

# Revista de Educación Matemática

## Consejo Editorial

### *Editor Ejecutivo*

Leandro Cagliero, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

### *Editores Asociados*

Juan Carlos Pedraza, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Mónica Villarreal, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

### *Comité Editorial*

Abraham Arcavi, Weizmann Institute of Science, Israel

Antonio Cafure, Universidad Nacional de General Sarmiento - CONICET, Argentina

Carlos D'Andrea, Universitat de Barcelona, España

Rocío Díaz Martín, Vanderbilt University, Estados Unidos

Cristina Esteley, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

José Nicolás Gerez Cuevas, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

Susana Paula Graça Carreira, Universidade do Algarve, Portugal

Patricio Herbst, Universidad de Michigan, Estados Unidos

Teresa Krick, Universidad de Buenos Aires - CONICET, Argentina

Ricardo Podestá, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Nélia Maria Pontes Amado, Universidade do Algarve, Portugal

Juan Pablo Rossetti, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Gabriel Rubén Soto, Fac. de Ingeniería, U. Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Argentina

Jhony Alexander Villa-Ochoa, Universidad de Antioquia, Colombia

Registro Nacional de la Propiedad Intelectual N° 168024

ISSN 0326-8780 (versión impresa)

ISSN 1852-2890 (en línea)

Página web: <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index>

Correo electrónico: [revm@famaf.unc.edu.ar](mailto:revm@famaf.unc.edu.ar)

# Revista de Educación Matemática

Volumen 39, N° 1 – 2024

## ÍNDICE

- **Curiosidades del 2024**  
*Nota Editorial por Ricardo Podestá* ..... 3

### ARTÍCULOS

- **SOBRE LA GEOMETRÍA Y LA TOPOLOGÍA DE LAS CÚPULAS DE DA VINCI**  
*Nicolé Geysse, María José Moreno y Andrés Navas*  
(Traducido por Antonio Cafure) ..... 15
- **LA COMPLEJIDAD ONTOSEMIÓTICA DE DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS  
QUE SE PROPONEN EN LA ENTRADA A LA UNIVERSIDAD**  
*Bettina Milanesio y María Elena Markiewicz* ..... 29
- **ON THE GEOMETRY AND TOPOLOGY OF DA VINCI DOMES**  
*Nicolé Geysse, María José Moreno y Andrés Navas* ..... 61
- **HUELLAS EN LA VASTA TRAYECTORIA DE GUY BROUSSEAU**  
*Semblanza por Dilma Fregona* ..... 75

### SECCIONES FIJAS

- **¿Sabías que...?**  
*por Leandro Cagliero y Ricardo Podestá* ..... 57
- **Sección de Problemas**  
*por Diego Sulca* ..... 83





---

# Curiosidades del 2024

*Todos los números tienen alguna curiosidad...*

*por Ricardo Podestá*

---

La mayoría de las propiedades enunciadas en el artículo pueden ser verificadas fácilmente.

- 2024 es un número combinatorio, en efecto

$$2024 = \binom{24}{3} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{3 \cdot 2} = 2^3 \cdot 11 \cdot 23.$$

La última expresión es su factorización en primos, y de allí vemos que

$$2024 = 44 \cdot 46 = 45^2 - 1$$

es una diferencia de cuadrados.

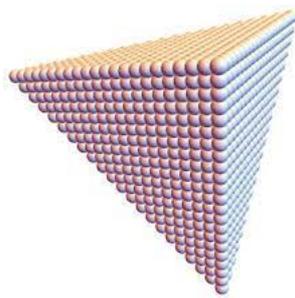
- 2024 puede escribirse de la siguiente forma autorreferencial

$$2024 = (20 + 24) + (20 + 24) + (20 + 24)^2.$$

• 2024 es un número tetraedral, el  $T_{22}$ , ya que es la suma de los primeros 22 números triangulares  $t_1, \dots, t_{22}$ :

$$2024 = T_{22} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \dots + t_{22} = 1 + 3 + 6 + 10 + \dots + 253.$$

Recordamos que  $t_n = \frac{1}{2}n(n+1)$  y  $T_n = \sum_{i=1}^n t_i = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) = \binom{n+2}{3}$ .

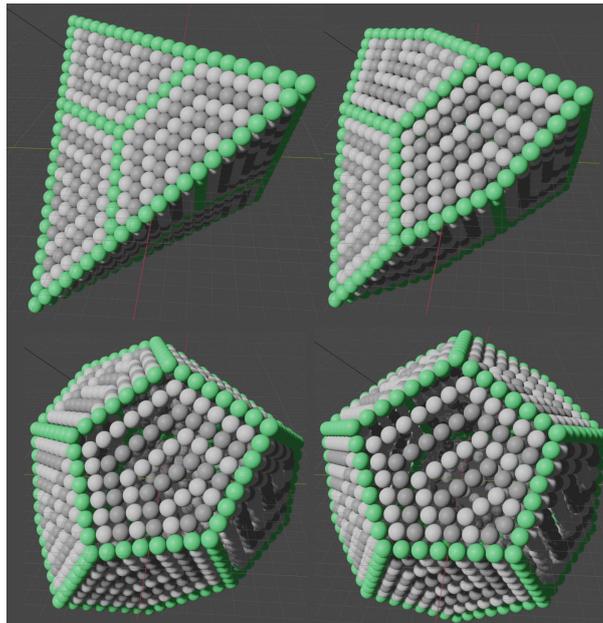


Es decir, podemos apilar 2024 naranjas ¡formando un tetraedro!

Más aún, 2024 es el octavo número dodecaedral  $D_8$  pues

$$D_n = \frac{1}{2}n(3n-1)(3n-2) = \binom{3n}{3}.$$

En realidad, todo número tetraedral de la forma  $T_{3n+1}$  es un número dodecaedral  $D_{n+1}$ . Gráficamente, una transición de la equivalencia para el 2024 entre  $T_{22}$  y  $D_8$  se puede ver en la siguiente figura



- 2024 es el undécimo número que se puede escribir como suma de 11 números consecutivos pero no con menos, en efecto

$$2024 = 179 + 180 + 181 + \dots + 189.$$

Basta ver que la ecuación

$$\sum_{i=1}^k (n+i) = 2024$$

tiene solución  $n = 179$  para  $k = 11$ , pero no tiene solución para ningún  $k < 11$ .

- 2024 es suma de cubos, por ejemplo  $2024 = 11^3 + 7^3 + 6^3 + 5^3 + 2^3 + 1^3$ ; pero más notablemente se lo puede escribir como suma de cubos consecutivos,

$$2024 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3.$$

- Si  $\varphi$  denota la función de Euler; es decir  $\varphi(n)$  es la cantidad de números coprimos con  $n$  entre 1 y  $n$ , se cumple que

$$\varphi(2024) = \varphi(2024 + \varphi(2024)).$$

#### PROPIEDADES ARITMÉTICAS

#### *Tipos de números*

Veamos que 2024 es un número...

- *educado*: ya que se puede escribir como suma de números consecutivos de más de una forma; por ejemplo,

$$2024 = 77 + 78 + \dots + 98 + 99$$

(hay dos formas más y una ya fue mencionada mas arriba, ¿te animás a encontrar la que falta?).

- *de Harshad*: pues la suma de sus dígitos  $2+0+2+4 = 8$  divide a  $2024 = 8 \cdot 253$ .
- *pernicioso*: porque su representación binaria

$$2024 = (11111101000)_2$$

contiene un número primo (7) de unos.

- *plindromo en bases 9 y 15*: pues sus dígitos son no-decrecientes en esas bases, en efecto  $2024 = (2688)_9$  y  $2024 = (8ee)_{15}$  con  $8 < e$  (donde  $e = 14$ ).
- *exponente apocalíptico*: pues  $2^{2024}$  es un número apocalíptico. Es decir, sus dígitos contienen a 666 como una subcadena. El número apocalíptico más chico es

$$2^{157} = 182687704\mathbf{666}362864775460604089535377456991567872.$$

- *aritmético*: pues la media de sus divisores positivos es un número entero. En efecto, sus divisores son

$$\{1, 2, 4, 8, 11, 22, 23, 44, 46, 88, 92, 184, 253, 506, 1012, 2024\},$$

su suma es  $\sigma(2024) = 4320$  y su media es  $\frac{\sigma(2024)}{16} = 270$ .

- *intocable*: pues no es igual a la suma de divisores propios de ningún número, es decir  $2024 \neq \sigma(n) - n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ .
- *práctico*: porque cada número menor que 2024 es suma de distintos divisores de 2024. Por ejemplo,  $18 = 11 + 4 + 2 + 1$ ,  $456 = 253 + 184 + 11 + 8$  y  $1111 = 506 + 253 + 184 + 92 + 46 + 23 + 4 + 2 + 1$ .
- *de Zumkeller*: pues su conjunto de divisores puede ser partido en dos subconjuntos con igual suma, necesariamente  $\frac{1}{2}\sigma(2024) = 2160$ . Por ejemplo,  $\{44, 92, 2024\}$  y  $\{1, 2, 4, 8, 11, 22, 23, 46, 88, 184, 253, 506, 1012\}$ .
- *prometido*: pues junto a 2295 forman un par de números tal que la suma de los divisores propios de uno es igual al otro y recíprocamente. Es decir,

$$\sigma(2024) - 2024 - 1 = 2295 \quad \text{y} \quad \sigma(2295) - 2295 - 1 = 2024.$$

### Expresiones con los dígitos

2024 puede ser escrito de muchas formas curiosas, por ejemplo:

- Con las operaciones elementales (incluyendo la potenciación) tanto en forma ascendente como descendente con los dígitos no nulos:

$$\begin{aligned} 2024 &= (-1 + 2 - 3 + 4)^{5+6} - 7 - 8 - 9 \\ &= 1 - 2 + 3 \times (4 + 5) \times (6 + 78 - 9) \\ &= 1 \times 2 \times (3 + 4^5) - 6 - 7 - 8 - 9 \\ &= (98 - 76) \times (5 + 43 \times 2 + 1). \end{aligned}$$

- Usando sólo uno cualquiera de los dígitos:

$$\begin{aligned}2024 &= (1 + 1)^{11} - (1 + 1) \times (11 + 1) \\ &= 2 \times 2 \times (22^2 + 22) \\ &= 3 + (3 - \frac{3}{3})^{\frac{33}{3}} - 3^3 \\ &= 4 + (4 + 4) \times (4^4 - 4) + 4 \\ &= 5 + 5 + 5^5 - \frac{5555}{5} \\ &= 6 + (\frac{6+6}{6})^{\frac{66}{6}} - 6 \times 6 + 6 \\ &= 7 + 7 \times (7 \times (7 \times 7 - 7) - 7) + 7 + \frac{7}{7} \\ &= 88 \times (8 + +8 + 8 - \frac{8}{8}) \\ &= 9 \times 9 + (9 + 9) \times (99 + 9) - \frac{9}{9}.\end{aligned}$$

- La misma representación (decimal) usando un único dígito  $a$ :

$$2024 = \frac{(aaaa - aaa + aa + a) \times (a + a)}{a \times a}$$

para cualquier  $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  (¿por qué funciona?).

- Usando los mismos dígitos en las bases que en los exponentes:

$$2024 = -1^7 - 2^5 + 3^6 + 4^3 - 5^2 + 6^4 - 7^1.$$

### *Suma de cuadrados y ternas pitagóricas*

- 2024 se puede escribir de 7 maneras como suma de 3 cuadrados (sin importar el orden de las sumas y sin usar números negativos)

$$\begin{aligned}2024 &= 2^2 + 16^2 + 42^2 \\ &= 2^2 + 24^2 + 38^2 \\ &= 8^2 + 14^2 + 42^2 \\ &= 10^2 + 18^2 + 40^2 \\ &= 10^2 + 30^2 + 32^2 \\ &= 16^2 + 18^2 + 38^2 \\ &= 18^2 + 26^2 + 32^2\end{aligned}$$

y como suma de 4, 5 ó 6 cuadrados

$$\begin{aligned}2024 &= 4^2 + 18^2 + 28^2 + 30^2 = 8^2 + 22^2 + 24^2 + 30^2 \\ &= 5^2 + 19^2 + 22^2 + 23^2 + 25^2 = 13^2 + 17^2 + 19^2 + 23^2 + 26^2 \\ &= 7^2 + 17^2 + 19^2 + 20^2 + 21^2 + 22^2.\end{aligned}$$

- 2024 es parte de las siguientes ternas pitagóricas

$$\begin{array}{ll}
 2024^2 + 2415^2 = 3151^2, & 2024^2 + 11040^2 = 11224^2, \\
 2024^2 + 3795^2 = 4301^2, & 2024^2 + 11550^2 = 11726^2, \\
 2024^2 + 3990^2 = 4474^2, & 2024^2 + 22218^2 = 22310^2, \\
 2024^2 + 5382^2 = 5750^2, & 2024^2 + 23232^2 = 23320^2, \\
 2024^2 + 5643^2 = 5995^2, & 2024^2 + 44505^2 = 44551^2, \\
 2024^2 + 8343^2 = 8585^2, & 2024^2 + 46530^2 = 46574^2, \\
 & 2024^2 + 93093^2 = 93115^2,
 \end{array}$$

donde el cateto mas corto mide 2024.

### Combinatoria

- 2024 es la cantidad de formas de repartir 11 juguetes entre 2 niños de manera que cada uno reciba al menos dos juguetes. Es decir, el número de cadenas binarias de longitud 11 con al menos dos 0's y al menos dos 1's. En efecto,

$$2024 = 2^{11} - 2 - 2\binom{11}{1}.$$

- 2024 es también el número de productos distintos de la forma

$$i \cdot j \cdot k \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq j < k \leq 31.$$

- 2024 es la cantidad de movimientos que les lleva a 44 ranas (R) y 44 sapos (S) intercambiar sus posiciones en una fila con 89 lugares, donde las ranas (resp. sapos) se encuentran todas juntas en el extremo izquierdo (resp. derecho) y separados por un único lugar libre y los movimientos son avanzar o saltar entre ranas y sapos.

En general, el problema para  $n$  ranas y  $n$  sapos en una fila de largo  $2n + 1$  requiere  $(n + 1)^2 - 1$  movimientos. Por ejemplo, para 2 ranas y 2 sapos, se necesitan 8 movimientos que graficamos a continuación:

```

R R - S S
R - R S S
R S R - S
R S R S -
R S - S R
- S R S R
S - R S S
S S R - S
S S - R R

```

- Hay 2024 formas de colocar 3 fichas consecutivas en línea (horizontal, vertical o diagonalmente) en un tablero de  $20 \times 20$ .
- 2024 es la cantidad de matrices  $2 \times 2$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}_{46}$ , inversibles, cuyo cuadrado es menos la identidad módulo 46; es decir

$$\#\{A \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}_{46}) : A^2 = -I \pmod{46}\} = 2024.$$

### Solución de ecuaciones

- Hay 2024 soluciones enteras distintas de cada una de las ecuaciones

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1 \pmod{46} \quad \text{y} \quad x^2 - y^2 - z^2 \equiv 1 \pmod{46}.$$

- Hay 2024 soluciones enteras de la ecuación

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{11}^3 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_{11})^2$$

con  $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{11}$ .

- Hay 2024 soluciones enteras no-negativas de la ecuación

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{23}^2 + x_{24}^2 = 3.$$

- Hay 2024 ternas pitagóricas módulo 48. Es decir, hay 2024 soluciones distintas de la ecuación

$$x^2 + y^2 = z^2 \pmod{48}, \quad x \leq y.$$

### PROPIEDADES GEOMÉTRICAS

### Triángulos enteros

- Hay 2024 triángulos de lados enteros  $a, b, c \in \mathbb{N}$  con  $a \leq b \leq c$ , cuya circunferencia circunscripta tiene radio  $\leq 15$  ([OEIS-A331229](#)). Recordemos que la *circunferencia circunscripta* (o circuncírculo) de un triángulo es la única circunferencia que pasa por sus tres vértices.
- Es la suma de todos los perímetros de todos los triángulos de lados enteros con perímetro 46. Es decir, hay 44 triángulos enteros de perímetro 46 ([OEIS-A308089](#)). O sea, hay 44 ternas de números  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3$  con

$$x_1 + x_2 + x_3 = 46,$$

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \quad \text{y} \quad x_i + x_j \geq x_k$$

para toda permutación  $i, j, k$  de  $1, 2, 3$  (desigualdad triangular). Por ejemplo, los primeros triángulos son los dados por los lados

$$(1, 22, 23), \quad (2, 21, 23), \quad (2, 22, 22).$$

¿Te animás a encontrar los que faltan?

En efecto, se sabe que el número de triángulos enteros de perímetro  $m$  es

$$T(m) = \begin{cases} \lfloor \frac{m^2}{48} \rfloor & \text{si } m \text{ es par,} \\ \lfloor \frac{(m+3)^2}{48} \rfloor & \text{si } m \text{ es impar,} \end{cases}$$

(T. Jenkyns, E. Muller, *Triangular Triples from Ceilings to Floors*, *The American Mathematical Monthly* **107:7**, 2000, 634–639). Luego,  $\lfloor \frac{46^2}{48} \rfloor = 44$ .

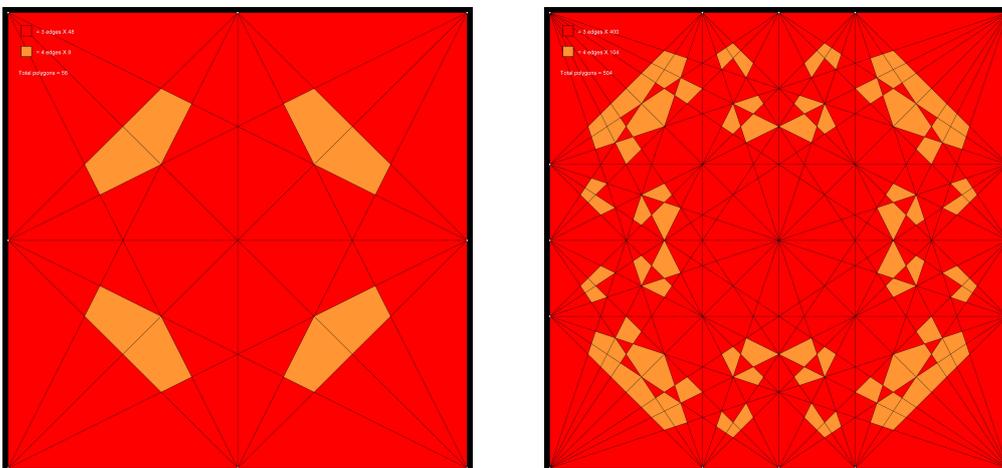
### Diagramas de Farey

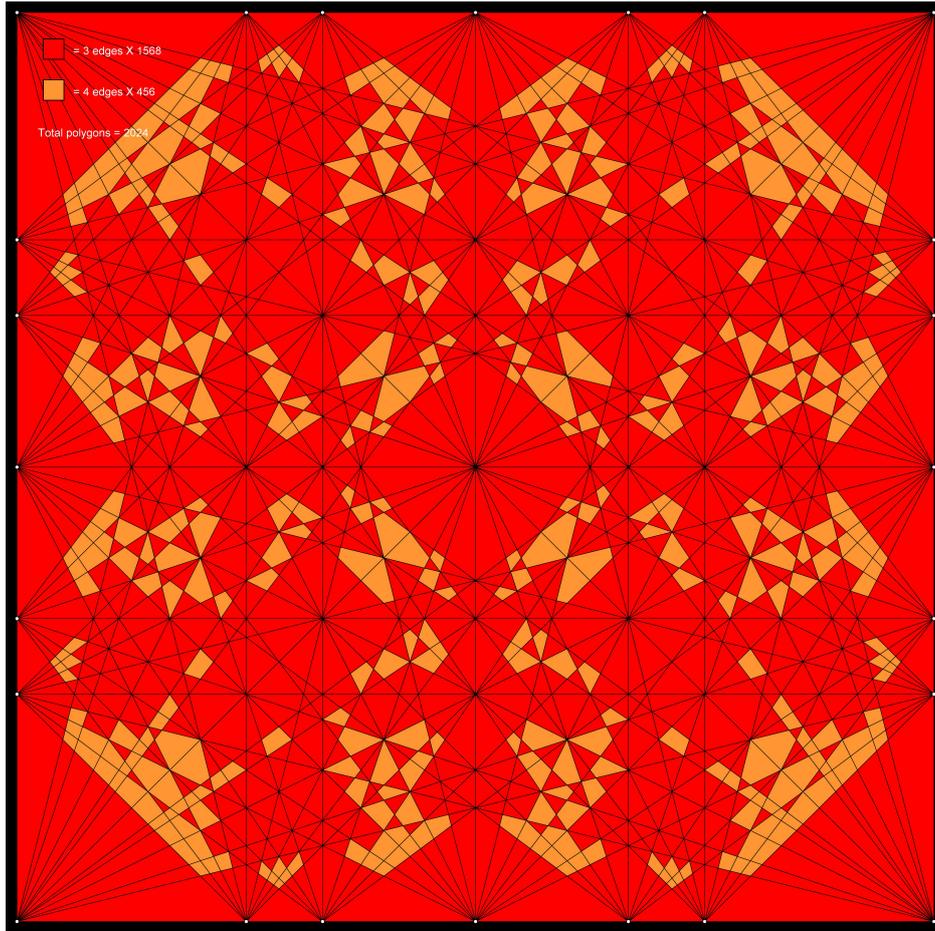
Una *sucesión de Farey* de orden  $n$ , denotada por  $F_n$ , es la sucesión de todas las fracciones reducidas  $\frac{k}{m}$  entre 0 y 1 con el denominador  $m \leq n$ , listadas en orden creciente. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} F_1 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}, \\ F_2 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}, \\ F_3 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}, \\ F_4 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}. \end{aligned}$$

Un *diagrama de Farey* de orden  $n$  consiste en tomar el cuadrado unidad  $[0, 1] \times [0, 1]$  y en cada lado marcar los puntos de  $F_n$ . Luego se trazan todas las diagonales y medias diagonales posibles (se unen todos los puntos marcados que no pertenezcan al mismo lado). Estas líneas dividen al cuadrado unidad en triángulos y cuadriláteros.

Denotemos por  $R(n)$  al número de regiones de un diagrama de Farey de orden  $n$  (OEIS-A358882). Resulta que 2024 es el número de regiones del diagrama de Farey de orden 4. En efecto,  $R(1) = 4$ ,  $R(2) = 56$ ,  $R(3) = 504$  y  $R(4) = 2024$  y gráficamente tenemos





### *Diagonales en polígonos regulares*

Hay 2024 diagonales en un polígono regular de 92 lados que son paralelas, por lo menos, a uno de los lados (ver sucesión  $a(n)$  en [OEIS-A367204](#)).

En efecto, sea  $P_n$  un polígono regular de  $n$  lados. Es muy fácil ver que  $P_n$  tiene  $\frac{1}{2}n(n-3)$  diagonales. Si  $n$  es impar cada diagonal es paralela a algún lado. Si  $n$  es par, numerando los vértices  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ , cada diagonal está formada por la elección de dos vértices  $i, j \in V$  no consecutivos (módulo  $n$ ), es decir  $|i-j| > 1$  (mód  $n$ ). Dicha diagonal es paralela a un lado si y solo si la diferencia  $i-j$  es impar (pensar geoméricamente).

Luego, las diagonales que no son paralelas a un lado de  $P_n$  son aquellas que tienen sus dos vértices pares o los dos impares. Así, hay

$$2\binom{n/2}{2} = \frac{1}{4}n(n-2)$$

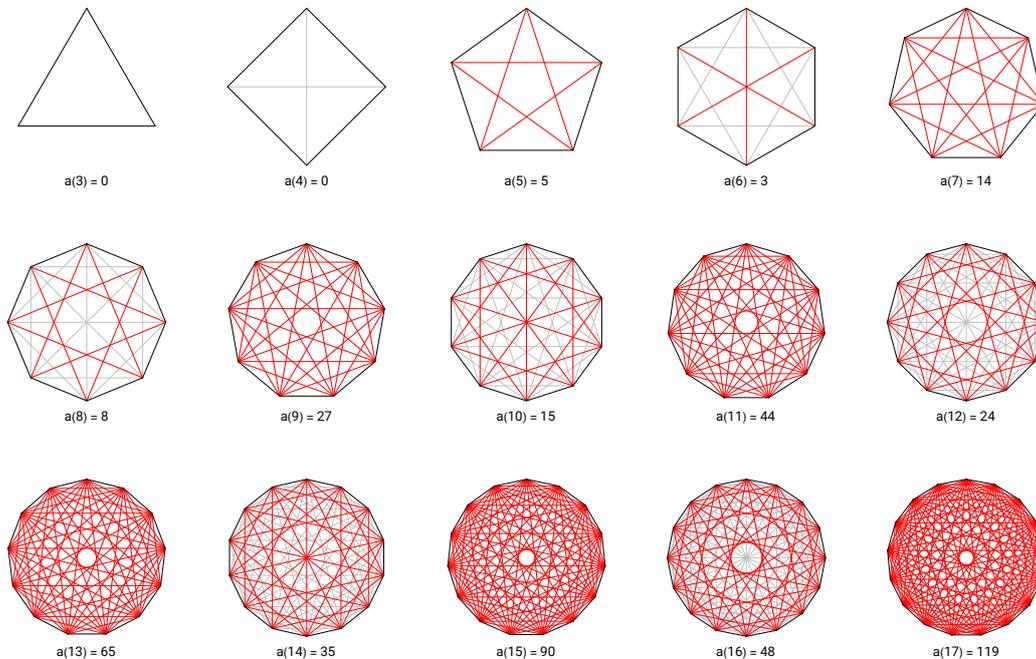
diagonales que no son paralelas a lados. De esta forma, el número de diagonales de  $P_n$  paralelas a un lado es

$$a(n) = \frac{1}{2}n(n-3) - \frac{1}{4}n(n-2) = \frac{1}{2}n(n-4).$$

Finalmente, obtenemos que

$$a(92) = \frac{92 \cdot 88}{2} = 2024.$$

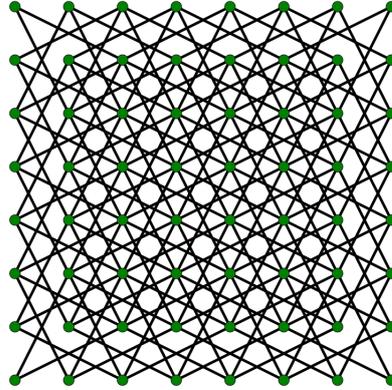
En la figura siguiente se muestran las  $a(n)$  diagonales paralelas a  $P_n$  para  $n \leq 15$ .



### Grillas y grafos

- 2024 es el número de polígonos que se pueden formar al unir los 16 puntos de una grilla cuadrada de  $4 \times 4$  con segmentos ([OEIS-A345459](#)).
- En una grilla de  $23 \times 23$  hay 2024 segmentos que conectan exactamente 8 puntos ([OEIS-A177724](#)). También hay 2024 segmentos de longitud  $\sqrt{5}$  uniendo vértices de la grilla ([OEIS-A033996](#)). En efecto, cada 'dominó' (subgrilla de  $1 \times 2$  ó  $2 \times 1$ ) tiene dos tales diagonales.
- El grafo juntura de dos grafos cíclicos de 44 lados  $C_{44} * C_{44}$  tiene 2024 aristas. La *juntura* de dos grafos  $G$  y  $H$  es el grafo  $G * H$  donde cada vértice de  $G$  es unido a cada vértice de  $H$ .
- La *circunferencia* de un grafo  $G$ , denotado por  $Cir(G)$ , es la longitud del ciclo más largo que éste contiene. Se sabe que una grilla de  $n \times n$  como grafo (i.e.  $P_n \times P_n$ ) tiene circunferencia  $n^2$  si  $n$  es par y  $n^2 - 1$  si  $n$  es impar. Luego, la grilla de  $45 \times 45$  como grafo tiene circunferencia  $45^2 - 1 = 44 \cdot 46 = 2024$ . Pero mucho más sorprendente es que el grafo del caballo en un tablero de  $45 \times 45$  tiene circunferencia 2024 ([OEIS-A248427](#)). El *grafo del caballo*  $\mathcal{C}_\Delta(n)$  es

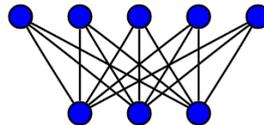
el grafo que representa todas las movidas legales de un caballo de ajedrez en un tablero de  $n \times n$ . Cada vértice del grafo representa una casilla y cada lado conecta casillas que están a salto de caballo una de otra. A continuación, el grafo  $\mathcal{C}(8)$  a partir de un tablero de  $8 \times 8$ :



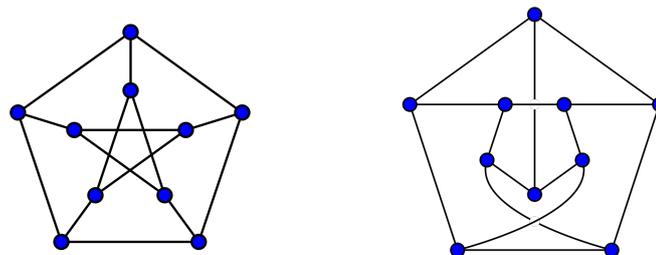
En definitiva, en un tablero de  $45 \times 45$ , el ciclo más largo que puede hacer un caballo es de 2024 casillas. En símbolos,

$$Cir(\mathcal{C}(45)) = 2024.$$

- El número de cruce del grafo bipartito  $K_{5,46}$  es 2024. El *grafo bipartito completo*  $K_{n,m}$  es un grafo con  $n + m$  vértices, divididos en dos conjuntos  $V_1$  y  $V_2$  de  $n$  y  $m$  vértices respectivamente, donde todos los vértices de  $V_1$  están unidos con todos los vértices de  $V_2$  pero ningún vértice de  $V_1$  ni de  $V_2$  forman lados (por ejemplo, en la figura siguiente damos  $K_{5,3}$ ).



El *número de cruces*  $cr(G)$  de un grafo  $G$  es el mínimo número de cruces entre sus lados con que puede ser dibujado en el plano. Un grafo planar tiene número de cruce 0. Los grafos no planares más chicos son  $K_{3,3}$  y  $K_5$  y tienen número de cruces  $cr(K_{3,3}) = 1 = cr(K_5)$ . Un grafo con número de cruce 2 es el grafo de Petersen  $P$  (dibujo clásico y otro donde se ve que  $cr(P) = 2$ ):

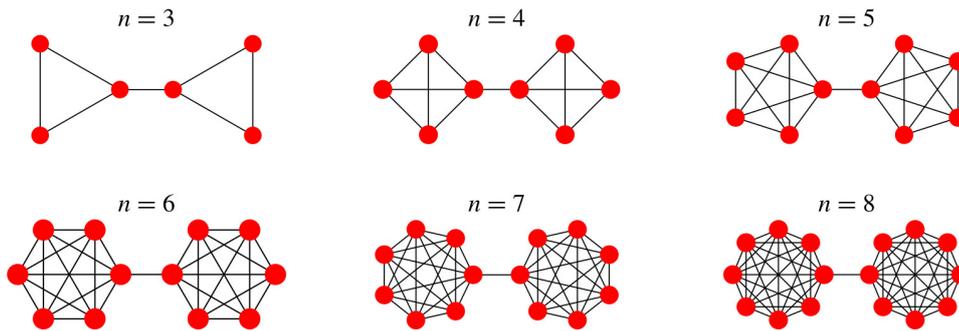


En efecto, Kleitman probó en 1970 ([Daniel J. Kleitman, The crossing number of  \$K\_{5,n}\$ , J. Comb. Theory 9:4, 12/1970, 315–323](#)) que

$$cr(K_{5,n}) = 4 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$$

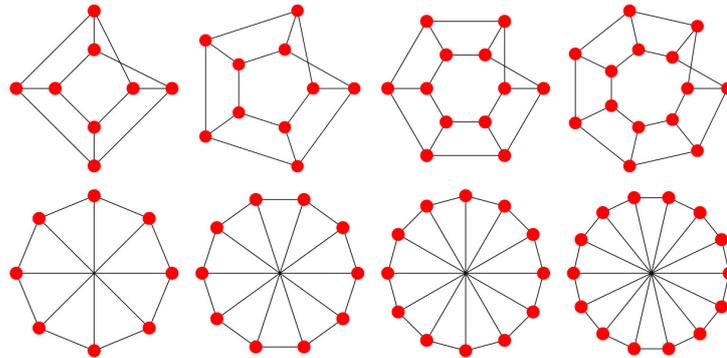
de donde vemos que  $cr(K_{5,46}) = 4 \cdot 23 \cdot 22 = 2024$ .

- Hay 2024 conjuntos independientes en el grafo de barra con pesas (barbell)  $b_{44}$ . Un *conjunto independiente* en un grafo es cualquier conjunto de vértices que no están conectados entre sí. El *grafo con pesas  $b_n$*  se obtiene uniendo con un lado dos copias de un grafo completo de  $n$ -vértices  $K_n$  (ver figura para  $n = 3, \dots, 8$ ).



Se sabe que el número de conjuntos independientes de  $b_n$  es  $(n + 1)^2 - 1$ .

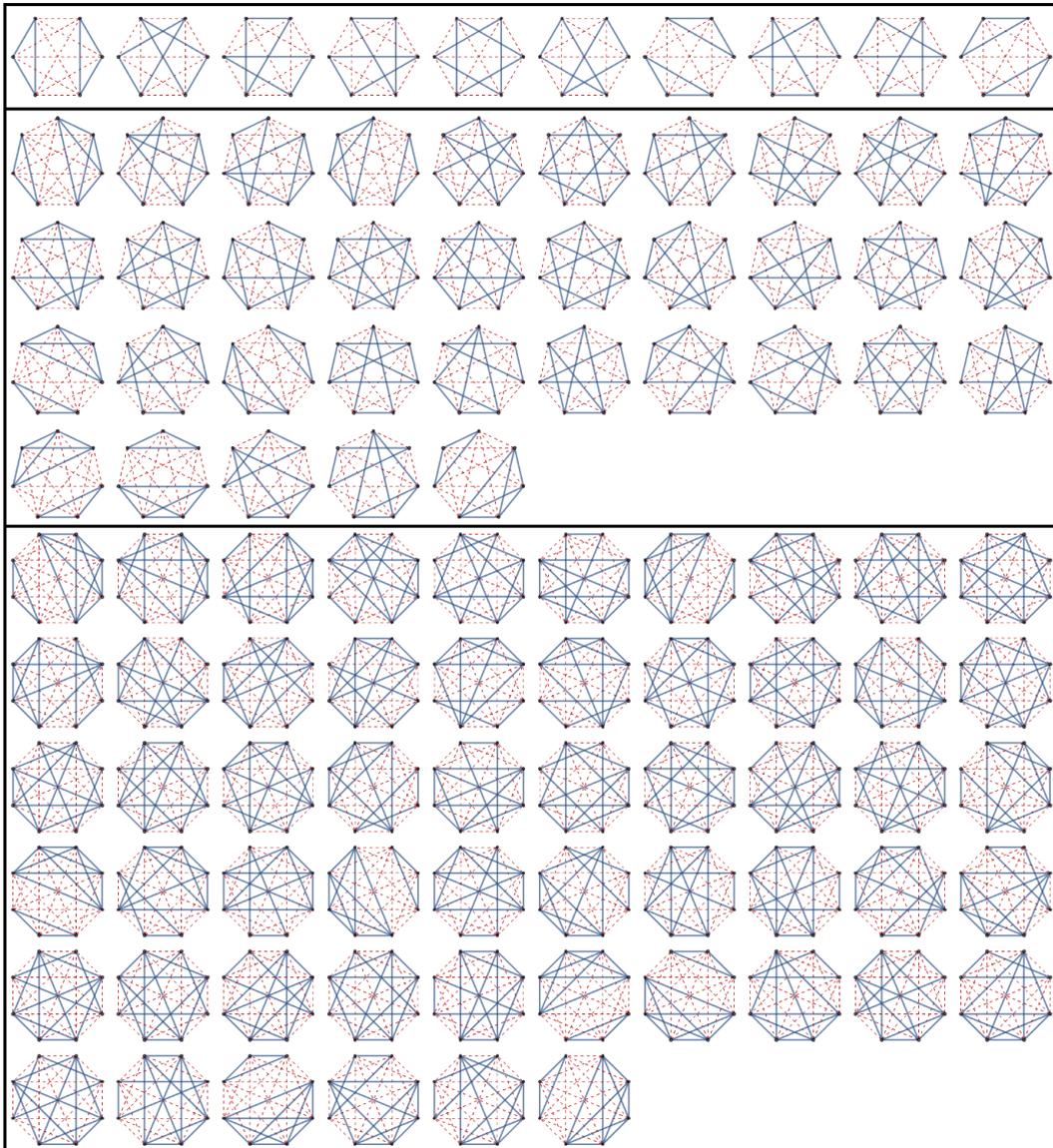
- Hay 2024 conjuntos dominantes mínimos en el grafo escalera de Möbius  $M_{44}$  ([OEIS-A347559](#)). El *grafo escalera de Möbius* de orden  $n$ , denotado por  $M_n$ , es el grafo obtenido a partir del grafo prisma de orden  $n$  introduciendo un ‘twist’ entre dos lados y resulta isomorfo al grafo circulante  $Ci_{2n}$  (ver figura  $M_4$ – $M_7$  y  $Ci_8$ – $Ci_{14}$ ).



Un *conjunto dominante* en un grafo  $G$  es un subconjunto  $D$  de vértices, tal que todo vértice en  $G$  o bien está en  $D$  o tiene un vecino en  $D$ . Un *conjunto dominante mínimo* de  $G$  es un conjunto dominante de tamaño mas chico posible en  $G$ .

- Hay 2024 cortes de lados cíclicos mínimos en el grafo completo  $K_{24}$  ([OEIS-A351860](#)). Un *corte de lados* (cut egde) en un grafo conexo  $G$  es un conjunto de lados  $S$  que si se quitan a  $G$ , el grafo resultante  $G \setminus S$  queda desconexo.

Un *corte de lados cíclico* es un corte de lados  $S$  en  $G$  tal que  $G \setminus S$  tiene al menos un ciclo en cada componente conexa. A continuación mostramos los cortes cíclicos mínimos para  $K_6$ ,  $K_7$  y  $K_8$ .



Algunas de las curiosidades de la presente nota han sido obtenidas de la página [Numbers Aplenty](#) (*Tipos de números*) y del artículo [24 and 2024 in numbers and patterns](#) de Inder Taneja (*Expresiones con los dígitos y Sumas de cuadrados*). El número 2024 aparece en más de 400 sucesiones en la página web <https://oeis.org> (The On-line Encyclopedia of Integer Sequences) de Neil Sloane, de las cuales he seleccionado las que más me llamaron la atención. Las imágenes son libres, obtenidas en su mayoría de Wikipedia o Wolfram Mathematica. Puede el lector dedicar lo que resta del año a buscar por su cuenta muchas más apariciones interesantes del 2024 en la matemática.

---

# SOBRE LA GEOMETRÍA Y LA TOPOLOGÍA DE LAS CÚPULAS DE DA VINCI

Nicolé Geysse, María José Moreno y Andrés Navas

Traducción de Antonio Cafure<sup>1</sup>

---

**RESUMEN.** Estudiamos las famosas cúpulas de Leonardo Da Vinci, así como las variaciones concebidas por Rinus Roelofs, desde un punto de vista matemático. En particular, consideramos el problema de cerrar la cúpula para producir una estructura esférica. Explicamos por qué este problema está relacionado con consideraciones geométricas y topológicas sutiles. Esto contrasta con la estructura unidimensional análoga, a saber, el puente de Da Vinci, que se puede fácilmente continuar hasta cerrar una forma circular.

*Palabras clave:* Leonardo Da Vinci, puente, cúpula, geometría, topología.

**ABSTRACT.** We study the famous Leonardo Da Vinci's domes, as well as the variations pursued by Rinus Roelofs, from a mathematical viewpoint. In particular, we consider the problem of closing the dome in order to produce a spherical structure. We explain why this problem is related to subtle geometric and topological considerations. This is in contrast with the 1-dimensional analog structure, namely Da Vinci's bridge, that can be easily closed up to make a circular shape.

*Keywords:* Leonardo Da Vinci, bridge, dome, geometry, topology.

## §1. Introducción

Sin duda alguna, Leonardo Da Vinci es uno de los grandes genios de la historia. Su vasta obra sorprende no sólo por su profundidad, originalidad y belleza, sino también por su heterogeneidad. Entre sus escritos, incluso es posible encontrar varias notas sobre matemática. La mayor parte de su educación matemática es consecuencia de su formación con Luca Pacioli, para quien ilustró el famoso libro *Sobre la proporción divina*. En este sentido, destaca la presencia de la razón áurea en las obras de arte de Da Vinci, aunque esta suele ser exagerada.

Da Vinci también abordó problemas como la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo, aunque sus avances en torno a estos no fueron sustanciales. En el artículo (Duvernoy, 2008) de Sylvie Duvernoy se puede encontrar más información al respecto, así como una interesante discusión sobre una contribución

---

<sup>1</sup> Traducido con autorización de los autores, el artículo original en inglés, *On the geometry and topology of Da Vinci domes*, se publica en este mismo número de la Revista de Educación Matemática.

genuina y poco conocida al problema de la determinación del centro de gravedad de una pirámide<sup>2</sup>.

En este artículo nos centraremos en una serie de bocetos gráficos que dejó en su obra mítica *Codex Atlanticus*. Los abordaremos desde un punto de vista matemático, más precisamente, geométrico y topológico.

## §2. El puente de Da Vinci

De las muchas estructuras que esbozó Leonardo da Vinci, quizás la más ingeniosa sea su diseño de un puente autoportante y de fácil montaje. En el *Códice* encontramos la siguiente imagen:



FIGURA 1. Imagen del folio 69 recto del Codex Atlanticus de Leonardo Da Vinci.

El artículo ([Humenberger, 2021](#)) proporciona una descripción completa de la geometría elemental involucrada en este diseño.

En los últimos años, esta idea de Da Vinci ha sido implementada sistemáticamente como una actividad pedagógica para introducir a los estudiantes a la geometría en dos y tres dimensiones de una manera atractiva, ver ([Carrasco, Carvacho, y Sánchez, 2023](#)). También ha encontrado un lugar central en diversas exposiciones matemáticas (museos, festivales, etc.) en todo el mundo, y se ha exhibido como decoración en muchos lugares, por ejemplo, en la ciudad de Friburgo (Alemania).

<sup>2</sup>En la literatura suele mencionarse que Da Vinci habría aportado una prueba muy original del teorema de Pitágoras. Sin embargo, esto es muy improbable pues el argumento parece haber surgido mucho más tarde. Para una discusión muy completa sobre este asunto, ver el artículo ([Lemmermeyer, 2016](#)) de Franz Lemmermeyer.



FIGURA 2. Un puente de Da Vinci en Friburgo; imagen de Wikipedia Commons.

No es muy sorprendente que, siguiendo cuidadosamente esta construcción, al final se obtenga un “círculo”, como se muestra a continuación.



FIGURA 3. Un “círculo” de Leonardo da Vinci.

### §3. Las cúpulas de Da Vinci

A continuación exhibimos otro maravilloso diseño del *Códice*. Las estructuras que se forman a partir de él también son autoportantes, aunque producen una especie de superficie de dimensión 2 en lugar de un objeto unidimensional.

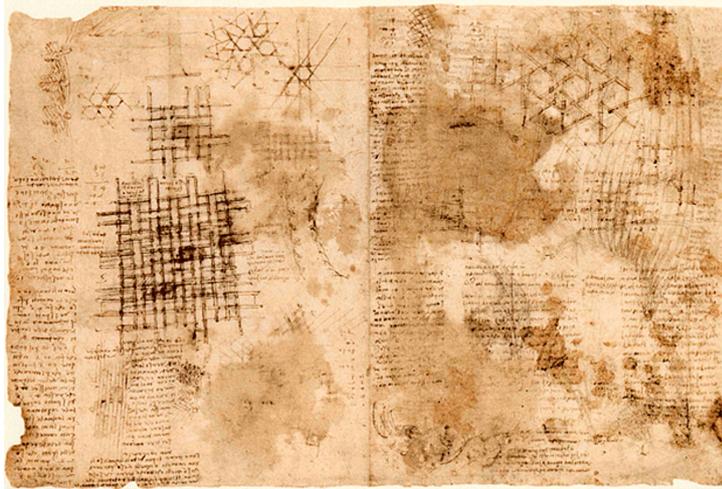


FIGURA 4. Folio 899 verso del *Codex Atlanticus* de Leonardo Da Vinci.

Todas estas estructuras se basan en el mismo principio: cada varilla es perfectamente recta pero tiene cuatro muescas. Un aspecto crucial es que las muescas que están cerca de los extremos son más profundas que las otras dos.

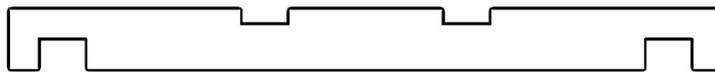


FIGURA 5. Una varilla de una cúpula de Da Vinci.

Al ensamblar piezas, cada muesca debe coincidir con otra, y aquellas que se encuentran en los extremos deben colocarse hacia el suelo. Debido a la diferencia de profundidad, esta simple regla produce que la estructura se eleve.



FIGURA 6. Una cúpula ensamblada para el Festival de Matemáticas en Valparaíso, Chile.

Hay muchas variaciones en los diseños. En particular, la bonita lista de once patrones periódicos planos que presentamos a continuación fue producida para el kit educativo LeonarDome del Museo de Matemáticas de Cataluña (ver (Brasó, 2018)).

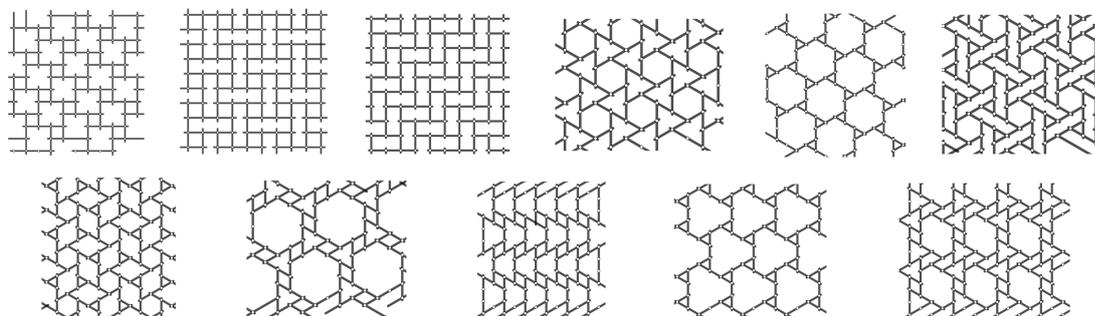


FIGURA 7. Once patrones diferentes para construir cúpulas.

Incluso se pueden crear más diseños. Por ejemplo, el que sigue fue concebido por Ignacio (hijo del tercer autor), aunque luego descubrimos que aparece en la página 4 de (Song y cols., 2013).



FIGURA 8. Un “nuevo” patrón.

Debemos destacar que, en las ilustraciones anteriores, todas las varillas tienen la misma longitud. Sin embargo, nuestra discusión también se aplica a varillas de longitudes diferentes, las que dan lugar a más patrones.

Sería interesante explorar todo el panorama de embaldosados periódicos planos que pueden ser implementados de esta manera. Un problema desafiante es determinar cuáles de los diecisiete grupos cristalográficos pueden realizarse. Por ejemplo, parece que aquellos que involucran simultáneamente rotaciones no triviales y reflexiones son difíciles de producir (quizás algunos de ellos sean

imposibles). Se puede comprobar fácilmente que los patrones anteriores realizan los grupos pmg, pgg, p31m, p4g, p4 y p6 (ver (Schattschneider, 1978) para una discusión concisa sobre grupos cristalográficos, incluida la notación).

Estructuras como las cúpulas de Da Vinci han sido redescubiertas y trabajadas por Rinus Roelofs; ver (Roelofs, 2008) para una descripción de este aspecto de su increíble trabajo. Volveremos sobre esto más adelante.

#### §4. Patrones de Da Vinci y esfericidad

El puente de Da Vinci puede cerrarse para dar lugar a una estructura circular. Naturalmente, cabe preguntarse si las cúpulas de Da Vinci también pueden cerrarse para originar superficies esféricas. Vale la pena recalcar que sólo nos referimos a la combinatoria de los patrones, sin alusión a la estabilidad física de la estructura. En particular, no sugerimos aquí ningún fenómeno de tensegridad.

Señalemos que existen teselaciones esféricas que respetan las reglas combinatorias de las cúpulas de Da Vinci (las muescas internas de cada varilla apuntan en una dirección y las externas en la opuesta, todo esto de manera coherente y sistemática). Por ejemplo, uno puede construirlas a partir de configuraciones de tipo icododecaedra. El hermoso diseño reproducido a continuación fue concebido por Roelofs y puede ser apreciado mejor en su sitio web. Observemos, sin embargo, que la esfericidad de la estructura es en cierto modo “contraria” a la de los domos de Da Vinci y proviene de que las varillas están sistemáticamente curvadas en una dirección apropiada (de hecho, no hay diferencia de profundidad entre las muescas internas y externas de cada varilla).



FIGURA 9. Este diseño de Roelofs se encuentra en su sitio web <http://www.rinusroelofs.nl/structure/designs-lg/dm-sphere-10.html>

En ciertos casos, es posible cerrar una estructura esférica usando sólo varillas rectas. Esto puede ser constatado, por ejemplo, con el siguiente diseño de Arie Brederode. Notemos que este requiere de una gran cantidad de varillas.

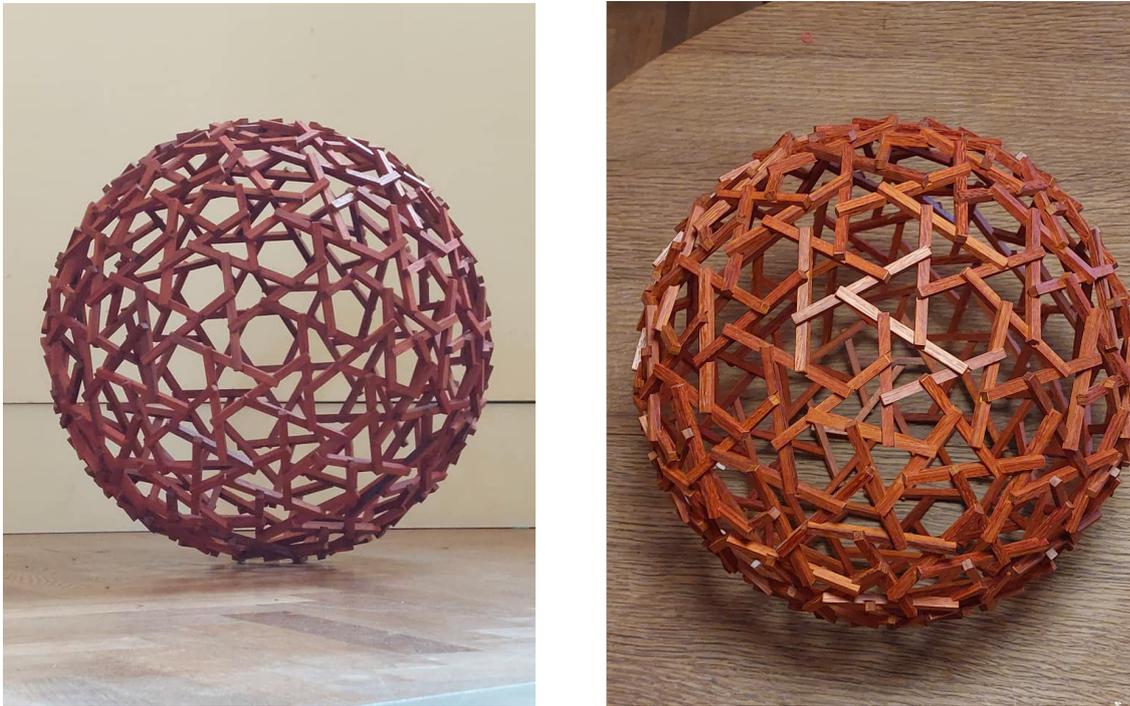


FIGURA 10. Imágenes subidas por Arie Brederode a la página de Facebook de *Bridges: Arts & Mathematics*; reproducidas con autorización.

**4.1. Una advertencia sobre la colinealidad de los vértices a lo largo de las varillas.** Desde un punto de vista teórico, no resulta apropiado modelar las cúpulas de Da Vinci como poliedros en que las varillas (rectas) se identifican a las aristas y, por consiguiente, los vértices a lo largo de cada una de ellas son colineales (compare con (Song y cols., 2013)). De hecho, un objeto con estas características no puede cerrarse como una superficie esférica. Esto es consecuencia del siguiente resultado elemental, cuya hipótesis se aplica a los domos de Da Vinci en caso de modelarlos como poliedros con vértices colineales a lo largo de las varillas debido a sus propiedades combinatorias (específicamente, debido a que las muescas externas de cada varilla no pueden empalmar con otras muescas externas).

**El teorema del poliedro.** No existe ningún poliedro de tipo esférico cuyos vértices estén cada uno contenido en al menos dos aristas colineales.

Presentaremos dos demostraciones de este resultado. La primera es puramente geométrica y, en cierto modo, está relacionada con la idea de curvatura. Ella reproduce un argumento estándar que muestra que cada superficie compacta en el espacio tridimensional tiene puntos con curvatura gaussiana positiva. La

segunda, basada sobre el clásico teorema del defecto angular de Descartes, es de índole más topológica. Aunque es más elaborada que la demostración geométrica, las consideraciones topológicas involucradas orientarán nuestra discusión posterior. Como es de esperar, ambas pruebas son por contradicción.

**Primera demostración (Da Vinci se encuentra con Gauss).** Supongamos que sí existe tal poliedro y consideremos una esfera muy grande cuyo interior lo contenga. Disminuyendo de forma continua el radio de la esfera, detectamos un momento en el que se vuelve “tangente”: el poliedro toca la esfera, pero no la cruza. Sea  $P$  un punto en común entre el poliedro y esta nueva esfera. Tal punto tiene que ser un extremo de cualquier segmento formado por aristas del poliedro pues, de lo contrario, este segmento cruzaría la esfera, y habría vértices del poliedro fuera de esta. En particular,  $P$  tiene que ser un vértice. Sin embargo, por hipótesis, a cada vértice del poliedro convergen al menos dos aristas que son colineales, lo cual implica que  $P$  no es un extremo del segmento formado por dichas aristas. Esta contradicción concluye la demostración.

**Segunda demostración (Da Vinci se encuentra con Descartes).** Recordemos que el *defecto angular* de un vértice de un poliedro es definido como la diferencia entre  $360^\circ$  y la suma de los ángulos en el vértice. Una forma sencilla de visualizar esta noción consiste en abrir uno de los bordes y desplegar en el plano las caras que convergen a ese vértice. El ángulo plano que queda sin cubrir por esas caras es el defecto angular.

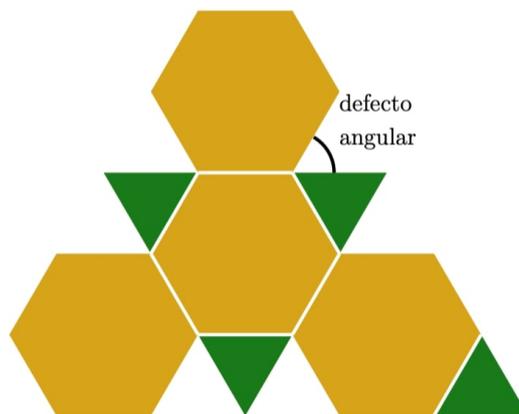


FIGURA 11. Defecto angular.

Un famoso teorema de Descartes establece que la suma total de los defectos angulares de todos los vértices de un poliedro de tipo esférico es igual a  $720^\circ$ . Aunque este resultado es una consecuencia casi directa de la fórmula de Euler (5.1), históricamente lo precede. El artículo (Scott, 2006) es una buena referencia para una demostración.

Nuevamente, para la prueba del teorema, supongamos que sí existe el poliedro en cuestión. Si uno de sus vértices tiene grado 2, entonces los dos ángulos que convergen en él son iguales a  $180^\circ$ , por lo que el defecto angular es igual a 0. Si un vértice tiene grado 3, entonces tres ángulos concurren a ese vértice: dos de ellos son suplementarios y el tercero es igual a  $180^\circ$ . La suma de estos ángulos es entonces igual  $360^\circ$  y, por lo tanto, el defecto angular también se anula. En caso de grado superior, un argumento similar muestra que el defecto angular no es positivo. Por tanto, la suma total de los defectos angulares de los vértices no es positivo. Sin embargo, esto contradice el teorema de Descartes.

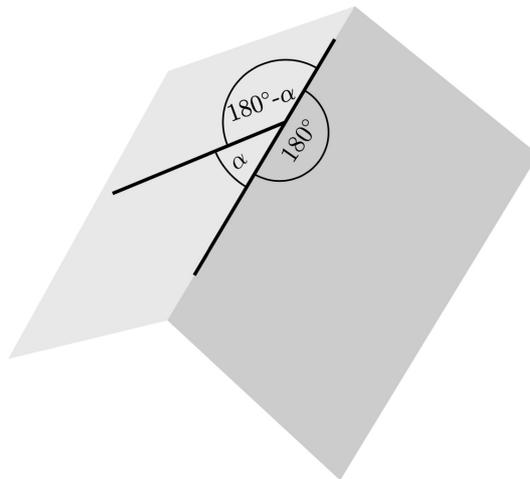


FIGURA 12. El defecto angular en un vértice de grado 3 es igual a 0.

Se puede argumentar que el teorema anterior no se adapta bien al contexto, pues permitir solamente vértices colineales a lo largo de la misma varilla no implica que el objeto completo pueda considerarse como un poliedro, ya que las “caras” podrían no ser planas. Sin embargo, si le agregamos artificialmente aristas al objeto de forma tal que se convierta en un poliedro genuino (uno puede hacer esto fácilmente triangulando las caras), el teorema anterior todavía se aplica. Esta es la razón por la que en el enunciado incluimos la posibilidad de que los vértices tengan grado arbitrario.

El teorema anterior enfatiza una vez más la relevancia de la diferencia de profundidad entre las muescas interiores y exteriores de las varillas. Esto permite producir un defecto angular (después de triangular, de modo que el objeto a la vista sea un poliedro genuino) que, como hemos visto, es necesario para cerrar una estructura esférica. Dado que el defecto angular así producido es muy pequeño, se requiere de un gran número de vértices para completar el ángulo total de  $720^\circ$  predicho por el teorema de Descartes. Esta es la razón por la que se necesita una gran cantidad de aristas.

En el caso de varillas curvas, parte de la ganancia del defecto angular proviene de la curvatura de la varilla. Por supuesto, para hacer de esta una afirmación formal, primero es necesario olvidarse de las varillas teniendo en cuenta sólo los vértices y conectarlos mediante líneas rectas. Haciendo esto, inmediatamente observamos que los vértices correspondientes a la misma varilla están lejos de ser colineales. Esta es la razón por la que se utilizan tan pocas varillas en la escultura de Roelofs. Sin embargo, como veremos en la siguiente sección, la elección cuidadosa de la estructura combinatoria también es crucial.

### §5. Da Vinci se encuentra con Euler: explorando la topología

Aunque ciertas estructuras del tipo Da Vinci pueden cerrarse para formar una estructura esférica, esto es imposible con los once patrones representados anteriormente, así como con todos los patrones que provienen de teselados planos periódicos. La explicación reside en el teorema de Euler y extensiones, como ahora explicamos.

Supongamos que tenemos una estructura esférica y la proyectamos sobre una esfera que la contenga. Obtenemos entonces un grafo esférico con una cierta cantidad de vértices, de curvas que los conectan que denominamos “aristas”, y de regiones limitadas por estas aristas que denominamos “caras”. Denotamos por  $V$ ,  $A$  y  $C$  la cantidad de vértices, aristas y caras, respectivamente. El teorema de Euler establece la igualdad

$$(5.1) \quad V - A + C = 2.$$

En (Aigner y Ziegler, 1998), el lector encontrará una demostración elemental de esta fórmula clásica. Asimismo, puede consultar (Navas, 2019) para encontrar una discusión sobre los diseños sobre esferas y su relación con ella.

Ahora bien, cada uno de los patrones de la sección 3 es periódico, en el sentido de que exhibe simetrías de traslación en dos direcciones independientes. Como consecuencia de resultados topológicos bien conocidos, esto implica que, si cierran una superficie, entonces

$$(5.2) \quad V - A + C = 0,$$

lo cual contradice (5.1).

A continuación presentamos un ejemplo concreto. El siguiente patrón involucra triángulos y dodecágonos (para poder aplicar fórmulas de tipo Euler, necesitamos contar un vértice por cada cruce de varillas). Denotemos por  $T$  y  $D$  la cantidad de triángulos y dodecágonos, respectivamente. Como en cada vértice concurren 3 aristas, tenemos que

$$V = \frac{3T + 12D}{3}.$$

A su vez, cada arista es compartida por dos caras, con lo cual

$$A = \frac{3T + 12D}{2}.$$

Finalmente, el número de caras es la suma del número de triángulos y dodecágonos:

$$C = T + D.$$

Por lo tanto,

$$V - A + C = \frac{3T + 12D}{3} - \frac{3T + 12D}{2} + (T + D) = \frac{T}{2} - D.$$

Ahora bien, observando el patrón puede comprobarse directamente que:

- cada dodecágono está rodeado por seis triángulos,
- cada triángulo está rodeado por tres dodecágonos.

Esto implica que  $T = 2D$ . En consecuencia,

$$V - A + C = \frac{T}{2} - D = 0.$$

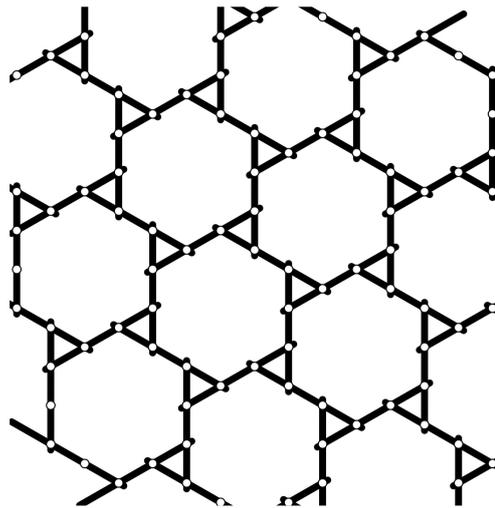


FIGURA 13. La identidad  $V - A + C = 0$  en un ejemplo concreto.

**Una observación técnica.** Es posible demostrar (5.2) para todos los patrones planos anteriores utilizando solamente la fórmula de Euler (5.1) de los teselados esféricos. Esto proviene de que estos patrones producen embaldosados en el toro, para los cuales (5.2) es válido. Grosso modo, la demostración procede de la siguiente manera. Usando las dos direcciones independientes de simetría traslacional, cerramos el patrón para construir un toro. Denotemos nuevamente por  $V$ ,  $A$  y  $C$  la cantidad de vértices, aristas y caras, respectivamente. Volviendo al plano, copiamos los patrones planos  $n$  veces en forma horizontal y vertical, y

denotamos por  $V_n$ ,  $A_n$  y  $C_n$  la cantidad de vértices, aristas y caras que se producen. La estructura no se cierra sólo a lo largo de la frontera. Como esta frontera “crece linealmente”, las diferencias  $|V_n - n^2V|$ ,  $|A_n - n^2A|$  y  $|C_n - n^2C|$  están acotadas por una cantidad que es lineal en  $n$ . Por lo tanto

$$V_n - A_n + C_n = n^2(V - A + C) + O(n).$$

Así, este patrón copiado  $n^2$  veces induce un teselado (no da vinciano) de la esfera agregando una “cara al infinito”. Aplicando la fórmula de Euler (5.1) para teselados esféricos generales obtenemos que

$$V_n - A_n + (C_n + 1) = 2.$$

Por lo tanto,

$$n^2(V - A + C) = O(n).$$

Dividiendo por  $n^2$  y haciendo tender  $n$  a infinito, obtenemos finalmente

$$V - A + C = 0.$$

## §6. Conclusiones

La discusión anterior muestra que para dar con nuevos diseños esféricos de tipo Da Vinci es necesario tener en cuenta no sólo restricciones geométricas, sino también topológicas. El diseño de Roelofs es un ejemplo de esto: se basa en (en realidad, es combinatoriamente equivalente a) un icosaedro truncado. Parece posible utilizar otros diseños clásicos para producir versiones de tipo Da Vinci. Un problema desafiante sería obtener modelos inspirados en diferentes sólidos arquimedianos. Observemos que el diseño de Brederode también surge de una familia conocida de poliedros, a saber, los poliedros de Goldberg.

No hace falta decir que, además de las cuestiones geométricas y topológicas, también es necesario tener en cuenta aspectos físicos de los materiales utilizados para implementar los objetos concretos. Por ejemplo, el ancho de las varillas constituye un problema cuando se ensamblan para producir configuraciones poligonales de un gran número de lados.

Destacamos que nuestras consideraciones no concluyen el estudio de diseños que dan lugar a otros tipos de superficies. La primera demostración del teorema del poliedro se aplica de manera más general a poliedros de tipo cerrados, como por ejemplo los toroidales. Sin embargo, considerar muescas de diferente profundidad podría conducir a estructuras interesantes de este tipo. Notemos que no existe ningún obstáculo combinatorio para que configuraciones planas produzcan estructuras toroidales, ya que un toro se obtiene mediante un método bien conocido de “doblar y pegar una hoja de papel en dos direcciones”. La figura siguiente muestra por ejemplo que el primero de los once embaldosados planos anteriormente discutidos puede implementarse en una superficie de tipo toroidal.

Por supuesto, producir de esta manera un objeto más simétrico y atractivo requiere del trabajo de un artista.



FIGURA 14. One of the eleven plane tilings implemented on a torus.

### Bibliografía

- Aigner, M., y Ziegler, G. M. (1998). *Proofs from the book*. Springer Verlag.
- Brasó, E. (2018). Les cúpules de Leonardo da Vinci. *Noubiaix*, 42, 116–126.
- Carrasco, P., Carvacho, M., y Sánchez, F. (2023). Cúpulas de Da Vinci: la geometría colaborando con otras disciplinas. En J. Huinacahue y D. Soto (Eds.), *Educación Matemática Interdisciplinar en el Aula*. Ediciones UCM.
- Duvernoy, S. (2008). Leonardo and theoretical mathematics. Leonardo da Vinci: architecture and mathematics. *Nexus Netw. J.*, 10(1), 39–49.
- Humenberger, H. (2021). Mathematische Aktivitäten rund um die Leonardo-Brücke. En *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft* (Vol. 45, pp. 67–86).
- Lemmermeyer, F. (2016). Leonardo da Vinci's proof of the Pythagorean theorem. *College Math. J.*, 47(5), 361–364.
- Navas, A. (2019). Une «erreur» géométrique dans la ligue des champions. *Images des Mathématiques, CNRS*.
- Roelofs, R. (2008). Two- and three-dimensional constructions based on Leonardo grids. *Nexus Netw. J.*, 10(1), 17–26.
- Schattschneider, D. (1978). The plane symmetry groups: their recognition and notation. *Amer. Math. Monthly*, 85(6), 439–450.
- Scott, P. (2006). Angle defect and Descartes' theorem. *Australian Mathematics Teacher*, 62(1), 2–4.

Song, P., Fu, C.-W., Goswami, P., Zheng, J., Mitra, N. J., y Cohen-Or, D. (2013). Reciprocal frame structures made easy. *ACM Transactions on Graphics*, 32(Issue 4, 94), 1–13.

NICOLÉ GEYSSEL

UTFSM, El Pinar 36, San Joaquín, Santiago, Chile

(✉) [nicole.geysse@usm.cl](mailto:nicole.geysse@usm.cl)

MARÍA JOSÉ MORENO

PUC, Vicuña Mackena 4860, Macul, Santiago, Chile

(✉) [mmors@uc.cl](mailto:mmors@uc.cl)

ANDRÉS NAVAS

USACH, Alameda 3363, Est. Central, Santiago, Chile

(✉) [andres.navas@usach.cl](mailto:andres.navas@usach.cl)

---

Recibido: 26 de agosto de 2023.

Aceptado: 2 de enero de 2024.

Publicado en línea: 30 de abril de 2024.

---

---

# LA COMPLEJIDAD ONTOSEMIÓTICA DE DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS QUE SE PROPONEN EN LA ENTRADA A LA UNIVERSIDAD

Bettina Milanesio y María Elena Markiewicz

---

**RESUMEN.** En este trabajo se abordan aspectos vinculados a la validación de proposiciones matemáticas en la entrada a la universidad. A partir de las dificultades que muestran estudiantes ingresantes para validar deductivamente, realizamos una selección de las primeras prácticas de validación que se presentan en los materiales de trabajo de asignaturas del primer año de la carrera de grado Profesorado en Matemática. Escogimos tres demostraciones, representativas del tipo de prácticas de validación que se promueve en dichos materiales, y las analizamos utilizando herramientas del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. Esto nos permitió develar la complejidad ontosemiótica de las demostraciones pretendidas y prever conflictos semióticos potenciales que pueden explicar las dificultades de los estudiantes en la comprensión y la realización de las mismas.

**ABSTRACT.** This paper deals with aspects related to the validation of mathematical propositions at university entrance. Based on the difficulties that new students show to validate deductively, we select the first validation practices that are presented in the work materials of first-year subjects of a university degree in the training of mathematics teachers. We chose three demonstrations, representative of the type of validation practices promoted in such materials and analyzed them using tools from the Ontosemiotic Approach to mathematics knowledge and instruction. This allowed us to reveal the ontosemiotic complexity of the planned demonstrations and to anticipate possible semiotic conflicts that may explain the students' difficulties in understanding and performing them.

## §1. Introducción

La validación de proposiciones matemáticas es una actividad inherente y fundamental del quehacer matemático. En el contexto educativo, las actividades vinculadas a la validación constituyen una práctica matemática crucial en la que

---

*Palabras clave:* validación, demostración matemática, ingreso universidad, enfoque ontosemiótico.

*Keywords:* validation, mathematical proof, university entrance, ontosemiotic approach.

educadores en matemáticas desearían que los estudiantes se impliquen en los diferentes niveles educativos (Lew y Mejía Ramos, 2019; Weber et al., 2020). Balacheff (2000) define los procesos de validación como la actividad que persigue asegurar la validez de una proposición y, eventualmente “producir una explicación, una prueba o una demostración” (Balacheff, 2000, p. 13). La demostración, en particular, es considerada el tipo de prueba dominante en matemáticas, a partir de la cual se corrobora la veracidad de una proposición mediante argumentos formalizados de tipo deductivos, partiendo de verdades universales y evidentes (Alfaro-Carvajal et al., 2019; Molina y Samper, 2019).

Pese a que el concepto de demostración es imprescindible para la disciplina matemática y para el aprendizaje por parte de los estudiantes, es considerado un concepto difícil de enseñar y de aprender en los diferentes niveles educativos (Montoro, 2007; Selden y Selden, 2008; G. J. Stylianides y Stylianides, 2017; A. J. Stylianides et al., 2022). En nuestra investigación partimos de un problema recurrente vinculado a las dificultades que manifiestan estudiantes que ingresan a la universidad en relación con la posibilidad de validar proposiciones matemáticas y, en particular, de comprender y desarrollar demostraciones (Milanesio et al., 2023; Peparelli et al., 2011). Este problema, que hemos podido vislumbrar en nuestra labor como docentes de asignaturas de primer año del nivel universitario, ha sido reconocido en el ámbito de la Educación Matemática por diversos investigadores (D’Andrea y Sastre, 2013; Godino y Recio, 2001; Gómez-Chacón, 2009; Hernández-Suarez, 2012; Recio, 1999; G. J. Stylianides y Stylianides, 2017; Weber et al., 2020).

Muchas de estas dificultades se adjudican a la existencia de posibles distancias conceptuales entre el nivel secundario y universitario relacionadas a la validación en matemáticas, principalmente a la demostración. Hernández-Suarez (2012) confiere las dificultades que presentan los estudiantes en el ingreso al nivel superior para entender y realizar una demostración a la previa formación de los mismos, ya que, asegura que ingresan al nivel universitario con un bajo nivel de conceptos y deficiencias como el uso incorrecto del lenguaje y la simbología propia de las matemáticas o de las reglas de la lógica. Esto también ha sido reconocido por Lew y Mejía Ramos (2019), quienes aseguran que, en el ingreso al nivel universitario, los estudiantes no se encuentran familiarizados con las convenciones de la escritura de las pruebas matemáticas. Otros autores han evidenciado en el nivel superior que, en general, las demostraciones se presentan en su versión acabada con una imposición excesiva de formalidad, por lo que el proceso llevado a cabo para demostrar no siempre es evidente para el alumnado y puede llevarlo a manifestar ansiedad y frustración para prácticas de este tipo (D’Andrea y Sastre, 2013; Gómez-Chacón, 2009). Incluso, tal como señalan Weber et al. (2020), los estudiantes a menudo salen

de clases orientadas a la demostración incapaces de leer o escribir demostraciones o de distinguir buenas demostraciones de argumentos inválidos.

Sin embargo, en todas estas investigaciones no se han analizado las dificultades que los estudiantes enfrentan en la práctica de demostrar teniendo en cuenta la complejidad que reviste la propia demostración matemática. Un avance en esta línea de investigación se llevó a cabo en trabajos donde se intenta poner al descubierto dicha complejidad en términos de los objetos, procesos y relaciones que están involucrados en la actividad matemática desplegada en las demostraciones (Markiewicz y Etchegaray, 2017, 2018; Recio, 1999). Recio (1999), quien reconoce a la demostración como una cadena de relaciones semióticas entre los objetos involucrados, identifica distintos tipos de objetos que se ponen en juego en el desarrollo de cualquier demostración, tales como, notaciones, fenomenologías y elementos conceptuales. Esto le permite evidenciar algunos aspectos que contribuyen a la complejidad ontológica y semiótica de las demostraciones. Más recientemente, Markiewicz y Etchegaray (2017), con el objetivo de mostrar la potencialidad de herramientas del Enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino et al., 2007, 2019) ponen de manifiesto los objetos y procesos implicados en una tarea que involucra una demostración utilizando el Principio de Inducción Matemática, así como también, en un fragmento de clase donde se abordan propiedades de la Teoría de la Divisibilidad. Las autoras sostienen que, develar la complejidad ontosemiótica de este tipo de prácticas de validación, nos permite, como docentes, anticipar acciones tendientes a superar los posibles conflictos que puedan surgir durante los procesos instruccionales. En un trabajo posterior, Markiewicz y Etchegaray (2018), empleando herramientas del EOS, analizan un fragmento de un libro de texto que presenta una demostración matemática en el contexto de la Teoría de la Divisibilidad, evidenciando diversos objetos y procesos involucrados en la actividad matemática desplegada. Las autoras identifican potenciales conflictos semióticos que, junto con las características distintivas de los libros de textos universitarios, aportan explicaciones desde otra perspectiva a las dificultades que enfrentan los estudiantes ante estas prácticas.

Estos antecedentes, sumados a las dificultades manifestadas por estudiantes ingresantes a la Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC) nos llevaron, en una primera instancia, a indagar los procesos de validación que desarrollan estudiantes del último año de escuelas secundarias de la ciudad de Río Cuarto (sexto año, 17-18 años) para poder caracterizarlos y comprender su relatividad contextual (Markiewicz et al., 2021). En este trabajo, empleamos herramientas del EOS para analizar los objetos y procesos que emergen de las prácticas logradas por dichos estudiantes, así como también los niveles de algebrización (Godino et al., 2015) donde se sitúan dichas prácticas y los conflictos semióticos que efectivamente

surgen. Los principales resultados muestran que, en general, los estudiantes desarrollan pruebas de tipo pragmáticas que se basan en la acción y en la ostensión, lo cual derivó en el planteo de unas primeras hipótesis acerca de posibles distancias y rupturas entre las prácticas de validación logradas por estos estudiantes respecto de las pretendidas en la entrada a la universidad.

Es por ello que, en esta nueva etapa de la investigación nos propusimos como objetivo profundizar en los significados institucionales pretendidos sobre el tipo de prácticas de validación (más precisamente, la demostración) que se promueve en diversos materiales de trabajo de asignaturas del primer año de la carrera de grado Profesorado en Matemática en la UNRC. Esto con el fin de poner en evidencia la complejidad ontosemiótica de estas prácticas y proveer nuevas interpretaciones de las dificultades de los estudiantes en términos de los objetos y procesos que son necesarios movilizar. Para ello utilizamos herramientas del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino et al., 2007, 2019) identificando objetos primarios y procesos cognitivos/epistémicos duales presentes en estas prácticas de validación y proporcionando explicaciones a las dificultades de los estudiantes en términos de conflictos semióticos.

Todo esto nos llevó a plantearnos las siguientes preguntas de investigación: ¿Qué objetos y procesos se requieren poner a funcionar en algunas demostraciones que los estudiantes deben comprender y desarrollar en las primeras instancias de asignaturas de primer año de la carrera Profesorado en Matemática? ¿Qué dificultades se pueden prever ante la comprensión y el desarrollo de estas demostraciones por parte de los estudiantes?

En los siguientes apartados hacemos referencia al marco teórico y metodológico de la investigación, explicitamos algunas decisiones tomadas para desarrollar la misma y mostramos los análisis realizados a algunas demostraciones que se pretenden en la entrada a la universidad, esbozando, por último, algunas consideraciones finales.

## §2. Marco teórico

El Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos nos aporta diversas herramientas para analizar las prácticas de validación desarrolladas en el nivel superior de educación, por lo que se constituye en el marco teórico y metodológico de este trabajo.

En el EOS (Godino et al., 2007, 2019) se introduce la noción de *práctica matemática* entendida como toda actuación o expresión realizada por alguien para dar solución a problemas matemáticos, comunicarla, validarla o generalizarla, y de *significado* entendido como un emergente de los sistemas de prácticas que se ponen en juego en la solución de dichos problemas por una persona (significado personal) o institución (significado institucional). En particular, en el EOS se distinguen diferentes

tipos de significados institucionales, entre ellos, el significado pretendido, el cual es de especial relevancia para este estudio puesto que se corresponde con los sistemas de prácticas incluidas en la planificación de los procesos de estudio.

Estos sistemas de prácticas están constituidos por redes de relaciones en las que intervienen diferentes tipos de *objetos primarios*: situaciones-problemas, procedimientos, conceptos, proposiciones, argumentos y lenguaje. Estos objetos pueden ser considerados, según el juego de lenguaje en el que participan, desde diferentes facetas duales, lo que lleva a la siguiente tipología de *objetos secundarios*: ostensivos (perceptibles, públicos) - no ostensivos (abstractos, ideales); extensivos (particulares) - intensivos (generales); significantes (expresión) - significados (contenido); unitarios (considerados globalmente como un todo) - sistémicos (sistemas formados por distintos componentes); personales (sujetos individuales) - institucionales (compartidos en una institución).

Tanto los objetos primarios como los secundarios se pueden considerar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual permite distinguir tipos de procesos matemáticos primarios y secundarios. En particular, los objetos matemáticos secundarios dan lugar a *procesos cognitivos/epistémicos* duales que se consideran fundamentales en la actividad matemática, entre los que destacamos, a los fines de este trabajo, los siguientes:

- Proceso de materialización-idealización (asociado a la dualidad ostensivo-no ostensivo). Como resultado de un proceso de idealización se pasa de un objeto ostensivo a un objeto no ostensivo, pues los objetos ostensivos pueden ser pensados por un sujeto o estar implícitos en el discurso matemático. En cambio, mediante un proceso de materialización los objetos matemáticos, que en general son no perceptibles, son utilizados en las prácticas públicas a través de sus ostensivos asociados (Font y Contreras, 2008; Font y Rubio, 2017).
- Proceso de particularización-generalización (asociado a la dualidad extensivo-intensivo). Mediante un proceso de particularización se da lugar a un objeto extensivo, entendido como un objeto particular, mientras que, a través de un proceso de generalización se generan objetos intensivos, considerados como una clase o conjunto de objetos (Font y Contreras, 2008). El análisis de un objeto particular ejemplar permite establecer conclusiones sobre un conjunto de objetos mientras que el análisis de un conjunto de objetos permite pensar en el funcionamiento de un caso particular.
- Proceso de descomposición-reificación (vinculado a la dualidad sistémico-unitario). Mediante un proceso de descomposición, un problema global puede descomponerse en problemas elementales, es decir, los objetos que participan como entidades unitarias (que se suponen conocidas previamente) deben ser tratados como sistémicos. Pero, a través de procesos de reificación,

en todo proceso de estudio los conceptos y propiedades emergentes deben ser reificados, es decir, vistos como objetos unitarios a fin de ser utilizados en la resolución de nuevos problemas (Godino et al., 2007).

- Proceso de representación-significación (asociado a la dualidad expresión-contenido). Consistentes en atribuir contenido a una expresión, a través del establecimiento de funciones semióticas entendidas como la correspondencia entre un objeto antecedente (expresión/significante) y otro consecuente (contenido/significado) establecida por un sujeto (persona o institución) según una regla de correspondencia. Los objetos que se ponen en correspondencia en las funciones semióticas pueden ser entidades unitarias o sistémicas, particulares o generales, materiales o inmateriales, personales o institucionales (Godino et al., 2022). Estos procesos son densos en la trama de objetos y procesos que se ponen en juego en la actividad matemática.

Los procesos duales pueden ser fuente de *conflictos semióticos* entendidos desde el EOS como cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) (Godino et al., 2007), los cuales permiten anticipar y/o explicar las dificultades que podrían surgir (o que efectivamente surgen) en los procesos instruccionales.

### §3. Metodología

La metodología adoptada en este trabajo es inherente al EOS. En particular, realizamos un estudio documental e interpretativo de tres demostraciones que se espera que los estudiantes comprendan y desarrollen en la entrada al nivel superior a través de las técnicas de análisis ontosemiótico en sus dos primeros niveles: análisis de objetos primarios y análisis de procesos duales y de conflictos semióticos. Para esto, decidimos recortar la investigación al contexto de las actividades del ingreso<sup>1</sup> a la universidad y a la primera unidad temática, correspondientes a las asignaturas del primer año del Profesorado en Matemática en la UNRC, las cuales son: Cálculo I, Matemática Discreta y Geometría I. Realizamos una recopilación de materiales utilizados durante el año 2021, incluyendo cuadernillos, libros de texto y presentaciones de PowerPoint, los cuales se encuentran disponibles para los estudiantes, y exploramos las primeras prácticas de validación que se promueven en dichos materiales. Cabe aclarar que hemos abocado nuestro estudio únicamente a lo que se propone en los materiales de trabajo, puesto que, no hemos tenido acceso a las clases donde efectivamente se abordaron dichas prácticas. A continuación, explicitamos las decisiones tomadas para la selección de las tres demostraciones que escogimos para su análisis.

<sup>1</sup>El Ingreso a la UNRC (Integración a la Cultura Académica) se desarrolla durante los meses de febrero y marzo durante 4 semanas, con una carga horaria de 6 horas semanales para cada asignatura.

Para la asignatura Cálculo I elegimos una de las primeras prácticas de validación que se presenta en el material del ingreso, particularmente, en el cuadernillo efectuado por los docentes. La misma se corresponde con una demostración matemática que resulta representativa del tipo de prácticas que se promueve en dicho material. Si bien observamos otros tipos de prácticas que fomentan la validación, como por ejemplo, tareas donde se solicita justificar la verdad o falsedad de afirmaciones matemáticas, las mismas son escasas, siendo predominante el trabajo con demostraciones.

En el caso de Matemática Discreta, como en el material del ingreso no hallamos ninguna instancia donde se promueva algún tipo de validación, decidimos explorar las prácticas de validación que se desarrollan en el material de trabajo empleado para la primera unidad temática (libro de texto y trabajos prácticos efectuados por el docente). En dicho material, si bien hallamos algunas tareas que promueven el planteamiento de conjeturas y de argumentaciones que las validen (motivando la puesta en funcionamiento de algún tipo de validación), nuevamente son escasas, siendo predominante el trabajo con demostraciones, por lo que, decidimos escoger una práctica de validación correspondiente a una de las primeras demostraciones que se presentan a los estudiantes.

En el material del ingreso a la asignatura Geometría I (cuadernillo efectuado por los docentes y presentaciones de PowerPoint) se le otorga especial relevancia al método axiomático-deductivo, proponiéndose tareas que promueven diversos procesos de validación, tales como, la búsqueda de regularidades, el tratamiento de la unicidad en matemáticas, el planteamiento de conjeturas y la propuesta de demostraciones. Sin embargo, por no disponer de las resoluciones pretendidas por el docente ante este tipo de tareas, decidimos escoger lo que las docentes denominan “un ejemplo de lo que significa demostrar un teorema en matemáticas” y que presentan a los estudiantes en un PowerPoint que se anexa al material del ingreso.

#### §4. Resultados

En los apartados que siguen explicitamos brevemente el contexto en el que se plantea la entrada a la validación en cada una de las asignaturas mencionadas en el párrafo anterior, presentamos tres prácticas de validación donde el alumnado debe enfrentarse a la validación de proposiciones matemáticas y el análisis ontosemiótico que realizamos a las mismas. Esbozamos finalmente algunas conclusiones de estos análisis.

**4.1. Práctica de validación en Cálculo I y su análisis ontosemiótico.** En el ingreso de Cálculo I, se comienza con la temática de conjuntos numéricos, procediendo,

en las primeras páginas del cuadernillo correspondiente (Orquera y Ferreyra, 2022<sup>2</sup>) con el análisis de los distintos tipos de conjuntos numéricos y sus propiedades.

En este material, se observa una práctica de validación cuando se introduce el número  $\sqrt{2}$ . Se expresa que “no es difícil demostrar que este número no puede ser representado como el cociente de dos números enteros, por lo tanto, no es un número racional” (Orquera y Ferreyra, 2022, p. 11). En este contexto, se propone una demostración de que  $\sqrt{2}$  no es un número racional, a la cual denominamos práctica de validación 1 (PV1). Presentamos dicha práctica en la Figura 1.

Por otro lado, sabemos que  $\sqrt{2} = 1,41421356237310\dots$ . No es difícil *demostrar* que este número no puede ser representado como el cociente de dos números enteros, por lo tanto, no es un número racional.

Abordaremos la demostración utilizando el concepto de divisibilidad. Si suponemos que  $\sqrt{2}$  es racional, entonces deben existir  $p, q \in \mathbb{Z}$  tal que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ . Podemos asumir que el máximo común divisor entre ellos es 1, es decir, no tienen factores comunes. Si elevamos al cuadrado obtenemos:  $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$ . La última igualdad nos dice que  $p^2$  tiene que ser múltiplo de 2, así  $p^2 = 2k$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ . Con esto concluimos que  $2q^2 = (2k)^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$ , es decir  $q^2$  es múltiplo de 2 y por lo tanto  $q$  también lo es (justificar esta última afirmación). Esto nos dice que  $q$  y  $p$  tienen a 2 como factor común, una contradicción.

FIGURA 1. Práctica de validación 1 (PV1). Fuente: Orquera y Ferreyra (2022, p. 11)

En la Tabla 1 mostramos el análisis ontosemiótico realizado a PV1, identificando, en la primera columna los objetos primarios disponibles y emergentes de la práctica, y en la segunda columna, los procesos duales que son necesarios transitar para comprenderla y realizarla. Estos últimos muestran cómo funcionan las distintas facetas duales de los objetos primarios.

<sup>2</sup>Cabe destacar que en el año 2021 se utilizó este mismo material.

Objetos Primarios	Procesos Duales
<p><i>Procedimientos.</i></p> <p>Se supone que <math>\sqrt{2}</math> es un número racional. Se escribe a <math>\sqrt{2}</math> como <math>\frac{p}{q}</math>, con <math>p</math> y <math>q</math> enteros (suponiendo que su máximo común divisor es 1).</p> <p>Se elevan al cuadro ambos miembros de la igualdad: <math>\sqrt{2} = \frac{p}{q}</math>, obteniendo a partir de la aplicación de propiedades: <math>2q^2 = p^2</math>. Se concluye que <math>p^2</math> tiene que ser múltiplo de 2 y se lo escribe como <math>2k</math> con <math>k</math> entero. Aplicando propiedades se obtiene que <math>q^2 = 2k^2</math>, concluyendo que <math>q^2</math> es múltiplo de 2, y, por lo tanto, que <math>q</math> es múltiplo de 2.</p> <p>Se concluye que <math>p</math> y <math>q</math> tienen al 2 como factor común, obteniéndose una contradicción.</p> <hr/> <p><i>Definiciones disponibles.</i></p> <p>Conjunto de números enteros; producto, división, potencia de enteros; raíz cuadrada de un entero.</p> <p>Número racional: expresión de la forma <math>\frac{a}{b}</math>, con <math>a</math> y <math>b</math> enteros y <math>b \neq 0</math>.</p> <p>Máximo común divisor entre dos números.</p> <p>Factor de un número: divisor de dicho número y aquel que puede aparecer en la factorización del número como producto de otros.</p> <p>Múltiplo de 2: aquel número que resulta de multiplicar a 2 por algún número entero.</p> <hr/> <p><i>Proposiciones disponibles (PD).</i></p> <p>PD1. Si un número es racional entonces existen dos enteros <math>p</math> y <math>q</math> tal que el número se escribe como <math>\frac{p}{q}</math>, donde el máximo común divisor entre <math>p</math> y <math>q</math> es 1.</p> <p>PD2. El máximo común divisor entre dos números es 1 si y sólo si no tienen factores comunes.</p>	<p><i>Representación-Significación.</i></p> <p>A un número racional se lo significa como el cociente de dos números enteros, con divisor distinto de 0.</p> <p>Se significa a <math>\frac{p}{q}</math> como un cociente de números enteros tales que su máximo común divisor es 1, y a esta última expresión como equivalente a que <math>p</math> y <math>q</math> no tienen factores comunes.</p> <p>Al símbolo lógico <math>\Rightarrow</math> entre dos expresiones lógicas se lo significa como que, si vale la primera expresión (antecedente) entonces también vale la segunda expresión (consecuente), es decir, que el consecuente se deduce del antecedente.</p> <p>A la expresión <math>2q^2 = p^2</math> se la significa como <math>p^2</math> es múltiplo de 2. Y a <math>q^2</math> se lo significa como un número entero.</p> <p>A la expresión <math>q^2 = 2k^2</math> se le otorga el significado de que <math>q^2</math> es múltiplo de 2, y, a <math>k^2</math> de un número entero.</p> <p>Se significa la expresión "múltiplo de 2" como aquel número entero que tiene al 2 como factor.</p> <p>Se significa la expresión "<math>p</math> y <math>q</math> tienen a 2 como factor común" como una contradicción (se utiliza implícitamente que la misma se origina al haber supuesto que <math>p</math> y <math>q</math> no tenían factores comunes).</p> <p>Se significa al término lógico contradicción como la conjunción entre una proposición y su negación.</p> <hr/> <p><i>Materialización-Idealización.</i></p> <p>Se materializa con el ostensivo <math>\frac{p}{q}</math> a un cociente de dos números enteros <math>p</math> y <math>q</math>.</p> <p>Con el ostensivo <math>\sqrt{2} = \frac{p}{q}</math> se evoca la idea de que <math>\sqrt{2}</math> es un número racional.</p> <p>Se materializa la idea de que <math>p^2</math> es múltiplo de 2 con el ostensivo <math>p^2 = 2k</math> para algún <math>k \in \mathbb{Z}</math>.</p>

PD3. Si dos números reales son iguales entonces los cuadrados de dichos números son iguales.

PD4. Elevar al cuadrado la raíz cuadrada de un natural devuelve como resultado el radicando (en particular,  $(\sqrt{2})^2 = 2$ ).

PD5. Propiedad distributiva de la potencia respecto a un cociente y a un producto.

PD6. Si se multiplican ambos miembros de una igualdad (de racionales) por otro racional, se mantiene la igualdad.

PD7. Existencia del inverso multiplicativo en  $\mathbb{Q}$  y del neutro (1) para la multiplicación.

PD8. Dado  $q$  entero, si  $q^2$  es múltiplo de 2 entonces  $q$  es múltiplo de 2.<sup>4</sup>

PD9. Como  $p$  y  $q$  son múltiplos de 2 entonces y tienen al 2 como factor común.

*Proposición emergente.*

$\sqrt{2}$  no es un número racional.

*Lenguaje.* Si bien hay indicios de lenguaje coloquial y simbólico aritmético, se observa que prevalece un lenguaje simbólico algebraico.

*Argumentos (emergentes).*

El argumento se corresponde con una demostración indirecta e informal. Indirecta, pues se emplea el método del absurdo para justificar la afirmación, e informal pues se utilizan implícitamente algunas propiedades (por ejemplo, PD4) y reglas lógicas que se ponen a funcionar, predominantemente la regla lógica del absurdo<sup>5</sup>: en este caso, se supone que  $\sqrt{2}$  es un racional de la forma  $\frac{p}{q}$ , donde  $p$  y  $q$  no tienen factores comunes. Aplicando definiciones y propiedades se obtiene que  $p$  y  $q$  tienen al 2 como factor común, lo que representa una contradicción a la suposición planteada. Por lo tanto, se concluye que  $\sqrt{2}$  no es un racional.

*Particularización-Generalización.*

Se utilizan propiedades generales en casos particulares, como por ejemplo, la propiedad:  $\forall x, y \in \mathbb{R} : \text{Si } x = y \text{ entonces } x^2 = y^2$  se particulariza para  $x = \sqrt{2}$  para  $y = \frac{p^3}{q}$ .

*Descomposición-Reificación.*

Se necesita reificar lo realizado en todos los pasos para dar emergencia a la demostración por el absurdo para validar la propiedad general: suponer lo contrario a la proposición que se quiere demostrar, obtener una contradicción y concluir que vale la proposición original.

TABLA 1

El análisis realizado de objetos y procesos (Tabla 1) nos permitió identificar algunos de los principales conflictos semióticos potenciales asociados a PV1, los cuales mencionamos a continuación.

- Dificultades para reconocer en el ostensivo  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  la idea de que  $\sqrt{2}$  es un número racional (conflicto ligado al proceso de materialización-idealización).
- Conflictos para significar la expresión  $\frac{p}{q}$  como un cociente de números enteros tal que su máximo común divisor es 1, y a esto último como equivalente a que  $p$  y  $q$  no tienen factores comunes (conflicto asociado al proceso de representación-significación).
- Dificultades en el pasaje de la expresión  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  a la expresión  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  a la expresión  $2 = \frac{p^2}{q^2}$ , en relación a la posibilidad de significar la última expresión como consecuencia de la aplicación de propiedades en la primera, y de especializar esas propiedades generales para los reales, en casos particulares, por ejemplo, la propiedad  $\forall x, y \in \mathbb{R} : \text{si } x = y \text{ entonces } x^2 = y^2$  para  $x = \sqrt{2}$  e  $y = \frac{p}{q}$  (conflictos ligados a los procesos de representación-significación y de particularización-generalización).
- La expresión  $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$  podría generar conflictos asociados al proceso de representación-significación, al significar la misma en términos de que el consecuente se deduce del antecedente como resultado de la aplicación de ciertas propiedades.
- Desajustes entre el contenido otorgado a la expresión  $2 = \frac{q^2}{p^2}$  y el contenido esperado, más específicamente, dificultades para reconocer en dicho ostensivo la idea de que  $p^2$  se escribe como 2 por un número entero  $y$ , por ende, que  $p^2$  es múltiplo de 2 (conflicto ligado a los procesos representación-significación y de materialización-idealización).
- La expresión  $2q^2 = (2k)^2$  podría generar conflictos asociados al proceso de representación-significación, ya que, se pueden manifestar posibles disparidades entre el significado dado y el pretendido: ser una expresión equivalente

<sup>3</sup>Se utiliza implícitamente la regla lógica de eliminación del generalizador:

Para todo  $x: P(x)$

---

$P(a)$

y el modus ponens.

<sup>4</sup>La forma de validar esta propiedad exige, a su vez, una demostración indirecta por contrarrecíproca: Dado  $q$  entero, si  $q$  no es múltiplo de 2 entonces  $q^2$  no es múltiplo de 2.

<sup>5</sup> $p$

...

$q$  y  $\neg q$

---

$\neg p$

a  $2q^2 = p^2$ , donde se ha reemplazado  $p$  por  $2k$  (se utiliza implícitamente que, al ser  $p^2$  múltiplo de 2 entonces  $p$  también lo es).

- La implicación  $2q^2 = (2k)^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$  puede ser fuente de conflictos asociados a este mismo proceso, debido a posibles desajustes en el otorgamiento de significado al consecuente de la misma como resultado de la aplicación, en el antecedente, de propiedades que se utilizan implícitamente. Además, pueden preverse dificultades para otorgar al consecuente el contenido de que  $q^2$  es múltiplo de 2.
- Al no explicitarse que  $p$  también debe ser múltiplo de 2, se podría generar un conflicto asociado al proceso de representación-significación al otorgarle contenido a la expresión “ $q$  y  $p$  tienen a 2 como factor común”. También al significar esta última como una contradicción (conjunción de una proposición:  $p$  y  $q$  no tienen factores comunes -salvo el 1- y su negación:  $p$  y  $q$  tienen un factor común distinto de 1).
- Conflictos ligados al proceso de descomposición-reificación relacionados con la estructura de la demostración, vinculado con dificultades para unificar lo realizado en los distintos pasos: suponer lo contrario a la proposición que se quiere demostrar, obtener una contradicción, y concluir por regla lógica del absurdo que vale la proposición original. Este tipo de razonamiento se encuentra, en parte, implícito en el escrito.

Si pensamos que la práctica la debe efectuar un estudiante, se podrían, además, anticipar conflictos ligados fundamentalmente al proceso de idealización-materialización, dado que es necesario recurrir a ostensivos adecuados para materializar ciertas ideas que surgen en la realización de la práctica, por ejemplo, evocar la idea de que  $\sqrt{2}$  es racional con un ostensivo como  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

#### 4.2. Práctica de validación en Matemática Discreta y su análisis ontosemiótico.

En el cuadernillo de ingreso de Matemática Discreta (Konic et al., 2021) se trabajan algunos aspectos de lógica proposicional. En el mismo, se reconoce la importancia del razonamiento lógico para la demostración de teoremas, y, en tal sentido, se aborda el significado de los símbolos lógicos ( $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ) y los valores de verdad de las proposiciones compuestas. También se trabaja la recíproca y la contrarrecíproca de una proposición condicional, tautologías, contradicciones y algunas equivalencias lógicas, por ejemplo,  $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ . Se introducen los cuantificadores  $\forall$  y  $\exists$ . Sin embargo, no se advierten, en este material, instancias de validación de proposiciones matemáticas, por lo que hemos decidido indagar la primera unidad de la asignatura propiamente dicha.

Para el desarrollo de la asignatura se siguen las lecciones del libro de González-Gutiérrez (2004). En la primera unidad se desarrolla la temática conjuntos, abordándose relaciones y operaciones entre estos, así como también, demostraciones

de leyes que satisfacen. En este contexto, una de las primeras propiedades que se demuestran es la propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección de conjuntos: práctica de validación 2 (PV2), la cual presentamos en la Figura 2.

Dados tres conjuntos  $A, B$  y  $C$  de un conjunto universal arbitrario,  $\mathcal{U}$ , se verifica:

1.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

**Demostración**

En efecto,

1. En efecto, sea  $x$  cualquier elemento del conjunto universal  $\mathcal{U}$ , entonces

$$\begin{aligned}
 x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \vee [x \in (B \cap C)] && \{\text{Definición de unión}\} \\
 &\iff x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) && \{\text{Definición de intersección}\} \\
 &\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) && \{\text{Distributividad}\} \\
 &\iff x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) && \{\text{Definición de unión}\} \\
 &\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) && \{\text{Definición de intersección}\}
 \end{aligned}$$

Al ser  $x$  cualquier elemento de  $\mathcal{U}$ , se sigue que

$$\forall x [x \in A \cup (B \cap C) \iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)]$$

consecuentemente,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

FIGURA 2. Práctica de validación 2 (PV2). Fuente: González-Gutiérrez (2004, p. 21).

En la Tabla 2 se muestra el análisis ontosemiótico de objetos y procesos efectuado para la práctica de validación 2.

Objetos Primarios	Procesos Duales
<p><i>Procedimientos.</i>                      Se toma un <math>x</math> arbitrario perteneciente al conjunto universal. Se parte de la expresión: <math>x \in A \cup (B \cap C)</math> y se plantean expresiones equivalentes:  <math>x \in A \vee [x \in (B \cap C)]</math>,  <math>x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)</math>,  <math>(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)</math>,  <math>x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)</math>.</p>	<p><i>Representación-Significación.</i>                      A la expresión <math>A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)</math> se le otorga el significado de que, dado cualquier elemento, el mismo pertenece al primer conjunto si y sólo si pertenece al segundo conjunto.                      A expresiones como <math>A \cup (B \cap C)</math> se la significa como un conjunto que es la unión entre otros dos: <math>A</math> y <math>B \cap C</math>.</p>

Se obtiene la expresión:

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Se expresa que al ser  $x$  un elemento cualquiera de  $U$ , vale  $\forall x(x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))$ , y por lo tanto vale:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

#### Definiciones disponibles

**Conjunto.** Conjunto Universal. Igualdad entre conjuntos: dos conjuntos son iguales si para todo elemento  $x$ ,  $x$  pertenece al primer conjunto si y sólo si  $x$  pertenece al segundo.

**Operaciones entre conjuntos:** unión ( $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$ ) e intersección ( $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$ ).

#### Proposición disponible.

Distributividad de la disyunción respecto a la conjunción.

Proposiciones emergentes (PE).

PE1.  $\forall x[x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)]$

PE2. Sean  $A, B$  y  $C$  conjuntos del conjunto universal:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

**Lenguaje.** Predominantemente simbólico lógico y algebraico.

#### Argumentos.

Se argumenta a partir de tomar un  $x$  arbitrario del conjunto universal que pertenece al conjunto  $A \cup (B \cap C)$ , y planteando equivalencias, mediante el uso de definiciones y reglas lógicas (como la distributividad de la disyunción respecto de la conjunción) se deduce que este elemento pertenece al conjunto  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ . Se deduce (de manera implícita) que  $x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$  por regla lógica de transitividad del bicondicional.

Se significa a la expresión  $x \in A \cup (B \cap C)$  como: un elemento cualquiera pertenece a la unión de dos conjuntos, es decir pertenece al primero ( $A$ ) o al segundo ( $B \cap C$ ).

A la expresión  $x \in A \vee [x \in (B \cap C)]$  se le otorga el contenido de una disyunción entre dos proposiciones:  $x \in A$  y  $x \in (B \cap C)$ , y a esta última se la significa como que pertenece a una intersección, es decir, a ambos conjuntos. Se significa a la expresión  $x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$  como una disyunción entre dos proposiciones donde una es una conjunción.

A la expresión  $x \in A \vee x \in B$  se le otorga el contenido de que  $x \in (A \cup B)$ .

Se significa a la expresión  $x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$  como: el elemento  $x$  pertenece tanto al conjunto  $A \cup B$  como al conjunto  $A \cup C$  (y por ende, a la intersección de ambos).

A la expresión  $\forall x : (x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))$  se le otorga el contenido de que los conjuntos  $A \cup (B \cap C)$  y  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$  son iguales.

#### Materialización-Idealización.

Los ostensivos  $A, B$  y  $C$  materializan tres conjuntos particulares arbitrarios. Se materializa con el ostensivo  $x$  un elemento particular arbitrario del conjunto universal.

El ostensivo  $\forall x : (x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))$  evoca la idea de que los conjuntos  $A \cup (B \cap C)$  y  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$  son iguales.

El ostensivo  $A \cup (B \cap C)$  (por ejemplo) evoca la unión de los conjuntos  $A$  y  $B \cap C$ .

<p>Por último, se concluye que, al ser <math>x</math> cualquier elemento del conjunto universal entonces el bicondicional vale para todo elemento (utilizando implícitamente la regla de introducción del generalizador<sup>6</sup>). De ello se deduce que <math>A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)</math> (a través de la definición de igualdad de conjuntos) y se generaliza la propiedad para tres conjuntos cualesquiera (por introducción del generalizador). Así, los argumentos corresponden a una demostración directa, con cierto grado de formalidad, aunque se utilizan implícitamente algunas reglas lógicas como las mencionadas (introducción del generalizador o transitividad del bicondicional).</p>	<p>Con el ostensivo <math>x \in A \cup (B \cap C)</math> se materializa que el elemento <math>x</math> pertenece a la unión entre dos conjuntos (<math>A</math> y <math>B \cap C</math>). El ostensivo <math>x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)</math> remite a la idea de que el elemento arbitrario <math>x</math> pertenece a una intersección de dos conjuntos (<math>A \cup B</math> y <math>A \cup C</math>), es decir, pertenece a ambos.</p> <p><i>Particularización-Generalización.</i> Se parte de tres conjuntos <math>A</math>, <math>B</math> y <math>C</math> particulares arbitrarios y se generaliza para todo conjunto. Se parte de un <math>x</math> particular arbitrario perteneciente al conjunto universal y se generaliza la propiedad para todo elemento del conjunto universal.</p> <p><i>Descomposición-Reificación.</i> Se necesita reconocer a ciertos objetos como un todo unitario, por ejemplo, al conjunto <math>(A \cup B) \cap (A \cup C)</math> como la intersección de dos conjuntos, que son a su vez, uniones de otros dos. Se necesita reificar lo realizado en todos los pasos de esta práctica para dar emergencia a una demostración de una igualdad de conjuntos.</p>
---	--

TABLA 2

Describimos a continuación algunos de los conflictos semióticos potenciales que anticipamos a partir del análisis realizado en la Tabla 2.

- Dificultades para reconocer en el ostensivo  $x$  un elemento particular arbitrario del conjunto universal. De igual manera, dificultades para reconocer en los conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres conjuntos particulares pero arbitrarios.
- Disparidades entre el significado otorgado a la expresión  $A \cup (B \cap C)$  y el significado pretendido. Más específicamente, se pueden prever conflictos para reconocer la unión de dos conjuntos donde uno de ellos es a su vez, la intersección de otros dos. Lo mismo sucede con ostensivos tales como  $B \cap C$ ,  $A \cup B$ ,  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

<sup>6</sup> $P(a)$

Luego,  $\forall xP(x)$  (siempre que  $a$  sea un elemento arbitrario).

- Desajustes entre el significado otorgado a expresiones como  $x \in A \cup (B \cap C)$  o  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ , y el significado pretendido. Más precisamente, dificultades al relacionar el primer ostensivo con la idea de que un elemento particular arbitrario pertenece a la unión de dos conjuntos ( $A$  y  $B \cap C$ ), es decir, pertenece a uno o al otro; y al segundo ostensivo con la idea de que este elemento pertenece a una intersección de dos conjuntos ( $A \cup B$  y  $A \cup C$ ), es decir, pertenece a ambos conjuntos.
- Posibles disparidades entre el contenido dado a expresiones como  $x \in A \vee x \in (B \cap C)$  y el pretendido. Más puntualmente, dificultades para reconocer en dicho ostensivo la disyunción entre dos proposiciones:  $x \in A$  y  $x \in (B \cap C)$ , o, por ejemplo, en  $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$  una conjunción entre dos proposiciones que son disyunciones.
- Desajustes entre el contenido otorgado a la expresión  $\forall x : (x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))$ , y el pretendido, más precisamente, se pueden anticipar dificultades para reconocer en ese ostensivo que los conjuntos  $A \cup (B \cap C)$  y  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$  son iguales.
- Otro conflicto está ligado con la posibilidad de generalizar la propiedad a partir de haberla probado para tres conjuntos particulares arbitrarios y para un elemento particular arbitrario del conjunto universal.
- En la demostración para  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  se podrían generar conflictos vinculados con la reificación de lo realizado en los distintos pasos, ya que, se requiere comprender la cadena de bi-implicaciones que se desarrolla, lo que se logra demostrar con eso, por qué se puede generalizar y por qué eso permite demostrar la igualdad de los conjuntos.

Tal como mencionamos en el análisis de PV1, si se piensa en la realización de esta práctica por parte de los estudiantes, se pueden sumar otros conflictos ligados, fundamentalmente, al proceso de idealización-materialización, ya que, por ejemplo, es necesario recurrir a un ostensivo adecuado (como  $x$ ) para evocar un elemento particular arbitrario del conjunto universal, o materializar con el ostensivo  $\forall x : (x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))$  la idea de que los conjuntos  $A \cup (B \cap C)$  y  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$  son iguales, entre otros.

**4.3. Práctica de validación en Geometría I y su análisis ontosemiótico.** En el cuadernillo de ingreso de Geometría (Elguero et al., 2021) se indaga sobre las relaciones y diferencias entre los objetos geométricos (puntos, rectas, figuras planas) y perceptibles. Se trabajan las definiciones de rectas, semirrectas, segmentos, ángulos, tipos de ángulos y medición de ángulos. En este contexto, se plantean tareas sobre cálculos de medidas desconocidas de ángulos, con el objetivo de que los estudiantes las resuelvan poniendo a funcionar definiciones y propiedades trabajadas, sin usar instrumentos de medición. El objetivo que se proponen es introducir al estudiantado en un razonamiento deductivo, ya que, se explicita

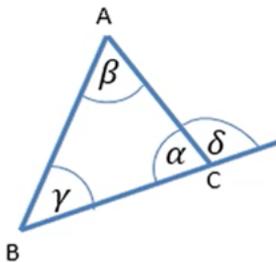
que dichas tareas permiten la obtención de un resultado a partir del empleo de propiedades de las figuras.

Se definen así los axiomas, un sistema axiomático y los teoremas. En particular, se propone, en una de las primeras presentaciones de PowerPoint expuesta en el ingreso, un ejemplo de lo que sería una demostración de un teorema, la demostración de que la medida de un ángulo exterior en un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a él. A esta práctica la denominamos práctica de validación 3 (PV3) y la presentamos en la Figura 3.

**Ejemplo:** Demostremos el siguiente teorema

**Teorema:** La medida de un **ángulo exterior** en un triángulo, es igual a la suma de las medidas de los **ángulos interiores no adyacentes a él**.

**Demostración:**



Dado el triángulo ABC, consideremos, sin pérdida de generalidad, el ángulo exterior δ. α y δ son *adyacentes*, luego cumplen la propiedad de ser *suplementarios*, esto es:

$$m(\alpha) + m(\delta) = 180^\circ$$

$$m(\delta) = 180^\circ - m(\alpha) \quad (1)$$

Teniendo en cuenta la *propiedad de los ángulos interiores* de un triángulo, tenemos que:

$$m(\alpha) + m(\beta) + m(\gamma) = 180^\circ$$

$$m(\beta) + m(\gamma) = 180^\circ - m(\alpha) \quad (2)$$

Entonces, de (1) y (2) obtenemos que  $m(\delta) = m(\beta) + m(\gamma)$

Que es lo que queríamos demostrar.

FIGURA 3. Práctica de validación 3 (PV3). Fuente: Elguero et al. (2021).

En la Tabla 3 mostramos el análisis ontosemiótico realizado a PV3 explicitando los objetos y procesos que son necesarios movilizar para la comprensión y el desarrollo de esta práctica.

Objetos Primarios	Procesos Duales
<p><i>Procedimientos.</i> Se realiza un dibujo de un triángulo en el cual se marcan sus ángulos interiores y se los denota con α, β y γ. Se considera un ángulo exterior cualquiera δ adyacente a uno de los ángulos interiores: α.</p>	<p><i>Representación-Significación.</i> Es necesario significar al enunciado como una doble generalización: para todo triángulo y para todo ángulo exterior del triángulo, su medida es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a él.</p>

Se deduce que  $\alpha$  y  $\delta$  son suplementarios y se expresa que:  $m(\alpha) + m(\delta) = 180^\circ$ .

Se reescribe la igualdad anterior como:  $m(\delta) = 180^\circ - m(\alpha)$ .

Se expresa que:  $m(\alpha) + m(\beta) + m(\gamma) = 180^\circ$ .

Se reescribe la igualdad anterior como:  $m(\beta) + m(\gamma) = 180^\circ - m(\alpha)$ .

Se deduce que  $m(\delta) = m(\beta) + m(\gamma)$

*Definiciones disponibles.*

Triángulo.

Ángulos exteriores e interiores de un triángulo.

Ángulos suplementarios: aquellos en que la suma de sus medidas es  $180^\circ$ .

Ángulos adyacentes: aquellos que tienen un lado en común y los otros lados son semirrectas opuestas.

*Proposiciones disponibles (PD).*

PD1. Si dos ángulos son adyacentes entonces son suplementarios.

PD2. Existencia del elemento neutro de la suma.

PD3. Existencia del elemento inverso aditivo en el conjunto de los números enteros.

PD4. La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$ .

PD5. Transitividad de la igualdad.

*Proposición emergente.*

La medida de un ángulo exterior en un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a él.

*Lenguaje.*

Si bien hay indicios de lenguaje coloquial y gráfico, predomina un lenguaje de tipo simbólico algebraico.

*Argumentos.*

Se argumenta a través de una demostración directa e informal.

Al dibujo se lo significa como el ostensivo de la figura geométrica: triángulo con sus ángulos interiores y un ángulo exterior a uno de ellos.

Se significa a la expresión “ $\alpha$  y  $\delta$  son adyacentes” como:  $\alpha$  y  $\delta$  tienen un lado en común y los otros lados son semirrectas opuestas. A la expresión “ángulos suplementarios” se le da el significado de aquellos ángulos cuyas medidas suman  $180^\circ$ . A la expresión  $m(\alpha) + m(\delta) = 180^\circ$  se la significa como: la suma de las medidas de  $\alpha$  y  $\delta$  es  $180^\circ$ .

A la expresión  $m(\delta) = m(\beta) + m(\gamma)$  se le otorga el significado de que, la medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a él.

*Materialización-Idealización.*

Se materializa a través de un dibujo, la representación de un objeto ideal (un triángulo con los ángulos interiores y un ángulo exterior adyacente a uno de ellos).

Se materializa a través del dibujo el ángulo exterior a uno de los ángulos interiores extendiendo la recta BC, marcando el arco y evocándolo con una letra.

Con los ostensivos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  se materializa los tres ángulos interiores del triángulo ABC. Se materializa con el ostensivo  $\delta$  el ángulo exterior del triángulo ABC, adyacente a  $\alpha$ .

El ostensivo  $m(\alpha)$  remite la medida de un ángulo  $\alpha$ .

Con el ostensivo  $m(\alpha) + m(\delta) = 180^\circ$  se evoca que los ángulos  $\alpha$  y  $\delta$  son suplementarios.

Con el ostensivo  $m(\alpha) + m(\beta) + m(\gamma) = 180^\circ$  se materializa la propiedad de que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a  $180^\circ$ .

Con el ostensivo  $m(\delta) = m(\beta) + m(\gamma)$  se evoca la idea de que, la medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la

<p>Se considera un triángulo particular arbitrario con ángulos <math>\alpha</math>, <math>\beta</math> y <math>\gamma</math>, y un ángulo exterior a <math>\alpha</math>.                  Apoyándose en el dibujo, se deduce que <math>\alpha</math> y <math>\delta</math> son adyacentes, y por PD1, que son suplementarios: <math>m(\delta) + m(\alpha) = 180^\circ</math>.                  Por otro lado, utilizando PD4 se deduce que <math>m(\alpha) + m(\beta) + m(\gamma) = 180^\circ</math>.                  Mediante el uso de propiedades que permiten transformar ambas igualdades en otras equivalentes se llega a la expresión: <math>m(\delta) = m(\beta) + m(\gamma)</math>. Implícitamente se utiliza la regla de introducción del generalizador para asegurar que esto vale para cualquier ángulo exterior y cualquier triángulo.</p>	<p>suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes.</p> <p><i>Particularización-Generalización.</i>                  Se parte de un triángulo particular arbitrario y se generaliza para todo triángulo y de un ángulo exterior particular arbitrario y se generaliza para cualquier ángulo exterior del triángulo.</p> <p><i>Descomposición-reificación.</i>                  El dibujo, que interviene como un todo unitario, debe ser descompuesto en diferentes elementos (triángulo, ángulos interiores, semirrectas, ángulo exterior al triángulo).                  Se necesita reificar el lenguaje gráfico con el lenguaje coloquial y simbólico algebraico para dar emergencia a la demostración del teorema.</p>
---	---

TABLA 3

Describimos a continuación algunos conflictos semióticos potenciales identificados a partir del análisis realizado a PV3 (Tabla 3).

- Dificultades para significar el enunciado como una doble generalización: para cualquier triángulo y para cualquier ángulo exterior al mismo, su medida es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes al ángulo exterior.
- Dificultad para reconocer en el ostensivo  $m(\alpha)$  la medida de un ángulo  $\alpha$ .
- Disparidades en el otorgamiento de significado a la expresión  $m(\alpha) + m(\delta) = 180^\circ$  en relación con el significado pretendido, más específicamente, dificultades para reconocer en dicho ostensivo que la suma de las medidas de  $\alpha$  y  $\delta$  es  $180^\circ$ . Algo similar puede ocurrir con el ostensivo  $m(\alpha) + m(\beta) + m(\gamma) = 180^\circ$ .
- Otro potencial conflicto puede estar vinculado con el pasaje de la expresión  $m(\alpha) + m(\delta) = 180^\circ$  a la expresión  $m(\delta) = 180^\circ - m(\alpha)$  en el sentido de tener que otorgar significado a la segunda expresión, como consecuencia de la aplicación de propiedades en la primera que se utilizan implícitamente. Lo mismo podría suceder con el pasaje de la expresión  $m(\alpha) + m(\beta) + m(\gamma) = 180^\circ$  a la expresión  $m(\beta) + m(\gamma) = 180^\circ - m(\alpha)$ .
- Desajustes en el significado otorgado a la expresión  $m(\delta) = m(\beta) + m(\gamma)$ , y más precisamente, dificultades para reconocer que la medida de un ángulo

exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a él.

- Dificultades para reconocer en el dibujo el ángulo  $\delta$  como adyacente a  $\alpha$ .
- Otro conflicto puede asociarse a la posibilidad de generalizar la propiedad a partir de haberla probado para un triángulo y un ángulo exterior particulares pero arbitrarios.
- Otros conflictos podrían surgir para unificar el dibujo (lenguaje gráfico) con lo planteado en lenguaje simbólico algebraico para dar emergencia a la demostración del teorema.
- Dificultades para comprender que el dibujo interviene como un todo que debe ser descompuesto en diferentes elementos para su respectivo análisis: ángulos interiores del triángulo, semirrectas, ángulo exterior al triángulo.

Nuevamente, si pensamos que la práctica la tiene que realizar efectivamente el alumnado, a los ya mencionados pueden agregarse conflictos vinculados al proceso de idealización-materialización, tales como, dificultades para materializar con el dibujo la representación de un objeto ideal (triángulo con los ángulos interiores y un ángulo exterior adyacente a uno de ellos), o para recurrir a ostensivos (por ejemplo  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ ) para evocar tres ángulos interiores del triángulo ABC, entre otros.

**4.4. Conclusiones de los análisis.** Los análisis realizados a estas prácticas de validación ponen en evidencia que:

- Se debe tener disponible una gran variedad de objetos primarios.

Particularmente, en las prácticas se ponen a funcionar procedimientos o acciones que están en estrecha relación con los argumentos y que, en muchos casos, no son anticipados en los cuadernillos o textos, por ejemplo, en la PV1, se supone que  $\sqrt{2}$  es un número racional y se ponen a funcionar ciertos procedimientos, sin hacer referencia a que se intenta suponer una proposición, para deducir a partir de ella una contradicción y poder asegurar que dicha proposición no vale.

Para comprender y realizar cada práctica, es necesario que los estudiantes tengan disponible diversas definiciones y propiedades, algunas de las cuales se utilizan implícitamente en los textos, tal es el caso, por ejemplo, de la siguiente propiedad en la PV1: si dos números reales son iguales entonces los cuadrados de dichos números son iguales; o de la definición de igualdad de conjuntos no explicitada desde el comienzo en la PV2.

Los argumentos se desarrollan de acuerdo con la forma lógica de los enunciados de las proposiciones que son necesarias validar, algunos de los cuales incluyen, por ejemplo, una doble generalización (en la PV3), lo que da cuenta de su complejidad. El tipo de argumento desarrollado se corresponde, en todos los casos, con demostraciones informales (directas e indirectas), puesto

que la mayoría de las propiedades, reglas lógicas y métodos de demostración se utilizan de manera implícita en los textos analizados. Por ejemplo, en la PV1 no se hace explícita la forma que se emplea para argumentar (método del absurdo).

Si bien en algunas de las prácticas hay indicios de lenguaje coloquial, gráfico y simbólico aritmético, el lenguaje que las regula es de tipo simbólico algebraico.

- Para comprender y desarrollar estas prácticas, se deben transitar por diversos procesos duales.

Uno de los procesos fundamentales es el proceso de representación-significación, el cual se manifiesta, por un lado, en la necesidad de otorgar significado a ciertos términos lógicos que aparecen en las proposiciones que hay que validar o en las prácticas mismas, por ejemplo, en la PV1 otorgar significado al condicional  $\Rightarrow$  y al término contradicción como una proposición falsa (conjunción de una proposición y su negación), o al bicondicional  $\Leftrightarrow$  en la PV2. Por otra parte, también es necesario otorgarles contenido a ciertas expresiones matemáticas, por ejemplo, en la PV1 es necesario significar la expresión  $2q^2 = p^2$  como  $p^2$  es múltiplo de 2, o en la PV2 a la igualdad entre conjuntos. En la PV3, además, es necesario significar a los dibujos como una representación ostensiva de las figuras que son objetos teóricos o ideales.

También se hace necesario transitar por procesos de materialización-idealización, dado que, para avanzar es necesario reconocer en ciertos ostensivos las ideas que se movilizan, por ejemplo, en la PV1 reconocer los objetos no ostensivos que se movilizan en la expresión  $2q^2 = (2k)^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$ . Pero también, si se piensa en la realización efectiva de las prácticas por parte de un estudiante, es necesario transitar por procesos de idealización-materialización, ya que, se deben evocar ciertas ideas con los ostensivos adecuados, por ejemplo, en la PV2, es necesario materializar un elemento cualquiera del primer conjunto con un ostensivo como  $x$ .

Son fundamentales los procesos de particularización-generalización, principalmente al generalizar la validez de las proposiciones a partir de probarlas para elementos particulares arbitrarios (en la PV2, por ejemplo, se parte de un elemento  $x$  particular arbitrario y se generaliza para todo  $x$ ), así como utilizar propiedades generales en casos particulares.

Es necesario también transitar procesos de descomposición-reificación, dado que en las prácticas es esencial, por un lado, reconocer algunos objetos como un todo unitario y, por otro, poner en relación todos los pasos llevados a cabo para comprender la emergencia de un tipo de validación, por ejemplo, poner en relación todos los pasos realizados en la PV1 y unificarlos para comprender el funcionamiento del método del absurdo.

- La forma de avanzar en estos procesos duales puede ser fuente de conflictos semióticos potenciales, vinculados a posibles disparidades entre significados otorgados a ciertas expresiones matemáticas y símbolos lógicos respecto de los significados pretendidos; dificultades para reconocer en ciertos ostensivos los objetos no ostensivos que se movilizan, así como también para utilizar ostensivos adecuados al evocar objetos no ostensivos; dificultades para generalizar las proposiciones a partir de haberlas probado para objetos particulares arbitrarios, y también, al tener que particularizar propiedades generales; ausencia de reificación a partir de un tratamiento sistémico de cada uno de los pasos propuestos en las prácticas y posibles dificultades para considerar determinados objetos como un todo unitario que debe ser descompuesto en diferentes elementos para su análisis.

### §5. Consideraciones finales

La exploración y el análisis de algunas de las primeras demostraciones que se promueven en los materiales del ingreso a la carrera de grado Profesorado en Matemática en la universidad donde tiene lugar nuestra labor como docentes, nos permitió detectar algunos conflictos semióticos potenciales que aportan explicaciones y posibilitan gestionar algunas de las dificultades efectivas que manifiestan los estudiantes para comprender y realizar demostraciones, teniendo en cuenta la variedad de objetos que son necesarios tener disponibles y los procesos que se deberían transitar. Además, este estudio confirma las hipótesis iniciales sobre posibles distancias entre las prácticas de validación logradas por estudiantes del último año del nivel secundario, estudiadas y analizadas en Markiewicz et al. (2021), respecto de las que se promueven en el nivel superior, así como también, comprender desde otra perspectiva esta distancia. Así mismo, nos lleva a cuestionarnos ¿cómo articular los modos de validación que el alumnado trae de la escuela secundaria con este tipo de pruebas que exigen un manejo formal y funcional del método deductivo, como lo son las demostraciones?

Consideramos que es necesario generar una actividad matemática más amplia que incluya la generación y refinamiento de conjeturas y la producción de argumentos para estas conjeturas que no necesariamente califiquen como demostraciones, pero que pueden llegar a aportar elementos para idear las mismas (A. Stylianides et al., 2016). El trabajo sobre otros tipos de pruebas que tienen una función más explicativa (Balacheff, 2000; Hanna, 2000) podrían favorecer la comprensión por parte de los estudiantes (Fiallo, 2013) y actuar de bisagra entre las pruebas pragmáticas logradas y las demostraciones pretendidas, apuntando así a una continuidad cognitiva entre la argumentación y la demostración (Boero, 2007; Pedemonte, 2005). Ejemplo de estos tipos de pruebas son las pruebas intelectuales a las que refiere Balacheff (2000), particularmente, las pruebas de tipo ejemplo genérico, cuando se

intentan explicar las razones de validez de una aserción realizando transformaciones sobre un objeto representante de una determinada clase, sirviendo como medio para mostrar la prueba, o también, la experiencia mental, que se centra en la acción, interiorizándola y separándola de su ejecución sobre un representante en particular y basándose en el uso de propiedades y relaciones entre los objetos. Otro ejemplo son las fundamentaciones, tales como las concibe Duarte (2010), las cuales se apoyan en el valor explicativo de los argumentos, por encima del formalismo, admitiendo así, un lenguaje familiar.

La complejidad ontosemiótica y lógica de las demostraciones esperadas en el nivel superior y los conflictos semióticos potenciales puestos en evidencia en este trabajo, tensionan, de algún modo, la idea de una continuidad cognitiva entre la argumentación y la demostración (Boero et al., 1996) y son aspectos a tener en cuenta cuando se piensa en la entrada a la validación en la universidad. En este contexto, se hace imprescindible flexibilizar el concepto riguroso y absoluto de demostración, ya que, una visión estrecha de la demostración no refleja la realidad en la práctica matemática educativa (Hanna y de Villiers, 2012; Montoro, 2007). Pero también es fundamental conocer y ser conscientes de la complejidad ontológica, semiótica y lógica de este tipo de prácticas y de los conflictos semióticos que puedan generarse en la práctica, y, en este sentido, este estudio pone de manifiesto algunos aspectos que son necesarios movilizar (objetos y procesos) para poder comprender y construir las demostraciones pretendidas.

Así, este trabajo ayuda a problematizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la demostración, pero también marca la necesidad de hacerse cargo de esta problemática, tanto desde la escuela secundaria, como por parte de quienes estamos a cargo de regular el conocimiento en el nivel de educación superior, más aún en el Profesorado en Matemática, repensando el tipo de validación pretendido en cada nivel educativo (Esteley et al., 2019) y recuperando las formas de validar de estudiantes que ingresan a la universidad para, paulatinamente, ir construyendo prácticas de validación más cercanas a la demostración. Todo esto con el propósito de que los estudiantes puedan avanzar en un ambiente de mayor articulación con sus conocimientos disponibles.

Finalmente, esta investigación pretende ser un aporte a los estudios sobre la complejidad ontosemiótica que revisten las demostraciones matemáticas (Markiewicz y Etchegaray, 2017, 2018; Recio, 1999), ya que, pone de manifiesto relaciones y significados que en muchas ocasiones están ocultos en las prácticas planteadas en los materiales de trabajo que utiliza un docente. Sin embargo, es sumamente necesario reconocer ciertas limitaciones del estudio. Por un lado, es importante señalar que el análisis realizado se basó únicamente en tres demostraciones presentes en los materiales del ingreso a la universidad. Si bien este análisis constituye un paso inicial fundamental para comprender las

dificultades de los estudiantes ante la demostración y pensar en procesos de estudio con mayor idoneidad cognitiva e instruccional, reconocemos que no es suficiente para extraer conclusiones más generales sobre el tipo de prácticas de validación que prevalecen en el desarrollo completo de las asignaturas. En este sentido, se hace necesario ampliar la exploración y el análisis teniendo en cuenta otros aspectos fundamentales, como lo son las clases que efectivamente dictan los docentes, donde abordan distintos tipos de prácticas de validación. Por otro lado, es necesario reconocer que nuestro análisis se lleva a cabo en un contexto específico, es decir, en una carrera de grado de una universidad particular. Sería de gran interés poder extender este estudio a otras universidades para realizar un análisis más exhaustivo sobre el tipo de prácticas de validación que se llevan a cabo en distintos contextos. Continuamos nuestra línea de investigación en la búsqueda continua de mejoras para los procesos de enseñanza y aprendizaje de la demostración a partir de la construcción de propuestas que lo posibiliten (Lew y Mejía Ramos, 2019; A. J. Stylianides et al., 2022).

### Bibliografía

- Alfaro-Carvajal, C., Flores-Martínez, P., & Valverde-Soto, G. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia*, 33(2), 55-75. <https://doi.org/10.15359/ru.33-2.5>
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemática*. Una empresa docente.
- Boero, P. (2007). *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Sense Publishers.
- Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., & Mariotti, A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. En L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME international conference* (pp. 113-120).
- D'Andrea, R., & Sastre, P. (2013). ¿Cómo facilitar el proceso de demostración matemática en estudiantes universitarios? *UNION*, 33, 137-145.
- Duarte, B. (2010). *Cuestiones didácticas a propósito de la enseñanza de la fundamentación en matemática*. [Tesis doctoral]. Universidad de San Andrés.
- Elguero, C., Ferrochio, E., & Maero, A. (2021). *Integración a la Cultura Académica Profesorado y Licenciatura en Matemática, Geometría*. <https://www.exa.unrc.edu.ar/wp-content/uploads/2020/12/Geometr%C3%ADa%C3%ADa-2021.pdf>

- Esteley, C., Cruz, M. F., & Scaglia, S. (2019). *Quehacer matemático y validación: ideas de futuros profesores*. XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.
- Fiallo, J. (2013). Estudio de los procesos de argumentación y demostración. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 7-18). Universidad Pedagógica Nacional.
- Font, V., & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 33-52.
- Font, V., & Rubio, N. V. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics Education. *ZDM. The international journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The ontosemiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 38-43.
- Godino, J. D., Burgos, M., & Gea, M. M. (2022). Analysing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.*, 53(10), 2609-2636. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1896042>
- Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S., & Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *AIEM*, 8, 117-142.
- Godino, J. D., & Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), 405-414.
- Gómez-Chacón, I. M. (2009). Actitudes matemáticas: propuestas para la transición del bachillerato a la universidad. *Educación matemática*, 21(3), 5-32.
- González-Gutiérrez, F. J. (2004). *Apuntes de matemática discreta*. Universidad de Cádiz. <https://www.cs.buap.mx/~fjrobles/Conjun2.pdf>
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.
- Hanna, G., & de Villiers, M. (2012). Aspects of proof in mathematics education. En G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (pp. 1-10). Springer.
- Hernández-Suarez, C. A. (2012). Caracterización de la actividad demostrativa en estudiantes de educación superior. *Eco Matemático Journal of Mathematical Sciences*, 3(1), 36-43.

- Konic, P., Bovio, A., & Bollo, C. (2021). *Integración a la Cultura Académica Profesorado y Licenciatura en Matemática, Matemática Discreta*. <https://www.exa.unrc.edu.ar/wp-content/uploads/2020/12/Matem%C3%A1tica-Discreta-2021.pdf>
- Lew, K., & Mejía Ramos, J. P. (2019). Linguistic conventions of mathematical proof writing at the undergraduate level: Mathematicians' and students' 4 perspectives. *Journal for Research in Mathematics Education*, 50(2), 121. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.50.2.0121>
- Markiewicz, M. E., Etchegaray, S., & Milanesio, B. (2021). Análisis ontosemiótico de procesos de validación en estudiantes del último año de la escuela secundaria. *UNION*, 17(62).
- Markiewicz, M. E., & Etchegaray, S. C. (2017). Análisis de objetos, procesos y conflictos semióticos en prácticas algebraicas de primer año de la universidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone & M. M. López (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.
- Markiewicz, M. E., & Etchegaray, S. C. (2018). La comprensión de textos: un análisis desde la didáctica de la matemática. *Contextos de Educación*, 24, 41-54.
- Milanesio, B., Burgos, M., & Markiewicz, M. E. (2023). Significados pragmáticos de la demostración matemática en estudiantes universitarios. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI*. (pp. 371-378). SEIEM.
- Molina, O., & Samper, C. (2019). Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. *Bolema*, 33, 109-134.
- Montoro, V. (2007). Concepciones de estudiantes de profesorado acerca del aprendizaje de la demostración. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 2(1), 101-121.
- Orquera, V., & Ferreyra, D. (2022). *Integración a la cultura académica profesorado y licenciatura en matemática Cálculo*. [https://drive.google.com/file/d/1q\\_C6lldf6z6fPp9CXA6X0w6lOwPpa6o/view](https://drive.google.com/file/d/1q_C6lldf6z6fPp9CXA6X0w6lOwPpa6o/view)
- Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 25(3), 313-348.
- Peparelli, S., Zon, N., Bigolín, S., & Matos, N. (2011). El pasaje del nivel medio al nivel universitario: un estudio en una asignatura de primer año del profesorado en matemática. *Educación Matemática*, (1), 38.
- Recio, A. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática [Tesis doctoral]*. Universidad de Granada.
- Selden, A., & Selden, J. (2008). Overcoming students' difficulties in learning to understand and construct proofs. *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics*, 95-110.

- Stylianides, A., Bieda, K., & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in Mathematics Education research. En A. Gutierrez, G. Leder & P. Boero (Eds.), *Second handbook of research on the psychology of Mathematics Education: The journey continues* (pp. 315-351). Sense Publishers.
- Stylianides, A. J., Komatsu, K., Weber, K., & Stylianides, G. J. (2022). Teaching and Learning Authentic Mathematics: The Case of Proving. En M. Danesi (Ed.), *Handbook of Cognitive Mathematics*. Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-03945-4\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-031-03945-4_9)
- Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2017). Based Interventions in the area of proof: The past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 119-127.
- Weber, K., Lew, K., & Mejía Ramos, J. P. (2020). Using expectancy value theory to account for students' mathematical justifications. *Cognition and Instruction*, 38(1), 27-56. <https://doi.org/10.1080/07370008.2019.1636796>

BETTINA MILANESIO

Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales - UNRC.

(✉) [bettinamilanesio@gmail.com](mailto:bettinamilanesio@gmail.com)

MARÍA ELENA MARKIEWICZ

Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales - UNRC.

(✉) [mmarkiewicz@exa.unrc.edu.ar](mailto:mmarkiewicz@exa.unrc.edu.ar)

---

Recibido: 1ro de agosto de 2023.

Aceptado: 27 de marzo de 2024.

Publicado en línea: 30 de abril de 2024.

---



**los racionales se pueden ordenar explícitamente?**

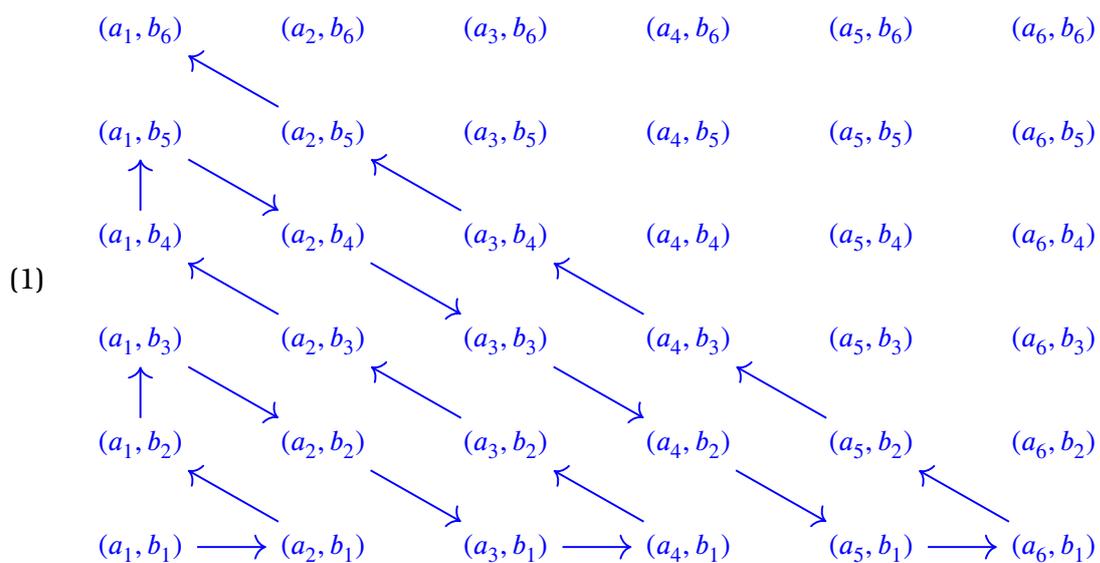
Recordemos que un conjunto  $X$  es numerable si se lo puede poner en biyección con los naturales  $\mathbb{N}$ . Es decir, si existe una función

$$f : X \rightarrow \mathbb{N}$$

inyectiva y sobreyectiva. En este caso, llamamos  $x_n$  al elemento de  $X$  cuya imagen por  $f$  es  $n$  (i.e.  $f(x_n) = n$ ) y podemos pensar que los elementos de  $X$  están ordenados, el  $x_1$  es el primer elemento de  $X$ , el  $x_2$  el segundo, etcétera. Es decir, le pasamos el orden de  $\mathbb{N}$  a  $X$  vía la biyección.

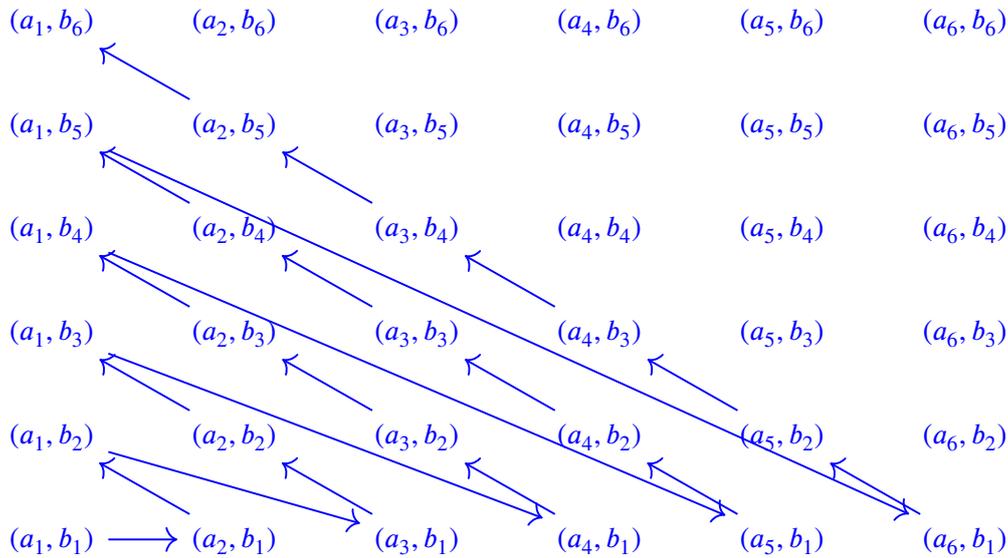
Es bastante conocido el hecho de que los números racionales son numerables, pero la justificación que usualmente se enseña no establece una biyección explícita. Recordaremos esta justificación y luego daremos una biyección explícita de  $\mathbb{Q}^+$  en  $\mathbb{N}$  muy sencilla e ingeniosa ¡basada en el Teorema Fundamental de la Aritmética! Daremos de este modo una ordenación explícita de los racionales.

*Producto de conjuntos numerables es numerable.* Comenzamos mostrando un hecho que es bastante intuitivo, que el producto de conjuntos numerables es numerables. Dados  $A$  y  $B$  conjuntos numerables, digamos  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  y  $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ , numeramos el producto cartesiano  $A \times B$  “por diagonales” como muestra el diagrama.



Es decir,  $(a_1, b_1)$  es el primer elemento de  $A \times B$ ,  $(a_2, b_1)$  es el segundo,  $(a_1, b_2)$  es el tercero y así sucesivamente. Es claro que recorriendo el conjunto  $A \times B$  de esta forma le damos un orden a los elementos del producto cartesiano y por lo tanto existe una biyección de  $A \times B$  con  $\mathbb{N}$ . Sin embargo, dar explícitamente esta biyección no es tan fácil.

Para escribir formalmente una biyección será mejor recorrer las diagonales de otra manera, siempre desde abajo hacia arriba, como en el siguiente diagrama.



Veamos cómo definir explícitamente la biyección de arriba que llamamos

$$h : A \times B \rightarrow \mathbb{N}.$$

Observamos que en cada diagonal (que va de  $(a_1, b_j)$  hacia abajo) la suma de los subíndices de elementos  $(a_i, b_j)$  en ella es constante igual a  $i + j$ . Además, la diagonal  $n$ -ésima tiene  $n$  elementos (pensando a  $(a_1, b_1)$  como la primer diagonal) y es claro que  $n = i + j - 1$ .

Dicho esto, la función  $h$  dada por el dibujo de arriba cumple

$$h(a_1, b_1) = 1$$

y para todo  $(i, j) \neq (1, 1)$  tiene la expresión

$$h(a_i, b_j) = 1 + 2 + \cdots + (i + j - 2) + j.$$

En efecto, si  $(a_i, b_j)$  está en la diagonal  $i + j - 1$ , por lo tanto las  $i + j - 2$  diagonales previas aportan  $1 + 2 + \cdots + (i + j - 2)$  mientras que  $(a_i, b_j)$  ocupa la posición  $j$  en su diagonal. Finalmente, usamos que sabemos calcular la suma de  $n$  números consecutivos, en efecto

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1),$$

de donde finalmente obtenemos

$$(2) \quad h(a_i, b_j) = \frac{1}{2}(i + j - 2)(i + j - 1) + j.$$

Podemos chequear, por ejemplo, que  $(a_3, b_4)$  está en la sexta diagonal y ocupa la posición 19 en el orden de las flechas y tenemos que

$$h(a_3, b_4) = \frac{5 \cdot 6}{2} + 4 = 19.$$

Perfecto, ¡sigamos!

*Justificación usual de que  $\mathbb{Q}^+$  es numerable.* Los números racionales positivos tienen numerador y denominador; ambos son números naturales. Es decir que los racionales positivos pueden ser pensados como el producto cartesiano

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

aunque con repeticiones, pues un mismo racional puede expresarse usando distintos pares de numeradores y denominadores: los pares ordenados  $(1, 1)$  y  $(2, 2)$  de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  representan el mismo racional 1. Es más, el número 1 aparecerá infinitas veces, pues  $1 = (i, i)$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ ; el  $\frac{1}{2}$  aparecerá infinitas veces, pues  $\frac{1}{2} = (i, 2i)$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , y lo mismo sucede con todo racional. Esto provoca que  $\mathbb{Q}^+$  no sea exactamente igual a  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

La justificación usual de que  $\mathbb{Q}^+$  es numerable argumenta entonces del siguiente modo. Si queremos dar un orden concreto a los elementos de  $\mathbb{Q}^+$ , podemos usar lo visto para producto cartesiano de conjuntos numerables; o sea usar el orden dado en (1) tomando  $A \times B = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , es decir

$$(a_i, b_j) = (i, j).$$

El punto es que hay que descartar las repeticiones. Entonces simplemente numeramos la primera vez que pasamos por cada racional e ignoramos las siguientes apariciones.

El problema de esta justificación es que ya no es posible dar una expresión explícita para la biyección como en (2) culpa de estas repeticiones. Esto hace que sea muy complicado decir cuál es el racional número 1000 ó 1000000, por ejemplo. Pero no hay que preocuparse por esto, en matemática ¡casi siempre hay una salida!

*$\mathbb{Q}^+$  es explícitamente ordenable.* Con esto queremos decir que podemos dar una biyección explícita de  $\mathbb{Q}^+$  en  $\mathbb{N}$  y por lo tanto un orden a los elementos de  $\mathbb{Q}^+$ .

Notablemente, usaremos el Teorema Fundamental de la Aritmética (TFA) que asegura que todo número natural distinto de 1 se puede escribir de forma única como producto de números primos, salvo el orden de los factores.

Presentamos entonces la biyección explícita,

$$f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{N},$$

dada por Yoram Shager en 1989 (ver [1]). Se define  $f(1) = 1$ . Ahora, si  $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ , suponemos que es fracción reducida (sin factores comunes) y que

$$m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} \quad \text{y} \quad n = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \cdots q_l^{b_l}$$

son las factorizaciones en primos de  $m$  y  $n$ , respectivamente (es decir, los  $p_i$ 's y  $q_j$ 's son primos distintos y los  $a_i$ 's,  $b_j$ 's son naturales) que existen y son únicas por TFA. Luego, se define

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = p_1^{2a_1} \cdots p_k^{2a_k} \cdot q_1^{2b_1-1} \cdots q_\ell^{2b_\ell-1}.$$

Veamos que la función  $f$  es biyectiva. La inyectividad es consecuencia de la unicidad de factorización de  $m$  y  $n$  en primos y lo dejamos como ejercicio (¡hacelo!). Que es sobreyectiva sale analizando un poco la fórmula de  $f$ . Si queremos ver que un natural cualquiera  $k$  es imagen por  $f$  de un racional  $\frac{m}{n}$ , lo que hacemos es mirar la factorización prima de  $k$  y separar los primos que aparecen a potencias pares (que nos dará el numerador  $m$ ) de los primos que aparecen a potencias impares (que nos dará el denominador  $n$ ). Más precisamente, si  $k = p_1^{2a_1} \cdots p_k^{2a_k} \cdot q_1^{2b_1-1} \cdots q_\ell^{2b_\ell-1}$  entonces llamando  $m = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$  y  $n = q_1^{b_1} \cdots q_\ell^{b_\ell}$  tenemos que

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = k,$$

como queríamos ver.

Con esta función, los primeros 20 racionales de la lista son

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{4}, 3, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{2}{3}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, 4, \frac{1}{17}, \frac{3}{2}, \frac{1}{19}, \frac{2}{5}$$

(chequear). Por ejemplo, si queremos saber cual es el  $10^{15}$ -ésimo racional (¡en el orden que estamos dando!) hacemos

$$10^{15} = 2^{15} \cdot 5^{15} = 2^{2 \cdot 8 - 1} 5^{2 \cdot 8 - 1} = f\left(\frac{1}{10^8}\right)$$

y deducimos que  $\frac{1}{10^8}$  es el racional buscado.

Por último, ¿cuál es el racional que ocupa la posición 181222 (fecha en que Argentina consiguió la tercer estrella ★★) en la lista? Como la factorización en primos es  $181222 = 2 \cdot 19^2 \cdot 251$  se tiene que

$$181222 = f\left(\frac{19}{2 \cdot 251}\right),$$

es decir,  $\frac{19}{502}$  es el 181222-ésimo racional de la lista. ¡Madre mía, qué bonito!

## REFERENCIAS

- [1] YORAM SAGHER. *Counting the Rationals*. The American Mathematical Monthly **96:9**, p. 823, 1989.

**Yoram Sagher** Nació en 1939. Recibió su Licenciatura en Ciencias en el Instituto Technion de Israel y se doctoró en la Universidad de Chicago en 1967 bajo la dirección de Antoni Zygmund con la tesis titulada 'On hypersingular integrals with complex homogeneity'. Ha dirigido 13 tesis doctorales. Es Profesor de la universidad Atlántica de Florida y Profesor Emérito del Departamento de Matemática, Estadística y Ciencias de la Computación de la Universidad de Illinois (Chicago, EEUU). Sus intereses de investigación son Análisis armónico, Teoría de la interpolación y Educación matemática. Dictó una conferencia en la Reunión Anual de la Unión Matemática en Salta 1970.

---

# ON THE GEOMETRY AND TOPOLOGY OF DA VINCI DOMES

Nicolé Geysse, María José Moreno y Andrés Navas

---

**RESUMEN.** Estudiamos las famosas cúpulas de Leonardo Da Vinci, así como las variaciones concebidas por Rinus Roelofs, desde un punto de vista matemático. En particular, consideramos el problema de cerrar la cúpula para producir una estructura esférica. Explicamos por qué este problema está relacionado con consideraciones geométricas y topológicas sutiles. Esto contrasta con la estructura unidimensional análoga, a saber, el puente de Da Vinci, que se puede fácilmente continuar hasta cerrar una forma circular.

*Palabras clave:* Leonardo Da Vinci, puente, cúpula, geometría, topología.

**ABSTRACT.** We study the famous Leonardo Da Vinci's domes, as well as the variations pursued by Rinus Roelofs, from a mathematical viewpoint. In particular, we consider the problem of closing the dome in order to produce a spherical structure. We explain why this problem is related to subtle geometric and topological considerations. This is in contrast with the 1- dimensional analog structure, namely Da Vinci's bridge, that can be easily closed up to make a circular shape.

*Keywords:* Leonardo Da Vinci, bridge, dome, geometry, topology.

## §1. Introduction

Without any doubt, Leonardo Da Vinci is one of the great geniuses of history. His vast work is surprising not only for its depth, originality and beauty, but also for its heterogeneity. Among his writings, it is even possible to find several notes on mathematics. He got most of his mathematical education by his training under Luca Pacioli, for whom he illustrated the famous book *The Divine Proportion*. In this regard, the use of golden proportion in Da Vinci's art is frequently featured, yet usually exaggerated.

Da Vinci also made experiments –though not very substantive progress– in other directions, for example, on the problems of squaring the circle and doubling the cube. For more information on this, see this article (Duvernoy, 2008) of Sylvie Duvernoy. In particular, therein there is a nice discussion on a genuine and little

known contribution of Da Vinci to the problem of determining the center of gravity of a pyramid.<sup>1</sup>

In this article we will focus on a series of graphical sketches he left in his mythical work *Codex Atlanticus* from a mathematical (more precisely, geometric and topological) viewpoint.

## §2. The Da Vinci bridge

Of the many structures Leonardo da Vinci designed, perhaps the most ingenious one is his design of an easy-to-assemble, self-supporting bridge. In “the Codex”, he depicted this as follows:



FIGURA 1. Image from folio 69 recto of Leonardo Da Vinci's Codex Atlanticus.

For a full description of the elementary geometry involved in this design, we refer to (Humenberger, 2021). Over the last years, Da Vinci's idea has been systematically implemented as pedagogical activities to introduce students to 2D - 3D geometry in a more attractive way (see for instance (Carrasco, Carvacho, y Sánchez, 2023)). It has also found a central place in mathematical exhibitions (museums, festivals, etc) throughout the world, and it has been beautifully displayed as decoration in many places, for example in Freiburg (Germany).

<sup>1</sup>In the literature, it is also mentioned that Da Vinci would have provided a very original proof of the Pythagorean theorem. However, this is highly unlikely, and the argument seems to have arisen much later. See this article (Lemmermeyer, 2016) of Franz Lemmermeyer for a very complete discussion on this.



FIGURA 2. A Leonardo Da Vinci's bridge in Freiburg; image taken from Wikipedia commons

It is not very surprising that, by carefully pursuing this construction, in the end one obtains a "circle", as shown below.



FIGURA 3. A "circle" of Leonardo Da Vinci.

### §3. The Da Vinci domes

Here is another wonderful design from "the Codex". The structures arising from it are also self-supporting, but produce a kind of 2-dimensional surface instead of a 1-dimensional object.

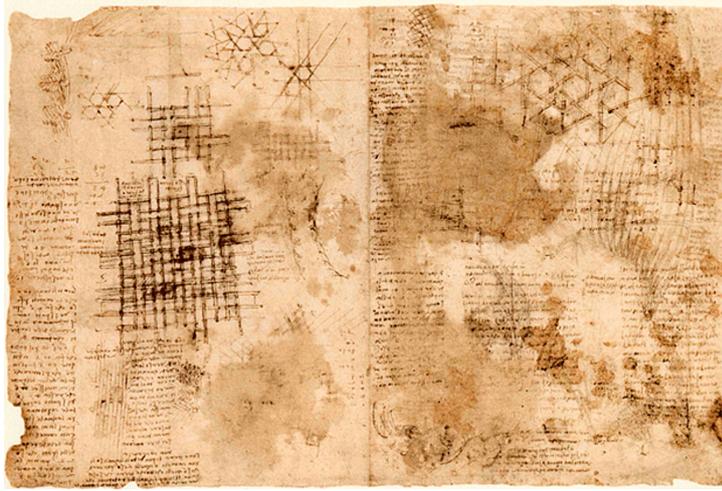


FIGURA 4. Folio 899 verso of Leonardo Da Vinci's Codex Atlanticus.

These structures are all based on the same principle: each rod is perfectly straight but has four notches. Quite crucially, the notches that are close to the ends are deeper than the other two.



FIGURA 5. A rod of a Da Vinci dome.

When assembling pieces, each notch has to match with another one. Moreover, those in the ends have to be put towards the ground surface. Because of the difference of depth, this very simple rule produces elevation for the structure.



FIGURA 6. A dome assembled for the Festival de Matemáticas in Valparaíso (Chile).

There are many variations on the designs. In particular, the nice list of eleven periodic planar patterns below was produced for the LeonarDome educational kit of the Museum of Mathematics of Catalonia; see (Brasó, 2018).

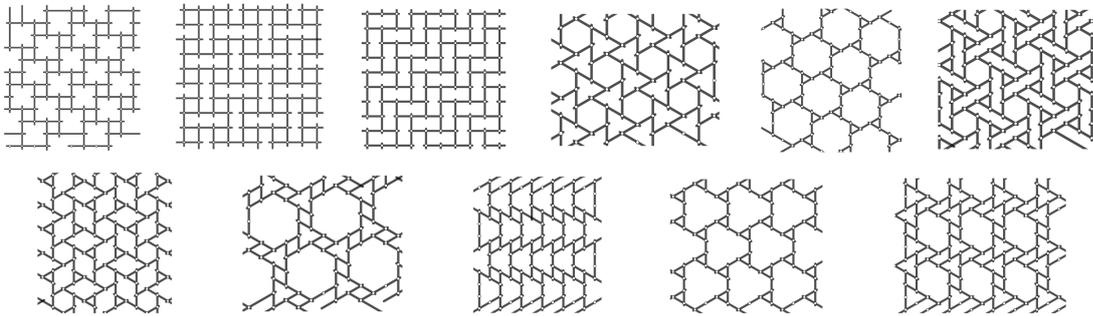


FIGURA 7. Eleven different patterns to build domes.

One can even create more designs. For example, this one was conceived by Ignacio (the son of the third-named author), yet we later discovered that it appears in (the top of) page 4 of (Song y cols., 2013).



FIGURA 8. A “new” pattern.

We should stress that in the illustrations above, all edges have equal length. However, our discussion still applies to non-equal-length rods, which give rise to more patterns.

It seems interesting to explore the whole landscape of periodic planar tilings that one can implement this way. A challenging problem is to determine which of the 17 crystallographic groups can be realized. For instance, it seems that those that involve both nontrivial rotations and reflexions are hard to produce (some of these are perhaps impossible). One can readily check that the patterns above

realize the groups  $pmg$ ,  $pgg$ ,  $p31m$ ,  $p4g$ ,  $p4$  and  $p6$  (see (Schattschneider, 1978) for a concise discussion on crystallographic groups, including notation).

These structures have been rediscovered and pursued by Rinus Roelofs. We refer to (Roelofs, 2008) for an account of this side of his amazing work. We will come back to this later.

#### §4. Da Vinci patterns and sphericity

Da Vinci's bridge can be closed to a circular structure. Quite naturally, one may ask whether Da Vinci's domes can also be closed to spherical surfaces. It is worth stressing that we are only referring to the combinatorics of the patterns, with no claim about the physical stability of the structure. In particular, we do not suggest any tensegrity phenomenon here.

Let us point out that there exist spherical tilings that respect combinatorial rules as those of Da Vinci's domes (interior notches of each rod point in one direction and those close to the ends in the opposite one). For instance, one can build them starting from ico-dodecaedral like configurations. The beautiful design below was conceived by Roelofs. Note, however, that the sphericity of the structure is somehow "reverse" to that of Da Vinci domes, and comes from the fact that the rods are systematically curved in a well-chosen direction (actually, there is no difference of depth between the notches).



FIGURA 9. Roelof's design from <http://www.rinusroelofs.nl/structure/designs-lg/dm-sphere-10.html>

Using only straight rods still allows closing a spherical structure in certain cases. This is illustrated by the design below, due to Arie Brederode. Note that this requires a large number of rods.



FIGURA 10. Images uploaded by Arie Brederode to the Facebook page of Bridges: Arts & Mathematics, reproduced with permission.

**4.1. A warning on collinearity of vertices along rods.** From a theoretical viewpoint, modeling Da Vinci's domes made of straight rods as polyhedra in which vertices along the same rod are collinear is not appropriate (compare (Song y cols., 2013)). Actually, such an ideal object can never close to a spherical surface. This is a consequence of the next elementary result, the hypothesis of which apply to Da Vinci domes if they were considered as polyhedra because of the combinatorial constraint in their construction (more precisely, by the fact that no boundary notch of a rod matches with another boundary notch).

**The Polyhedron Theorem.** There is no spherical like polyhedron such that two of the edges meeting at each vertex are contained in the same straight line.

We provide two proofs of this result. The first one is purely geometric and somewhat connected to the idea of curvature. It reproduces a standard argument that shows that every compact surface in 3-dimensional space has points with positive Gaussian curvature. The second one, based on the classical Descartes angle defect theorem, has a topological flavor. Although it is more elaborate than

the geometric one, the topological considerations involved will drive our further discussion. Quite naturally, both arguments proceed by contradiction.

**First Proof (Da Vinci meets Gauss).** Assume by contradiction that a polyhedron as in the statement exists, and consider a very large sphere that completely contains it in the interior. By continuously decreasing the radius of the sphere, we detect a moment where it becomes “tangent”: the polyhedron touches the sphere, but doesn’t cross it. Let  $P$  be a point in common between the polyhedron and this new sphere. Such a point has to be an endpoint of any line that contains vertices of the polyhedron, otherwise this line would cross the sphere, and there would be vertices of the polyhedron outside the sphere. In particular,  $P$  must be a vertex. However, by hypothesis, at each vertex of the polyhedron, there are at least two edges that are collinear, which implies that  $P$  is not an endpoint of the corresponding line. This contradiction concludes the proof.

**Second Proof (Da Vinci meets Descartes).** Recall that the *angular defect* of a vertex polyhedron is defined as the difference between  $360^\circ$  and the sum of the angles at the vertex. An easy way to visualize this consists in mapping the faces converging to the vertex into a plane by opening one of the edges. The angle that remains in the plane uncovered by those of the faces is the angular defect.

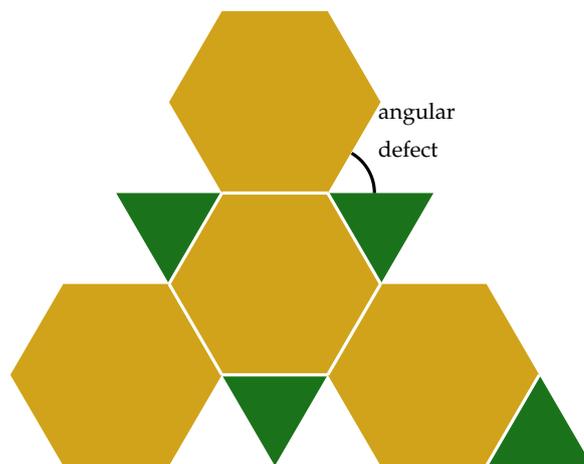


FIGURA 11. Angular defect.

A famous theorem due to Descartes establishes that, for a spherical like polyhedron, the total sum of the angular defects along the vertices equals  $720^\circ$ . (See (Scott, 2006) for a proof of this theorem, which is an almost direct consequence of Euler’s formula (5.1), yet it historically precedes it).

Assume now that a polyhedron as in the statement of the theorem exists. If a vertex of such an object has degree 2, then the two angles converging to it are equal to  $180^\circ$ , hence the angular defect vanishes. If a vertex has degree 3, then it is shared by three angles: a pair of supplementary ones and another one of  $180^\circ$ . The sum of these angles would hence equal  $360^\circ$  and, therefore, the angular defect would also vanish. In case of higher degree, one can still see that the angular defect is nonpositive. Therefore, the total sum of the angular defects along vertices is nonpositive. However, this contradicts Descartes' theorem.

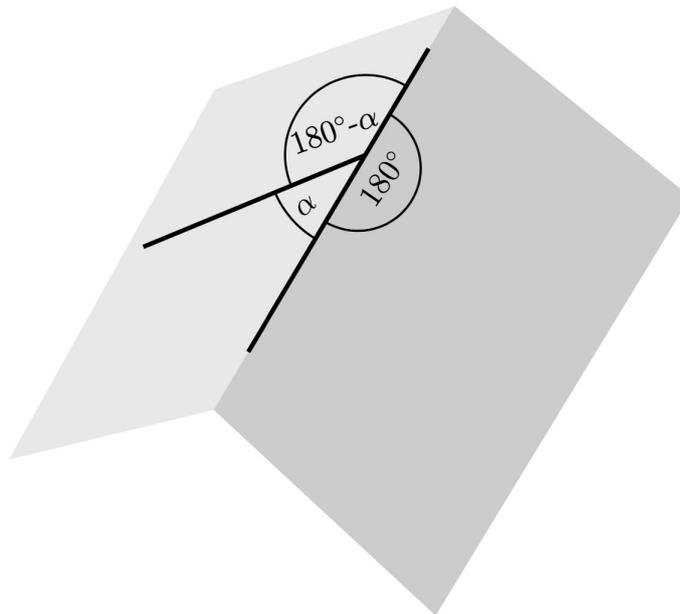


FIGURA 12. Vanishing of the angular defect at each degree-3 vertex.

One can argue that the previous theorem is badly suited because allowing only collinear vertices along the same rod doesn't imply that the whole object can be considered as a polyhedron, since the "faces" could be nonplanar. However, if we artificially add edges to the object thus produced so that it becomes a genuine polyhedron (one can easily do this by triangulating the faces), the theorem above still applies (this is the reason why we included the possibility of arbitrary degree for vertices in the statement).

The theorem above emphasizes once more the relevance of the difference of depth between interior and exterior notches of the rods. This allows producing angular defect (after triangulation, so that the object in view is a genuine polyhedron) which, as we have seen, is necessary to close a spherical structure. Since the angular defect thus produced is very small, a large number of vertices is needed to complete the total angle  $720^\circ$  predicted by Descartes theorem. This is the reason why a large amount of edges is needed.

For the case of curved rods, part of the gaining of angular defect comes from the curvature of the rod. Of course, in order to make this claim formal, one previously needs to forget about the rods keeping in mind only the vertices, and connect them by straight lines. Doing this, one will immediately notice that vertices corresponding to the same rod are far from being collinear. This is the reason why so few rods are used in Roelof's sculpture. However, as we will see in the next section, the careful choice of the combinatorial structure is also crucial.

### §5. Da Vinci meets Euler: exploring topology

Although certain Da Vinci like structures can be closed to make a spherical one, this is impossible with the eleven patterns previously depicted, as well as with all patterns coming from periodic planar tilings. The reason relies on Euler type theorems, as we next explain.

Suppose that we have a spherical like structure, and project it from inside to a sphere surrounding it. We thus obtain a spherical graph for which we have a number of vertices, of curves connecting them that we still call "edges", and regions limited by these edges that we still call "faces". Denote by  $V$ ,  $E$  and  $F$  the number of these vertices, edges and faces, respectively. Euler's theorem establishes the equality

$$(5.1) \quad V - E + F = 2,$$

(see (Aigner y Ziegler, 1998) for an elementary proof; see also (Navas, 2019) for a discussion in relation to designs over spheres).

Now, each pattern depicted in §3 exhibits translational symmetries in two independent directions. By well-known facts of topology, this implies that, if it closes a surface, then

$$(5.2) \quad V - E + F = 0,$$

which is in contradiction with (5.1).

Here is a concrete example. The pattern below involves triangles and dodecagons (in order to apply Euler type formulae, we need to count a vertex at each crossing of rods). Let  $T$  and  $D$  denote the number of the former and the latter, respectively. Since each vertex involves three edges, we have

$$V = \frac{3T + 12D}{3}.$$

Each edge is shared by two faces, hence,

$$E = \frac{3T + 12D}{2}.$$

Finally, the number of faces is the sum of the number of triangles and dodecagons:

$$F = T + D.$$

Therefore,

$$V - E + F = \frac{3T + 12D}{3} - \frac{3T + 12D}{2} + (T + D) = \frac{T}{2} - D.$$

However, one can directly check by looking at the pattern that:

- each dodecagon is neighbored by six triangles;
- each triangle is surrounded by three dodecagons.

This immediately implies that  $T = 2D$ , hence

$$V - E + F = \frac{T}{2} - D = 0.$$

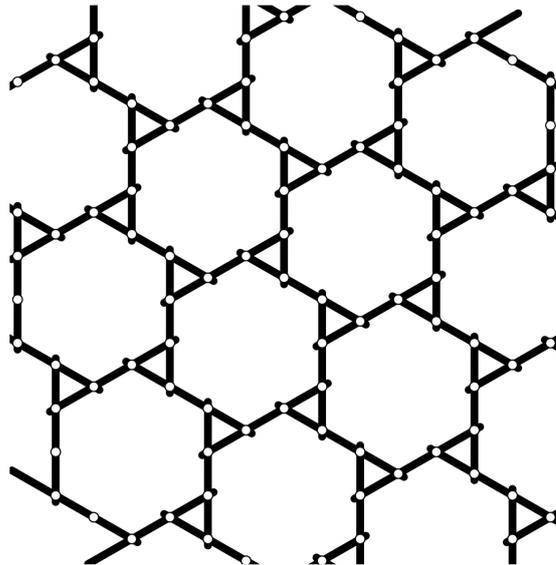


FIGURA 13. Proving the equality  $V - E + F = 0$  for a concrete example (the reader is invited to give similar arguments for each of the eleven patterns previously depicted)

**A technical remark.** There is a way of showing (5.2) for all planar patterns above that only uses the (more elementary) Euler’s formula (5.1) of spherical tilings. This comes from the fact that these patterns yield tilings on the torus, for which (5.2) holds. Roughly, the proof proceeds as follows. Using the two independent symmetry directions, close the pattern so as to build a torus surface, and let  $V, E, F$  be the number of vertices, edges and faces, respectively. Now, coming

back to the plane, copy the planar patterns  $n$  times horizontally and vertically, and denote by  $V_n$ ,  $E_n$  y  $F_n$  the number of vertices, edges and faces that do arise. Non-closeness only happens along the boundary. Since this boundary “grows linearly”, the differences  $|V_n - n^2 V|$ ,  $|E_n - n^2 E|$  and  $|F_n - n^2 F|$  are bounded by a number that is linear in  $n$ . All of this implies that

$$V_n - E_n + F_n = n^2(V - E + F) + O(n).$$

Now, this  $n^2$ -times copied pattern induces a (non Da Vincian!) tiling of the sphere just by adding a “face towards infinity”. By Euler’s formula (5.1) for general spherical tilings, we have

$$V_n - E_n + (F_n + 1) = 2.$$

Therefore,

$$n^2(V - E + F) = O(n).$$

Dividing by  $n^2$  and letting  $n \rightarrow \infty$ , this shows the announced equality  $V - E + F = 0$ .

## §6. Conclusions

The previous discussion shows that, in order to pursue with new Da Vinci like spherical designs, it is worthwhile to take into account not only geometric, but also topological constraints. Roelofs design is an example of this: it is based on (actually, combinatorially equivalent to) a truncated icosahedron. It seems possible to use other classical designs to produce Da Vinci like versions; a challenging problem would be to realize models inspired from different Archimedian solids. Note that Brederode’s design also arises from a well-known family of polyhedra, namely Goldberg’s polyhedra.

Needless to say, besides geometric and topological issues, physical considerations of the material employed for the concrete realizations also needs to be taken into account. For example, the width of the rods creates problems at the junctures to produce polygonal configurations of a very large number of sides.

We stress that our considerations do not close the study of designs that yield to other kind of surfaces. The first proof of the Polyhedron Theorem applies in more generality to closed like polyhedra, as for instance toroidal ones. However, considering notches of different depth could lead to interesting structures of this kind. Note that there is no combinatorial obstruction for planar configurations to yield toroidal structures, since a torus is obtained by a well-known process of “folding a piece of paper in two directions”. As an example we produced the figure below, which shows that the first of the 11 plane tilings can be implemented on a

toroidal like surface. Producing this way a more symmetrical and attractive object would certainly require the work of an artist.



FIGURA 14. One of the eleven plane tilings implemented on a torus

### Bibliografía

- Aigner, M., y Ziegler, G. M. (1998). *Proofs from the book*. Springer Verlag.
- Brasó, E. (2018). Les cúpules de Leonardo da Vinci. *Noubiaix*, 42, 116–126.
- Carrasco, P., Carvacho, M., y Sánchez, F. (2023). Cúpulas de Da Vinci: la geometría colaborando con otras disciplinas. En J. Huinacahue y D. Soto (Eds.), *Educación Matemática Interdisciplinar en el Aula*. Ediciones UCM.
- Duvernoy, S. (2008). Leonardo and theoretical mathematics. Leonardo da Vinci: architecture and mathematics. *Nexus Netw. J.*, 10(1), 39–49.
- Humenberger, H. (2021). Mathematische Aktivitäten rund um die Leonardo-Brücke. En *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft* (Vol. 45, pp. 67–86).
- Lemmermeyer, F. (2016). Leonardo da Vinci's proof of the Pythagorean theorem. *College Math. J.*, 47(5), 361–364.
- Navas, A. (2019). Une «erreur» géométrique dans la ligue des champions. *Images des Mathématiques, CNRS*.
- Roelofs, R. (2008). Two- and three-dimensional constructions based on Leonardo grids. *Nexus Netw. J.*, 10(1), 17–26.
- Schattschneider, D. (1978). The plane symmetry groups: their recognition and notation. *Amer. Math. Monthly*, 85(6), 439–450.
- Scott, P. (2006). Angle defect and Descartes' theorem. *Australian Mathematics Teacher*, 62(1), 2–4.

Song, P., Fu, C.-W., Goswami, P., Zheng, J., Mitra, N. J., y Cohen-Or, D. (2013). Reciprocal frame structures made easy. *ACM Transactions on Graphics*, 32(Issue 4, 94), 1–13.

NICOLÉ GEYSSEL

UTFSM, El Pinar 36, San Joaquín, Santiago, Chile

(✉) [nicole.geysse@usm.cl](mailto:nicole.geysse@usm.cl)

MARÍA JOSÉ MORENO

PUC, Vicuña Mackena 4860, Macul, Santiago, Chile

(✉) [mmors@uc.cl](mailto:mmors@uc.cl)

ANDRÉS NAVAS

USACH, Alameda 3363, Est. Central, Santiago, Chile

(✉) [andres.navas@usach.cl](mailto:andres.navas@usach.cl)

---

Recibido: 26 de agosto de 2023.

Aceptado: 2 de enero de 2024.

Publicado en línea: 30 de abril de 2024.

---

---

## Huellas en la vasta trayectoria de Guy Brousseau

por Dilma Fregona

---

**A**GRADEZCO a la Revista de Educación Matemática esta oportunidad de difundir algunos aspectos de la obra de Brousseau con quien tuve la fortuna de estudiar, gracias al apoyo del estado argentino a través de Universidades Nacionales y del CONICET.

El 15 de febrero del corriente año, poco después de cumplir 91 años, falleció Guy Brousseau, uno de los pilares de una primera generación de didactas de la matemática.

En 1970, presentó en una conferencia la primera versión de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1970), que fue difundida en una publicación de la Asociación de Profesores de Matemática de Francia<sup>1</sup>. Sin embargo, para comprender el nacimiento de esa teoría es necesario remontarse, por lo menos, a una década atrás.

La TSD surge en un momento en que la perspectiva cognitivista dominaba la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, fuertemente influenciada por la epistemología piagetiana. La teoría propuso, según lo expresara Brousseau, otro enfoque:

[...] en matemáticas, ciertas actividades como interrogar un enunciado transformándolo en un problema, o reorganizar un conjunto de enunciados para facilitar su comunicación, su verificación y uso, son actividades de naturaleza tanto didáctica como matemática. Por el contrario, gran parte de las condiciones que permitieron la emergencia de los conocimientos y que acompañan su funcionamiento, son borradas en su presentación estándar. Estrictamente deductiva, entonces casi enteramente reducida a razones lógicas, esa presentación ya didáctica oculta las razones matemáticas ligadas al sentido, y a consideraciones como el uso o la economía de pensamiento, es decir a las situaciones que condicionan su existencia.

Estas consideraciones están en la base de mi enfoque de la didáctica de la matemática por medio de un estudio experimental y de la teoría de las situaciones –matemáticas y didácticas– que los caracterizan. (Brousseau, 2006)

Los desarrollos teóricos y experimentales que llevó a cabo le valieron el reconocimiento de la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), vinculada a la International Mathematical Union, que le concedió en 2003 la medalla

---

<sup>1</sup>Disponible en <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Annexe-Processus-de-Math.pdf>

Félix Klein<sup>2</sup>. Ella recompensa los esfuerzos desplegados a lo largo de su carrera para conformar el campo de la Educación Matemática a través de contribuciones sustanciales a la investigación y que han introducido nuevos temas, ideas, perspectivas y reflexiones.

Su amplia y fructífera trayectoria fue posible por sus condiciones personales, por la pasión y tenacidad con las que sostuvo su tarea, y también por la interacción, el trabajo en colaboración con diferentes personas en ámbitos y momentos distintos. De allí que, intencionalmente presento algunas huellas que agrupo en tres ejes. Se trata de una semblanza, y como tal es el resultado de una elección.

### Influencias en su formación académica

Brousseau, siendo muy joven, se desempeñó como maestro de primaria en una escuela rural, junto a su esposa Nadine. De 1954 a 1956, continúa estudiando matemática, enseña, observa a los alumnos, escribe lecciones y también analiza y propone problemas. Interrumpió luego esas actividades durante tres años, debido al servicio militar y cumple esa obligación en París y luego en Argelia. Retoma luego su trabajo como maestro en la misma escuela donde había trabajado.

Fue Nadine quien lo alentó a retomar sus estudios de matemática a comienzos de 1960, y en esa condición un profesor le sugirió estudiar psicología cognitiva con **Pierre Greco**.

Según su propio relato,

Greco me impresionó por su habilidad para concebir dispositivos experimentales destinados a poner en evidencia la originalidad del pensamiento matemático de los niños en las etapas de su desarrollo. Sin embargo, me daba cuenta de que no entraban entre sus preocupaciones analizar los dispositivos en sí mismos ni explicitar la relación entre estos y la noción matemática cuya adquisición estudiaba. Comencé a plantearme preguntas: ¿en qué condiciones puede propiciarse que un sujeto -cualquiera- tenga la necesidad de un conocimiento matemático determinado para tomar ciertas decisiones? Y, ¿cómo explicar de antemano la razón por la cual lo haría? [...] En esta perspectiva, son los comportamientos de los alumnos los que revelan el funcionamiento del medio, considerado como un sistema. Lo que se necesita modelizar es el *medio*. [...] ¿Qué información, qué sanción pertinente debe recibir el sujeto por parte del medio para orientar sus elecciones y comprometer tal conocimiento en lugar de tal otro? (Brousseau, 2007, pp. 14-15)

<sup>2</sup>Presentación de Jean-Luc Dorier, y seis módulos desarrollados por Annie Bessot y Claire Margolinas, disponible en <https://www.mathunion.org/icmi/awards/amor/guy-brousseau-unit>

Retoma las hipótesis de Piaget sobre el aprendizaje por adaptación, y trata de modelizar los intercambios del alumno con su *medio*: las retroacciones y las sanciones del medio, comprendidas las de índole afectiva que determinan para cada acto sus costos.

Un evento muy importante y determinante sucede en 1961, cuando conoce personalmente a **Lucienne Félix**. Matemática, asistente de Henri Lebesgue, y activa promotora de la renovación en la enseñanza elemental de la matemática, publicó un artículo en una revista pedagógica. Brousseau accedió a ese texto, se identificó con las ideas allí expresadas y decidió escribirle. Ella le respondió pidiéndole una copia de su obra para examinarla, y luego de un tiempo de intercambio epistolar, lo alentó a continuar su trabajo y a presentar los resultados de sus observaciones de clases en un evento académico internacional<sup>3</sup>. En ese evento, y en los sucesivos, siempre en interacción con Lucienne Félix, Brousseau conoció a **André Lichnerowicz**, quien en 1964 le propone un tema de estudio: “Condiciones límites de una experiencia en pedagogía de la matemática”<sup>4</sup>. El recorrido académico de Brousseau tiene entonces otra envergadura, sigue escribiendo sugerencias de innovaciones para los docentes, pero también busca precisar las condiciones de emergencia de un dominio de investigación.

En 1965, publica un pequeño libro destinado a los primeros meses de la escolaridad obligatoria<sup>5</sup>. Cuatro décadas después, difunde un texto (Brousseau, 2015), disponible en su sitio Comentarios 2015 de G. Brousseau sobre su primer libro, y cuyo prólogo lleva el título: ¿Un currículo raro? ¡Una provocación y un manifiesto! En 2023, en homenaje a su esposa Nadine, retoma la temática allí tratada y expresa<sup>6</sup>:

Publiqué un libro para profesores del primer año de escolaridad que no pretende ser un cuaderno de ejercicios para niños, a pesar de su presentación. Su objetivo es permitir a los profesores reconsiderar la enseñanza de la aritmética y la numeración, alejándose del aprendizaje de los números (1, 2, 3, 4, etc.) y centrándose en el significado.

### Trabajo en colaboración con colegas y docentes

La palabra didáctica como campo de investigación, fue muy discutida en los años 70 frente a otras expresiones como epistemología experimental. Finalmente se adoptó didáctica de la matemática y Brousseau afirmaba con convicción que

<sup>3</sup>En el sitio de CIEAEM, un breve homenaje y referencia a la participación de Brousseau en la Comisión. Véase <https://www.cieaem.org/index.php/en/allcategories-en-gb/blog/guy-brousseau-passed-away-on-15-february-2024>

<sup>4</sup>La traducción es nuestra

<sup>5</sup>Disponible en <https://guy-brousseau.com/3144/les-mathematiques-du-cours-preparatoire-1965/>

<sup>6</sup>Disponible en <https://guy-brousseau.com/nadine/>

el dominio debía ser desarrollado próximo a la matemática, pero como un campo de investigación específico, que abarcara investigación fundamental y también experimental, ligada a la enseñanza efectiva de la matemática.

Esa mirada sobre la investigación llevó a madurar la idea de que una tarea con esas características no podía efectuarse ni en las escuelas comunes ni en anexos con ciertas tradiciones de formación donde la investigación no estuviera incorporada como parte de la carga horaria de los docentes. Con investigadores de la Universidad de Bordeaux y la participación de agentes de la administración educativa, acordaron presentar un proyecto para crear una escuela en la que, teniendo un currículo común, los docentes estuvieran dispuestos a participar en investigaciones. Propusieron la construcción de una escuela en Talence –zona periférica de Bordeaux– que tuviese el estatus de “escuela para la observación”. Se creó así en 1972 la Escuela Michelet, establecimiento educativo de nivel inicial y primario, de gestión pública, regido por la normativa nacional vigente. Ese mismo año, a través de la Universidad de Bordeaux, se creó un dispositivo para elaborar y experimentar ingenierías didácticas en una escuela: el Centro para la Observación y la Investigación sobre la Enseñanza de la Matemática (COREM)<sup>7</sup>. Este Centro contó con un edificio en el predio de la Escuela con condiciones particulares, entre ellas un aula con disponibilidad de recursos tecnológicos para grabar clases, que permitieron recoger datos cuantitativos y cualitativos asociados a la enseñanza de la matemática.



FIGURA 1. A la derecha Nadine y Guy Brousseau, Marie-Hélène Salin investigadora/formadora de docentes y Denise Greslard- Nédélec maestra/investigadora, frente al salón del COREM.

<sup>7</sup>Para mayor información, véase <https://guy-brousseau.com/le-corem/>

El COREM fue dirigido por Brousseau hasta 1997. Una pluralidad de actores -docentes, alumnos, estudiantes de posgrado, formadores de docentes y otros investigadores- compartieron durante más de veinticinco años una ambición común: comprender los fenómenos ligados a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática en la escuela.

El funcionamiento de ese dispositivo era original, ya que combinaba diferentes tareas y responsabilidades íntimamente relacionadas, realizadas por las mismas personas en distintas posiciones. Había tres docentes designados cada dos clases, por lo cual cada uno destinaba dos tercios de su carga horaria al dictado de clases y en el tercio restante trabajaban coordinando el trabajo con los compañeros del nivel (incluía el seguimiento de los procesos de aprendizaje de cada alumno y de cada clase), observaban clases de su nivel u otro y participaban del análisis inmediato posterior, y asistían a un seminario semanal de dos horas sobre aspectos de la TSD.

Las clases observadas y registradas podían ser comunes o resultado de una ingeniería didáctica. El maestro a cargo de esa lección trabajaba en colaboración con un profesor formador de docentes en el primer caso, o bien con los investigadores y estudiantes que habían diseñado la lección.

Quiero enfatizar la dinámica del análisis inmediato posterior realizado en interacción con los observadores. El maestro acompañaba a los alumnos al aula y volvía al salón del COREM, donde se llevaba a cabo el encuentro que era registrado en video. Este maestro, sentado a la derecha de Brousseau, tomaba la palabra en primer lugar, identificando momentos de la clase que fueron difíciles de gestionar, emociones, intervenciones de alumnos recuperadas oportunamente o no, administración del tiempo, presencia o ausencia de fases de institucionalización (por ejemplo: modos de presentación de cálculos y/o resultados, técnicas económicas aprendidas por la clase), etc.



FIGURA 2. Brousseau, Christiane Destouesse maestra/investigadora, Françoise Martin formadora de docentes, en el análisis de la lección observada.

Surgían en esos espacios colectivos apasionantes debates promovidos por Brousseau acerca de las condiciones de producción y circulación de los conocimientos en la clase. El mismo reconoció, en diferentes presentaciones, que detrás de cada fenómeno didáctico teorizado, había un hecho observado en la interacción en una clase o con los maestros.

Una muestra de ello, es la aparición tardía de las situaciones de institucionalización. Durante años, en la TSD, se consideró que cuando un sujeto intenta controlar su entorno, no todas sus acciones manifiestan sus conocimientos de la misma manera. Las relaciones de un alumno con el medio se clasificaban en tres grandes categorías: acción, formulación y validación.

Pero en el transcurso de las experiencias desarrolladas en la escuela Michelet, vimos que los maestros, al cabo de un tiempo, necesitaban ordenar un espacio, no querían pasar de una lección a la siguiente, querían detenerse para “rever lo que habían hecho” [...] Nos tomó un tiempo darnos cuenta de que los docentes realmente estaban obligados “a hacer algo”: debían dar cuenta de lo que habían hecho los alumnos, describir lo que había sucedido y lo que estaba vinculado con el conocimiento en cuestión, brindarles un estado a los eventos de la clase en cuanto resultados de los alumnos y resultados de la enseñanza, asumir un objeto de enseñanza, identificarlo, acercar las producciones de los conocimientos a otras creaciones (culturales o del programa), indicar cuáles podían ser reutilizadas nuevamente.

En primer lugar, esos hechos y luego los razonamientos [...] mostraron la necesidad de tener en cuenta fases de institucionalización que dieran a determinados conocimientos el estado cultural indispensable de saberes. (Brousseau, 2007, pp.27-28)

En la actualidad existe un fondo documental, el Centro de Recursos en Didáctica de la Matemática de la Universidad Jaume I de Castellón, España, que conserva una gran variedad de recursos vinculado a las ingenierías desarrolladas en el seno del COREM. Parte de esa documentación es accesible de modo virtual, a través de <https://repositori.uji.es/xmlui/handle/10234/62668>.

Otro sistema de recursos es el banco de datos Vidéos de Situations d’Enseignement et d’Apprentissage (VISA) que ofrece una pluralidad de datos fílmicos vinculados a las ingenierías experimentadas en el COREM. Es accesible en <https://visa.ens-lyon.fr>.

### **La vinculación con Argentina y la región, y la FAMAF**

Su primera visita a Argentina fue en 1991, invitado por la Universidad Nacional de Córdoba (UNC) desde la Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FAMAF)<sup>8</sup>.

<sup>8</sup>Unidad académica a la que se incorporó, más tarde, la carrera de Computación.

En esa ocasión se celebraba en la localidad de Tanti, provincia de Córdoba, la X reunión de la Escuela Latinoamericana de Matemática, en simultáneo con el Primer Seminario Taller Iberoamericano de Matemática en la Educación marco en el cual Brousseau dictó un seminario del que participaron investigadores y docentes del país y la región. Fue el inicio de una fuerte vinculación con otras universidades argentinas, como la Universidad Nacional del Comahue y la Universidad de Buenos Aires. Su actitud generosa frente al conocimiento, y su enorme capacidad de trabajo contribuyeron a crear y consolidar un espacio para una comunidad de investigadores en didáctica de la matemática en nuestro país. Como también desarrolló actividades académicas en la región -México, Brasil y Chile, entre otros países- esa naciente comunidad excedió el marco de las fronteras de nuestro país, y favoreció un intercambio amplio entre la comunidad francesa y otros grupos con diferentes trayectorias.

En 2006 la Universidad Nacional de Córdoba le otorgó el título de Doctor *Honoris Causa*. En el discurso al recibir el diploma, valoró nuevamente el trabajo en colaboración:

Pero mi presencia hoy ante Uds. es en realidad el resultado del trabajo de un gran número de personas, maestros, profesores, estudiantes e investigadores del COREM y de otros laboratorios, matemáticos, didactas o no, psicólogos, pedagogos... El título que Uds. me otorgan reconoce y recompensa a todas esas personas. (Brousseau, 2006)



FIGURA 3. Brousseau recibe del Dr. Daniel Barraco, Decano de FAMAFA, el diploma en el rectorado de la UNC.

Su presencia convocaba a investigadores de diferentes dominios y a docentes de todos los niveles educativos. Su amplio caudal teórico y experimental le permitió trascender el mundo académico y llegar con su discurso a las problemáticas de

la enseñanza en las instituciones educativas. En nuestro país y la región sus producciones constituyeron la base teórica de numerosos trabajos de investigación realizados en las últimas cuatro décadas, y particularmente en Argentina tuvo una influencia importante en documentos de apoyo curricular y libros de texto.

Personalmente, como ya lo expresé, tuve la fortuna de estudiar durante tres años en esa comunidad creada en la Universidad de Bordeaux. Obtuve mi doctorado en 1995, y de alguna manera en el transcurso de los años siguientes sentí la necesidad de compartir algunas producciones publicadas originalmente en francés. La preocupación por difundir las fuentes, me llevó a realizar traducciones, autorizadas por el autor, de algunos de los artículos fundamentales en el desarrollo de la TSD. En esa tarea, espero no haber traicionado al autor. En muchas de ellas colaboraron colegas con diferente formación académica y relación con el idioma francés.

**A**DEMÁS Además de todos los méritos académicos ya descriptos, un párrafo aparte merece los aspectos de su personalidad. Brousseau era una persona apasionada por su trabajo, generosa, curiosa, sensible y siempre dispuesta a buscar una solución a las demandas que recibía. En los espacios sociales en ocasión de eventos académicos se mostró, junto a Nadine, como conocedor del tango y ¡expusieron sus habilidades como bailarines!

Un enorme agradecimiento por el rico legado académico, como comunidad intentaremos estar a la altura para enriquecerlo y sostener el proceso de conservación y difusión de su trabajo y de los archivos.

### Bibliografía

- Brousseau, G. (1970). Processus de mathématisation. *La mathématique a l'école élémentaire. Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement publique*, 33(2), 428-457. Descargado de <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Annexe-Processus-de-Math.pdf>
- Brousseau, G. (2006). *Discurso al recibir el diploma de Doctor Honoris Causa de la Universidad Nacional de Córdoba.*
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Libros del Zorzal: Buenos Aires.
- Brousseau, G. (2015). *Commentaires 2015 de Guy Brousseau sur son petit livret de 1964 [Comentarios 2015 de G. Brousseau sobre su primer libro].* Descargado de [http://guy-Brousseau.com/wp-content/uploads/2015/07/Dunod\\_65\\_Pres\\_Vers\\_espagnole\\_.pdf](http://guy-Brousseau.com/wp-content/uploads/2015/07/Dunod_65_Pres_Vers_espagnole_.pdf)

DILMA FREGONA

*Profesora consulta de la Universidad Nacional de Córdoba*

(✉) [dilma.fregona@unc.edu.ar](mailto:dilma.fregona@unc.edu.ar)

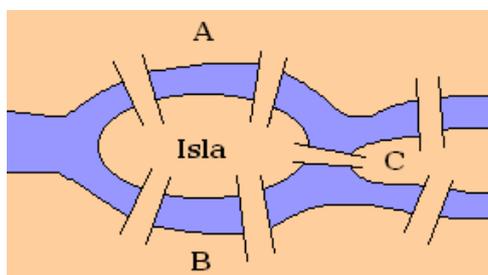
---

## Sección de Problemas

✉ por *Diego A. Sulca*

---

En el siglo XVIII, la ciudad de Königsberg (actualmente Kaliningrado) fue uno de los centros del pensamiento científico más importante de Europa. Königsberg está atravesada por el río Pregel, el cual se bifurca y genera una división de la ciudad en 4 zonas, como se esquematiza en la siguiente figura <sup>1</sup>



La ciudad estaba interconectada por 7 puentes, y los pensadores de la época, a modo de entretenimiento, se preguntaban si era posible hacer una caminata por la ciudad atravesando cada puente exactamente una vez. ¿Se animan a resolverlo...?

Fue el matemático Leonhard Euler quien demostró que tal caminata era imposible. La idea de Euler es muy sencilla. Si existiera un tal recorrido, todas las zonas deberían ser visitadas, y salvo quizás la zona de inicio y la del fin del recorrido (que incluso podrían coincidir), en cada una de las restantes (al menos dos) la cantidad de puentes que la conectan con el resto debe ser un número par. En efecto, en cada visita a una tal zona (zona de pasada) se necesitan dos puentes, uno de llegada y uno de salida. Si tal zona se visita dos veces se necesitaría otros dos puentes más, porque recordemos que los puentes no pueden repetirse; y así sucesivamente. Sin embargo, en la figura anterior vemos que cada zona está conectada por una cantidad impar de puentes. Por lo tanto tal recorrido no existe.

Se dice que este problema dio origen a la teoría de grafos, una rama de la matemática y la computación muy estudiada en la actualidad. Un grafo es una configuración de puntos (por ejemplo las zonas de Königsberg) conectados por algunos segmentos (por ejemplo, los puentes). Para los siguientes problemas

---

<sup>1</sup>Imagen extraída de [http://enciclopedia.us.es/index.php/Archivo:Puentes\\_Königsberg.png](http://enciclopedia.us.es/index.php/Archivo:Puentes_Königsberg.png)

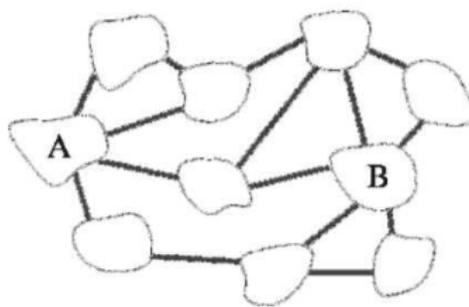
no se necesita nada de grafos, pero es probable que al resolverlos lleguen naturalmente a considerar grafos.



**Problema 1.** Una caminata en una ciudad en la que se atraviesa cada puente de la ciudad una sola vez, se dice caminata euleriana.

- (a) Demostrar que si a la ciudad de Königsberg le quitamos o le agregamos un puente, siempre será posible hacer una caminata euleriana.
- (b) ¿Se puede decir lo mismo si se quitan dos puentes?

**Problema 2.** Se tienen 10 islas conectadas por 15 puentes.



- (a) (IKMC 2017) ¿Cual es el menor número de puentes que se puede eliminar para que sea imposible ir desde A hasta B por puentes?
- (b) ¿Cual es el mayor número de puentes que se puede eliminar y que aún se pueda ir desde cualquier isla a otra?

**Problema 3.** Un grupo de 11 compañeros del secundario se ha reunido después de muchos años. Sin embargo en este grupo hay personas que no se llevan bien.

- (a) Si cada persona se lleva bien con al menos nueve del grupo, probar que hay una persona que se lleva bien con todos.
- (b) ¿Puede suceder que nadie se lleve bien con todos, pero que cada uno se lleve bien con al menos ocho del grupo?
- (c) ¿Puede suceder que cada persona se lleve bien con exactamente siete del grupo?

**Problema 4.** Pepa quiere pintar el mapa de Argentina. Como quiere que las provincias se distingan bien, a las provincias limítrofes las quiere de diferentes colores. El problema es que Pepa solo tiene 3 colores diferentes: violeta, rojo y verde.

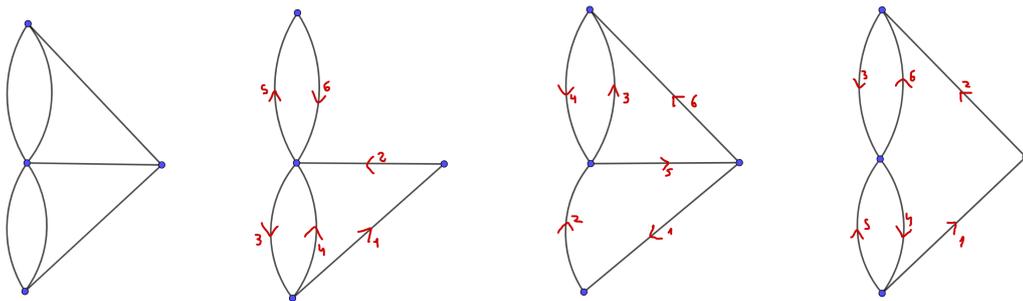
- (a) Mostrar que Pepa no podrá lograr su objetivo.
  - (b) Sin embargo, Pepa es muy ingeniosa y decide dejar algunas provincias sin pintar, que por defecto quedarían en color blanco. Demostrar que al menos dos provincias deben quedar sin pintar.
  - (c) Pepa es cordobesa y no quiere que Córdoba quede sin pintar. ¿Puede Pepa pintar el mapa dejando sólo dos provincias sin pintar y que ninguna de esas sea Córdoba?
-

## SOLUCIONES

## Solución 1.

- (a) En el mapa original, cada una de las zonas se conecta con el resto de la ciudad por una cantidad impar de puentes. Después de agregar o quitar un puente, la ciudad seguirá interconectada, pero las ciudades entre las que se agregó o quitó un puente pasan a conectarse cada una con el resto mediante una cantidad par de puentes. Las otras dos siguen conectándose con el resto por una cantidad impar de puentes.

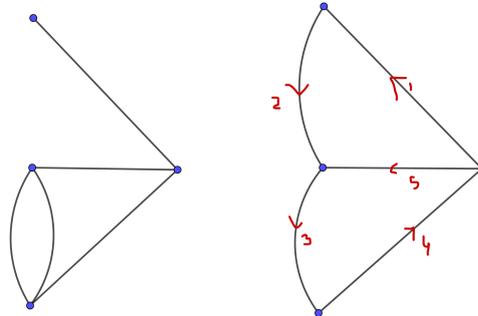
En el caso en que se ha quitado un puente, es fácil construir una caminata euleriana que empiece en una de las ciudades que se conecta al resto con una cantidad impar de puentes, y que termine en la otra que tiene la misma propiedad. Esto lo podemos hacer caso por caso. En la siguiente figura mostramos el esquema de conexión inicial y esencialmente las tres posibles esquemas de conexión después de quitar un puente. En cada uno de ellos se indica una posible caminata euleriana.



En el caso en que se ha agregado un puente, partimos de una zona, digamos A, que se conecta al resto con una cantidad impar de puentes. Como toda zona se conectaba directamente con por lo menos otras dos, podemos caminar desde A hacia una de las zonas, digamos B, que está conectada por el nuevo puente. El nuevo puente conecta B con otra zona, digamos C, que es distinta de A. Hacemos la caminata por este puente y llegamos a C. A continuación eliminamos el puente usado para ir desde A hasta B y el puente nuevo que une B y C. Notar que C ahora se conecta con el resto por una cantidad impar de puentes. De este modo estamos en la situación anterior, y por lo tanto ya sabemos como seguir con nuestra caminata.

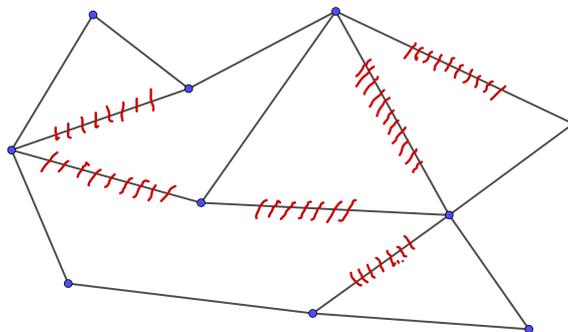
Se puede probar en general que dada cualquier ciudad separadas por ríos e interconectada por puentes de modo que: 1) se puede llegar de un punto de la ciudad a cualquier otro, y 2) hay exactamente dos zonas A y B de la ciudad que se conectan con el resto por una cantidad impar puentes, entonces existe una caminata euleriana que empieza en A y termina en B.

- (b) En el caso en que se quitan dos puentes, la respuesta va a depender de cuáles son los puentes quitados. A continuación mostramos dos ejemplos. En el primero no hay caminata euleriana, y el argumento es el mismo que el usado por Euler. En el segundo ejemplo mostramos una posible caminata.



**Solución 2.**

- (a) Salta a la vista que eliminando 3 puentes se puede desconectar A de B. Lo interesante es justificar porqué no se puede lograr eliminando menos puentes. En efecto, se pueden encontrar 3 caminos desde A hasta B que dos a dos no tienen ningún puente en común. Para desconectar A de B se debería eliminar un puente en cada uno de estos caminos, es decir, 3 puentes en total.
- (b) A continuación mostramos un ejemplo en donde hemos eliminado 6 puentes sin que las islas queden desconectadas.



Veamos ahora que 6 es óptimo.

Supongamos que de los 15 puentes hemos eliminado  $N$  puentes manteniendo las islas conectadas y que ya no se pueden eliminar más puentes. Queremos ver que

$$N \leq 6.$$

Como las islas están conectadas, para cada par de islas  $X$  e  $Y$  hay un camino  $l(X, Y)$  desde  $X$  hasta  $Y$  que no repite puentes. Tal camino es único, pues si hubieran dos caminos diferentes, digamos  $l_1$  y  $l_2$ , al eliminar un puente en uno

de ellos que no está en el otro, el conjunto de islas seguiría conectado (¿por qué?), contradiciendo nuestra suposición.

Sean ahora  $I, F$  dos islas tal que  $l(I, F)$  tiene la mayor cantidad de puentes. Luego a  $I$  solo llega un solo puente (el primer puente del camino  $l(I, F)$ ). Dado un puente que une dos islas  $X$  e  $Y$ , dibujamos una flecha desde  $X$  hacia  $Y$  si  $l(I, X)$  no ha usado dicho puente. Si lo ha usado entonces habrá una flecha desde  $Y$  hacia  $X$ , pues en tal caso  $l(I, Y)$  no debió haber usado el puente. De este modo todo puente tiene una dirección. Como se puede llegar desde  $I$  a cualquier isla, toda isla es el punto final de un puente con dirección.

De este modo, si a cada puente (que ahora tiene dirección) le asociamos su punto final obtenemos una función sobreyectiva entre el conjunto de puentes y el conjunto  $\{\text{islas}\} \setminus \{I\}$ . Luego

$$15 - N \geq 10 - 1 = 9$$

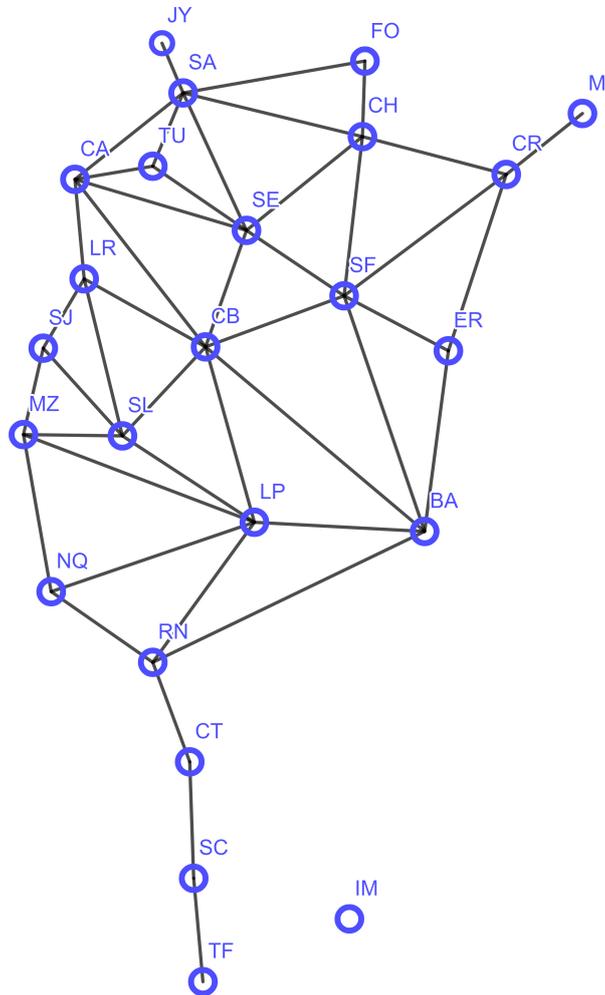
y por lo tanto  $N \leq 6$ .

Con la misma demostración se puede probar que dadas  $x$  islas, el número mínimo de puentes que necesito para poder conectarlas es  $x - 1$ . Usando un argumento inductivo se puede simplificar mucho la demostración.

### Solución 3.

- (a) La condición equivale a que cada persona se lleva mal con a lo sumo con una persona, y se debe probar que hay una persona que no se lleva mal con nadie. Las personas que se llevan mal pueden agruparse entre sí. Estos conjuntos serán disjuntos pues una persona a lo sumo se lleva mal con una persona. Como 11 es impar, siempre habrá una persona que quede solo, es decir, que no se lleva mal con nadie.
- (b) Sí, de hecho puede pasar que cada persona se lleva bien con exactamente 8 personas, o equivalentemente, que se lleve mal con exactamente dos personas. Imaginemos las 11 personas sentadas en una mesa redonda de modo que cada uno se lleve mal con exactamente las dos personas que tiene al lado.
- (c) Supongamos que es posible. Imaginemos que cada par de personas que se llevan bien se entregan un regalo entre sí. Si juntamos todos los regalos en una bolsa habrá una cantidad par de regalos: cada par de personas que se lleva bien aporta dos regalos a la bolsa. Sin embargo, cada persona recibe exactamente 7 regalos, y por lo tanto el número total de regalos debería ser  $11 \cdot 7 = 77$ , que es un número impar. Esto es absurdo. Por lo tanto, la situación no puede darse.

**Solución 4.** Para esta problema será muy útil pensar las provincias como puntos y unir dos puntos con una línea cada vez que las correspondientes provincias sean limítrofes. El diagrama resultante es el siguiente:



El problema consiste en colorear los puntos de modo tal que dos puntos conectados por un segmento tengan siempre distintos colores.

- (a) Veamos que Pepa no podrá pintar todos los puntos con la condición requerida. En efecto, Catamarca, Salta, Tucumán y Santiago del Estero deben pintarse con colores diferentes pues están dos a dos conectadas.
- (b) Vimos que al menos una de las 4 provincias mencionadas anteriormente debe quedar sin pintar. Veamos ahora que entre Córdoba, La Rioja, San Juan, San Luis, Mendoza y La Pampa, al menos una debe quedar sin pintar. En efecto, si las pudiésemos pintar con 3 colores, Córdoba y San Juan deberían tener el mismo color pues ambas deben distinguirse de La Rioja y San Luis. Por el mismo argumento, San Juan y La Pampa deberían tener el mismo color. Pero

entonces Córdoba y La Pampa tienen el mismo color, y esto no está permitido. Concluimos que al menos dos provincias deben quedar sin pintar.

- (c) Sí. Se puede dejar La Rioja y Santiago del Estero sin pintar. Un posible coloreo sería:

