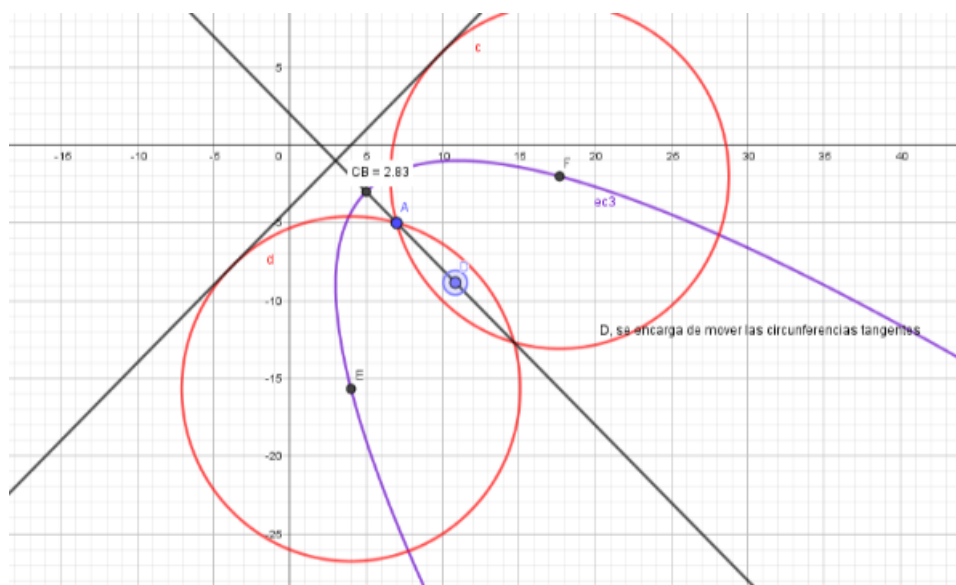


FIGURA 8. Solución con software GeoGebra construida por César.

4.2.3. *Visualización del lugar geométrico.* Al usar la herramienta de rastro de GeoGebra sobre el centro de la circunferencia, se genera la solución general que corresponde al lugar geométrico parábola, como se muestra en la Figura 9. Esta solución coincide con la respuesta que algunos alumnos habían encontrado de forma independiente a través de varias estrategias. Otra de las riquezas del uso de la tecnología es que "permite ver más y mejor", ya que este lugar geométrico muestra muchas soluciones posibles al problema, y sin errores de construcción, algo que hubiera sido imposible de visualizar exclusivamente con lápiz y papel.

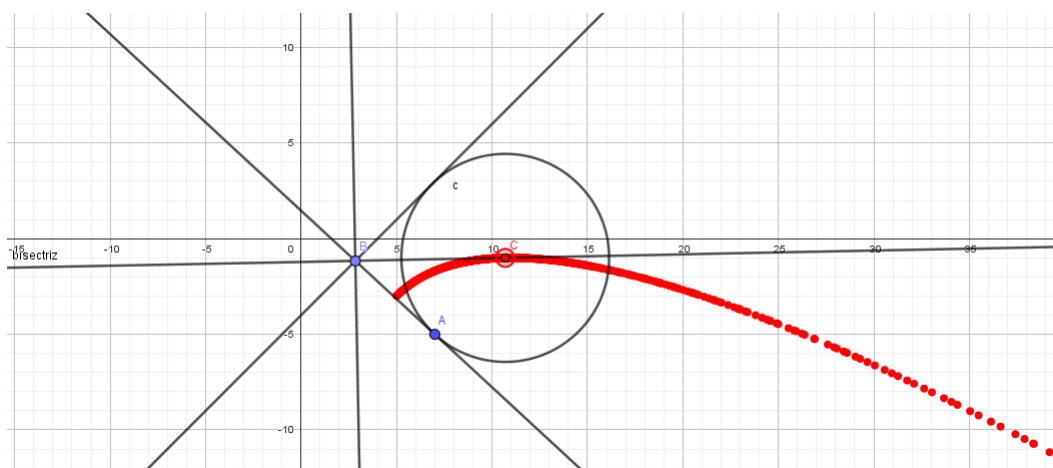


FIGURA 9. Parábola generada en GeoGebra, con los centros de las circunferencias tangentes a la recta R por el punto A . Fuente: elaboración propia

§5. Reflexiones finales y aportes para la enseñanza

Luego de haber atestiguado los procesos de solución, así como el desarrollo de los signos involucrados en el trabajo en el ambiente de geometría dinámica a través de los significados construidos por los estudiantes, haber revisado los trabajos de los alumnos, analizado las respuestas dadas durante las entrevistas, etc., nos permitimos enunciar cada una de las siguientes reflexiones para la enseñanza, que se encuentran sustentadas en la resolución de problemas, particularmente en planteamientos de [Polya \(1965\)](#) y [Schoenfeld \(1985\)](#), y su conjunción con el uso de tecnología sugerido por [Santos-Trigo \(2021\)](#), [Santos-Trigo y Camacho \(2018\)](#) y [Mariotti \(2009\)](#).

En el aula se debe propiciar la resolución de problemas porque, de acuerdo con [Schoenfeld \(1985\)](#), los alumnos movilizan los conocimientos y enriquecen el razonamiento matemático. Esto ocurre porque, usando el dominio de conocimientos y las herramientas del software, los estudiantes exploran más soluciones, buscan diferentes opciones y se ven motivados a ponerse retos e idear una diversidad de soluciones. Se hizo evidente que los alumnos estuvieron pensando, incluso cuando tuvieron a su disposición apuntes, libros, computadoras e internet.

La utilización de diferentes estrategias en la resolución de problemas (estrategias heurísticas y metacognitivas) resultó útil porque motivó a los alumnos a explorar, dudar, crear, inventar y mantenerse activos en el problema, incluso después de que el tiempo de clase había concluido. Este fue el caso de varios alumnos que comenzaron con la estrategia del ensayo y error, pero luego refinaron sus procesos y pudieron encontrar soluciones más consistentes.

El aporte del uso de la tecnología fue significativo, ya que permitió explorar de manera libre y rápida cada idea que surgiera y descartar otras, que quizás con lápiz y papel habría sido más dispendioso. También hubo alumnos que interactuaron de diversas formas con la tecnología e incluso les sirvió como medio para corroborar lo encontrado con lápiz y papel.

El rol de la profesora fue crucial, ya que además de rediseñar el problema, estuvo presente como mediadora, guiando a los alumnos para que descubrieran sus propias potencialidades. Mediante la formulación de preguntas clave durante el trabajo con el software de geometría dinámica o en las entrevistas realizadas posteriormente, tales como "¿tu construcción pasa la prueba del arrastre?". La profesora ayudó a los alumnos a desarrollar significados matemáticos más robustos, en línea con la Teoría de la Mediación Semiótica. El papel del docente como mediador es esencial en la resolución de problemas que involucran un artefacto como un software de geometría dinámica.

La resolución de problemas se destaca como un medio que enriquece y fortalece el aprendizaje de las matemáticas. Esto se hizo evidente cuando los alumnos mostraron diferentes enfoques para abordar el problema y una variedad de respuestas, algunas equivocadas, algunas generales y otras particulares, que les permitieron movilizar una mayor cantidad de estrategias, conocimientos y habilidades, apoyándose en las herramientas del software. Se hace notar además, que la formulación de problemas puede realizarse a partir de los materiales de los cuales dispone el profesor, siempre y cuando sean rediseñados con la intención de potencializar procesos como la generalización y la construcción de conjeturas, más allá de la utilización precisa de procedimientos bien establecidos.

Es notable cómo los alumnos no se limitaron a repetir teoremas y definiciones durante la resolución de problemas, sino que emplearon su tiempo en explorar dónde y cómo aplicarlos de manera significativa. Esto refleja un enfoque más profundo y reflexivo sobre los conceptos matemáticos, en lugar de simplemente seguir procedimientos mecánicos. Además, se destacaron ideas propias que mostraron ingenio, como la construcción de una recta auxiliar por parte de Miguel y Ángel.

El uso de recursos tecnológicos para explorar problemas permitió fomentar la creatividad, ya que brindó la posibilidad de pensar, ensayar ideas y descartarlas rápidamente cuando fuera necesario. Esto proporcionó un sentido de libertad que amplió las posibilidades de los alumnos, incluso cuando no tenían una comprensión completa de las formas analíticas. Estos aspectos resaltan varios de los planteamientos de Santos-Trigo (2016) sobre el uso de tecnologías digitales, al ofrecer oportunidades para analizar formas de construir y explorar representaciones para resolver problemas, así como para formular conjeturas y relaciones.

Bibliografía

- Arteaga, B., Macías, J., y Pizarro, N. (2020). La representación en la resolución de problemas matemáticos: un análisis de estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria. *Uniciencia*, 34(1), 263-280.
- Defaz, G. (2017). El desarrollo de habilidades cognitivas mediante la resolución de problemas matemáticos. *Journal of Science and Research*, 2(5), 14-17.
- Echenique, I. (2006). *Matemáticas resolución de problemas*. Descargado de https://www.educacion.navarra.es/web/publicaciones/catalogo/-/asset_publisher/JONi5m8mCym2/content/matematicas-resolucion-de-problemas
- Lehmann, C. (2009). *Geometría analítica*. México: Limusa.
- Mariotti, M. (2009). Artifacts and signs after a vygotskian perspective: the role of the teacher. *ZDM Mathematics Education*, 41, 427-440. doi: DOI10.1007/s11858-009-0199-z
- Mariotti, M., y Maffia, A. (2018). From using artefacts to mathematical meanings: the teacher's role in the semiotic mediation process. *Didattica della matematica. Dalle ricerche alle pratiche d'aula*, 3, 50 - 63. doi: 10.33683/ddm.18.4.3.1
- Mason, J., Burton, L., y Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente*. España: Labor.
- National Council of Teachers of Mathematics NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
- Polya, G. (1965). *¿Cómo resolver y plantear problemas?* México: Trillas.
- Santos-Trigo, L. M. (2016). La resolución de Problemas Matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11(15), 333-346. Descargado de OAI:<https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/oai>
- Santos-Trigo, L. M. (2021). Resolución de problemas matemáticos artefactos y tecnologías digitales. *Revista avance y perspectiva*, 7,1. Descargado de <https://avanceyperspectiva.cinvestav.mx/>
- Santos-Trigo, L. M., y Camacho, M. (2018). La Resolución de Problemas Matemáticos y el Uso de Tecnología Digital en el Diseño de Libros Interactivos. *Educatio Siglo XXI*, 36(3 Nov-Feb1), 21-40. Descargado de <https://revistas.um.es/educatio/article/view/349451> doi: 10.6018/j/349451
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. EUA: Academic Press INC.

NOELIA LONDOÑO MILLÁN
 Universidad Autónoma de Coahuila
 (✉) noelialondono@uadec.edu.mx

JOSÉ DAVID ZALDÍVAR ROJAS
Universidad Autónoma de Coahuila
(✉) david.zaldivar@uadec.edu.mx

MIGUEL VERTIZ ÁLVAREZ
Universidad Autónoma de Coahuila
(✉) mvertiz@uadec.edu.mx

Recibido: 6 de mayo de 2023.

Aceptado: 4 de junio de 2024.

Publicado en línea: 30 de agosto de 2024.

LAS PROPIEDADES ÚNICAS DEL 73

Ricardo A. Podestá

Dedicado a Roberto Miatello

RESUMEN. Primero mostramos un gran número de propiedades del número 73 y su reverso el 37. Luego contamos la Conjetura de Sheldon que dice que el 73 es el único primo que satisface dos propiedades concretas y damos una idea de la demostración de Spicer y Pomerance. Finalmente, consideramos números de Sheldon en sucesiones enteras.

Palabras clave: Números primos, reversos de números, Conjetura de Sheldon.

ABSTRACT. First we present several properties of the prime 73 and its reverse 37. Next, we introduce the Sheldon conjecture stating that 73 is the only prime satisfying two specific properties. Later, we give an idea of the proof of the conjecture given by Pomerance and Spicer. Finally, we consider Sheldon numbers defined on integer sequences.

Keywords: Prime numbers, reverse numbers, Sheldon conjecture.

§1. Introducción

Desde muy pequeño me gustan los números impares, pero no sé por qué, ‘feeling’ que le dicen. Y algunos impares me gustaban más que otros, como el 3, el 7 o el 11, pero no el 15, y no sabía por qué. Desde que cursé Álgebra I de la Licenciatura en Matemática en FaMAF (UNC) me gustan mucho los números primos y entonces entendí por qué algunos impares sí y por qué otros no. Nací en el ‘73 y soy hinchado del Rojo. Ese año *Independiente* de la mano (del pie diría) del *Bocha* ganó todo (Copa Libertadores, Copa Interamericana, Copa Intercontinental). ¡Me encanta el 73!



También me gustan *Los Simpsons* y *The Big Bang Theory*. En los episodios de estas series, además de críticas mordaces a la sociedad, suele haber algunos guiños a temas de matemática y física actuales de investigación, muy interesantes, por lo general conjeturas. Esta vez, lo que me llamó la atención es que en la serie *The Big Bang Theory*, allá por el 2010 y justamente en el Capítulo 73, el personaje *Sheldon Cooper* afirma rotundamente que *73 es el mejor número de todos* y da sus motivos. Resulta que 73 es un número primo que tiene ciertas propiedades muy interesantes, en particular en relación a su reverso 37, que también es primo.



Implícito en el diálogo con sus colegas estaba que 73 es el único número primo con esas propiedades. Este hecho seguramente llamó la atención de algunos matemáticos seguidores de la serie. En particular, la de Chris Spicer y colaboradores, que en 2015 estudiaron un poco más estas propiedades y enunciaron la que llamaron la *Conjetura de Sheldon*, que dice que 73 es el único primo con esas propiedades. Unos años más tarde, en 2019, el mismo Chris junto a Carl Pomerance pudieron probar la Conjetura de Sheldon.

La idea de este artículo es, por un lado, dar cuenta de algunas propiedades del número 73 (y su amigo el 37) que me parecen curiosas y fascinantes. Por otro lado, explicar de forma clara la Conjetura de Sheldon y esbozar la idea de la demostración de la prueba de Spicer y Pomerance sobre dicha conjetura. O sea, mostrar por qué, desde ahora, yo también pienso que 73 es un número super copado (como el rojo). Y que ya no es que me guste mucho, si no que desde ahora soy uno de sus fans.

§2. Propiedades del número 73 y su reverso 37

El número 73 es *primo*, es decir sus únicos divisores positivos son el 1 y el 73. Es el primo número 21 en la lista infinita de primos, cosa que se denota por

$$73 = p_{21}.$$

O sea, en general p_n denota el n -ésimo primo natural. Además, $21 = 7 \cdot 3$, por lo que podemos escribir más sugestivamente

$$73 = p_{7 \cdot 3}.$$

De hecho, 73 es un primo gemelo. Los *primos gemelos* son, por definición, pares de números primos que difieren en 2, es decir primos de la forma

$$\{p, p + 2\}$$

con $p \in \mathbb{N}$. Los primeros pares de primos gemelos son

$$\{3, 5\}, \{5, 7\}, \{11, 13\}, \{17, 19\}, \{29, 31\}, \{41, 43\}, \{59, 61\}, \{71, 73\}, \text{ etc.}$$

Aunque parezca raro, no se sabe si existen infinitos pares de primos gemelos. La Conjetura de los Primos Gemelos asegura que sí. El par más grande conocido es

$$2.996.863.034.895 \times 2^{1.290.000} - 1 \quad \text{y} \quad 2.996.863.034.895 \times 2^{1.290.000} + 1,$$

con 388.342 cifras decimales cada uno.

Como $73 = 64 + 8 + 1$, tenemos las descomposiciones en sumas de cuadrados y cubos

$$73 = 8^2 + 3^2 = 4^3 + 2^3 + 1^3$$

(estas sumas de dos cuadrados y tres cubos son únicas) y además que

$$(2.1) \quad 73 = 2^6 + 2^3 + 2^0 = (1001001)_2 \quad \text{y} \quad 73 = 8^2 + 8^1 + 8^0 = (111)_8$$

son sus expresiones en sistema binario y octal.

Siguiendo con la representación binaria, de los 7 dígitos binarios que representan al 73, 3 son 1's. Mas aún, el índice primo de 73 es 21 y en binario tenemos

$$(2.2) \quad 21 = (10101)_2 = (111)_2 \cdot (11)_2.$$

Además, $21 = 3 \cdot 7$ y $7 + 3 = 10$ y tenemos la relación

$$(21)_3 = (7)_{10},$$

que más sugestiva y simétricamente podemos escribir

$$(3 \cdot 7)_3 = (7)_{3+7}.$$

Resulta que 373 también es un primo, el número $74 = 37 \cdot 2$. ¡Cuántas coincidencias!

Como ya habrás notado, las expresiones binarias y octales en (2.1) y (2.2) son todas capicúas (son sus propios reversos). Sin embargo $(73)_{10}$, i.e. 73 en sistema decimal, no es capicúa. Su reverso es el 37, que es el duodécimo primo, o sea

$$37 = p_{12}.$$

Notar que el índice primo de 37 que es 12 es el reverso del índice primo del 73 que es 21. Volveremos más adelante sobre esta curiosidad que se las trae, y que ya hace un poco de cosquillas. Más aún, los cuadrados de los índices primos de 37 y 73 también son reversibles:

$$12^2 = 144 \quad \text{y} \quad 21^2 = 441.$$

Crear o reventar.

A partir de ahora mostraremos una gran cantidad de sorprendentes (para mí) propiedades de este par de números. Sin embargo, no puedo dejar de mencionar esta curiosidad del 37 y su índice 12. Cuenta la anécdota que cuando Hardy fue a visitar a Ramanujan al hospital allá por 1917 éste le dijo: ‘he venido en un taxi cuyo número 1729 me parece que no tiene ninguna propiedad interesante’; a lo que Ramanujan respondió: ‘No, para nada, es muy interesante, es el menor número que se puede escribir como suma de dos cubos de enteros positivos de dos formas distintas’. En efecto

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3.$$

Notar que $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$ y que si no se aclara que la suma es con cubos de enteros positivos, entonces el menor número que satisface eso es $1729/19 = 91$ pues

$$7 \cdot 13 = 91 = 6^3 + (-5)^3 = 4^3 + 3^3.$$

Hardy quedó impresionado por la anécdota y al contársela a Littlewood este contestó: ‘todo número entero es uno de los amigos personales de Ramanujan’. Bueno, resulta que 1729 es el menor número que puede representarse por la forma cuadrática de Lösch

$$a^2 + ab + b^2$$

de cuatro formas distintas: $(a, b) = (25, 23), (32, 15), (37, 8), (40, 3)$. O sea, 1729 es minimal satisfaciendo estas dos propiedades que involucran cuadrados y cubos y la expresión

$$1729 = 37^2 + 8 \cdot 37 + 8^2 = 1^3 + 12^3$$

involucra tanto a 37 como a su índice primo 12.

Propiedades aritméticas básicas de 37 y 73. Ahora veremos algunas curiosidades y propiedades en común de estos números, en particular, aquellas que los ligan o relacionan.

Para empezar, tenemos que

$$73 = 2 \cdot 37 - 1,$$

lo cual dice que 37 es el promedio de los divisores de su reverso: $37 = \frac{1+73}{2}$. Además, se tiene que

$$73 = 37^2 - 36^2 = (37 - 36)(37 + 36) = 36 + 37.$$

O sea, 73 es diferencia de cuadrados (involucrando a su reverso) y es un número *amable* (polite) por ser suma de números consecutivos (involucrando a su reverso). El 37 también es un número amable pues $37 = 18 + 19$. Además, es diferencia de cubos consecutivos

$$37 = 4^3 - 3^3 = 64 - 27$$

lo que lo convierte en un primo cubano, es decir de la forma $p = (n + 1)^3 - n^3$ con $n \geq 0$. Los primeros primos cubanos son 1, 7, 37, 61.

Simetrías. Teniendo en cuenta los primos y sus índices $p_{21} = 73$ y $p_{12} = 37$, tenemos que $73 = 37 + 3 \cdot 12$ y

$$73 + 21 = 94,$$

$$37 + 12 = 49.$$

Es decir, la suma del primo y su índice es el reverso de la suma del reverso y su índice. O sea, tanto el primo, su índice y la suma del primo y el índice son todos reversibles. ¡Sorprendente! De yapa, vemos que sus índices son ambos de la forma $9k - 6$ para k 's consecutivos. En efecto,

$$37 = p_{9 \cdot 2 - 6} \quad \text{y} \quad 73 = p_{9 \cdot 3 - 6}.$$

Residuos cuadráticos. Un entero x es residuo cuadrático módulo n si existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x \equiv a^2 \pmod{n}.$$

Resulta que 37 es un residuo cuadrático módulo 73 y, recíprocamente, 73 es un residuo cuadrático módulo 37. En efecto

$$37 = 16^2 \pmod{73} \quad \text{y} \quad 73 = 6^2 \pmod{37}.$$

En términos de los símbolos de Legendre, esto se expresa así:

$$\left(\frac{37}{73}\right) = 1 = \left(\frac{73}{37}\right).$$

Más y más simetrías, ¡qué bonito!

Primos sexies. Además, 37 y 73 son *primos sexies* (el nombre viene de un juego de palabras en inglés entre 'six' y 'sex'), pues forman parte de un par de primos de la forma

$$\{p, p + 6\},$$

ambos de manera doble. En efecto, tenemos los pares sexies

$$\{31, 37\}, \quad \{37, 43\}, \quad \text{y} \quad \{67, 73\}, \quad \{73, 79\}.$$

Acá menciono que 37 es un primo primo, pero 73 no lo es. Los números *primos primos* (cousin primes) son pares de números primos que difieren en 4, es decir primos de la forma

$$\{p, p + 4\}.$$

Luego $\{37, 41\}$ es un tal par, pero ni $73 - 4 = 69$ ni $73 + 4 = 77$ son primos. Lástima. Resumiendo, 73 es primo gemelo, 37 es primo primo y juntos forman un par de primos sexies.

Cuadrados mágicos y apocalípticos. El cuadrado mágico más pequeño, usando sólo números primos y el 1, tiene al 37 en el centro e involucra al 73 también

31	73	7
13	37	61
67	1	43

Su constante mágica (es decir la suma de filas, de columnas y de diagonales) es

$$37 \cdot 3 = 111.$$

Como todos sabemos, la suma de los n primeros naturales es

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

La ruleta tiene 37 números, del 0 al 36, y su suma es...

$$0 + 1 + \cdots + 36 = \frac{36 \cdot 37}{2} = 666,$$

el ¡número de la bestia! La suma de los primeros 73 números naturales es

$$(2.3) \quad 1 + 2 + \cdots + 73 = \frac{73 \cdot 74}{2} = 37 \cdot 73.$$

El siguiente es un cuadrado mágico 6×6 apocalíptico, pues su constante mágica es $666 = 18 \cdot 37$, formado sólo por números primos y que involucra a 37 y 73:

3	107	5	131	109	311
7	331	193	11	83	41
103	53	71	89	151	199
113	61	97	197	167	31
367	13	173	59	17	37
73	101	127	179	139	47

Triángulos rectángulos. Tanto el 37 como el 73 son primos pitagóricos, o sea primos de la forma

$$p = 4k + 1,$$

es decir que pueden ser la hipotenusa de un triángulo rectángulo. De hecho, el teorema de Fermat sobre suma de cuadrados, dice que un primo p es suma de dos cuadrados, de forma única salvo el orden, si y sólo si

$$p = 2 \quad \text{ó} \quad p \equiv 1 \pmod{4}.$$

En efecto, tenemos las ternas pitagóricas $(12, 35, 37)$ y $(48, 55, 73)$ pues

$$12^2 + 35^2 = 37^2 \quad \text{y} \quad 48^2 + 55^2 = 73^2.$$

Y aquí, una vez más, la magia: el cateto menor de cuya hipotenusa es 37 es 12, que es el índice primo de 37. El cateto menor de cuya hipotenusa es 73 es $48 = 4 \cdot 12$ y su reverso es $84 = 4 \cdot 21$, donde 21 es el índice primo de 73...

• Como consecuencia del teorema de Fermat de sumas de cuadrados, sólo los primos pitagóricos pueden ser la norma de algún elemento en el anillo de enteros Gaussianos

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Recordemos que la norma de $a + ib$ es $N(a + ib) = a^2 + b^2$ (el módulo al cuadrado como número complejo). Como se tienen las factorizaciones

$$\begin{aligned} 73 &= (8 - 3i)(8 + 3i) = 8^2 + 3^2, \\ 37 &= (6 + i)(6 - i) = (1 + 6i)(1 - 6i) = 6^2 + 1^2, \end{aligned}$$

73 y 37 son normas de enteros Gaussianos, pero no son primos en el anillo de enteros Gaussianos. La expresión $37 = 6^2 + 1^2$ dice que 37 es un primo de Cunningham (o sea, aquellos expresables de la forma $p = a^k \pm 1$ con $a, k > 1$).

• Como curiosidad adicional, notamos que el 37 es un número congruente. Un número n se dice *congruente* si es el área de un triángulo rectángulo de lados racionales a, b, c con área igual a $n = \frac{1}{2}ab$. Los números congruentes mas chicos son 5, 6 y 7. Por ejemplo 7 es congruente pues

$$\left(\frac{35}{12}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2 = \left(\frac{337}{60}\right)^2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{12} \cdot \frac{24}{5} = 7.$$

Equivalentemente, un número n es congruente si existen 3 cuadrados racionales a^2, b^2 y c^2 en progresión aritmética tales que

$$b^2 - a^2 = c^2 - b^2 = n.$$

Y para aquellos que saben un poco más de teoría de números, un número n es congruente si y sólo si la curva elíptica

$$y^2 = x^3 - n^2x$$

tiene rango positivo, o sea tiene un punto racional con $y \neq 0$.

Bueno, resulta que el 37 es congruente pues existe el triángulo rectángulo con catetos $a = 450660/777923$ y $b = 777923/6090$ e hipotenusa $c = 605170417321/4737551070$, en efecto se tiene

$$\left(\frac{450660}{777923}\right)^2 + \left(\frac{777923}{6090}\right)^2 = \left(\frac{605170417321}{4737551070}\right)^2,$$

y se cumple que

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{450660}{777923} \cdot \frac{777923}{6090} = \frac{225330}{6090} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 37}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29} = 37.$$

De hecho, 37 es el decimoséptimo número congruente.

Números triangulares, hexagonales y estelares. Con respecto a los *números triangulares*

$$T_n = \frac{1}{2}n(n + 1), \quad n \geq 1,$$

tenemos que tanto la diferencia como el producto de 73 y 37 son números triangulares

$$(2.4) \quad \begin{aligned} 73 - 37 &= 36 = T_8, \\ 73 \cdot 37 &= 2701 = T_{73}. \end{aligned}$$

(Recordar que en (2.3) vimos que $T_{73} = 1 + \dots + 73$). Notar que el reverso de 2701 es 1027 y si sumamos ambos tenemos

$$2701 + 1027 = 3773.$$

Mas aún, como $3773 = 7^3 \cdot 11$, la suma de los divisores propios de 3773 es...

$$s(3773) = \sum_{\substack{d|3773 \\ d < 3773}} d = 1027.$$

Luego, podemos escribir

$$37 \cdot 73 = 3773 - s(3773).$$

Y la cosa no termina ahí. El 2701 no sólo es el número triangular 73 si no que también es el número hexagonal número 37. El n -ésimo número hexagonal es

$$H_n = n(2n - 1), \quad n \geq 1.$$

Luego, $H_{37} = 37 \cdot 73$ y, por énfasis, vuelvo a escribir

$$H_{37} = 37 \cdot 73 = T_{73}.$$

• Además, 37 es el cuarto número hexagonal centrado. El n -ésimo número hexagonal centrado es

$$\tilde{H}_n = 3n^2 + 3n + 1 = 3n(n + 1) + 1,$$

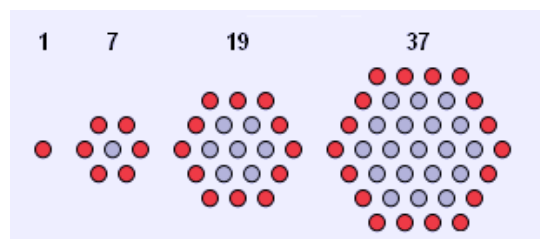
con $n \geq 0$, de donde tenemos la relación

$$(2.5) \quad \tilde{H}_n = 1 + 6T_n.$$

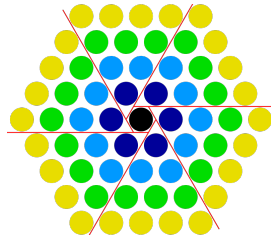
O sea

$$\tilde{H}_3 = 27 + 9 + 1 = 1 + 6T_3 = 37.$$

Gráficamente, los primeros 4 números hexagonales



El siguiente diagrama ilustra la descomposición de números hexagonales centrados en suma de números triangulares como en (2.5)



Notar que (expandiendo y simplificando) se cumple

$$\tilde{H}_n = (n + 1)^3 - n^3$$

de donde, usando sumas telescópicas, se obtiene la identidad

$$\sum_{k=0}^n \tilde{H}_k = (n + 1)^3.$$

Son notables las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{H}_n}{n!} = 4e, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{H}_n}{2^n} = 13 \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\tilde{H}_n} = \frac{\pi \tanh(\frac{\pi}{2\sqrt{3}})}{\sqrt{3}}.$$

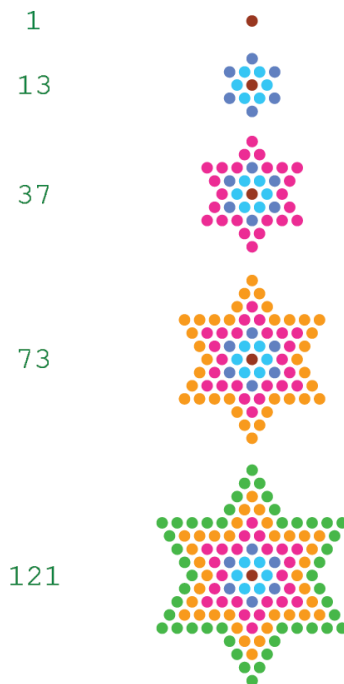
• El n -ésimo número estelar se define como

$$(2.6) \quad S_n = 6n(n - 1) + 1, \quad n \geq 1.$$

Notar que 37 y 73 son el tercer y cuarto números estelares pues

$$S_3 = 18 \cdot 2 + 1 = 37 \quad \text{y} \quad S_4 = 24 \cdot 3 + 1 = 73.$$

Los primeros números estelares son 1, 13, 37, 73, 121 y, gráficamente:



Cabe destacar el hecho fortuito de que el producto del segundo, tercer y cuarto números estelares es un número estelar:

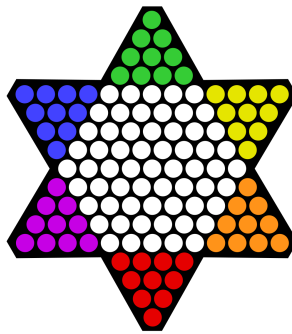
$$S_{77} = 35.113 = 13 \cdot 37 \cdot 73 = S_2 \cdot S_3 \cdot S_4$$

involucrando a nuestro par de primos 37 y 73 una vez más...

De la definición (2.6) es claro que

$$S_n = 12T_{n-1} + 1.$$

Gráficamente, a esto se lo puede interpretar reagrupando el punto central y 12 triángulos mas pequeños. Por ejemplo, el tablero del juego de las damas chinas es una estrella de $S_5 = 121$ puntos



Tenemos 6 triángulos exteriores de 10 puntos cada uno (60) y sabemos que el hexágono interior es de 61 ($H_4 = 61$) y por lo tanto se lo puede descomponer como 6 triángulos más de 10 puntos y el punto central (ver figura de la página 45).

Notablemente, se tiene la serie de los recíprocos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \tan\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right).$$

Para más propiedades de todos estos números ver por ejemplo las sucesiones [A000217](#), [A000384](#), [A003215](#) y [A003154](#) en la Enciclopedia en línea de sucesiones enteras (OEIS).

Números de Hogben El n -ésimo número poligonal central de Hogben es

$$\mathcal{H}_n = n^2 - n + 1 = \frac{n^3 + 1}{n + 1}, \quad n \geq 1.$$

El 73 es el noveno número de Hogben pues

$$\mathcal{H}_9 = 9^2 - 9 + 1 = \frac{729+1}{10} = 73.$$

Notar que se cumple $72 + 1 = 72 + \frac{9+1}{10} = \frac{729+1}{10}$. Más aún, el índice primo de 73, 21, también es un número de Hogben pues

$$\mathcal{H}_5 = 5^2 - 5 + 1 = 21.$$

Los primeros números de Hogben son

$$1, 3, 7, 13, 21, 31, 43, 57, 73, 91, 111, 133, \text{ etc.}$$

Estos números satisfacen ciertas recurrencias; por ejemplo dos números de Hogben consecutivos \mathcal{H}_{n+1} y \mathcal{H}_n difieren en $2n$,

$$\mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{H}_n + 2n$$

y para tres términos consecutivos se cumple

$$\mathcal{H}_{n+3} = 3\mathcal{H}_{n+2} - 3\mathcal{H}_{n+1} + \mathcal{H}_n.$$

Al colocar los números naturales en una espiral concéntrica desde el 1 y rotando en sentido horario, los números de Hogben quedan en la diagonal principal (¿por qué?). Si bien 37 no es un número de Hogben, este queda en la diagonal secundaria o antidiagonal.

43	44	45	...			
42	21	22	23	24	25	26
41	20	7	8	9	10	27
40	19	6	1	2	11	28
39	18	5	4	3	12	29
38	17	16	15	14	13	30
37	36	35	34	33	32	31

Notar que mientras que $73 = \mathcal{H}_9$, para el 37 tenemos

$$37 = \frac{1}{2}(31 + 43) = \frac{1}{2}(\mathcal{H}_6 + \mathcal{H}_7)$$

y su índice primo 12 satisface

$$12 = \mathcal{H}_7 - \mathcal{H}_6.$$

O sea, 73 y su índice primo 21 son números de Hogben y 37 y su índice primo 12 son respectivamente el promedio y la diferencia de números de Hogben consecutivos.

Todos los números de Hogben \mathcal{H}_n se escriben como (111) en base $n - 1$ (o sea, son repitunos en base $n - 1$), pues

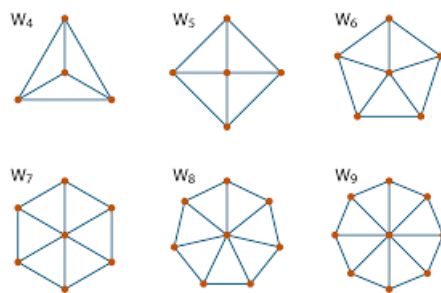
$$(n - 1)^2 + (n - 1) + 1 = n^2 - n + 1 = \mathcal{H}_n.$$

En nuestros casos de interés tenemos

$$\mathcal{H}_5 = (111)_4 = 21 \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_9 = (111)_8 = 73.$$

Se sabe que: (a) \mathcal{H}_n es el máximo número de 1's que una matriz $n \times n$ inversible con entradas $\{0, 1\}$ puede tener, (b) \mathcal{H}_n es el número máximo de regiones interiores

de la intersección de n círculos, (c) el número de ciclos que hay en el grafo rueda W_n , para $n \geq 3$.



Para más propiedades de estos números ver la sucesión [A002061](#) en OEIS.

Primos de la forma... Aquí veremos varias propiedades aritméticas particulares P tal que 37 y 73 son primos consecutivos que cumplen esa propiedad P .

Tenemos que 37 y 73 son:

- (a) Primos de la forma $2k + 1, 3k + 1, 4k + 1, 6k + 1, 9k + 1, 12k + 1, 18k + 1$ y $36k + 1$. Y son primos consecutivos de la forma

$$9k + 1$$

(y por lo tanto de la forma $18k + 1$ y $36k + 1$), los primeros son 19, 37, 73, 109.

- (b) Primos consecutivos de la forma $9 \cdot 2^k + 1$ pues

$$37 = 9 \cdot 2^2 + 1 \quad \text{y} \quad 73 = 9 \cdot 2^3 + 1.$$

Los primeros primos de esta forma son 19, 37, 73, 577, 1153, 18433, 147457. Más generalmente, son primos consecutivos de la forma

$$(2.7) \quad 2^a 3^b + 1, \quad a, b > 0.$$

Los primeros son

$$(2.8) \quad 7, 13, 19, 37, 73, 97, 109, 163, 193, 433, 487, 577, 769, 1153, 1297.$$

- (c) Números consecutivos que cumplen

$$\varphi(n) = 3\varphi(n-1),$$

con n natural y $\varphi(n)$ la función de Euler que cuenta el número de coprimos con n entre 1 y n . Claramente si p es primo se tiene que $\varphi(p) = p - 1$ y que $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p - 1)$ para todo k y se sabe que φ es multiplicativa, es decir $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si $(m, n) = 1$.

Se cumple que

$$\varphi(37) = 36 \quad \text{y} \quad 3\varphi(36) = 3\varphi(2^2)\varphi(3^2) = 3 \cdot 2 \cdot 6 = 36,$$

$$\varphi(73) = 72 \quad \text{y} \quad 3\varphi(72) = 3\varphi(2^3)\varphi(3^2) = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72.$$

Los primeros números así son

7, 13, 19, 37, 73, 91, 97, 109, 163, 193, 433, 487, 577, 703, 769, 793, 925, 1153.

Notablemente, los primos en esta secuencia, son los de la sucesión (2.8). En efecto, si $p = 2^a 3^b + 1$ es primo, entonces

$$3\varphi(p - 1) = 3\varphi(2^a)\varphi(3^b) = 3 \cdot 2^{a-1}3^{b-1}(3 - 1) = 2^a 3^b = p - 1 = \varphi(p).$$

(d) Primos consecutivos que son el promedio de dos cuadrados de primos, es decir primos de la forma

$$\frac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

con p y q primos. Equivalentemente, son primos de la forma $x^2 + y^2$ con $x > y > 0$ tales que

$$x - y = p \quad \text{y} \quad x + y = q$$

son primos. En efecto,

$$\frac{1}{2}(p^2 + q^2) = \frac{1}{2}((x - y)^2 + (x + y)^2) = x^2 + y^2$$

de donde $x = \frac{1}{2}(p + q)$ e $y = \frac{1}{2}(q - p)$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} 37 &= 6^2 + 1^2 & \text{con} & \quad 6 - 1 = 5 & \text{y} & \quad 6 + 1 = 7, \\ 73 &= 8^2 + 3^2 & \text{con} & \quad 8 - 3 = 5 & \text{y} & \quad 8 + 3 = 11, \end{aligned}$$

y también tenemos que

$$37 = \frac{1}{2}(5^2 + 7^2) \quad \text{y} \quad 73 = \frac{1}{2}(5^2 + 11^2).$$

Los primeros primos de este tipo son 17, 29, 37, 73, 89, 97, 109, 149, etc.

(e) Primos consecutivos de la forma $a^2 + b^6$, pues

$$37 = 6^2 + 1^6 \quad \text{y} \quad 73 = 3^2 + 2^6.$$

Los primeros primos de este tipo son 2, 5, 17, 37, 73, 89, 101, 113, 197, 233, 257.

(f) Primos de la forma $n^2 + n + 17$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Los primeros son

17, 19, 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, 149, 173, 199, 227, 257, 359, 397, 479, 523.

Lo interesante aquí es que Legendre en 1798 observó que el polinomio entero

$$p(x) = x^2 + x + 17$$

toma valores primos para los 16 enteros consecutivos $x = 0, 1, \dots, 15$. Por ejemplo $p(0) = 17$, $p(4) = 37$, $p(7) = 73$ y $p(15) = 257$, pero

$$p(16) = 16^2 + 16 + 17 = 16(16 + 1) + 17 = 17^2.$$

(g) Primos consecutivos de la forma

$$(n - 1)F_{n-1} + nF_n$$

donde F_n es el n -ésimo número de Fibonacci. Los primeros números de Fibonacci son 1, 1, 2, 3, 5, 8 y se tiene

$$37 = 4F_4 + 5F_5 = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 12 + 25,$$

$$73 = 5F_5 + 6F_6 = 5 \cdot 5 + 6 \cdot 8 = 25 + 48.$$

(h) Primos consecutivos de la forma $3x^2 + 25y^2$. Tenemos

$$37 = 3 \cdot 2^2 + 25 \cdot 1^2 \quad \text{y} \quad 73 = 3 \cdot 4^2 + 25 \cdot 1^2.$$

Los primeros son 3, 37, 73, 103, 127, 457, 463, 547, 607, 613, 643, 673, 733.

(i) Primos consecutivos de la forma $5x^2 + 17y^2$. Tenemos

$$37 = 5 \cdot 2^2 + 17 \cdot 1^2 \quad \text{y} \quad 73 = 5 \cdot 1^2 + 17 \cdot 2^2.$$

Los primeros son 5, 17, 37, 73, 97, 113, 173, 193, 197, 233, 277, 313, 317.

(j) Primos consecutivos p tales que $4p + 1$ y $6p + 1$ son también primos. Tenemos las ternas

$$\{37, 149, 223\} \quad \text{y} \quad \{73, 293, 439\}.$$

Los primeros son de la forma 13, 37, 73, 97, 193, 277, 373, 409, 433, 577, 673, 709.

(k) Primos consecutivos p tales que $2p + 1$ tiene 3 factores primos:

$$2 \cdot 37 + 1 = 75 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \quad \text{y} \quad 2 \cdot 73 + 1 = 147 = 3 \cdot 7 \cdot 7.$$

Los primeros son de la forma 13, 31, 37, 73, 97, 103, 127, 137, 139, 181, 193, 199, 211.

Primos de la suerte. Un *número suertudo* o *número de la suerte* es un número natural que es generado por una especie de criba que explicamos a continuación, donde el cribado elimina los números según su posición y no su valor. Veremos que tanto 37 como 73 son primos suertudos.

Digamos que 1 es un número suertudo y comenzamos a cribar solo los números impares:

(2.9) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, ...

El primer número mayor que 1 es 3, así que declaramos a 3 un número de la suerte y tachamos todos los números de la lista de arriba, no que sean múltiplos de 3, si no que ocupen una *posición* que sea múltiplo de 3 en la lista (2.9), i.e., 5, 11, 17, 23, 29, 35 y así:

1, 3, ~~5~~, 7, 9, ~~11~~, 13, 15, ~~17~~, 19, 21, ~~23~~, 25, 27, ~~29~~, 31, 33, ~~35~~, 37, 39, ...

Nos quedan los números

(2.10) 1, 3, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 25, 27, 31, 33, 37, 39, ...

El primer número nuevo que sobrevivió es el 7, así que declaramos al 7 suertudo y borramos todos los números de la lista que están en una posición múltiplo de 7 en (2.10), i.e. 19, 39, y así sucesivamente. El próximo número de la suerte es el 9 y continuando con este proceso se obtienen los números suertudos.

Los primeros números de la suerte son

1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 31, 33, 37, 43, 49, 51, 63, 67, 69, 73, 75, 79, 87, 93, 99, 105, etc.

Un *primo de la suerte* es un número primo que es suertudo. Los primeros primos de la suerte son

3, 7, 13, 31, 37, 43, 67, 73, 79, etc.

Se conjetura que hay infinitos primos de la suerte, pero esto tampoco se sabe.

Primos de Pierpont y origamis. Tanto 37 como 73 son primos de Pierpont. Un número primo p es un *primo de Pierpont* si se lo puede escribir como

$$p = 2^r \cdot 3^s + 1$$

con $r, s \geq 0$ (notar la diferencia con (2.7) donde los exponentes no son 0)). Los primeros primos de Pierpont son

2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 37, 73, 97, etc.

En efecto, ya vimos que

$$37 = 2^2 \cdot 3^2 + 1 \quad \text{y} \quad 73 = 2^3 \cdot 3^2 + 1.$$

A.M. Gleason probó en 1988 (Gleason, 1988) que un polígono regular de n lados puede construirse con regla, compás y un trisector de ángulos, y por lo tanto doblando papeles (origami), si y sólo si

$$n = 2^r 3^s p_1 \cdots p_k,$$

con $r, s \geq 0$, donde los p_i 's son primos de Pierpont distintos.

Comparemos esto con el resultado clásico de polígonos construibles solamente con regla y compás. El teorema de Gauss-Wantzel (clásico, 1836) asegura que un polígono regular de n lados es construible con regla y compás si y sólo si

$$n = 2^r \quad \text{ó} \quad n = 2^r p_1 \cdots p_k$$

donde $r > 0$ y los p_i 's son primos de Fermat distintos, es decir primos de la forma $2^{2^m} + 1$ para algún $m \in \mathbb{N}$.

Redondeando, no es posible construir polígonos regulares de 37 y 73 lados sólo usando regla y compás, pero si es posible construirlos si permitimos además usar un trisector (o equivalentemente, plegado del papel). ¡Qué maravilla!

Números de Waring. Un problema famoso en teoría de números es el propuesto por Edward Waring en 1770. Él se preguntaba si para cada número natural fijo k ,

existe un $s \in \mathbb{N}$ tal que todo natural n puede ser escrito como la suma de a lo sumo s potencias k -ésimas de enteros. Es decir, si dado k existe un s tal que para todo n existen $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{Z}$ tales que

$$n = n_1^k + \dots + n_s^k$$

(pudiendo algunos n_i ser 0). Desde entonces se lo conoce como el *problema de Waring*. La respuesta afirmativa general fue dada en 1909 por Hilbert en el que se conoce como Teorema de Hilbert–Waring. Al menor natural s tal que todo $n \in \mathbb{N}$ se lo puede escribir como a lo sumo s potencias k -ésimas se lo denota $g(k)$ y se lo llama el k -ésimo *número de Waring*.

Obviamente que $g(1) = 1$. Por el famoso teorema de los cuatro cuadrados de 1770 de Lagrange sabemos que todo natural es suma de a lo sumo 4 cuadrados. Pero 3 cuadrados no son suficientes, pues los cuadrados módulo 8 son 0, 1 y 4 y entonces todo número congruente a 7 módulo 8 no puede ser suma de 3 cuadrados ($7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$). Entonces tenemos que

$$g(2) = 4.$$

El teorema de Lagrange fue conjeturado por Bachet en la edición de 1621 del libro *Aritmética* de Diofanto. Se cuenta que Fermat decía que tenía una prueba pero que no la publicó...

A partir del teorema de Hilbert en 1909, los casos para k pequeños fueron resueltos durante el siglo XX. Que $g(3) = 9$ fue probado independientemente por A. Wieferich en 1909 y por A.J. Kempner en 1912. Chen Jingrun (1964) y S.S. Pillai (1940) probaron respectivamente que

$$g(5) = 37 \quad \text{y} \quad g(6) = 73.$$

Finalmente en 1986, R. Balasubramanian, F. Dress y J.-M. Deshouillers probaron que $g(4) = 19$. Es decir, 37 y 73 son números de Waring consecutivos.

J.A. Euler, el hijo de Leonhard Euler, notó en 1772 que $g(k) \leq 2^k + \lfloor (\frac{3}{2})^k \rfloor - 2$. Dickson, Pillai, Rubugunday, Niven y otros probaron que

$$g(k) = 2^k + \lfloor (\frac{3}{2})^k \rfloor - 2 \quad \text{si} \quad 2^k \{ (\frac{3}{2})^k \} + \lfloor (\frac{3}{2})^k \rfloor \leq 2^k,$$

donde $\{x\}$ denota la parte fraccionaria de $x \in \mathbb{R}$. Pero no se conoce ningún valor de k tal que $2^k \{ (\frac{3}{2})^k \} + \lfloor (\frac{3}{2})^k \rfloor > 2^k$, y Mahler probó que sólo puede haber un número finito de tales k . En 1990, Kubina y Wunderlich mostraron que

$$(2.11) \quad g(k) = 2^k + \lfloor (\frac{3}{2})^k \rfloor - 2$$

vale para todo $k \leq 471.600.000$ y se conjetura que vale para todo k . Los primeros valores de los números de Waring son entonces

$$1, 4, 9, 19, 37, 73, 143, 279, 548, 1079, 2132, 4223, 8384, \text{etc.}$$

Chequeamos la formula (2.11) en los casos que nos interesa:

$$g(5) = 2^5 + \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^5 \right\rfloor - 2 = 32 - \left\lfloor \frac{243}{32} \right\rfloor - 2 = 30 + \left\lfloor 7 + \frac{19}{32} \right\rfloor = 37,$$

$$g(6) = 2^6 + \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^6 \right\rfloor - 2 = 64 + \left\lfloor \frac{729}{64} \right\rfloor - 2 = 62 + \left\lfloor 11 + \frac{25}{64} \right\rfloor = 73.$$

Cosa'e mandinga.

Números de Sierpinski y de Riesel. Un número de Sierpiński (resp. de Riesel) es un impar $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \cdot 2^n + 1 \quad (\text{resp. } k \cdot 2^n - 1)$$

es compuesto para todo $n \in \mathbb{N}$. En 1956 Hans Riesel probó que existen infinitos números de Riesel y en 1960 Waclaw Sierpiński probó que existen infinitos números de Sierpiński.

La sucesión de los números de Sierpiński conocidos comienza

$$78557, 271129, 271577, 322523, 327739, 482719, 575041, 603713, 903983.$$

John Selfridge probó en 1962 que el número 78557 es de Sierpiński y conjeturó que es el más chico (aún no se sabe si lo es). Mas aún, Selfridge probó que

$$78557 \cdot 2^n + 1$$

tiene un factor en el conjunto de cubrimiento

$$(2.12) \quad \{3, 5, 7, 13, 19, 37, 73\}$$

para todo n . Por ejemplo,

$$78557 \cdot 2^3 + 1 = 628457 = 73 \cdot 8609,$$

$$78557 \cdot 2^{12} + 1 = 321769473 = 3 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 73 \cdot 727,$$

$$78557 \cdot 2^{21} + 1 = 164745969665 = 5 \cdot 73 \cdot 451358821,$$

y

$$78557 \cdot 2^{27} + 1 = 10543742058497 = 37 \cdot 167 \cdot 40427 \cdot 42209.$$

Más generalmente se tiene que

$$78557 \cdot 2^{2n} + 1 \text{ es múltiplo de } 3,$$

$$78557 \cdot 2^{4n+1} + 1 \text{ es múltiplo de } 5,$$

$$78557 \cdot 2^{3n+1} + 1 \text{ es múltiplo de } 7,$$

$$78557 \cdot 2^{12n+11} + 1 \text{ es múltiplo de } 13,$$

$$78557 \cdot 2^{18n+15} + 1 \text{ es múltiplo de } 19,$$

$$78557 \cdot 2^{36n+27} + 1 \text{ es múltiplo de } 37,$$

$$78557 \cdot 2^{9n+3} + 1 \text{ es múltiplo de } 73,$$

para todo $n \geq 0$.

En 1956, Riesel probó que 509203 es un número de Riesel. La sucesión de números de Riesel conocidos comienza:

509203, 762701, 777149, 790841, 992077, 1106681, 1247173, 1254341, 1330207,
1330319, 1715053, 1730653, 1730681, 1744117, 1830187, 1976473, 2136283,
2251349, 2313487, 2344211, 2554843, 2924861, 3079469, 3177553, 3292241, 3419789,
3423373, 3580901, 3661529, 3661543, 3781541, 3784439, 4384979, 4442323,
4485343, 4506097, 4507889, 4570619, 4626967, 4643293, 4953397.

Se conjetura que 509203 es el más chico. Por ejemplo, los números de Riesel 777149, 790841, 1106681, 1715053, 3079469, 3580901, 4485343, 4570619 y 4953397 tienen conjunto de cubrimiento dado en (2.12). Por ejemplo, tenemos que

$$777149 \cdot 2^3 - 1 = 6217191 = 3^2 \cdot 73 \cdot 9463,$$

$$777149 \cdot 2^{12} - 1 = 3183202303 = 73 \cdot 43605511,$$

$$777149 \cdot 2^{21} - 1 = 1629799579647 = 3^2 \cdot 23 \cdot 47 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 32321,$$

y

$$777149 \cdot 2^{36} - 1 = 53405272625905663 = 37 \cdot 103 \cdot 14013453850933.$$

O sea, 37 y 73 son números consecutivos en los conjuntos de cubrimiento de muchos números de Riesel y Sierpiński.

§2. La Conjetura de Sheldon

Hasta aquí hemos visto muchísimas curiosidades que comparten el número 73 y su reverso 37. Ahora veremos cuáles son las propiedades que hacen que este par sea único.

Como ya mencionamos en la introducción, en el episodio 73 (2010) Sheldon afirma ante sus amigos que 73 es el mejor número de todos. Y lo justifica así: 73 es el primo número 21. Su reverso es el primo 37, que es el primo número 12 y 12 es reverso de 21 que es (ta-tán, ta-tán..) el producto de 3 y 7. Más aún, 73 en binario es 1001001, que es capicúa, es decir, su reverso es el mismo 1001001, y tiene 7 dígitos y 3 unos. Y aunque Sheldon no lo dijo explícitamente, deja entrever que 73 es el único número con estas propiedades.

En 2015, Jessie Byrnes, Chris Spicer y Alyssa Turnquist, en homenaje a Sheldon, definieron un primo de Sheldon como el primo que satisface estas condiciones (las daremos formalmente mas abajo) y conjeturaron que 73 es el único primo así, bautizando a esta como la Conjetura de Sheldon. Justamente, en esta sección seguiremos su artículo (Byrnes, Spicer, y Turnquist, s.f.) bastante, por ser muy claro y pedagógico.

Propiedad espejo. El reverso (o espejo) de un número natural n , denotado por $\text{rev}(n)$, es el número escrito con sus dígitos en orden inverso. Por ejemplo,

$$\text{rev}(2024) = 4202, \quad \text{rev}(1980) = 891 \quad \text{y} \quad \text{rev}(10000) = 1.$$

Formalmente, si

$$n = a_k \cdots a_2 a_1$$

es la representación decimal de n con $0 \leq a_i \leq 9$ para $i = 1, \dots, k$, entonces el reverso de n es

$$\text{rev}(a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1) = a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k.$$

Si un número n es igual a su propio reverso, es decir

$$\text{rev}(n) = n,$$

decimos que el número n es *palíndromo* (también *palindrómico* o *capicúa*). Los primos palindrómicos como 101 u 11311 son raros. Claramente, hay infinitos números capicúas, pero se desconoce si hay infinitos primos palindrómicos.

Bueno, ya podemos dar la definición de la primera propiedad.

Definición 3.1 ((Byrnes y cols., s.f.)). *El n -ésimo primo p_n satisface la propiedad espejo si el reverso de p_n es el $\text{rev}(n)$ -ésimo primo, es decir si*

$$(3.1) \quad \text{rev}(p_n) = p_{\text{rev}(n)}.$$

Notar que hay dos afirmaciones en la propiedad previa:

- (a) La primera es que el reverso de p_n es un primo (no garantizado).
- (b) La segunda es que $\text{rev}(p_n)$ es el $\text{rev}(n)$ -ésimo primo (definitivamente no garantizado).

Estudiemos un poco cada una de estas afirmaciones por separado. Los primos palindrómicos claramente satisfacen la primera, pero no son los únicos. Por ejemplo

$$389 \quad \text{y} \quad \text{rev}(389) = 983$$

son ambos primos, al igual que 73 y $\text{rev}(73) = 37$. Aunque hay condiciones obvias que impiden que un primo satisfaga esta propiedad, como que no pueden comenzar con los dígitos 2, 4, 5, 6 y 8, los primos que satisfacen (a) son bastante comunes. De los primeros 10 millones de primos, el 14,99% satisfacen la primer condición.

La segunda mitad de la propiedad espejo afirma que $\text{rev}(p_n)$ es el $\text{rev}(n)$ -ésimo primo. Esto es una condición mucho más fuerte que la primera. Los primos $2 = p_1$, $3 = p_2$, $5 = p_3$, $7 = p_4$ y $11 = p_5$ satisfacen esta propiedad trivialmente porque tanto n como p_n son palíndromos. De hecho, esto es general, si un primo capicúa tiene índice capicúa, entonces obviamente satisfará la condición (b) y por lo tanto la propiedad espejo.

Incluidos en esta lista están el $73 = p_{21}$ y el $37 = p_{12}$ pues

$$\text{rev}(73) = \text{rev}(p_{21}) = p_{\text{rev}(21)} = p_{12} = 37$$

y obviamente $\text{rev}(37) = \text{rev}(p_{12}) = p_{\text{rev}(12)} = p_{21} = 73$. Mirando a los primeros 10 millones de primos otra vez, la cosa resulta muy diferente. Sólo hay un primo mayor que 73 que satisface la propiedad espejo y es

$$143.787.341 = p_{8.114.118}$$

Anecdóticamente, aquí también, como en el caso de los primos de un dígito, el primo y su índice son capicúas.

Propiedad producto. Para un natural n , denotaremos por $\Pi(n)$ el producto de sus dígitos. Por ejemplo,

$$\Pi(73) = 21, \quad \Pi(123.456.789) = 9! \quad \text{y} \quad \Pi(2024) = 0.$$

En general, si $n = (a_k \cdots a_1)_{10}$ entonces

$$\Pi(n) = a_k \cdots a_1.$$

Estamos en condiciones de dar la segunda propiedad que nos interesa.

Definición 3.2 ((Byrnes y cols., s.f.)). *El n -ésimo primo satisface la propiedad producto si el producto de sus dígitos es igual a n . En símbolos, si*

$$(3.2) \quad \Pi(p_n) = n.$$

Notar que si el primo p contiene a 0 como dígito entonces no cumplirá la propiedad producto pues

$$\Pi(p) = 0.$$

Este sencillo hecho reduce significativamente el número de primos que pueden satisfacer la propiedad producto. Supongamos que q es un primo de k dígitos. Claramente, q no puede ni empezar ni terminar en 0. Supongamos que para los demás $k - 2$ dígitos los números del 0 al 9 son igual de probables. La probabilidad de que q no contenga un 0 es

$$\left(\frac{9}{10}\right)^{k-2}.$$

Hay una probabilidad relativamente alta de que un primo pequeño no contenga un dígito 0. Sin embargo, para primos mayores la probabilidad es muy pequeña. Por ejemplo, para un primo de 512 dígitos de longitud, dicha probabilidad es $4,6 \times 10^{-24}$, aproximadamente.

Como $\Pi(n)$ es el producto de los dígitos de n , y éstos pertenecen al conjunto de dígitos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, deducimos que 2, 3, 5 y 7 son los únicos factores primos posibles de $\Pi(n)$, es decir es de la forma

$$(3.3) \quad \Pi(n) = 2^i 3^j 5^k 7^l, \quad i, j, k, l \geq 0.$$

En teoría de números, a los enteros que tienen pocos factores se los conoce como números suaves. Formalmente, a los enteros cuyos factores primos son menores o iguales que m se los llaman m -suaves. Por ejemplo, $72 = 2^3 \cdot 3^2$ es 3-suave y $125 = 5^3$ es 5-suave, pero no 3-suave. Así,

$$(3.4) \quad \Pi(n) \text{ es un número } 7\text{-suave para todo } n.$$

En particular, si n tiene un factor primo mayor que 7, entonces p_n no satisface la propiedad producto. Esto lógicamente reduce enormemente el número de enteros que pugnan por ser primos de Sheldon.

Sabemos que $73 = p_{21}$ satisface la propiedad producto pues

$$\Pi(73) = 7 \cdot 3 = 21$$

y también la cumple el $17 = p_7$ trivialmente pues

$$\Pi(17) = 1 \cdot 7 = 7.$$

El único primo mayor que 73 de entre los primeros 10 millones de primos que cumple esta propiedad producto es el primo 2.475.989 pues

$$2.475.989 = p_{181.440}$$

y se tiene que

$$\Pi(2.475.989) = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 181.440.$$

Primos de Sheldon. Damos finalmente la definición de los primos que nos interesan.

Definición 3.3 ((Byrnes y cols., s.f.)). *A un número natural que satisface la propiedad espejo y la propiedad producto se lo llama primo de Sheldon.*

Es decir, p_n es primo de Sheldon si

$$(3.5) \quad \text{rev}(p_n) = p_{\text{rev}(n)} \quad \text{y} \quad \Pi(p_n) = n.$$

Además, por (3.3) y (3.4) sabemos que el índice n es 7-suave de la forma

$$(3.6) \quad n = 2^i 3^j 5^k 7^l, \quad i, j, k, l \geq 0.$$

Por lo visto hasta ahora, sabemos que

- $73 = p_{21}$ es un primo de Sheldon,

y de entre los primeros 10 millones de primos sólo encontramos:

- uno que satisface la propiedad espejo $143.787.341 = p_{8.114.118}$,
- y otros dos que satisfacen la propiedad producto: $17 = p_7$ y $2.475.989 = p_{181.440}$.

Sin embargo, $143.787.341 = p_{8.114.118}$ no satisface la propiedad producto y $17 = p_7$ y $2.475.989 = p_{181.440}$ no satisfacen la propiedad espejo. Es decir, entre los primeros

10 millones de primos solo el 73 es un primo de Sheldon. ¿Podemos decir algo más?

Este es un buen momento para finalmente enunciar la Conjetura de Sheldon

Conjetura 3.4 ((Byrnes y cols., s.f.)). *73 es el único primo de Sheldon.*

§3. ¡Sheldon tenía razón!

En la búsqueda de probar la Conjetura de Sheldon, intentaremos primero conocer un poco más sobre la naturaleza de los primos de Sheldon. Veremos que de existir mas primos de Sheldon, estos están acotados y deben satisfacer propiedades aritméticas bien concretas. Mas adelante usaremos estas cosas para probar que 73 es el único primo de Sheldon. En esta sección seguiremos el artículo (Pomerance y Spicer, 2019).

Si hay otro primo de Sheldon, es grande pero no tanto. Ya vimos que no hay primos de Sheldon p_n mayores a 73 entre los primeros 10 millones de primos ($n < 10^7$). O sea que si hay un primo de Sheldon p mayor a 73 debe ser muy grande... ¡pero no tanto! Veremos que necesariamente $p < 10^{45}$.

Para ello necesitamos recordar algunas cosas. Dado $x \in \mathbb{R}$, se denota por $\pi(x)$ al número de primos menores que x , es decir

$$\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{P} : 2 \leq p \leq x\}.$$

Por el famoso teorema del número primo (probado en 1896 independientemente por Hadamard y de la Vallée Poussin) sabemos que $\pi(x)$ es asintóticamente equivalente a la función $x/\log(x)$, en símbolos

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$$

(donde \log es la función logaritmo natural). Esto significa que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log(x)}} = 1.$$

Se sabe que, salvo para valores pequeños de x , $\pi(x)$ es mayor que $x/\log(x)$. En efecto, Rosser y Schoenfeld probaron en 1962 (Rosser y Schoenfeld, 1962) que

$$(4.1) \quad x \geq 17 \quad \Rightarrow \quad \pi(x) > \frac{x}{\log(x)}.$$

Ahora estamos en condiciones de ver que los primos de Sheldon están acotados superiormente.

Proposición 4.1 ((Byrnes y cols., s.f.)). *Si p_n es un primo con la propiedad producto entonces $p_n < 10^{45}$.*

Demostración. Supongamos que p_n tiene k dígitos, digamos $p_n = a_k \cdots a_2 a_1$. Luego,

$$(4.2) \quad a_k \cdot 10^{k-1} < p_n < 10^k.$$

Además, el producto de esos dígitos es menor que $a_k \cdot 9^{k-1}$, es decir

$$(4.3) \quad \Pi(p_n) = \prod_{i=1}^k a_i \leq a_k \cdot 9^{k-1}.$$

Usando la desigualdad (4.1), para $p_n \geq 17$ tenemos que

$$(4.4) \quad n = \pi(p_n) > \frac{p_n}{\log(p_n)}.$$

Por lo tanto, si p_n satisface la propiedad producto, tenemos $n = \Pi(p_n)$ y juntando las desigualdades (4.2), (4.3) y (4.4) tenemos

$$\frac{a_k \cdot 10^{k-1}}{\log(a_k \cdot 10^{k-1})} < \frac{p_n}{\log(p_n)} < n < a_k \cdot 9^{k-1}.$$

Mirando los extremos llegamos a que $\log(a_k \cdot 10^{k-1}) > a_k \cdot 10^{k-1} / a_k \cdot 9^{k-1}$, o sea

$$(4.5) \quad \log(a_k) + \log(10^{k-1}) > \left(\frac{10}{9}\right)^{k-1}.$$

Claramente, si la desigualdad de arriba falla para $a_k = 9$, entonces falla para cualquier otro valor de a_k . Algunas cuentas muestran que la desigualdad es válida para $k < 46$, pero falla para $k = 46$, es decir

$$\log(9) + \log(10^{45}) \leq \left(\frac{10}{9}\right)^{45}.$$

Haciendo inducción en t , sale que $\log(9) + \log(10^t) \leq \left(\frac{10}{9}\right)^t$ vale para todo $t \geq 45$, es decir que (4.5) falla para todo $k \geq 46$. Luego, $p_n < 10^{45}$. \square

Los autores Pomerance y Spicer conjeturan (Conjecture 2.2 en (Pomerance y Spicer, 2019)) que los únicos primos con la propiedad producto son los 3 ya mencionados previamente:

$$p_7 = 17, \quad p_{21} = 73 \quad \text{y} \quad p_{181.440} = 2.475.989.$$

Además, realizaron una búsqueda por computadora para $n \leq 10^{10}$ sin encontrar otros nuevos primos de esta forma.

Si hay otro primo de Sheldon es muy raro. Como un primo de Sheldon debe satisfacer tanto la propiedad producto como la propiedad espejo, que son muy especiales y ya vimos muy restrictivas (a juzgar por los ejemplos encontrados), nos preguntamos si podemos decir algo más sobre estos primos.

A continuación listamos propiedades que un primo de Sheldon debe tener.

Proposición 4.2 ((Pomerance y Spicer, 2019)). *Si p_n es un primo de Sheldon con $n > 10^{10}$, entonces*

- (a) n es 7-suave;
 (b) el dígito principal de p_n está en $\{1, 3, 7, 9\}$;
 (c) $5^4 \nmid n$; y, si $p_n > 10^{19}$, entonces $5^3 \nmid n$;
 (d) p_n no puede tener un dígito 0 y no puede contener un dígito 1 (excepto quizás por el dígito principal);
 (e) el dígito principal de $p_{\text{rev}(n)}$ debe estar en $\{3, 7, 9\}$.

Demostración. (a) Ya lo vimos en (3.4).

(b) Es claro ya que $\text{rev}(p_n)$ debe ser primo y los primos (con más de un dígito) deben terminar en 1, 3, 7 ó 9.

(c) Esto se puede probar de la misma forma que la Proposición 4.1. En particular

$$a_k \cdot 5^4 \cdot 9^{k-5} < \frac{a_k \cdot 10^{k-1}}{\log(a_k \cdot 10^{k-1})}$$

para $a = 1, 3, 7$ ó 9 y $k \geq 5$. La afirmación restante sale análogamente.

(d) Es obvio que ningún primo que cumpla la propiedad producto puede tener un dígito 0. Para la parte que falta, supongamos que p_n tiene un dígito 1 después del dígito principal. Pero

$$a_k \cdot 9^{k-2} < \frac{a_k \cdot 10^{k-1}}{\log(a_k \cdot 10^{k-1})}$$

para $a = 1, 3, 7$ ó 9 y $k \geq 6$.

(e) Esto es consecuencia directa de que sabemos que ningún dígito que no sea el principal p_n puede ser 1. \square

Ahora necesitamos recordar que el número de dígitos de un número natural n está dado por $\lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$, donde $\lfloor x \rfloor$ es la función piso definida como el mayor entero menor o igual que x . O sea,

$$(4.6) \quad n = (a_k \cdots a_1)_{10} \quad \Rightarrow \quad k = \lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1.$$

Por ejemplo $n = 1973$ tiene 4 dígitos y

$$\lfloor \log_{10}(1973) \rfloor + 1 = \lfloor 3,295127 \rfloor + 1 = 4.$$

Con esto ya podemos probar una propiedad mas para los primos de Sheldon y es que su índice no es divisible por 100.

Proposición 4.3 ((Byrnes y cols., s.f.)). Si p_n es un primo de Sheldon con $n > 10^{10}$ entonces $100 \nmid n$.

Demostración. Supongamos por el absurdo que $100 \mid n$. Entonces $\text{rev}(n)$ tiene por lo menos dos dígitos menos que n . Por otro lado, p_n y $\text{rev}(p_n)$ tienen el mismo número de dígitos porque p_n es primo y no puede terminar en 0.

La idea es mostrar que el número de dígitos de $p_{\text{rev}(n)}$ es demasiado chico para corresponder al número de dígitos de $\text{rev}(p_n)$.

Para ello usaremos las siguientes cotas (ver (Bach y Shallit, 1996) y (Dusart, 1999))

$$(4.7) \quad n \log\left(\frac{n}{e}\right) + n \log(\log(n)) < p_n < n \log(n) + n \log(\log(n)).$$

Usando la cota superior para $p_{\text{rev}(n)}$ y el hecho que $\text{rev}(n) < \frac{n}{10} < \frac{n}{e}$ tenemos

$$\begin{aligned} p_{\text{rev}(n)} &< \text{rev}(n) \log(\text{rev}(n)) + \text{rev}(n) \log(\log(\text{rev}(n))) \\ &< \frac{n}{e} \log\left(\frac{n}{e}\right) + \frac{n}{e} \log(\log\left(\frac{n}{e}\right)) \\ &< \frac{n}{e} \log\left(\frac{n}{e}\right) + \frac{n}{e} \log(\log(n)). \end{aligned}$$

Usando las propiedades del logaritmo y la función piso, vemos que el número de dígitos de $p_{\text{rev}(n)}$ es a lo sumo de

$$\lfloor \log_{10} \left(\frac{n}{10} \log\left(\frac{n}{10}\right) + \frac{n}{10} \log(\log\left(\frac{n}{10}\right)) \right) \rfloor + 1 = \lfloor \log_{10} \left(n \log\left(\frac{n}{10}\right) + n \log(\log(n)) \right) \rfloor.$$

Usando la cota inferior en (4.7) para p_n tenemos que

$$p_n > n \log\left(\frac{n}{e}\right) + n \log(\log(n)) > n \log\left(\frac{n}{10}\right) + n \log(\log(n)).$$

Luego, el número de dígitos de p_n es por lo menos

$$\lfloor \log_{10} \left(n \log\left(\frac{n}{10}\right) + n \log(\log(n)) \right) \rfloor + 1$$

De esta manera, el número de dígitos de p_n , y por lo tanto de $\text{rev}(p_n)$ porque tienen el mismo número de dígitos, es por lo menos uno más que el número de dígitos de $p_{\text{rev}(n)}$ Luego,

$$p_{\text{rev}(n)} \neq \text{rev}(p_n).$$

Esto es absurdo, pues p_n es primo de Sheldon y por lo tanto $100 \nmid n$. □

Dado un primo grande que es candidato a ser primo de Sheldon, vemos si no cumple alguna de las propiedades de las Proposiciones 4.2 o 4.3 y lo descartamos. La prueba se basará fuertemente en esto.

Por ejemplo, si p_n es un primo de Sheldon entonces n es 7-suave y no divisible por 100. Esto restringe la búsqueda un montón. Sólo 3039 de los primeros mil millones de números ($n \leq 10^{10}$) son de esta forma. En otras palabras, sólo este criterio deja afuera al 99,9997% de los primeros mil millones de primos como posibles primos de Sheldon.

La prueba de Pomerance y Spicer. Resulta que 73 es el único primo de Sheldon y Pomerance y Spicer se tomaron el trabajo de demostrarlo. Es imposible entrar aquí, por dificultad y extensión, en los detalles por demás técnicos de la demostración, así que sólo intentaremos dar una idea, saltando los detalles.

Dos cotas importantes. Se sabe que el logaritmo entero

$$\text{li}(x) = \int_2^{\infty} \frac{dt}{\log(t)}$$

definido y considerando por Gauss, aproxima mejor a $\pi(x)$ que la función $x/\log(x)$ del teorema del número primo.

Definamos las función aritmética

$$C(n) = p_n - \frac{1}{\text{li}(n)}$$

para $n \in \mathbb{N}$ y la función real

$$E(x) = \left(5,5 \times 10^9 + 2,3 \times 10^{-8} \frac{x}{\log(x)} + 1,202 \times 10^{-11} x \right) \log(x)$$

para $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. En los Lemmas 4.3 y 4.5 de (Pomerance y Spicer, 2019), los autores llegan después de bastante trabajo a estas cotas (quizás sea la parte mas difícil de la demostración).

Proposición 4.4 ((Pomerance y Spicer, 2019)). Sea p_n el n -ésimo primo.

(a) Si $p_n < 10^{19}$ entonces

$$0 < C(n) < \sqrt{p_n} \left(1,95 + \frac{3,9}{\log(p_n)} + \frac{19,5}{(\log(p_n))^2} \right).$$

(b) Si $p_n > 10^{19}$ entonces $|C(n)| < E(\text{li}(n)^{-1})$.

Gracias a esta proposición, la demostración consiste en descartar todos los candidatos a primos de Sheldon usando los resultados previos (Proposiciones 4.2 y 4.3) distinguiendo los casos en que $p_n < 10^{19}$ y $10^{19} < p_n < 10^{45}$.

En general, dado n grande es difícil saber cuál es el primo n -ésimo asociado. Pero es fácil calcular el inverso de $\text{li}(n)$. Notar que (a) de la proposición se usa justamente para estimar el error de aproximar p_n por $\text{li}(n)^{-1}$. Si solo conocemos n aún así podemos usar (a) de la proposición, combinado con la cota derecha de (4.7) para $n \geq 6$. Por ejemplo, supongamos que $n = 3^{35}$. ¿Quién es el primo p_n ? Calculamos

$$(4.8) \quad \text{li}(3^{35})^{-1} = 2,05844182653518213541 \times 10^{18}$$

con un error menor al 0,01. El error dado por (4.7) y la parte (a) de la Proposición (4.4) es $< 3 \times 10^9$. Luego, deducimos que p_n tiene 19 dígitos y que los 9 primeros dígitos son 205844182. Claramente

$$(4.9) \quad p_n = 205844182a_{11}a_{10} \cdots a_2a_1$$

no es un primo de Sheldon, pues fallará la propiedad producto (ya que $\Pi(p_n) = 0$).

Descartando primos menores que 10^{19} . Definamos el número

$$N := 2,341 \times 10^{17},$$

y notemos que por (a) de la Proposición 4.4 se tiene

$$p_n < 10^{19} \quad \Rightarrow \quad n \leq N.$$

Los autores comienzan la búsqueda listando todos los números 7-suaves hasta N . Es decir, números de la forma $2^a 3^b 5^c 7^d$ tales que

$$\begin{aligned} 0 &\leq a \leq \log_2(N), \\ 0 &\leq b \leq \log_3(N/2^a), \\ 0 &\leq c \leq \log_5(N/2^a 3^b), \\ 0 &\leq d \leq \log_7(N/2^a 3^b 5^c). \end{aligned}$$

En particular, hay 57.776 enteros de esta forma. Se descartan los 7.575 que son menores que 10^{10} pues ya habían sido previamente barridos al encontrar los 3 primos que satisfacen la propiedad producto.

Luego usan las Proposiciones 4.2 y 4.3 para descartar los 50.201 valores de n que faltan. Primero se descartan los n tales que $100 \mid n$ ó $5^4 \mid n$, dejando 13.335 números. Luego se quedan con aquellos que tienen el dígito principal de p_n en $\{1, 3, 7, 9\}$. Esto reduce la lista a a 6.893 candidatos. Estimando p_n con $\text{li}(n)^{-1}$ como en (4.8) y (4.9), las autores se quedan con 309 candidatos cuyos primeros 5 o 6 dígitos coinciden con los primeros 5 o 6 dígitos de $\text{li}(n)^{-1}$ (usando la Proposición 4.4). Para esos n restantes, los autores calculan $\text{rev}(n)$, y por (e) de la Proposición 4.2, sólo hay 60 de éstos tales que el dígito principal de $p_{\text{rev}(n)}$ está en $\{3, 7, 9\}$. De éstos, 55 tienen los primeros 5 dígitos conocidos. Las 5 excepciones corresponden a los n tales que $\text{rev}(n)$ es uno de estos

$$\begin{aligned} &4.019.155.056, \quad 4.032.803.241, \quad 4.079.545.092, \\ &12.427.422.237, \quad 29.794.252.274. \end{aligned}$$

Estos son suficientemente pequeños como para poder calcular los primos p_n directamente:

$$\begin{aligned} &97.496.326.163, \quad 97.841.660.857, \quad 99.024.780.191, \\ &316.109.730.941, \quad 785.009.387.557. \end{aligned}$$

Todos tienen un dígito 0 o un dígito 1 interior por lo que son descartados por parte (d) de la Proposición 4.2.

Con los 55 números restantes, se usa el test del producto con $\text{rev}(n)$ como arriba y esto elimina todos salvo 6 números. Estos n son muy grandes para calcular sus primos $p_{\text{rev}(n)}$, pero se estudian el número de dígitos y sólo 2 de ellos tienen la

misma cantidad de dígitos que el primo p_n . Para esos 2 primos, se conocen los primeros 6 dígitos de p_n y los primeros 5 dígitos de $p_{\text{rev}(n)}$, que deberían ser los últimos 5 dígitos de p_n si este fuera un primo de Sheldon. El producto de estos 11 dígitos por la cantidad apropiada de potencias de 9 (para los dígitos desconocidos) es demasiado pequeña para satisfacer la propiedad producto. Esto completa la búsqueda hasta 10^{19} .

Descartando primos menores que 10^{45} . Acá se aplica el mismo método que antes pero ahora usando la parte (b) de la Proposición 4.4:

$$p_n < 10^{45} \quad \Rightarrow \quad n < 9,746 \times 10^{42}.$$

Se calculan números 7-suaves hasta esta cantidad, hay 1.865.251 de ellos. Quitando los que son menores a $2,34 \times 10^{17}$ y aquellos que son divisibles por 100 o 125 queda una lista de 213.449 números. Cada uno de éstos da un primer dígito para p_n , y seleccionando solo aquellos tal que el primer dígito está en $\{1, 3, 7, 9\}$ nos deja con 112.344 números. Luego se chequea que para cada uno de ellos se pueda usar $\text{li}(n)^{-1}$ para determinar el número exacto de dígitos de p_n .

Luego se testea si los primeros 5 dígitos de p_n no son ambiguos y resulta que, salvo 167, todos son de esta forma. Para aquellos que satisfacen la propiedad, multiplicamos los primeros 5 dígitos por la potencia apropiada de 9 para tener una cota superior sobre el producto de dígitos de p_n , manteniendo sólo los 992 de ellos donde esta cota es por lo menos n . Luego, se repite este procedimiento pero con los primeros 6 dígitos. Todos, salvo 27, tienen los primeros 6 dígitos determinados; y, de los que quedan, todos, salvo 278, son descartados por que el producto de sus dígitos es muy pequeño. Luego, uno se queda con aquellos tal que el producto de los primeros 6 dígitos divide a n , sólo hay 142 de estos.

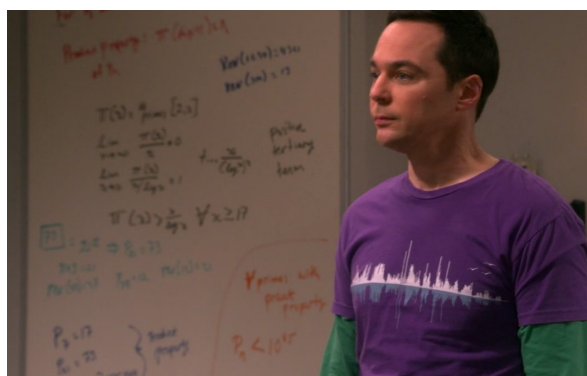
Así, nos queda un remanente de $336 = 167 + 27 + 142$ números n que aún no pudimos descartar. Para éstos, se verifica que el número de dígitos y el primer dígito de $p_{\text{rev}(n)}$ está determinado por $\text{li}(\text{rev}(n))^{-1}$. Ahora, se descartan aquellos para los que el número de dígitos de p_n no coincide con el número de dígitos de $p_{\text{rev}(n)}$ y aquellos cuyo primer dígito de $p_{\text{rev}(n)}$ no está en $\{3, 7, 9\}$. Esto solo deja 44 números... Para cada uno de éstos, $\text{li}(\text{rev}(n))^{-1}$ determina los primeros 5 dígitos de $p_{\text{rev}(n)}$, y todos estos valores de n fallan el test de multiplicar los primeros 5 dígitos $p_{\text{rev}(n)}$ por la potencia apropiada de 9 y compararlo con n . Esto completa la demostración de que 73 es el único primo de Sheldon.

Ya puedo escuchar retumbando en mi cabeza a Sheldon gritando un estridente



ese especie del ‘¡Eureka!’ de Arquímedes moderna...

La historia, como no podía ser de otro modo, se cierra de forma perfecta: una pizarra con partes de la demostración de Pomerance y Spicer de la conjetura de Sheldon aparece en el episodio 274 (abril de 2019) de la serie.



Finalmente, todo lo hecho en el artículo está hecho en base 10, pero bien se podría definir números de Sheldon en una base b . La propiedad producto se basa en la representación en base 10, pero esto puede ser cambiado. Pomerance y Spicer dan el siguiente ejemplo: 226.697 es el primo número 20.160, y su representación en base 9 es $(3748659)_9$. Multiplicando estos dígitos entre sí da 20.160, o sea que $226.697 = p_{20.160}$ satisface la propiedad producto en base 9.

§4. Números de Sheldon en sucesiones.

Finalmente, dejamos de seguir los trabajos de Spicer y colaboradores ((Byrnes y cols., s.f.) y (Pomerance y Spicer, 2019)) para dar una generalización propia de los primos de Sheldon, a números de Sheldon en sucesiones. Es decir, pasamos de buscar números que satisfacen ciertas condiciones en la sucesión de números primos a buscar números que satisfagan esas condiciones en otras sucesiones.

Las propiedades espejo y producto que hemos visto involucran el reverso de números indexados y producto de los dígitos de los números. Estas propiedades pueden definirse en general para cualquier sucesión de números $\{a_n\}$ y por lo tanto podemos hablar de números de Sheldon en $\{a_n\}$.

Definición 5.1. Sea $\mathbb{A} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números naturales. Decimos que el número a_n satisface la propiedad espejo (PE) si el reverso de a_n es el $\text{rev}(n)$ -ésimo término de la sucesión, es decir si

$$\text{rev}(a_n) = a_{\text{rev}(n)}.$$

Decimos que a_n satisface la propiedad producto (PP) si

$$\Pi(a_n) = n.$$

Luego, a_n es un número de Sheldon en \mathbb{A} si a_n satisface la propiedad espejo y la propiedad producto.

No hemos puesto condiciones sobre la sucesión; pero, para descartar casos triviales, conviene pensar que no hay repeticiones, por lo que conviene suponer que $a_n \neq a_m$ para todo $n \neq m$. Tampoco es necesario pedir que la sucesión sea creciente, pero es usual asumirlo.

Notar que con esta generalidad (una sucesión cualquiera) no hay mucho que se pueda decir. Sin embargo si n es capicúa y a_n satisface la PP entonces a_n debe ser capicúa pues

$$\text{rev}(a_n) = a_{\text{rev}(n)} = a_n.$$

Del mismo modo, si a_n es capicúa y satisface PP entonces n es capicúa necesariamente. Y si ambos a_n y su índice n son capicúas entonces a_n debe satisfacer PP. O sea, dos cualesquiera de las condiciones implica la tercera. Estos son candidatos naturales a números de Sheldon en \mathbb{A} .

Denotamos por $\mathcal{E}(\mathbb{A})$ y $\mathcal{P}(\mathbb{A})$ a los conjuntos de números que cumplen la propiedad espejo y la propiedad producto en \mathbb{A} , respectivamente, y denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{A})$ al conjunto de números de Sheldon en \mathbb{A} . Luego, tenemos

$$\mathcal{S}(\mathbb{A}) = \mathcal{E}(\mathbb{A}) \cap \mathcal{P}(\mathbb{A}).$$

Lo que dice el Teorema de Pomerance-Spicer es que

$$\mathcal{S}(\mathbb{P}) = \{73\}$$

donde $\mathbb{P} = \{p_n\}$ es la sucesión de primos positivos y vimos que $\mathcal{E}(\mathbb{P}) = \{73, 143.787.341\}$ y que $\mathcal{P}(\mathbb{P}) \supset \{17, 73, 2.475.989\}$ y se conjetura que vale la igualdad.

Podemos entonces preguntarnos por los números de Sheldon en los naturales \mathbb{N} o bien en sucesiones famosas como los números de Fibonacci $\{F_n\}$, de Catalan $\{C_n\}$ o de Bell $\{B_n\}$, etc. O bien para números triangulares $\{T_n\}$, hexagonales $\{H_n\}$ (k -poligonales en general), estelares $\{S_n\}$, etcétera.

Para los naturales tenemos lo siguiente.

Proposición 5.2. *Los números de Sheldon en \mathbb{N} son los dígitos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.*

Demostración. En primer lugar es claro que todo natural satisface la PE. En efecto, como $a_n = n$ para todo n , se tiene que

$$\text{rev}(a_n) = \text{rev}(n) = a_{\text{rev}(n)}.$$

Sobre la propiedad producto debemos ver si

$$\Pi(n) = n.$$

Es claro que todo $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ la cumple. Veamos que ningún $n \geq 10$ la puede cumplir. Supongamos que n tiene k dígitos con $k \geq 2$, luego

$$n = (b_k \cdots b_1)_{10} = b_k 10^{k-1} + \cdots + b_2 10 + b_1$$

con $b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ para todo $i = 1, \dots, k$ y $b_k \neq 0$. Tenemos que

$$\Pi(n) = b_k \cdot b_{k-1} \cdots b_2 \cdot b_1 \leq b_k \cdot 9^{k-1} \quad \text{y} \quad n > b_k \cdot 10^{k-1}.$$

Luego $\Pi(n) < n$ para todo $n > 9$.

De este modo,

$$\mathcal{S}(\mathbb{N}) = \mathcal{E}(\mathbb{N}) \cap \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

como queríamos ver. □

Sobre las sucesiones más famosas como la de Fibonacci y los números de Catalán conjeturamos que no poseen números de Sheldon, es decir

$$\mathcal{S}(\{F_n\}) = \mathcal{S}(\{C_n\}) = \emptyset.$$

Aquí los números F_n y C_n crecen muy rápido y el argumento de números de dígitos usado por Pomerance y Spicer (ver prueba de Proposición 4.3) se aplicaría aquí del mismo modo.

Más aún, uno podría estudiar primos de Sheldon en subsucesiones de los primos. Es decir, ¿hay primos gemelos, o primos primos, o primos sexies de Sheldon? ¿Hay primos de Fermat, o de Mersenne, o de Germain de Sheldon? ¿Hay primos de Chen, o de Cunningham, o de Proth, o de Woodall, o de Wagstaff de Sheldon? En este caso, las Proposiciones 4.2 y 4.3 siguen siendo válidas por tratarse de sucesiones de primos, pero hay que estudiar la propiedad espejo en cada caso, pues cambian los índices. Dejo planteados estos interrogantes para el lector curioso.

Otra variante más que se me ocurre, es reemplazar la propiedad producto por la propiedad suma y definir primos de Sheldon aditivos. Un primo aditivo de Sheldon es un primo p_n que satisface la propiedad espejo y tal que la suma de sus dígitos es n . O sea, si definimos

$$\Sigma(n) = a_k + \cdots + a_1$$

donde $n = a_k \cdots a_1$ entonces p_n satisface la propiedad suma si

$$\Sigma(p_n) = n.$$

Más generalmente tenemos lo siguiente.

Definición 5.3. Sea $\mathbb{A} = \{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N}$. Un a_n es un número aditivo de Sheldon en \mathbb{A} si a_n satisface la propiedad espejo y la propiedad suma, o sea si

$$\text{rev}(a_n) = a_{\text{rev}(n)} \quad \text{y} \quad \Sigma(a_n) = n.$$

Denotemos por $\mathcal{A}(\{a_n\})$ al conjunto de números en $\{a_n\}$ que satisfacen la propiedad suma (adición) y por $\mathcal{S}_a(\{a_n\})$ a los números aditivos de Sheldon en $\{a_n\}$, luego

$$\mathcal{S}_a(\{a_n\}) = \mathcal{E}(\{a_n\}) \cap \mathcal{A}(\{a_n\}).$$

Es fácil ver que el conjunto de números aditivos de Sheldon de \mathbb{N} es también el conjunto de dígitos, es decir

$$\mathcal{S}_a(\mathbb{N}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Como la suma de los dígitos de un número crece mucho menos que el producto de esos mismos dígitos (genéricamente, salvo casos triviales) es de esperar que de haber números aditivos de Sheldon estos sean pequeños.

Damos a continuación algunos ejemplos de sucesiones donde encontramos algunos números de Sheldon. En muchas otras sucesiones no encontramos números de Sheldon pequeños.

Ejemplo 5.4. Sean $\{B_n\}$, $\{C_n\}$ y $\{P_n\}$ las sucesiones de números de Bell, de Catalan y de Pell, respectivamente. Sus primeros términos son

$$B_n = 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975,$$

$$C_n = 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796,$$

$$P_n = 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860,$$

Sea $\{b_n\}$ cualquiera de estas sucesiones. Tenemos $b_2 = 2$. Todos estos son números de Sheldon (tanto aditiva como multiplicativamente). Como el índice y el número es 2 que es capicúa, la propiedad espejo es automática y tanto la suma como el producto de los dígitos de 2 es 2.

Ejemplo 5.5. Sea $\{F_n\}$ la sucesión de números de Fibonacci. Esta comienza

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597.$$

Claramente, $F_1 = 1$ y $F_5 = 5$ son números de Sheldon en $\{F_n\}$, tanto multiplicativa como aditivamente.

Ejemplo 5.6. Sea $\{p_n\}$ la sucesión de primos de Proth definidos como los primos de la forma $k \cdot 2^m + 1$ donde k es impar y $k < 2^m$ con $m \geq 1$. Esta sucesión comienza

$$3, 5, 13, 17, 41, 97, 113, 193, 241, 257, 353, 449, 577, 641, 673, 769, 929.$$

Luego

$$p_{11} = 353$$

es un número de Sheldon aditivo en $\{p_n\}$ pues como n y p_n son capicúas, la propiedad espejo se cumple y, como

$$3 + 5 + 3 = 11,$$

también se cumple la propiedad aditiva.

Ejemplo 5.7. Sea $\{P_n\}$ la sucesión de números pentagonales

$$P_n = \frac{1}{2}n(3n - 1).$$

Sus primeros términos son 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, 176, 210, 247, 287, 330, 376, 425. Luego

$$P_4 = 22$$

es un número de Sheldon en $\{P_n\}$ tanto aditiva como multiplicativamente pues como 4 y 22 son capicúas, la propiedad espejo se cumple automáticamente y como

$$2 + 2 = 2 \cdot 2 = 4$$

también se cumple la propiedad aditiva.

Ejemplo 5.8. Sea $\{J_n\}_{n=1}^\infty$ la sucesión de números de Jacobsthal

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

El número J_n cuenta, por ejemplo, la cantidad de formas distintas en que un rectángulo de $(n - 1) \times 2$ puede ser embaldosado solo usando dominós 2×1 y cuadrados 2×2 . La sucesión empieza 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731. Luego

$$J_9 = 171$$

es un número de Sheldon aditivo en $\{J_n\}$ pues 9 y 171 son capicúas y $1 + 7 + 1 = 9$.

Ejemplo 5.9. Sea $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ la sucesión de números de Motzkin. M_n es el número de formas en que se pueden trazar cuerdas que no se intersecan entre n puntos en un círculo y se los puede calcular con la fórmula

$$M_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{n}{2k}.$$

Sus primeros términos son 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, 2188, 5798. Luego

$$M_2 = 2 \quad \text{y} \quad M_8 = 323$$

son números de Sheldon en $\{M_n\}$ aditivos (M_2 también multiplicativo).

¿Cuáles son los conjuntos de números de Sheldon para las sucesiones dadas en los ejemplos?

Para concluir damos dos sucesiones (subsucesiones de la sucesión de capicúas) que poseen una cantidad infinita de números de Sheldon aditivos. Sea

$$\mathcal{C} = \{c_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, \dots, 99, 101, \dots\}$$

el conjunto de números capicúas de \mathbb{N} . Sea $\mathbb{U} = \{R_n\}_{n=1}^\infty$ la sucesión de *repitunos* (repunits). Es decir,

$$R_n = \frac{10^n - 1}{9} = 10^{k-1} + \dots + 10^2 + 10 + 1 = \underbrace{11 \dots 1}_{n\text{-veces}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. O sea, la sucesión es 1, 11, 111, 1111, 11111, etcétera.

Proposición 5.10. *El conjunto de números aditivos de Sheldon en \mathbb{U} es \mathcal{C} .*

Demostración. Es claro que como R_n es capicúa, R_n satisface la propiedad espejo si y solo si n es capicúa. Luego $\mathcal{E}(\mathbb{U}) = \mathcal{C}$. Además, la suma de dígitos de R_n es obviamente n , es decir $\Sigma(R_n) = n$ para todo n . O sea que $\mathcal{A}(\mathbb{U}) = \mathbb{N}$. De este modo tenemos que

$$\mathcal{S}_a(\mathbb{U}) = \mathcal{E}(\mathbb{U}) \cap \mathcal{A}(\mathbb{U}) = \mathcal{C},$$

como queríamos ver. \square

Sea $\mathbb{D} = \{D_n\}$ la sucesión de *repídgitos* (repdigits) definida así: se toman todos los números naturales de la forma

$$\underbrace{dd \cdots dd}_{k\text{-veces}}$$

con $1 \leq d \leq 9$ un dígito y $k \in \mathbb{N}$. Es decir,

$$\{D_n\} = \{R_n, 2R_n, \dots, 9R_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Los primeros términos son

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, \\ 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999, 1111, 2222, \dots, 9999.$$

Proposición 5.11. *El conjunto de números aditivos de Sheldon en \mathbb{D} es*

$$\mathcal{S}_a(\mathbb{D}) = \{D_{9k} : k \in \mathcal{C}\}.$$

Demostración. Es claro que como D_n es capicúa para todo n , luego D_n satisface la propiedad espejo si y solo si n es capicúa. Notar que $D_9 = 9$, $D_{18} = 99$, $D_{27} = 999$ y en general se tiene

$$D_{9k} = \underbrace{99 \cdots 9}_{k\text{-veces}} = 9R_k.$$

Estos números satisfacen la propiedad suma pues $\Sigma(D_{9k}) = 9k$. Es fácil convencerse que estos son los únicos repídgitos que satisfacen la propiedad suma. Luego, los números de Sheldon en \mathbb{D} son los D_{9k} con $9k$ capicúa. \square

Los primos de Sheldon aditivos de $\{R_n\}$ son los números D_{9k} formados por repeticiones de un número $9k$ de 9's tal que $9k$ resulta capicúa. Los primeros de estos números son

$$D_9 = D_{9 \cdot 1}, \quad D_{99} = D_{9 \cdot 11}, \quad D_{171} = D_{9 \cdot 19}, \quad D_{252} = D_{9 \cdot 28}, \\ D_{333} = D_{9 \cdot 37}, \quad D_{414} = D_{9 \cdot 46}, \quad D_{585} = D_{9 \cdot 65}, \quad D_{666} = D_{9 \cdot 74}, \\ D_{747} = D_{9 \cdot 83}, \quad D_{828} = D_{9 \cdot 92}, \quad D_{909} = D_{9 \cdot 101}, \quad D_{999} = D_{9 \cdot 111} \\ D_{1881} = D_{9 \cdot 209}, \quad D_{2772} = D_{9 \cdot 308}, \quad D_{3663} = D_{9 \cdot 407}, \quad D_{4554} = D_{9 \cdot 506}.$$

Comentarios finales

Resulta interesante, y por que somos curiosos, preguntarnos por el número 73 en la cultura. Por ejemplo, es curiosa la siguiente anécdota. A mediados de los años '80 la editorial Hyspamérica le hizo una propuesta a Jorge Luis Borges: seleccionar 100 libros indispensables y escribir un prólogo para cada uno. La muerte lo sorprendió escribiendo el prólogo del libro número 73, que es nada más y nada menos que *'El libro de los muertos'*...

Para muestra basta un botón, por lo que solo dejo estas dos pequeñas referencias. Por cuestiones de tiempo y espacio no incluiré detalles aquí (pero sugiero que el lector haga su propia búsqueda profundizando estos ítems y buscando nuevos):

- Los sonetos 37 y 73 de William Shakespeare, que datan del año 1609 (¡primo!). Sólo damos el 73.

SONNET 73

*That time of year thou mayst in me behold
When yellow leaves, or none, or few, do hang
Upon those boughs which shake against the cold,
Bare ruin'd choirs, where late the sweet birds sang.*

*In me thou see'st the twilight of such day
As after sunset fadeth in the west,
Which by and by black night doth take away,
Death's second self, that seals up all in rest.*

*In me thou see'st the glowing of such fire
That on the ashes of his youth doth lie,
As the death-bed whereon it must expire,
Consum'd with that which it was nourish'd by.*

*This thou perceiv'st, which makes thy love more strong,
To love that well which thou must leave ere long.*

Recordamos que los sonetos son poemas de 14 versos. En los idiomas latinos están divididos en 2 cuartetos y 2 tercetos, pero el soneto inglés está estructurado en 3 cuartetos y un dístico final.

- Las Proposiciones 37 y 73 del Libro X de *Los Elementos* de Euclides. Están curiosamente relacionadas tratando el tema de rectas mediales y apótomas, casos particulares de lo que Euclides llama rectas irracionales.

PROPOSICIÓN 37: Si se suman dos rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un rectángulo racional, la recta entera no es racional; llámesela primera bimedial.

PROPOSICIÓN 73: Si se quita de una recta racional otra recta racional que sea conmensurable sólo en cuadrado con la recta entera, la recta restante es irracional; llámese apótoma.

Nunca viene mal volver a leer a Euclides; y, para aquel que no sabe, aprender sobre las rectas bimediales y apótomas.

Para terminar, sólo decir que el día número 73 de un año no bisiesto es el 14 de marzo (14 como los versos de un soneto). O sea, ¡el famoso día Pi! (π -day en inglés, pues la fecha es 3/14 (reversa de la fecha latina 14/3) y 3,14 es una aproximación a π). Además,

$$365 = 5 \cdot 73,$$

por lo que este día es un quinto exacto de un año natural.

Sin embargo, una mejor aproximación racional a π es $\frac{22}{7}$. En efecto, tenemos $\pi \simeq 3,141592654$ y

$$3,14 \simeq \frac{314}{100} = \frac{157}{50} = 3 + \frac{7}{50},$$

$$\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7} \simeq 3,14285714286.$$

De donde $3,14 < \pi < \frac{22}{7}$ pero

$$\pi - 3,14 \simeq 0,00159265358,$$

$$\frac{22}{7} - \pi \simeq 0,00126448926.$$

Por eso, y por que este año justo es bisiesto, es que envié el trabajo el 22 de julio (22/7 en países latinos). Y cómo se habrán alineado los planetas... que el artículo va de las páginas 37 a la 73.

Bibliografía

- Bach, E., y Shallit, J. O. (1996). *Algorithmic Number Theory 1* (Vol. 233). MIT Press.
- Byrnes, J., Spicer, C., y Turnquist, A. (s.f.). The Sheldon conjecture. *Math. Horiz.*, 23(2).
- Dusart, P. (1999). The k -th prime is greater than $k(\ln k + \ln(\ln k) - 1)$ for $k \geq 2$. *Mathematics of Computation*, 68(225), 411–415.
- Gleason, A. M. (1988). Angle Trisection, the Heptagon, and the Triskaidecagon. *The American Mathematical Monthly*, 95(3), 185–194.
- Pomerance, C., y Spicer, C. (2019). Proof of the Sheldon conjecture. *Am. Math. Mon.*, 126(8), 688–698.

Rosser, J. B., y Schoenfeld, L. (1962). Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Illinois J. Math.*, 6, 64–945.

RICARDO A. PODESTÁ

FaMAF – CIEM (CONICET), Universidad Nacional de Córdoba.

Av. Medina Allende 2144, Ciudad Universitaria, (5000), Córdoba, Argentina.

(✉) podesta@famaf.unc.edu.ar

Recibido: 22 de julio de 2024.

Aceptado: 13 de agosto de 2024.

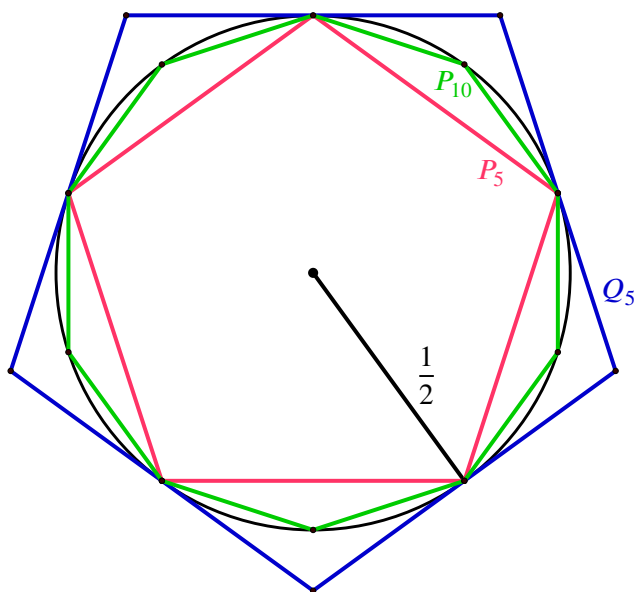
Publicado en línea: 30 de agosto de 2024.

los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos a una circunferencia se obtienen sacando promedios?

1. INTRODUCCIÓN

Efectivamente, esto es así, aunque no se trata del promedio de toda la vida, si no que estos perímetros se obtienen usando la media armónica y la media geométrica.

Sea $C_{\frac{1}{2}}$ una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$, es decir de diámetro 1, sea P_n un polígono regular de n lados inscrito en $C_{\frac{1}{2}}$ y sea Q_n un polígono regular de n lados circunscrito a $C_{\frac{1}{2}}$. En la figura vemos dibujados un pentágono y un decágono (regulares) inscritos y un pentágono regular circunscrito.



Llamamos con letras minúsculas a los correspondientes perímetros, es decir que

$$p_n = \text{Perímetro}(P_n) \quad \text{y} \quad q_n = \text{Perímetro}(Q_n).$$

En esta nota queremos estudiar propiedades de esta sucesión de perímetros con el objetivo final de obtener la longitud de la circunferencia $C_{\frac{1}{2}}$ que, por definición, es π . Vale la pena observar que, por una cuestión de proporcionalidad, si consideráramos polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia C_r de radio r , entonces sus perímetros serían rp_n y rq_n , respectivamente.

El siguiente teorema establece dos propiedades fundamentales de p_n y q_n y, en particular, nos dice cómo calcular estos perímetros cuando duplicamos la cantidad de lados.

Teorema.

En las notaciones previas tenemos:

$$(a) \quad q_{2n} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n} \quad \text{y} \quad p_{2n} = \sqrt{p_n q_{2n}}.$$

(b) $\{p_n\}$ es una sucesión creciente, $\{q_n\}$ es una sucesión decreciente, y $p_n < q_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$(c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n.$$

Hagamos unos breves comentarios sobre el teorema.

- (1) Las fórmulas de la parte (a) tienen carácter recursivo, es decir que sabiendo p_n y q_n podemos encontrar q_{2n} , y luego conociendo p_n y q_{2n} obtenemos p_{2n} . Así, para arrancar, necesitamos saber p_{n_0} y q_{n_0} para cierto valor inicial de n_0 . Por ejemplo, si comenzamos sabiendo las medidas de los cuadrados inscritos y circunscritos podemos ir sucesivamente calculando los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos de 8, 16, 32, ... lados. Similarmente, si calculamos el perímetro de los triángulos equiláteros inscritos y circunscritos podemos ir sucesivamente calculando los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos de 6, 12, 24, 48, ... lados.
- (2) La propiedad (c) es, en definitiva, la que nos permite decir que π es (por definición) el límite de estas sucesiones.
- (3) Las fórmulas de la parte (a), corresponden a la *media armónica* y la *media geométrica* respectivamente. Hablaremos brevemente de estas medias.

2. MEDIAS ARMÓNICA, GEOMÉTRICA Y ARITMÉTICA

A continuación, repasamos brevemente las definiciones de media armónica y geométrica, y luego pasamos a la demostración del teorema.

Media armónica. Dados dos números positivos x e y , la *media armónica* (o promedio armónico) de ellos es “el inverso del promedio de sus inversos”, es decir:

$$M_{arm}(x, y) = \left(\frac{x^{-1} + y^{-1}}{2} \right)^{-1} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2}},$$

que desarrollando resulta

$$M_{arm}(x, y) = \frac{2xy}{x + y}.$$

Un caso típico en donde aparece el promedio armónico es cuando queremos “promediar velocidades”. Por ejemplo:

Supongamos que salimos a dar una vuelta en bicicleta, saliendo desde la ciudad A hasta la ciudad B , y luego regresamos. Como B está más alta que A , fuimos de A a B a un promedio de 16 km/h, pero regresamos de B a A a un promedio de 22 km/h. ¿Cuál fue nuestra velocidad promedio en todo el paseo?

Te invitamos a resolver el problema. A primera vista podría parecer que falta el dato de la distancia entre A y B , pero no es necesaria (plantear el problema suponiendo que la distancia es d , la respuesta no dependerá de d). A quienes se sientan tentados a pensar que la velocidad promedio fue de 19 km/h, les adelantamos que no lo es, y para verlo intuitivamente resulta que en el recorrido, anduvimos más tiempo a 16 km/h que a 22 km/h, y eso hace que la velocidad media sea menor a 19 km/h. La respuesta es, efectivamente, la media armónica de 16 y 22, que es aproximadamente 18,5 km/h.

Media geométrica. Dados dos números positivos x e y , la *media geométrica* (o promedio geométrico) de ellos es “la raíz cuadrada del producto de ellos”, es decir:

$$M_{geo}(x, y) = \sqrt{xy}.$$

Este promedio aparece cuando promediamos escalas. Por ejemplo:

Supongamos que una colonia de bacterias se duplica en el 1er día, pero se triplica en el 2do. En promedio, ¿con qué factor de escala diario ha crecido la colonia de bacterias?

Nuevamente te invitamos resolver el problema por tu cuenta. Si querés intentarlo ¡no leas el siguiente párrafo! Como el que avisa no traiciona, ahora damos la solución al problema. Si originalmente la colonia tenía β bacterias, luego del 1er día tiene $2 \times \beta$, y luego del 2do día tiene $3 \times 2 \times \beta$ bacterias. El problema pregunta el factor de escala diario k que deberíamos aplicar para obtener el mismo resultado. Esto obliga a que $k \times k \times \beta = 3 \times 2 \times \beta$, es decir que $k = \sqrt{2 \times 3} \approx 2,45$, que es la media geométrica de 2 y 3.

Notar que lo que dice (a) del teorema es que las longitudes de los perímetros de los polígonos regulares inscriptos y circunscriptos de $2n$ lados se obtienen como la media armónica y geométrica de los perímetros de los polígonos regulares inscriptos de n lados y circunscriptos de n y $2n$ lados, respectivamente, es decir

$$q_{2n} = M_{arm}(p_n, q_n) \quad \text{y} \quad p_{2n} = M_{geo}(p_n, q_{2n}).$$

Tanto la media armónica como la media geométrica son menores que la *media aritmética* (que es el promedio usual de x e y):

$$M_{aritm}(x, y) = \frac{x + y}{2},$$

Es más, en realidad tenemos $M_{arm} \leq M_{geo} \leq M_{aritm}$, es decir

$$\frac{2xy}{x + y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}$$

y te dejamos la tarea de demostrar estas desigualdades.

3. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA

Después de todo lo dicho, estamos en condiciones de encarar la prueba del teorema.

Llamemos α_n a la medida del ángulo central del polígono regular de n lados y sean, respectivamente, $\ell(P_n)$ y $\ell(Q_n)$ las medidas de los lados de P_n y Q_n . Tenemos así que

$$p_n = n \ell(P_n) \quad \text{y} \quad q_n = n \ell(Q_n).$$

Comenzamos obteniendo $\ell(P_n)$ y $\ell(Q_n)$ en términos del ángulo α_n .

En la figura podemos ver que

$$\ell(P_n) = 2\overline{BE} = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha_n}{2} \right)$$

y

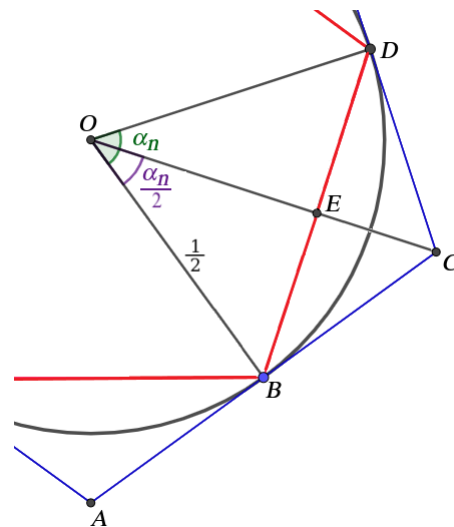
$$\ell(Q_n) = 2\overline{BC} = 2 \tan \left(\frac{\alpha_n}{2} \right) = 2 \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\alpha_n}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\alpha_n}{2} \right)}.$$

Al duplicar la cantidad de lados, el ángulo del polígono se divide en dos, así que

$$\ell(P_{2n}) = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha_n}{4} \right)$$

y

$$\ell(Q_{2n}) = 2 \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\alpha_n}{4} \right)}{\cos \left(\frac{\alpha_n}{4} \right)}.$$



Ahora vamos a relacionar $\ell(P_n)$ y $\ell(Q_n)$ con $\ell(P_{2n})$ y $\ell(Q_{2n})$ utilizando principalmente las fórmulas del “seno y coseno del doble del ángulo”:

$$(3.1) \quad \operatorname{sen}(x) = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{x}{2} \right) \quad \text{y} \quad \cos(x) = \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{2} \right).$$

De este modo tenemos

$$\ell(P_n) = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha_n}{2} \right) = 4 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha_n}{4} \right) \cos \left(\frac{\alpha_n}{4} \right),$$

es decir

$$\ell(P_n) = 2 \cdot 2^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha_n}{4}\right) \frac{\cos\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)} = 2 \frac{\ell(P_{2n})^2}{\ell(Q_{2n})}.$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$(3.2) \quad \ell(P_{2n}) = \sqrt{2\ell(P_n)\ell(Q_{2n})}.$$

Por otro lado,

$$\frac{\ell(P_n)\ell(Q_n)}{\ell(P_n) + \ell(Q_n)} = \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)}}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) + 2 \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)}} = 2 \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) + 1},$$

y aplicando las fórmulas (3.1) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\ell(P_n)\ell(Q_n)}{\ell(P_n) + \ell(Q_n)} &= 2 \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{4}\right) \cos\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha_n}{4}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha_n}{4}\right) + 1} \\ &= 2 \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{4}\right) \cos\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)}{2 \cos^2\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)} = 2 \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)} = \ell(Q_{2n}); \end{aligned}$$

es decir que

$$(3.3) \quad \ell(Q_{2n}) = \frac{\ell(P_n)\ell(Q_n)}{\ell(P_n) + \ell(Q_n)}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$p_n = n \ell(P_n) \quad \text{y} \quad q_n = n \ell(Q_n)$$

y que, por lo tanto,

$$p_{2n} = 2n \ell(P_{2n}) \quad \text{y} \quad q_{2n} = 2n \ell(Q_{2n})$$

las fórmulas (3.2) y (3.3) implican las fórmulas de la parte (a) del teorema.

Dejamos la parte (b) como tarea para el lector (aunque no es tan sencillo) y pasamos a la parte (c). En la figura anterior, usando la desigualdad triangular, obtenemos que

$$\overline{CD} < \overline{DE} + \overline{CE}$$

y por lo tanto

$$q_n - p_n = n \left(2\overline{CD} - 2\overline{DE} \right) \leq 2n \overline{CE}.$$

Como los triángulos $\triangle OED$ y $\triangle DEC$ son semejantes, resulta que

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DO}} = \overline{DE}$$

y por lo tanto

$$q_n - p_n \leq 2n \cdot \overline{CD} \cdot \overline{DE} = \frac{2}{n} p_n q_n.$$

Dado que $p_n, q_n \leq 6$ para todo n (queda para el lector justificar esto) resulta que

$$0 < q_n - p_n < \frac{12}{n}$$

para todo n y esto demuestra que $\lim_{n \rightarrow \infty} (q_n - p_n) = 0$. Teniendo en cuenta que ambas sucesiones son monótonas y acotadas, resulta que ambas convergen y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n,$$

como queríamos probar. Esto implica que la longitud de la circunferencia de radio 1, que por definición es π se obtiene como límite de estas longitudes de perímetros regulares inscritos y circunscriptos.

Para concluir, usemos las fórmulas de la parte (a) del teorema para aproximar el valor de π .

Calculamos π

Por ejemplo, es sencillo calcular

$$p_4 = 2\sqrt{2} \approx 2,828 \quad \text{y} \quad q_4 = 4.$$

B6 fx =RAIZ(B5*C6)				C6 fx =(2*B5*C5)/(B5+C5)			
	A	B	C		A	B	C
1	n	p_n	q_n	1	n	p_n	q_n
2	4	2,828427125	4	2	4	2,828427125	4
3	8	3,061467459	3,313708499	3	8	3,061467459	3,313708499
4	16	3,121445152	3,182597878	4	16	3,121445152	3,182597878
5	32	3,136548491	3,151724907	5	32	3,136548491	3,151724907
6	64	3,140331157	3,144118385	6	64	3,140331157	3,144118385
7	128	3,141277251	3,14222363	7	128	3,141277251	3,14222363
8	256	3,141513801	3,141750369	8	256	3,141513801	3,141750369
9	512	3,14157294	3,141632081	9	512	3,14157294	3,141632081
10	1024	3,141587725	3,14160251	10	1024	3,141587725	3,14160251
11	2048	3,141591422	3,141595118	11	2048	3,141591422	3,141595118
12	4096	3,141592346	3,14159327	12	4096	3,141592346	3,14159327

Vemos en la planilla que con 2048 lados, podemos estar seguros de que 3,1495 indican los primeros 5 dígitos de π .

La idea de aproximar la longitud de la circunferencia a través de polígonos regulares de muchos lados es la piedra basal del llamado *método de exhaución* de Arquímedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.). Arquímedes es considerado uno de los científicos más destacados de la antigüedad, muy especialmente en matemática. A tal punto, que la famosa medalla Fields tiene grabado su rostro en una de sus caras.

Compañero del alma

Semblanza de Juan Carlos Pedraza por Carlos Borches

LA noticia corrió por la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA y el Departamento de Matemática del CBC sembrando dolor, tristeza y silencio: Juan Carlos Pedraza, matemático, universitario en sentido cabal, dueño de una personalidad entrañable que no pasaba inadvertida, había fallecido el 1ro de agosto a la edad de 66 años.

Juan Carlos nació el 3 de noviembre de 1957 en el barrio porteño de Liniens, el menor de tres hermanos de una familia de trabajadores. Sus hermanos mayores abrieron el surco ingresando a Exactas y allí se anotó Juan Carlos a fines de 1975, aprobando el ingreso pocos días antes del nefasto 24 de marzo.

Transitó su carrera durante años políticamente duros, aprovechando los resquicios que abría la confianza para intercambiar ideas y experiencias entre teorema y teorema, incluso con quien dirigió su Tesis, el matemático español Manuel Balanzat, que llegó al Río de la Plata cargando con la derrota de la Guerra Civil.

Cuando la dictadura comenzó a agrietarse, Juan Carlos fue del grupo que armó la Gremial Docente en torno al reclamo de salarios adeudados a los docentes del Curso de Ingreso. En ese primer paso, aún en dictadura, convergió con quienes habían creado el Centro de Graduados en un bloque que representó a la mayoría del Claustro en el proceso de recuperación de una facultad herida por el exilio y bolsones de mediocridad.

En esas circunstancias creció la figura de Juan Carlos como la persona capaz de escuchar, acercar ideas y proponer soluciones que emergían con la contundencia de la razón y los consensos.

Con la misma actitud se entregó a la tarea de conducir el Departamento de Matemática del Ciclo Básico Común (CBC), donde era docente desde su creación, y



luego de la Secretaría Académica del CBC. Tarea difícil si se tiene en cuenta que el CBC nació con numerosas demandas de las distintas facultades de la UBA. El Departamento de Matemática del CBC, con el esfuerzo de Juan Carlos y muchos otros docentes, fue más allá de la demanda esperable de las Facultades de la UBA transformándose en un centro que salió a buscar a aquellos estudiantes que tenían un espíritu matemático y no lo sabían. La organización de ciclos de muestras de Juegos Matemáticos, edición de libros, la creación de la Revista Q.E.D., la colaboración en la Olimpiada Matemática Argentina, fue parte de esa exitosa tarea donde el Departamento de Matemática convergió con la Facultad de Ciencias Exactas.

Y por esa misma senda siguió fuera de la UBA como miembro fundador de la Comisión de Visibilidad de la UMA y subdirector de la Revista de Educación Matemática.

Juan Carlos tenía la habilidad de traducir un problema matemático a un juego u otras circunstancias más amigables para quienes carecían del lenguaje propio de la Matemática. Y lo hacía con placer, divirtiéndose, con una armonía especial con la vida, como cuando se lo veía caminando con Susana, su esposa, o hablando de Lucía y Marcelo, sus hijos.



Es difícil recordar charlas con Juan Carlos sin que haya un chiste, una idea profunda para pensar, un problema matemático, un disco de rock de los 70, una película o un libro recomendado.

Como decía Willy Durán, actual decano de la FCEyN, “Perdimos un imprescindible, un tipo que íbamos a consultar en los momentos difíciles, como los actuales”.

En países como el nuestro, donde las instituciones científicas no se terminan de consolidar y los climas políticos adversos ocasionan exilios, vocaciones frustradas, destrucción de los recursos humanos que el país necesita, personas como Juan Carlos Pedraza son los que se ocupan de reconstruir las instituciones y, si los vientos los acompañan, crecer para generar ámbitos propicios para cultivar más talentos. Como el rayo, se nos fue un imprescindible, un amigo, “compañero del alma, tan temprano”.

CARLOS BORCHES

Prof. Dpto. Matemática del CBC.

Coordinador Programa de Historia de la FCEyN-UBA.

(✉) *borches@de.fcen.uba.ar*

Sección de Problemas

✉ por *Diego A. Sulca*

Para esta edición he elegido una serie de problemas que seguro podrán plantearlos en cualquier reunión social, teniendo garantizado un debate en el que surgirán ideas de las más variadas hasta dar con las soluciones. El primero es sutil, y más que la solución en sí, lo interesante es la discusión que se abre al intentar resolverlo en el aire. Lo he adaptado a una situación que me tocó vivir, pero el problema concreto se enuncia en a lo sumo dos líneas. Los dos siguientes son ejercicios básicos de lo que se llama "Lógica Proposicional", una rama de la Lógica. Por supuesto, para resolverlos no hace falta nada de Lógica Proposicional, pero siempre está bueno saber que hay toda un área de estudio dedicada a eso. Finalmente, el último problema es el menos interesante a nivel matemático, pero quizás es el más importante a nivel informativo. Nos recuerda la importancia de elegir contraseñas seguras.



Problema 1. En los aeropuertos grandes es común encontrar cintas transportadoras que la gente usa ya sea para avanzar más rápido, o bien para descansar de caminar sin dejar de avanzar. Para quienes no las conocen la forma más rápida que se me ocurre para describirlas es decir que son como una escalera mecánica horizontal. Normalmente, la velocidad de estas cintas es bastante menor que la velocidad a la que camina una persona promedio (digamos la mitad, para fijar una idea).

En estos días pasé por un aeropuerto en donde habían dos cintas transportadoras en paralelo. Solo una de ellas funcionaba, la otra estaba quieta y debía ser para caminar en la dirección opuesta. Yo estaba con mi hija en brazos, y para hacer un poco de tiempo nos metimos a la cinta que funcionaba. En la cinta yo caminaba a la velocidad de siempre, pero ahora respecto de la cinta (de modo que para alguien parado afuera de la cinta nos movíamos más rápido de lo usual). A mi hija le encantó el efecto, a tal punto que cuando salimos de la cinta en el otro extremo quiso que volviéramos por la cinta. Pero como les dije antes, la cinta que debía servir para volver no funcionaba. Como no había gente en ese momento, a modo de diversión decidí que volviéramos por la cinta que sí funcionaba, a pesar de que

esta se movía en la dirección opuesta. Al igual que antes, caminaba a la misma velocidad de siempre, pero respecto de la cinta (de modo que para alguien parado afuera de la cinta ahora nos movíamos más lento).

Cuando logramos salir al extremo inicial, mi hija quiso que repitiéramos el viaje completo. Sin embargo esta vez había gente. Para entretenerla decidí que repitiéramos el viaje pero por la cinta que no funcionaba. Es decir, fuimos y volvimos caminando por la cinta que no funcionaba.

¿Qué nos llevó más tiempo, ir y volver en la cinta que funcionaba, o ir y volver en la cinta que no funcionaba?

Problema 2. Imaginen que caminan hacia un pueblo donde se sabe que cada habitante o bien siempre dice la verdad o bien siempre miente. Además en este pueblo se habla un idioma del cual lo único que ustedes entienden es SÍ o NO. Mientras caminan se dan cuenta que más adelante el camino se bifurca y no saben cuál de los dos caminos deberán tomar. De repente ven a un habitante del pueblo que viene caminando en la dirección opuesta. El señor viene muy apurado de modo que solo tienen tiempo para escribir una sola pregunta en el traductor, y además quieren que la respuesta a la pregunta sea SÍ o NO, pues es lo único que van a entender cuando el señor responda ¿Qué pregunta harían?

Problema 3. Hace unos días hubo un homicidio y detuvieron a tres sospechosos: Antonio, Benito y Carlos. Al interrogarlos, Antonio dijo "Yo no lo hice. La víctima era un conocido de Benito, y Carlos lo odiaba". Benito dijo "Yo no lo hice. Ni si quiera lo conocía. Además, no estuve en la ciudad toda esa semana". Por su parte, Carlos dijo "Yo no lo hice. Vi a Antonio y Benito con la víctima ese día; uno de ellos lo habrá hecho". Asumiendo que dos de los hombres son inocentes y que están diciendo la verdad, ¿quién es el culpable?

Problema 4. Hoy en día se remarca mucho la importancia de tener contraseñas seguras para nuestras cuentas de correo electrónico, redes sociales, etc. Normalmente se pide que la contraseña tenga entre 8 y 12 caracteres (y a veces más), y que use dígitos, letras mayúsculas y minúsculas, y algunos de los caracteres especiales como *, % , \$, ! , @ , # , (,) .

Los hackers disponen de computadores que les permiten correr a fuerza bruta aproximadamente 3 millones de combinaciones por segundo con el fin de dar con la contraseña.

1. ¿Cuánto le lleva a un hacker develar una contraseña de 8 dígitos, y que usa solo los números $0,1,2,\dots,9$?
 2. Idem con una contraseña de 8 dígitos que solo usa números y letras minúsculas.
 3. Idem con una contraseña de 8 dígitos que usa números, letras minúsculas y mayúsculas, y caracteres especiales.
 4. Idem con una contraseña de 12 dígitos que solo usa números y letras minúsculas.
-

SOLUCIONES

Solución 1. Una de las respuestas rápidas podría ser que se tarda el mismo tiempo pues la velocidad que me da la cinta a la ida me la quita a la vuelta, haciendo un aporte neto nulo. Otra posible respuesta sería que depende de la velocidad de la cinta, pues si nos vamos al caso extremo en que la cinta viaja a la velocidad que camino, entonces me sería imposible avanzar en la vuelta si mantengo la velocidad usual.

Matemáticamente, la solución es simple y quizás menos entretenida.

Calculemos primero el tiempo empleado al ir y volver por la cinta que funciona. Supongamos que V es la velocidad a la que camino normalmente, l la longitud de la cinta, y v la velocidad de la cinta. Sea t_1 el tiempo usado en la ida y sea t_2 el tiempo empleado en la vuelta. Mi velocidad a la ida es $V + v$ y a la vuelta es $V - v$. Se cumplen las relaciones $V + v = \frac{l}{t_1}$ y $V - v = \frac{l}{t_2}$. Por lo tanto, el tiempo total empleado es

$$t_1 + t_2 = \frac{l}{V + v} + \frac{l}{V - v} = \frac{2Vl}{V^2 - v^2}$$

Calculemos ahora el tiempo T empleado en ir y volver por la cinta que no funciona. Se tiene $V = \frac{2l}{T}$, por lo que $T = \frac{2l}{V}$. Comparando

$$\frac{2Vl}{V^2 - v^2} = \frac{2l}{V - \frac{v^2}{V}} \quad \text{con} \quad \frac{2l}{V}$$

observamos que se tarda más yendo y volviendo por la cinta que sí funciona.

Solución 2. No nos conviene preguntarle, por ejemplo, si el camino de la izquierda es el correcto, pues no sabemos si este lugareño es de los que siempre mienten o de los que siempre dicen la verdad. Podríamos preguntarle sobre algo evidente para descubrir si es de los que siempre mienten o de los que siempre dicen la verdad, pero nos quedaríamos sin la posibilidad de preguntar sobre el camino correcto, pues solo podemos hacerle una pregunta.

Una pregunta podría ser: ¿Es cierto que si te pregunto cual es el camino correcto vas a responder que es el de la izquierda?

Si el señor responde que SÍ, entonces el camino correcto es el de la izquierda. Esto es evidente si el señor es de los que siempre dicen la verdad. Si en cambio es de los que siempre mienten, al responder que SÍ nos está mintiendo, y por lo tanto si le preguntáramos si el camino de la izquierda es el correcto nos respondería que NO. Pero como nos estaría mintiendo, entonces el camino de la izquierda sería realmente el correcto.

Si el señor responde que NO, entonces el camino correcto es el de la derecha. Esto es evidente si el señor es de los que siempre dicen la verdad. Si en cambio es de los que siempre mienten, al responder que NO nos está mintiendo, y por lo tanto si le preguntáramos si el camino de la izquierda es el correcto nos respondería que SÍ. Pero como nos estaría mintiendo, entonces el camino correcto debe ser el de la derecha.

Solución 3. Las declaraciones de Antonio y Benito son contradictorias, por lo que no pueden ser ambos inocentes. De manera similar, las declaraciones de Benito y Carlos son contradictorias, por lo que no pueden ser ambos inocentes. Esto implica que el asesino está en la intersección $\{\text{Antonio}, \text{Benito}\} \cap \{\text{Benito}, \text{Carlos}\}$. Luego el asesino debe ser Benito.

Solución 4.

1. Hay 10^8 posibles contraseñas de 8 dígitos que solo usan números. Si dividimos por el número de contraseñas que la computadora puede chequear por segundo obtenemos $10^8 / (3 \cdot 10^6) \approx 33$. Es decir, en 33 segundos un hacker puede encontrar la contraseña.
2. Si en una contraseña de 8 dígitos usamos números (10) y letras minúsculas (26), el número de contraseñas posibles es 36^8 . Si dividimos por el número de contraseñas que la computadora puede chequear por segundo obtenemos $36^8 / (3 \cdot 10^6) \approx 940369$. Es decir, en 940369 segundos un hacker puede averiguar nuestra contraseña. Esto es aproximadamente 11 días.
3. Si nuestra contraseña tiene 8 dígitos y usa números (10), letras minúsculas (26) y mayúsculas (26), y caracteres especiales (8), el número de contraseñas posibles es 70^8 . En este caso al hacker le llevaría $70^8 / (3 \cdot 10^6) \approx 192000000$ segundos. Esto da aproximadamente 6 años.
4. Si en una contraseña de 12 dígitos usamos números (10) y letras minúsculas (26), el número total de contraseñas es 36^{12} . Haciendo la cuenta usual, obtendremos que en 50 mil años el hacker puede averiguar la contraseña.

Cabe aclarar que este cálculo irá variando año tras año a medida que aparezcan computadoras más potentes. Esto tampoco quita que el hacker averigüe la contraseña en menos tiempo. Por ejemplo, el hacker podría asumir que la contraseña usa a lo sumo un carácter especial y a lo sumo una mayúscula y dar con la contraseña mucho antes si la misma tiene estas características.