

Revista de Educación Matemática

Consejo Editorial

Editor Ejecutivo

Leandro Cagliero, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Editores Asociados

Juan Carlos Pedraza, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Mónica Villarreal, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Comité Editorial

Abraham Arcavi, Weizmann Institute of Science, Israel

Antonio Cafure, Universidad Nacional de General Sarmiento - CONICET, Argentina

Carlos D'Andrea, Universitat de Barcelona, España

Rocío Díaz Martín, Vanderbilt University, Estados Unidos

Cristina Esteley, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

José Nicolás Gerez Cuevas, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

Susana Paula Graça Carreira, Universidade do Algarve, Portugal

Patricio Herbst, Universidad de Michigan, Estados Unidos

Teresa Krick, Universidad de Buenos Aires - CONICET, Argentina

Ricardo Podestá, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Nélia Maria Pontes Amado, Universidade do Algarve, Portugal

Juan Pablo Rossetti, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Gabriel Rubén Soto, Fac. de Ingeniería, U. Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Argentina

Jhony Alexander Villa-Ochoa, Universidad de Antioquia, Colombia

Registro Nacional de la Propiedad Intelectual N° 168024

ISSN 0326-8780 (versión impresa)

ISSN 1852-2890 (en línea)

Página web: <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index>

Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

Revista de Educación Matemática

Volumen 38, N° 1 – 2023

ÍNDICE

- **Curiosidades del 2023**
Nota Editorial por Ricardo Podestá 3
- **Cuestión de tiempo. Luis Caffarelli, Premio Abel 2023**
Nota Editorial por Antonio Cafure 7

ARTÍCULOS

- **SOBRE FUNCIONES INCIERTAS**
Sebastián Freyre y Juan Sabia 10
- **MODELO DE CRECIMIENTO POBLACIONAL DE MORSA DEL PACÍFICO
(*ODOBENUS ROSMARUS*) TRAS LA DISMINUCIÓN DEL HIELO ESTIVAL
EN EL MAR DE CHUKCHI POR EL CAMBIO CLIMÁTICO**
Pehuén Barzola Elizagaray, Alberto Marcelo Eduardo, Carlos Rubén Bageta, Alicia Bevaqua, Adrián Ceconato, Marcela Garriga, Marta Tirador, Verónica Nodaro, Melisa Enrique y María Victoria Gayá Tosoni 28
- **RAÍCES DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO**
Eduardo Degiorgio y Guillermo Farías 43

SECCIONES FIJAS

- **¿Sabías que...?**
por L. Cagliero y R. Podestá 22
- **Sección de Problemas**
por J.P. Rossetti 53

También encontrarás al final las *¡Sucesiones al toque!*

Curiosidades del 2023

Todos los números tienen alguna curiosidad, aquí compartimos algunas del 2023

por Ricardo Podestá

Su factorización en primos es

$$(1) \quad 2023 = 7 \cdot 17^2 = 7 \cdot 17 \cdot 17,$$

de donde vemos que sus factores primos concatenados ¡forman un número capicúa! Más aún, como $2023 = 7 \cdot 16^2 + 14 \cdot 16 + 7$, es capicúa en base 16, $2023 = (7E7)_{16}$.

La factorización (1) puede ser reescrita de la siguiente forma

$$2023 = (2 + 0 + 2 + 3)(2^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2)^2,$$

lo cual no deja ser una gran curiosidad por ser autorreferencial.

El 2023 es suma de números triangulares $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ consecutivos:

$$2023 = T_2 + T_3 + T_4 + \dots + T_{22} = 3 + 6 + 10 + \dots + 253.$$

Tipos de números

Veamos que 2023 es un número...

- *educado*: ya que se puede escribir como suma de números consecutivos de más de una forma; por ejemplo,

$$2023 = 111 + 112 + \dots + 127.$$

- *de Harshad*: pues la suma de sus dígitos $2+0+2+3 = 7$ divide a $2023 = 7 \cdot 289$.
- *de juntura*: porque se puede escribir como un número n más la suma de los dígitos de n , para al menos dos n distintos; en efecto

$$2023 = 1997 + 1 + 9 + 9 + 7 = 2015 + 2 + 0 + 1 + 5.$$

- *equidigital*: puesto que tiene la misma cantidad de dígitos que su factorización prima, usando potencias ($2023 = 7 \cdot 17^2$).
- *deficiente*: pues los divisores propios de 2023 son 1, 7, 17, 119 y 289 y su suma es 433, que es menor que 2023.
- *duffiniano*: debido a que es un número compuesto que no tiene factores comunes con la suma de sus divisores $1 + 7 + 17 + 119 + 289 + 2023 = 2456 = 2^3 \cdot 307$.
- *congruente*: pues es el área de un triángulo rectángulo de lados racionales. Por ejemplo, 5, 6 y 7 son números congruentes. El 5 porque es el área del triángulo rectángulo de lados $(\frac{20}{3}, \frac{3}{2}, \frac{41}{6})$, el 6 porque es el área del triángulo

rectángulo de lados $(3, 4, 5)$, pero también del de lados $(\frac{7}{10}, \frac{120}{7}, \frac{1201}{70})$ y el 7 porque es el área del triángulo rectángulo de lados $(\frac{35}{12}, \frac{337}{60}, \frac{24}{5})$.

- *pláindromo en base 11*: pues $2023 = (157A)_{11}$ y $1 < 5 < 7 < A$ (donde $A = 10$).
- *zygódromo en base 2*: pues $2023 = (111100111)_2$. Un número es zygódromo en base b si está formado por tiras de al menos dos dígitos (parejas) que se repiten, en esa base (*zygo* es par o pareja en griego).

Expresiones con los dígitos

2023 puede ser escrito de muchas formas curiosas, por ejemplo:

- Con las operaciones elementales (incluyendo la potenciación) tanto en forma ascendente como descendente con los diez dígitos (con y sin el 10):

$$\begin{aligned} 2023 &= 12 \times 3 \times (4 + 5) \times 6 + 7 + 8 \times 9 = 9 \times 8 + 7 + 6 \times 54 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 12 \times (3 \times 4 + 5) \times 6 + 789 + 10 = 10 + 98 + (7 + 6) \times 5 + 43^2 + 1. \end{aligned}$$

También funciona la expresión

$$2023 = (9 + 8) \times 7 \times (6 + 5 + 4 + 3 - 2 + 1),$$

que es bonita pues se deriva de la factorización prima en (1).

- Usando sólo uno cualquiera de los dígitos:

$$\begin{aligned} 2023 &= (1 + 1)^{11} - (1 + 1) \times (11 + 1) - 1 \\ &= (2 \times 22 + \frac{2}{2})^2 - 2 \\ &= 3 + 3 + (3 + 3) \times (333 + 3) + \frac{3}{3} \\ &= 4 + 4 + (4 + 4) \times (4^4 - 4) - \frac{4}{4} \\ &= (\frac{5+5}{5})^{\frac{55}{5}} - 5 \times 5 \\ &= 6 + 66 \times (6 \times -6) + 6 \times 6 + \frac{6}{6} \\ &= 7 + 7 \times (7 \times (7 \times 7 - 7) - 7) + 7 \\ &= (8 + 8 + \frac{8}{8}) \times (8 + \frac{888}{8}) \\ &= 999 + (\frac{9+9}{9})^{9+\frac{9}{9}}. \end{aligned}$$

- La misma representación (decimal) usando un único dígito a :

$$\begin{aligned} 2023 &= \frac{aaaaaa \times (a + a) + (aa + aa - a) \times aaa}{a \times aaa} \\ &= \frac{(aaaaa - a) \times (a + a)}{a \times aa} + \frac{a + a + a}{a} \end{aligned}$$

para cualquier $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (¿por qué funciona?).

- Usando los mismos dígitos en las bases que en los exponentes:

$$\begin{aligned} 2023 &= 0^2 + 1^5 - 2^3 + 3^6 + 4^1 + 5^0 + 6^4 \\ &= 0^4 - 1^7 + 2^0 + 3^6 + 4^5 + 5^1 + 6^3 + 7^2 \\ &= 0^5 + 1^7 + 2^8 + 3^6 + 4^1 + 5^4 + 6^0 + 7^3 + 8^2 \\ &= 0^7 + 1^9 + 2^3 - 3^8 + 4^6 + 5^5 + 6^4 + 7^2 + 8^1 + 9^0. \end{aligned}$$

- Como expresiones con dígitos involucrados en el mismo orden:

$$2023^3 = 8279186167 = (82 + 79 + 186 - 6 + 7)^3.$$

Suma de cuadrados y ternas pitagóricas

- 2023 se puede escribir de 42 formas como suma de 4 cuadrados (sin importar el orden de las sumas y sin usar números negativos)

$$\begin{aligned} 2023 &= 1^2 + 2^2 + 13^2 + 43^2 = 1^2 + 5^2 + 29^2 + 34^2 = 1^2 + 7^2 + 23^2 + 38^2 \\ &= 1^2 + 11^2 + 26^2 + 35^2 = 1^2 + 13^2 + 22^2 + 37^2 = 2^2 + 5^2 + 25^2 + 37^2 \\ &= 2^2 + 7^2 + 11^2 + 43^2 = 2^2 + 7^2 + 17^2 + 41^2 = 2^2 + 11^2 + 23^2 + 37^2 \\ &= 2^2 + 13^2 + 25^2 + 35^2 = 2^2 + 17^2 + 19^2 + 37^2 = 3^2 + 5^2 + 15^2 + 42^2 \\ &= 3^2 + 5^2 + 30^2 + 33^2 = 3^2 + 9^2 + 13^2 + 42^2 = 3^2 + 13^2 + 18^2 + 39^2 \\ &= 3^2 + 14^2 + 27^2 + 33^2 = 3^2 + 18^2 + 27^2 + 31^2 = 3^2 + 21^2 + 22^2 + 33^2 \\ &= 5^2 + 6^2 + 21^2 + 39^2 = 5^2 + 7^2 + 10^2 + 43^2 = 5^2 + 10^2 + 23^2 + 37^2 \\ &= 5^2 + 11^2 + 14^2 + 41^2 = 5^2 + 14^2 + 29^2 + 31^2 = 5^2 + 17^2 + 22^2 + 35^2 \\ &= 5^2 + 19^2 + 26^2 + 31^2 = 6^2 + 9^2 + 15^2 + 41^2 = 6^2 + 13^2 + 27^2 + 33^2 \\ &= 7^2 + 11^2 + 22^2 + 37^2 = 7^2 + 13^2 + 19^2 + 38^2 = 7^2 + 17^2 + 23^2 + 34^2 \\ &= 7^2 + 22^2 + 23^2 + 31^2 = 9^2 + 14^2 + 15^2 + 39^2 = 9^2 + 18^2 + 23^2 + 33^2 \\ &= 10^2 + 11^2 + 29^2 + 31^2 = 10^2 + 13^2 + 23^2 + 35^2 = 11^2 + 13^2 + 17^2 + 38^2 \\ &= 13^2 + 14^2 + 17^2 + 37^2 = 13^2 + 15^2 + 27^2 + 30^2 = 13^2 + 18^2 + 21^2 + 33^2 \\ &= 13^2 + 22^2 + 23^2 + 29^2 = 14^2 + 19^2 + 25^2 + 29^2 = 18^2 + 21^2 + 23^2 + 27^2 \end{aligned}$$

y como suma de 5 cubos

$$2023 = 2^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 11^3.$$

- 2023 es parte de las siguientes ternas pitagóricas:

$$952^2 + 1785^2 = 1127^2 + 1680^2 = 2023^2$$

donde la hipotenusa mide 2023 y estas

$$\begin{aligned} 2023^2 + 2040^2 &= 2873^2, & 2023^2 + 41736^2 &= 41785^2, \\ 2023^2 + 6936^2 &= 7225^2, & 2023^2 + 120360^2 &= 120377^2, \\ 2023^2 + 17136^2 &= 17255^2, & 2023^2 + 292320^2 &= 292327^2, \end{aligned}$$

donde el cateto más corto mide 2023.

Teselado con triominós

Un monominó es un cuadradito unidad. Un triominó (o trominó) es la unión de 3 monominós unidos por sus lados (hay dos, con las formas de I y de L).

Hay 2023 formas de teselar (cubrir sin solapamientos) una grilla cuadrada de 4×4 usando solo el triominó en forma de L y el monominó. Por ejemplo,



Las 2023 teselaciones son estas:



Muchas de las curiosidades de la presente nota han sido obtenidas de la página [Numbers Aplenty](https://inderjtaneja.com) y del artículo *23 and 2023 in numbers and patterns* de Inder Taneja disponible en <https://inderjtaneja.com>.

Cuestión de tiempo. Luis Caffarelli, Premio Abel 2023

por Antonio Cafure

En los últimos años la llegada del mes de marzo representa un momento particular para el mundillo matemático. Una sensación creciente de ansiedad se va apoderando de nuestros espíritus y, expectantes, aguardamos el clímax que suele llegar unos días después del 20 de marzo. El motivo es que la Academia Noruega de Ciencias y Letras anuncia el nombre del ganador del que acaso sea el premio de mayor reconocimiento a la tarea de los matemáticos: el **Premio Abel**. De esta manera, la Academia homenajea la memoria de Niels Henrik Abel, el matemático noruego que en una vida de apenas 26 años (1802-1829) logró erigirse en uno de los más grandes de la humanidad. Al decir de Francisco Vera en *Veinte matemáticos célebres*, Abel es uno de los “dos matemáticos más jóvenes de la historia”. El otro es Évariste Galois.

La iniciativa de la Academia Noruega ha tenido también el buen tino de colaborar con la causa de desterrar la pregunta de por qué no hay premio Nobel en matemática. La respuesta es que no es necesario pues la comunidad ya tiene un premio equivalente que, al mismo tiempo, lleva el nombre de uno de los nuestros.

Por eso, decíamos, el mes de marzo es particular. En esta época de redes, los intercambios, las discusiones, la nominación de candidatos, las apuestas simbólicas por los posibles ganadores del premio forman parte de las conversaciones cotidianas. Una vez conocido el nombre del premiado se suceden las alegrías por el reconocimiento al ganador, se multiplican las felicitaciones. Como si fuéramos una gran nación matemática, como si las fronteras de nuestro mundo fueran de libre circulación, nos fundimos en una celebración colectiva.

Cómo no íbamos a festejar entonces que Luis Caffarelli sea el primer matemático de origen latinoamericano en ganar el premio Abel. Más aún, el primero de habla hispana. El anuncio no tomó por sorpresa a la comunidad. De hecho, hacía tiempo que era uno de los candidatos a ganarlo. La profundidad y el impacto de sus investigaciones en el ámbito de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales son de tal magnitud que, además de modificar para siempre los modos de comprender ciertos fenómenos de la vida real, hacían pensar que era solo una cuestión de tiempo que lo recibiera. En su carrera ya había obtenido los más altos reconocimientos a los que un matemático puede aspirar: doctorados honoris causa por instituciones del mayor prestigio, ser miembro de las academias de ciencias líderes, ganador de premios de jerarquía, etc. Lo cierto es que con este galardón Caffarelli pasa a formar parte definitivamente del panteón matemático.

Luis Caffarelli estudió en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. Allí completó su licenciatura y en 1971 obtuvo su doctorado bajo la dirección de Calixto Calderón, gran matemático y hermano menor de Alberto Calderón, otro de los matemáticos argentinos de talla mundial. Suele especularse que el mayor de los Calderón, fallecido en 1999, habría sido un candidato a ganar el premio Abel.

Luego de doctorarse, Caffarelli continuó su carrera en Estados Unidos. Desde allí mantuvo un contacto permanente con la comunidad matemática argentina. Claudia Lederman es una matemática argentina que se desempeña en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. Durante años tuvo un contacto estrecho con Caffarelli, quien primero fue uno de sus directores de doctorado y, posteriormente, supervisor de su estancia posdoctoral en el *Institute for Advanced Study* en Princeton. Vía correo electrónico, Lederman nos cuenta:

Si bien se fue apenas se doctoró, sigue visitando Argentina constantemente desde entonces. Está muy agradecido de la formación que recibió acá, siempre cuenta anécdotas de su época de estudiante, que recuerda con mucha alegría. Además, siempre se interesó en impulsar la matemática en Argentina. Dictó cursos, conferencias, donó colecciones completas de revistas y libros (cuando todo ese material no era accesible, como ahora, a través de internet), colaboró en la organización de eventos científicos, promoviendo la visita de destacados matemáticos que no hubieran visitado nuestro país de otro modo.

En este sentido, nos interesa destacar también que desde el año 2000, la Revista de la Unión Matemática Argentina tiene el honor de contar a Caffarelli entre los miembros de su comité editorial.

Lederman también agrega algunas anécdotas sobre cómo es Caffarelli en su trato cotidiano:

Luis es una persona sumamente generosa, siempre dispuesto a compartir sus ideas y su tiempo, aconsejando y ayudando en lo que sea necesario, y con infinita paciencia. Tiene su casa abierta a sus estudiantes y colaboradores, haciendo reuniones en las que muchas veces es él mismo el que cocina.

Abel fue un genio romántico en el sentido más acabado del término. Es difícil no conmoverse con las penurias que atravesó durante su vida. Desde siempre su figura despertó admiración dentro de la comunidad matemática. De ahí que esta simpatizara con la idea de un premio con su nombre, aun antes de que comenzaran a entregarse los premios Nobel. En 1996 el matemático noruego Arild

Stubhaug escribió una biografía cuya primera edición en inglés apareció en 2000 y llevó como título *Niels Henrik Abel and his times. Called too soon by flames afar*. Poner en palabras lo que Abel representa para la matemática terminó de convencerlo. Se acercaba el bicentenario de su nacimiento, y Stubhaug entendía que la matemática no podía esperar otros 100 años. Decidió volver a impulsar la iniciativa en forma tal que fuera una cuestión de Estado: el premio Abel fue oficialmente instituido en 2002. En el artículo *The History of the Abel Prize*, Stubhaug da cuenta de los vaivenes, de los intentos frustrados y de cómo, finalmente, la memoria de Abel es homenajeada. Allí podemos leer:

El Primer Ministro enfatizó el amplio consenso político que la propuesta había generado y la esperanza de que un Premio Abel anual fortaleciera la investigación y el reclutamiento en matemáticas y ciencias naturales, y aumentara la conciencia internacional de Noruega como una nación basada en el conocimiento.

Este es el premio que acaba de ganar Caffarelli. Por unos días, su obra le dio una visibilidad sin parangón a la matemática argentina.

ANTONIO CAFURE

Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento

CONICET

(✉) acafure@campus.ungs.edu.ar

SOBRE FUNCIONES INCIERTAS

Sebastián Freyre y Juan Sabia

RESUMEN. En este trabajo, analizamos algunas propiedades básicas de las funciones reales $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación polinomial $X^2 + 1 = 0$ (es decir, tales que $f^2 + id_{\mathbb{R}} = 0$, donde $f^2 = f \circ f$). Probamos su existencia, damos una caracterización de tales funciones y mostramos un ejemplo concreto del cual pueden derivarse infinitos ejemplos más. A continuación discutimos algunos aspectos sobre su continuidad. Finalmente, un mecanismo clásico del álgebra lineal nos permite probar que, para cualquier polinomio $P \in \mathbb{Q}[X]$, existen funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación polinomial $P = 0$.

ABSTRACT. In this paper, we analyze some basic properties of the real functions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ that satisfy the polynomial equation $X^2 + 1 = 0$ (that is, such that $f^2 + id_{\mathbb{R}} = 0$, where $f^2 = f \circ f$). We prove their existence, give a characterization of such functions and show a concrete example from which infinite other examples can be derived. Next, we discuss some issues about their continuity. Finally, a classic linear algebra mechanism allows us to prove that, for every polynomial $P \in \mathbb{Q}[X]$, there exist functions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ that satisfy the polynomial equation $P = 0$.

§1. Introducción

Hace tiempo, en una clase de Álgebra Lineal, se mostró que una rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ en el plano cumple que $f \circ f = -id_{\mathbb{R}^2}$ y se planteó como ejercicio probar que ninguna transformación lineal real $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ puede cumplir que $f \circ f = -id_{\mathbb{R}^3}$ (la justificación de este hecho, que no es fundamental para seguir leyendo este artículo, se basa en que f tiene un polinomio característico real de grado 3, y por lo tanto, tiene un autovalor real; si existiera tal f , este autovalor real al cuadrado daría -1 , lo que es absurdo). La idea de que haya elementos en un conjunto que al cuadrado den menos la identidad nos remite inmediatamente a la unidad imaginaria i y a los números complejos.

Palabras clave: funciones reales de una variable, continuidad, polinomios, espacios vectoriales.

Keywords: real univariate functions, continuity, polynomials, vector spaces.

Al finalizar la clase, un alumno se acercó al docente y le preguntó: “¿Existirá una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \circ f = -id_{\mathbb{R}}$?”¹ Muchos años después, recordando esa charla, nos pareció que esta pregunta podía servir de disparador para pensar un poco de matemática básica, cosa que siempre nos gusta, y también para mostrar el camino que fuimos transitando a partir de allí (aunque, evidentemente, no es el único camino posible). El resultado final, por ahora, es lo que escribimos en este trabajo. Esencialmente, decidimos obviar al principio el álgebra lineal (ya que las únicas transformaciones \mathbb{R} -lineales de \mathbb{R} en \mathbb{R} son múltiplos de la identidad) e intentar encontrar propiedades básicas que deben cumplir estas funciones, lo que nos fue dando un marco para poder sospechar su existencia y construirlas en forma teórica. Una vez dilucidado el tema de la existencia, tratamos de caracterizarlas y luego, de entender algunas de sus propiedades. Por ejemplo, nos enfocamos en el análisis de la continuidad. Finalmente, nos abocamos a las soluciones que propone el álgebra lineal y a generalizar el problema.

Se podría pensar que resolver este problema es más fácil en \mathbb{R} que en dimensiones mayores. Sin embargo, si conseguimos una tal $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la función $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $F(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$ también satisface lo pedido, con lo cual, por ejemplo, podremos encontrar $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F^2(x) = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$ (que obviamente no será \mathbb{R} -lineal).

Para facilitar la comunicación, pongámosle un nombre a las funciones que estamos buscando:

Notación 1.1. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **incierto** si cumple que

$$f \circ f(x) = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(o, lo que es lo mismo, si $f^2 + id_{\mathbb{R}} = 0$).

Si el lector llegó hasta acá y nos cree, ya sabe que las funciones inciertas existen y hasta le puede sonar mal el nombre. Sin embargo, nos gustó mantener la incerteza original hasta el final (después de todo, ¿qué tiene de imaginario el número i con el que sabemos operar y de hecho lo usamos para cálculos de lo más “reales” y concretos?). Le proponemos al lector entonces un ejercicio: que se detenga aquí y se ponga a pensar por qué estamos tan seguros de la existencia de funciones inciertas, que encuentre alguna de estas funciones o que deduzca por qué razón deben existir. Probablemente, si puede contestar o avanzar en alguna de estas direcciones, aprenderá mucho más que simplemente leyendo el recorrido que nosotros hicimos.

Si, por el contrario, el lector decide continuar con la lectura, una buena política sería frenar en cada lugar en que haya un enunciado y tratar de pensarlo o demostrarlo o buscarle contraejemplos, y cada vez que aparezca un nombre o

¹El alumno era Sebastián Freyre y el docente, Juan Sabia

un tema que no conozca, intentar averiguar de qué se trata. Esta es una forma de aprendizaje que a nosotros nos sirvió y nos sigue sirviendo a lo largo de los años.

§2. Algunas propiedades inciertas

Si f es una función incierta, necesariamente cumple las siguientes propiedades, de muy fácil demostración:

- f es impar (es decir $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$): $f(-x) = f(f^2(x)) = f^2(f(x)) = -f(x)$. En particular, resulta que $f(0) = 0$.
- f es biyectiva pues su inversa es $-f = -id_{\mathbb{R}} \circ f$ ya que la composición en los dos sentidos da la identidad: $-f \circ f = -id_{\mathbb{R}} \circ f \circ f = -id_{\mathbb{R}} \circ (-id_{\mathbb{R}}) = id_{\mathbb{R}}$ y $f \circ (-f) = f \circ (-id_{\mathbb{R}}) \circ f = -id_{\mathbb{R}} \circ f \circ f = -id_{\mathbb{R}} \circ (-id_{\mathbb{R}}) = id_{\mathbb{R}}$.
- Si $f(a) = a$, $-a = f^2(a) = f(a) = a$, con lo cual $a = 0$. También, si $f(a) = -a$, $-a = f^2(a) = f(-a)$ y $-a = 0 = a$.
- Por lo anterior, si $a \neq 0$, el conjunto $\{f^i(a) / i \in \mathbb{N}_0\}$ (llamado la órbita de a por f) consta de cuatro elementos distintos: $a, f(a), f^2(a) = -a$ y $f^3(a) = f(-a)$ (notar que $f^4(a) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$).
- El conjunto de conjuntos $\{\{a, f(a), -a, f(-a)\} / a \in \mathbb{R}\}$ es una partición de \mathbb{R} que consta de conjuntos de cuatro elementos y del conjunto $\{0\}$ (recordemos que decir que un conjunto de conjuntos es una partición de A significa que ninguno es vacío, que la unión de todos da A y que los conjuntos son disjuntos dos a dos):

Lo único que falta ver para que sea una partición es que los conjuntos sean disjuntos dos a dos o, lo que es lo mismo, que si hay un elemento en la intersección de dos de ellos, los conjuntos deben ser iguales.

Supongamos que $\{a, f(a), -a, f(-a)\} \cap \{c, f(c), -c, f(-c)\} \neq \emptyset$. Esto quiere decir que $f^i(a) = f^j(c)$ para algunos $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$, pero como $f^4 = id_{\mathbb{R}}$, resulta que

$$\begin{aligned} \{a, f(a), -a, f(-a)\} &= \{f^i(a), f^{i+1}(a), f^{i+2}(a), f^{i+3}(a)\} = \\ &= \{f^j(c), f^{j+1}(c), f^{j+2}(c), f^{j+3}(c)\} = \{c, f(c), -c, f(-c)\}. \end{aligned}$$

Con estas pocas propiedades básicas, ya estamos en condiciones de comenzar a construir funciones inciertas:

Teorema 2.1. *Sea $\{(a_i, b_i)\}_{i \in I}$ una familia de pares ordenados de $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ tales que $\{a_i, b_i\}_{i \in I}$ es una colección de subconjuntos de exactamente dos elementos de $\mathbb{R}_{>0}$ que son disjuntos dos a dos y tales que $\bigcup_{i \in I} \{a_i, b_i\} = \mathbb{R}_{>0}$. Entonces la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*

definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ b_i & \text{si } x = a_i \text{ con } i \in I \\ -a_i & \text{si } x = b_i \text{ con } i \in I \\ -b_i & \text{si } x = -a_i \text{ con } i \in I \\ a_i & \text{si } x = -b_i \text{ con } i \in I \end{cases}$$

es incierta. Más aún, cualquier función incierta puede construirse de esta forma.

Demostración. Las condiciones dadas sobre los elementos a_i y b_i nos aseguran que cada real positivo forma parte de un par ordenado (ya que la unión da todo $\mathbb{R}_{>0}$) y solo de uno (ya que los conjuntos de dos elementos son disjuntos dos a dos). Esto nos indica que f está bien definida sobre los reales positivos (está definida y la definición es única). Por la misma razón, la función está bien definida para los negativos. Falta ver que $f^2(x) = -x$ para todo número real x . Esta prueba se puede hacer caso por caso:

$$\begin{aligned} f^2(0) &= f(f(0)) = f(0) = 0 \\ f^2(a_i) &= f(f(a_i)) = f(b_i) = -a_i \\ f^2(b_i) &= f(f(b_i)) = f(-a_i) = -b_i \\ f^2(-a_i) &= f(f(-a_i)) = f(-b_i) = a_i \\ f^2(-b_i) &= f(f(-b_i)) = f(a_i) = b_i \end{aligned}$$

Para probar la recíproca, sea f una función incierta y, para cada $a \neq 0$ consideremos la órbita de a , $\{a, f(a), -a, f(-a)\}$. Entonces necesariamente es verdadera una y sólo una de las siguientes condiciones:

- a y $f(a)$ son positivos, en cuyo caso tomamos el par ordenado $(a, f(a))$
- $f(a)$ y $-a$ son positivos, en cuyo caso tomamos el par ordenado $(f(a), -a)$
- $-a$ y $f(-a)$ son positivos, en cuyo caso tomamos el par ordenado $(-a, f(-a))$
- $f(-a)$ y a son positivos, en cuyo caso tomamos el par ordenado $(f(-a), a)$

Si recorremos todas las órbitas posibles, y elegimos el par ordenado indicado en cada órbita, resulta que la familia de pares ordenados elegidos cumple lo pedido. \square

§3. Las funciones inciertas existen

En el apartado anterior, vimos que dada una función incierta, le podemos asociar una familia de pares ordenados de reales positivos que cumple ciertas condiciones y que, dada una tal familia, podemos construir una función incierta. Pero, ¿existirá tal familia de pares ordenados?

Para probar su existencia, podríamos usar de la teoría de cardinalidad de Cantor que nos asegura que el siguiente resultado es cierto, pero para hacer el trabajo lo más autocontenido posible, vamos a hacer una demostración directa:

Teorema 3.1. *Existe una biyección entre $\{0, 1\} \times \mathbb{R}_{>0}$ y $\mathbb{R}_{>0}$.*

Demostración. Vamos a definir una biyección que mande

$$\begin{aligned} \{0\} \times (0; 1] &\rightarrow (0; 1] \\ \{1\} \times (0; 1] &\rightarrow (1; 2] \\ \{0\} \times (1; 2] &\rightarrow (2; 3] \\ \{1\} \times (1; 2] &\rightarrow (3; 4] \\ \{0\} \times (2; 3] &\rightarrow (4; 5] \\ \{1\} \times (2; 3] &\rightarrow (5; 6] \\ \{0\} \times (3; 4] &\rightarrow (6; 7] \\ \{1\} \times (3; 4] &\rightarrow (7; 8] \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Las biyecciones intervalo a intervalo pueden ser lineales.

La función que formalmente definimos como biyección, teniendo en cuenta que $[x]$ denota la función parte entera, es

$$\varphi(i, x) = \begin{cases} x + [x] + i & \text{si } x \notin \mathbb{N} \\ 2x - 1 + i & \text{si } x \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Esta función φ cumple las condiciones anteriores (es decir, manda biyectivamente los intervalos en los intervalos) y por lo tanto es una biyección de $\{0, 1\} \times \mathbb{R}_{>0}$ en $\mathbb{R}_{>0}$.

Si a algún lector no le convence nuestro argumento, puede verificar que la función inversa de φ es

$$\psi(x) = \begin{cases} (1, \frac{x}{2}) & \text{si } x \in \mathbb{N} \text{ es par} \\ (0, \frac{x+1}{2}) & \text{si } x \in \mathbb{N} \text{ es impar} \\ (1, x-1 - \frac{[x-1]}{2}) & \text{si } x \notin \mathbb{N}, [x] \text{ es impar} \\ (0, x - \frac{[x]}{2}) & \text{si } x \notin \mathbb{N}, [x] \text{ es par} \end{cases}$$

(verificación que, aunque tediosa, es directa). □

Teorema 3.2. *Sea $\varphi : \{0, 1\} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ una función biyectiva. Entonces la familia de pares ordenados $\{(\varphi(0, a), \varphi(1, a))\}_{a \in \mathbb{R}_{>0}}$ cumple las hipótesis del Teorema 2.1.*

Demostración. Como la función φ es suryectiva, podemos afirmar que cualquier elemento de $\mathbb{R}_{>0}$ va a ser alguna coordenada de algún par ordenado de la familia

y, por lo tanto, la unión de los conjuntos de dos elementos formados por las coordenadas darán $\mathbb{R}_{>0}$. El hecho de ser φ inyectiva, nos asegura que ningún elemento puede aparecer en más de un par ordenado (de lo contrario habría dos elementos de $\{0, 1\} \times \mathbb{R}_{>0}$ con la misma imagen) por lo que los conjuntos asociados de dos elementos son disjuntos. Esto demuestra lo pedido. \square

Como consecuencia de los Teoremas 2.1, 3.1 y 3.2, tenemos probada la existencia de funciones inciertas. Más aún, notemos que cualquier función incierta puede asociarse unívocamente a una biyección $\varphi : \{0, 1\} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$.

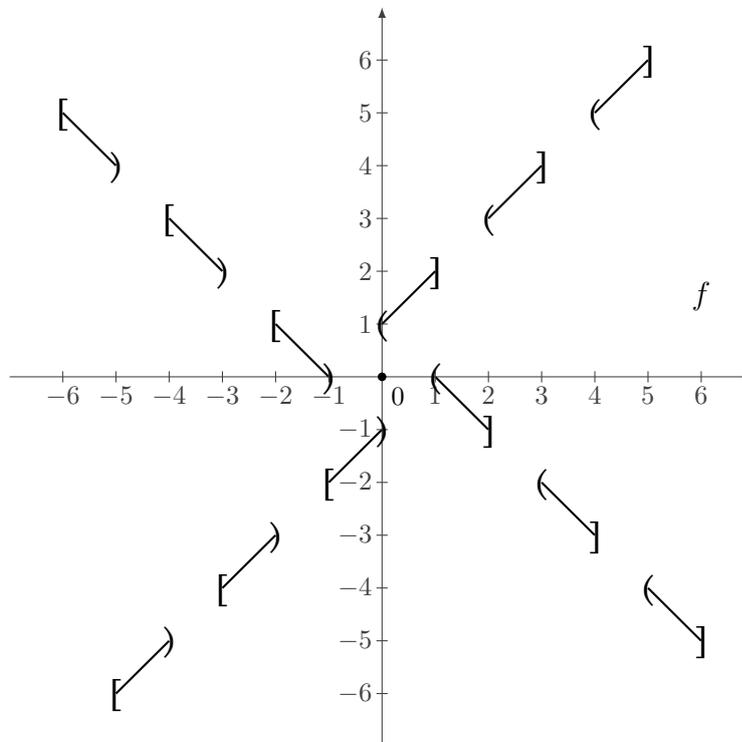
Para terminar esta sección, vamos a mostrar explícitamente una función incierta (de hecho, esta función incierta es la asociada a la biyección definida en el Teorema 3.1) :

Ejemplo 3.3. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

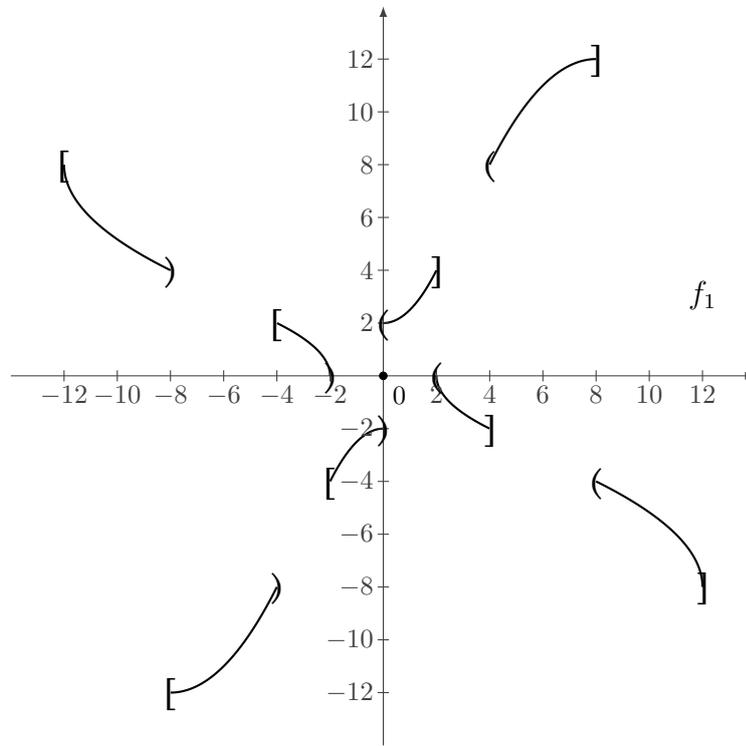
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x + 1 & \text{si } 2k < x \leq 2k + 1 \ (k \in \mathbb{Z}, k \geq 0) \\ -x + 1 & \text{si } 2k + 1 < x \leq 2k + 2 \ (k \in \mathbb{Z}, k \geq 0) \\ x - 1 & \text{si } 2k - 1 \leq x < 2k \ (k \in \mathbb{Z}, k \leq 0) \\ -x - 1 & \text{si } 2k - 2 \leq x < 2k - 1 \ (k \in \mathbb{Z}, k \leq 0) \end{cases}$$

cumple que $f^2 = -id_{\mathbb{R}}$.

Un gráfico aproximado de f sería:



Notar que hemos tomado funciones lineales como biyecciones entre intervalos, pero cualquier otra biyección que se nos ocurra va a servir. También hemos tomado intervalos de longitud 1, pero la longitud puede ser cualquiera y ni siquiera debe estar fija para todos los intervalos:



Ya hemos probado que las funciones inciertas existen, caracterizamos cómo son en términos de conjuntos de pares ordenados de números reales asociados a una biyección de $\{0, 1\} \times \mathbb{R}_{>0}$ en $\mathbb{R}_{>0}$ y dimos la definición de una función incierta en particular. Sin embargo, podemos seguir preguntándonos...

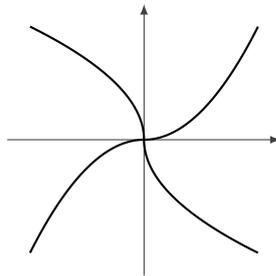
§4. Continuidad de las funciones inciertas

Las funciones inciertas que mostramos explícitamente tienen infinitas discontinuidades. ¿Será este siempre el caso? Vayamos paso a paso, con algunas observaciones previas.

Si f es incierta, entonces:

- El gráfico de f , $\text{Graf}(f) = \{(a, f(a)) \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$, es invariante por la rotación antihoraria de ángulo $\frac{\pi}{2}$: Si $(a, b) \in \text{Graf}(f)$, $(b, -a) \in \text{Graf}(f)$, $(-a, -b) \in \text{Graf}(f)$ y $(-b, a) \in \text{Graf}(f)$.
- f no puede ser continua en ningún intervalo que contenga al 0. Supongamos que f es continua en el intervalo $[0; a)$ con $a > 0$. Como es biyectiva, debe ser estrictamente monótona (creciente o decreciente) en $[0; a)$. Geométricamente,

la invariancia del gráfico de f por la rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ implicaría que, cerca del origen, el gráfico de f sería del estilo:



lo que es absurdo. (Puede hacerse una demostración más formal de este hecho, pero la dejamos a cargo del lector al que no le gusten las demostraciones gráficas.)

- Si f es continua en un intervalo $[a; b]$ y $x \in (a; b)$, f es continua en $f(x)$:
 Como $f : [a; b] \rightarrow f([a; b])$ es continua y biyectiva, debe ser estrictamente monótona. Supongamos que es creciente (si no, tomamos $-f$ que también es incierta, y hacemos un razonamiento análogo). Resulta entonces que $f : [a; b] \rightarrow [f(a); f(b)]$ es creciente y biyectiva, por lo que resulta abierta (ya que f de cualquier subintervalo abierto de $[a; b]$ es un subintervalo abierto de $[f(a); f(b)]$). Entonces, la función inversa de f , $f^{-1} : [f(a); f(b)] \rightarrow [a; b]$ es continua y en particular es continua en $f(x)$. Pero $f^{-1} = -f$ ya que f es incierta, luego f es continua en $f(x)$.
 En particular, podemos deducir que si f es continua en un intervalo abierto I , f resulta continua en el intervalo abierto $f(I)$, en $f(f(I)) = -I$ y en $f(-I)$.
- Si f es continua en el intervalo abierto I , los intervalos I , $f(I)$, $-I$ y $f(-I)$ resultan disjuntos dos a dos:
 Podemos observar que $0 \notin I$ y que $0 \notin f(I)$, pues f es continua en I y en $f(I)$. Luego todos los elementos de I tienen el mismo signo entre sí y todos los elementos de $f(I)$ también tienen el mismo signo entre sí. Si $x \in I \cap f(I)$, los elementos de I y los de $f(I)$ tienen el mismo signo (el de x) y existe un $y \in I$ tal que $x = f(y)$. Entonces $y \in I$, $f(y) = x \in I \cap f(I)$ y $f(x) = f(f(y)) = -y \in f(I)$ tienen el mismo signo, lo que es absurdo. Teniendo en cuenta que cada intervalo de la lista es f aplicado al anterior, y que $f(f(-I)) = I$ se prueba fácilmente que los intervalos son disjuntos dos a dos.
- Si f tiene finitas discontinuidades y es discontinua en x , entonces es discontinua en $f(x)$, en $-x$ y en $f(-x)$: Si f fuese continua en $f(x)$, el hecho de tener finitas discontinuidades asegura que f es continua en un intervalo cerrado que contiene a $f(x)$, entonces f es continua en $f(f(x)) = -x$, y por el mismo razonamiento, es continua en $f(-x)$ y en $f(f(-x)) = x$ lo que

contradice nuestra suposición. De la misma forma se prueba que f no es continua en $-x$ ni en $f(-x)$.

Ahora estamos en condiciones de probar:

Teorema 4.1. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es incierta, f tiene infinitas discontinuidades.*

Demostración. Supongamos que no. Sean a_1, \dots, a_r todos los valores positivos donde f es discontinua. Por lo anterior $-a_1, \dots, -a_r$ serán todos los valores negativos donde f es discontinua. Y necesariamente f será discontinua en el 0 (de lo contrario, sería continua en $(-a_1; a_1)$ lo que es absurdo). Por lo visto anteriormente, $\{a_1, \dots, a_r, -a_1, \dots, -a_r\}$ debe ser unión disjunta de órbitas con cuatro elementos cada una, con lo que $r = 2k$ para $k \in \mathbb{N}$. Esto implica que hay $4k + 2$ intervalos abiertos maximales donde f es continua. Notar que, a cada I intervalo abierto maximal donde f es continua, se le asocian $f(I)$, $-I$ y $f(-I)$ abiertos maximales donde f es continua y es fácil probar que, para dos intervalos maximales I y J donde f es continua $\{I, f(I), -I, f(-I)\} = \{J, f(J), -J, f(-J)\}$ o $\{I, f(I), -I, f(-I)\} \cap \{J, f(J), -J, f(-J)\} = \emptyset$. Por lo tanto, la cantidad de abiertos maximales donde f es continua debe ser múltiplo de 4 y esto lleva a una contradicción. \square

Como último ejemplo para esta sección, mostramos una función incierta continua en el cero. En este caso, usamos la teoría de los cardinales de Cantor para asegurar la existencia de biyecciones entre un intervalo de \mathbb{R} y un subconjunto no numerable de \mathbb{R}^2 :

Ejemplo 4.2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se considera una biyección*

$$g_n : \left[\frac{1}{n}; \frac{1}{n-1} \right) \rightarrow \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y \neq 0, |(x, y)| \in \left[\frac{1}{n}; \frac{1}{n-1} \right) \right\}$$

(si $n = 1$, el intervalo considerado es $[1, +\infty)$). Sea $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \cdot y \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$ la función

$$G(x) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } x = 0 \\ g_n(x) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}; \frac{1}{n-1} \right) \quad (n \in \mathbb{N}) \\ -g_n(x) & \text{si } -x \in \left[\frac{1}{n}; \frac{1}{n-1} \right) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(Notar que G resulta biyectiva y continua en el 0.) Sea $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotación en sentido antihorario de ángulo $\frac{\pi}{2}$. Entonces $f = G^{-1} \circ \rho \circ G$ es una función incierta continua en el 0.

§5. Un poco de álgebra

Hasta ahora, nos ocupamos fundamentalmente de la existencia y de las condiciones de continuidad de las funciones inciertas. Ahora, vamos a comentar algunas consideraciones algebraicas sobre estas funciones. La primera pregunta que nos hicimos es si habrá alguna función incierta aditiva. Notemos que una función aditiva de \mathbb{R} en \mathbb{R} resulta ser una transformación \mathbb{Q} -lineal. Por lo tanto, bastará definirla en una base de \mathbb{R} como \mathbb{Q} -espacio vectorial. Una idea similar a la del Teorema 2.1 nos permite contestar esta pregunta.

Proposición 5.1. *Sea $\{(a_i, b_i)\}_{i \in I}$ una familia de pares ordenados de \mathbb{R}^2 tales que $\{a_i, b_i\}_{i \in I}$ es una colección de subconjuntos de exactamente dos elementos de \mathbb{R} que son disjuntos dos a dos y tales que $B = \bigcup_{i \in I} \{a_i, b_i\}$ es una base de \mathbb{R} como \mathbb{Q} -espacio vectorial. Entonces la transformación \mathbb{Q} -lineal $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre B como*

$$f(x) = \begin{cases} b_i & \text{si } x = a_i \text{ con } i \in I \\ -a_i & \text{si } x = b_i \text{ con } i \in I \end{cases}$$

es incierta.

Demostración. La transformación \mathbb{Q} -lineal f existe y es única por estar definida en una base de \mathbb{R} como \mathbb{Q} -espacio vectorial. Por otra parte, $f^2(x) = -x$ para todo $x \in B$, luego $f^2 = -id_{\mathbb{R}}$. \square

Para probar la existencia de la familia de pares ordenados deseada, se puede partir de una base B cualquiera de \mathbb{R} como \mathbb{Q} -espacio vectorial. Teniendo en cuenta que el cardinal de B y el cardinal de $\{0, 1\} \times B$ son iguales (propiedad cierta para todo conjunto infinito), se puede aplicar una idea similar a la del Teorema 3.2 aunque sin una biyección explícita en este caso.

Más aún, puede probarse que cualquier transformación f \mathbb{Q} -lineal incierta proviene de esta construcción. La idea de una posible demostración, que usa herramientas un poco más sofisticadas, es la siguiente: dada f , se consideran los conjuntos $\{a_i\}_{i \in I}$ de elementos de \mathbb{R} que cumplen que $\{a_i\}_{i \in I} \cup \{f(a_i)\}_{i \in I}$ son conjuntos de elementos de \mathbb{R} linealmente independientes. Por el lema de Zorn, estos conjuntos, ordenados por inclusión, admiten un elemento maximal y dicho elemento necesariamente resulta ser una base de \mathbb{R} como \mathbb{Q} -espacio vectorial.

Observación 5.2. *Las transformaciones lineales inciertas nos permiten pensar a \mathbb{R} con otra estructura. Recordemos que el conjunto $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ resulta ser un cuerpo con la suma y el producto usuales de los números complejos. Si f una función incierta puede probarse fácilmente que \mathbb{R} es un $\mathbb{Q}[i]$ -espacio vectorial con la suma usual de elementos de \mathbb{R} y con el producto por escalares definido por:*

$$(a + bi).r = a.r + b.f(r) \quad (a, b \in \mathbb{Q}, r \in \mathbb{R}).$$

Más aún, si \mathbb{R} tiene una estructura de $\mathbb{Q}[i]$ -espacio vectorial, entonces $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(r) = i.r \quad (r \in \mathbb{R})$$

resulta ser una función incierta.

Más en general, con herramientas básicas del álgebra lineal e ideas similares a las usadas para las funciones inciertas, puede demostrarse el siguiente resultado:

Teorema 5.3. Sea $P = X^n + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j X^j \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio mónico. Existen transformaciones \mathbb{Q} -lineales $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $P(f) = 0$.

Demostración. Sea $\{a_{i1}, \dots, a_{in}\}_{i \in I}$ una partición de una base B de \mathbb{R} como \mathbb{Q} -espacio vectorial. Definimos la transformación lineal $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en los elementos de B , para cada $i \in I$, de la siguiente manera:

$$f(a_{ik}) = \begin{cases} a_{i(k+1)} & \text{si } k < n \\ -\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j a_{ij+1} & \text{si } k = n \end{cases}$$

Si, para cada $i \in I$, $\langle a_{i1}, \dots, a_{in} \rangle$ denota el subespacio generado por los elementos a_{i1}, \dots, a_{in} y tomamos la restricción de f a este subespacio, resulta ser que la matriz de la restricción de f en la base $\{a_{i1}, \dots, a_{in}\}$ es la matriz compañera del polinomio P que tiene por característico al polinomio P . Usando el Teorema de Hamilton-Cayley, se tiene que $P(f) : \langle a_{i1}, \dots, a_{in} \rangle \rightarrow \langle a_{i1}, \dots, a_{in} \rangle$ es la transformación lineal nula para todo $i \in I$. Por lo tanto, $P(f)$ es la transformación lineal nula en una base de \mathbb{R} como \mathbb{Q} -espacio vectorial y, por lo tanto, $P(f) = 0$. \square

Como en el caso de las transformaciones lineales inciertas, podría probarse que, si ξ es una raíz de un polinomio irreducible mónico $P \in \mathbb{Q}[X]$, una transformación lineal $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $P(f) = 0$ le da una estructura a \mathbb{R} de $\mathbb{Q}[\xi]$ -espacio vectorial.

§6. Conclusiones

La idea de este trabajo fue mostrar algunos caminos (conocidos o no) que fuimos transitando a medida que aparecían nuevas preguntas sobre ciertas funciones reales. Nos gustaría que también sirva para que el lector (si a esta altura queda alguno) siga haciéndose preguntas (interesantes o no, fáciles o no, “útiles” o no) sobre estos (u otros) temas. Después de todo, creemos que de esta forma se va construyendo el conocimiento matemático.

Para consultar (o ahondar) en algunos temas que se tocaron en este trabajo, sugerimos la siguiente bibliografía. (Apostol, 1999) es un libro excelente para aprender y consultar sobre temas de análisis en una variable. La teoría de cardinalidad de Cantor puede leerse en el primer capítulo de (Kolmogorov y Fomin, 1975). Los temas de álgebra lineal pueden encontrarse en (Hoffman y

Kunze, 1971) y otros temas de álgebra mencionados pueden buscarse en (Lang, 2002).

Bibliografía

Apostol, T. (1999). *Calculus I*. Barcelona: Reverté Ediciones.

Hoffman, K., y Kunze, R. (1971). *Álgebra Lineal*. México: Prentice Hall Latinoamericana.

Kolmogorov, A., y Fomin, S. (1975). *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Moscú: Editorial MIR.

Lang, S. (2002). *Algebra*. Nueva York: Springer.

SEBASTIÁN FREYRE

Departamento de Ciencias Exactas, CBC, Universidad de Buenos Aires, Argentina

(✉) sfreyre@cbc.uba.ar

JUAN SABIA

Departamento de Ciencias Exactas, CBC, Universidad de Buenos Aires, Argentina

IMAS, CONICET-UBA, Argentina

(✉) jsabia@dm.uba.ar

Recibido: 26 de octubre de 2022.

Aceptado: 2 de febrero de 2023.

Publicado en línea: 27 de abril de 2023.

el triángulo de Pascal es fractal?

El triángulo de Sierpinski. Este conjunto es un famoso fractal que se puede obtener, a través de infinitas iteraciones, de diversos modos. Uno de ellos es el siguiente:

- (1) Empezamos con un triángulo $T_0 = \triangle ABC$ (con interior incluido).
- (2) Le quitamos a T_0 el interior de su triángulo central, i.e. el triángulo formado por los puntos medios de $\triangle ABC$ (así obtenemos T_1).
- (3) Repetimos el paso (2) infinitas veces con los triángulos que van quedando (así obtenemos T_{n+1} a partir de T_n para $n \in \mathbb{N}$).

El conjunto T_∞ de puntos que quedan sin quitar luego de repetir infinitas veces el proceso anterior recibe el nombre de *triángulo de Sierpinski*.

En la imagen de abajo (hecha con Geogebra) vemos T_4 , es decir los resultados obtenidos luego de haber iterado 4 veces a partir de un triángulo equilátero y de un triángulo rectángulo con vértices en los puntos $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$ en coordenadas cartesianas, respectivamente:

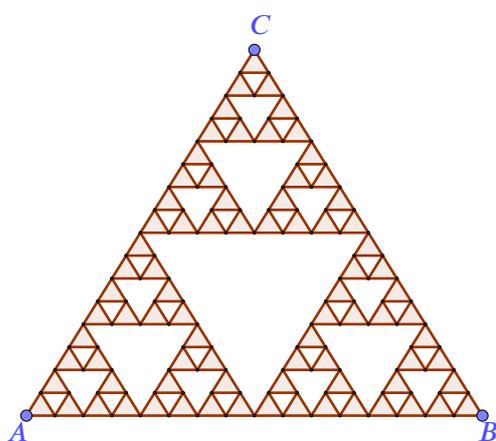


Figura 1

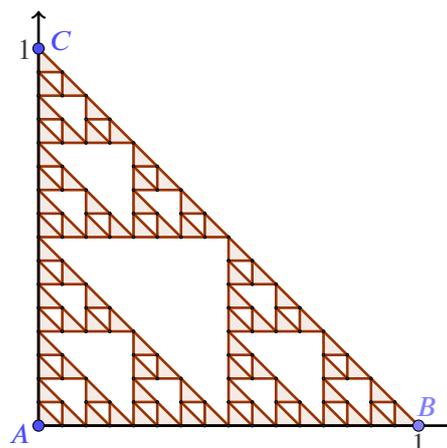


Figura 2

Usando coordenadas cartesianas y el triángulo rectángulo de la Figura 2, es sencillo describir otro método para obtener el triángulo Sierpinski:

- (1') Sea $T_0 = \triangle ABC$ rectángulo (con interior incluido) con $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$.
- (2') Sea $\frac{1}{2} \cdot T_0$ el resultado de re-escalar T_0 con factor $\frac{1}{2}$. Es decir que $\frac{1}{2} \cdot T_0$ es el triángulo rectángulo, con interior incluido, de vértices $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$. Consideramos el subconjunto T_1 de T_0 formado por 'copias' de $\frac{1}{2} \cdot T_0$ como sigue:

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot T_0 \cup \frac{1}{2} \cdot T_0 + (\frac{1}{2}, 0) \cup \frac{1}{2} \cdot T_0 + (0, \frac{1}{2}).$$

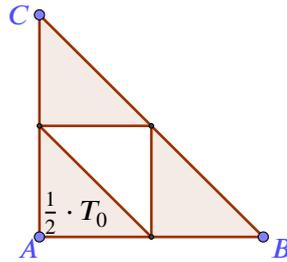


Figura 3: El conjunto T_1

(3') Repetimos el paso (2') infinitas veces, es decir que, en el n -ésimo paso definimos

$$T_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot T_n \cup \frac{1}{2} \cdot T_n + (\frac{1}{2}, 0) \cup \frac{1}{2} \cdot T_n + (0, \frac{1}{2}).$$

Resulta que $T_{n+1} \subset T_n$ y el triángulo de Sierpinski es el conjunto límite de los T_n , estrictamente hablando el triángulo de Sierpinski es

$$T_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} T_n.$$

El triángulo de Pascal. El triángulo de Pascal, también conocido como triángulo de Tartaglia, es el triángulo que forman los números combinatorios

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

con $0 \leq k \leq m$ para cada $m \in \mathbb{N}$, donde $0! = 1$. Es decir, para cada m , en la fila m -ésima ponemos los números $\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \dots, \binom{m}{m}$. Las primeras 7 filas son

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4} \\ \binom{5}{0} \binom{5}{1} \binom{5}{2} \binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5} \\ \binom{6}{0} \binom{6}{1} \binom{6}{2} \binom{6}{3} \binom{6}{4} \binom{6}{5} \binom{6}{6} \end{array}$$

Sabemos que los lados del triángulo de Pascal están formados por 1's y que el resto de los elementos de cada fila se obtienen sumando los dos vecinos de la fila que está inmediatamente arriba. A continuación vemos el triángulo de Pascal con sus valores numéricos, realizado en esquemas de triángulo equilátero y rectángulo respectivamente, en analogía con las Figuras 1 y 2.

1		1																
	1		1															
		1		2		1												
			1		3		3		1									
				1		4		6		4		1						
					1		5		10		10		5		1			
						1		6		15		20		15		6		1

1									
	1								
		1							
			1						
				1					
					1				
						1			
							1		
								1	

¿Existe alguna relación entre los triángulos que definimos? ¡Veamos que sí!

Relación entre los triángulos de Sierpinski y Pascal. Es sorprendente que si “miramos la paridad” de los números del triángulo de Pascal obtenemos el fractal del triángulo de Sierpinski. Con “mirar la paridad” nos referimos a reemplazar, en el triángulo de Pascal, los números pares por un 0 y los impares con un 1. Así, el triángulo (rectángulo) de Pascal anterior queda:

```

1
1 1
1 0 1
1 1 1 1
1 0 0 0 1
1 1 0 0 1 1
1 0 1 0 1 0 1
    
```

Como aquí hemos hecho muy pocas filas, no alcanzamos a percibir que vaya quedando el triángulo de Sierpinski, pero en la Figura 4 mostramos la paridad del triángulo de Pascal en la que están hechas las filas desde $m = 0$ hasta $m = 63$.

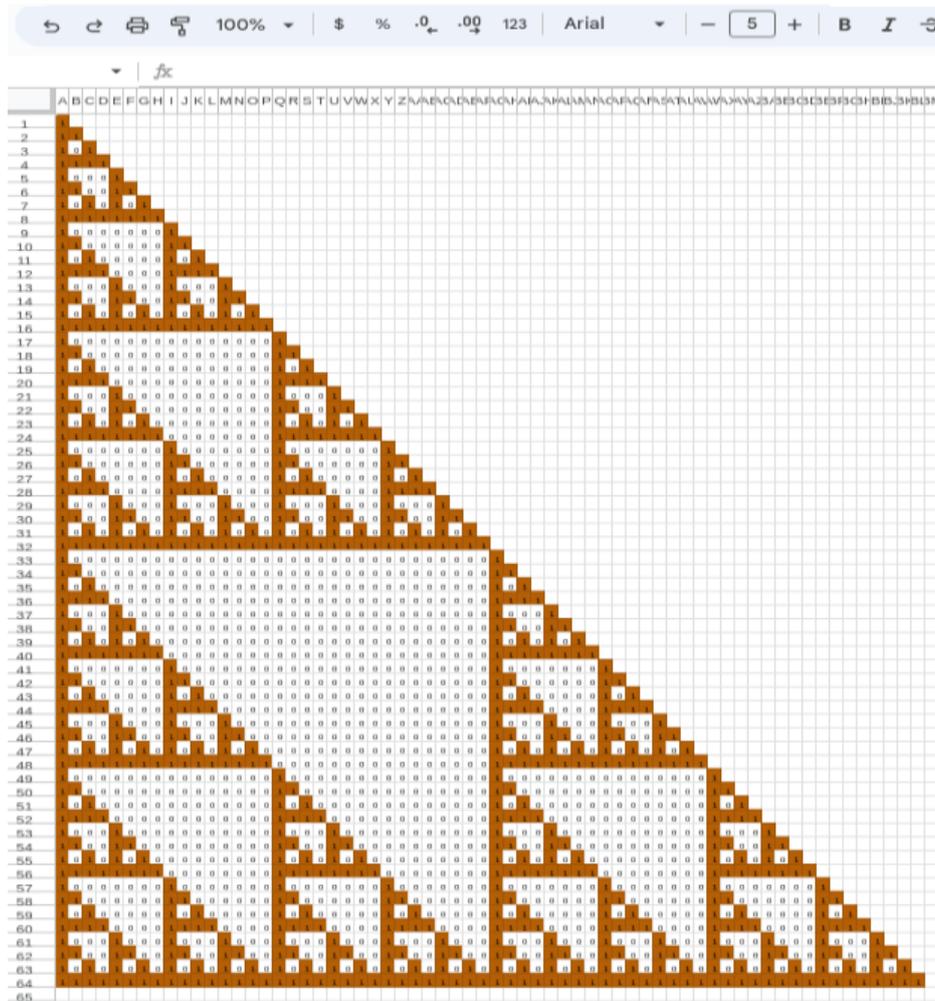


Figura 4

La Figura 4 ha sido realizada en Google Sheets. Para realizarla, los principales pasos son colocar los 1's de la primera columna. Luego escribir en la celda B2 la siguiente función

=SI (Y (ESBLANCO (A1) ;ESBLANCO (B1)) ; ;SI (ESBLANCO (B1) ; 1 ;RESIDUO (B1+A1; 2)))

y luego extender esta función automáticamente a todas las demás celdas que están a la derecha y abajo de la celda B2. Esto coloca los 1's y los 0's del triángulo, y deja en blanco las celdas a la derecha del triángulo. Luego, la coloración se realiza con "formato condicional" de celdas.

¿Cómo se explica que queden los mismos fractales? El secreto está en ¡el sistema binario! Es claro que usamos 0's y 1's en el triángulo de Pascal, pero ¿cómo aparecen en el triángulo de Sierpinski? y ¿cómo se relacionan con los 0's y 1's de Pascal? Veamos los detalles.

Triángulo de Pascal. El Teorema de Lucas dice exactamente cuándo $\binom{m}{n}$ es par en términos de las expresiones en binario de m y n . Concretamente, si

$$m = a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + \dots + a_2^2 + a_1 2^1 + a_0, \quad a_i = 0 \text{ ó } 1,$$

$$n = b_k 2^k + b_{k-1} 2^{k-1} + \dots + b_2^2 + b_1 2^1 + b_0, \quad b_i = 0 \text{ ó } 1,$$

entonces $\binom{m}{n}$ es par si y solo si $a_j = 0$ y $b_j = 1$ para algún $j = 0, \dots, k$ ¹.

En el triángulo de paridad de Pascal de la Figura 4 las filas van desde $i = 1$ hasta $i = 64$ y las columnas van desde la A hasta la BL. Por conveniencia, pensamos que las columnas van desde $j = 0$ hasta $j = 63$. En general las filas irán desde $i = 1$ hasta $i = 2^N$ y las columnas desde $j = 0$ hasta $j = 2^N - 1$, y en la celda (i, j) estará la paridad del número $\binom{i-1}{j}$.

Pero si consideramos coordenadas cartesianas (x, y) , cuyo origen está en la celda $(i, j) = (2^N, 0)$, el cambio de coordenadas es $(x, y) = (2^N - i, j)$ y por lo tanto:

La celda (x, y) tiene la paridad de

$$\binom{2^N - 1 - x}{y}.$$

Teniendo en cuenta el Teorema de Lucas y que las expresiones en binario de x y la de $2^N - 1 - x$ tienen intercambiados los 1's por los 0's, resulta que

La celda (x, y) tiene un 0

si y solo si $a_j = 1$ y $b_j = 1$ para algún $j = 0, \dots, N$ donde

$$x = a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + \dots + a_2^2 + a_1 2^1 + a_0,$$

$$y = b_k 2^k + b_{k-1} 2^{k-1} + \dots + b_2^2 + b_1 2^1 + b_0,$$

son las expresiones de x e y en binario.

¹En verdad, el Teorema de Lucas describe el resto de dividir el coeficiente binomial por p para cualquier primo p . Ver, por ejemplo, [Wikipedia](https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Lucas). Nosotros solo lo estamos usando para $p = 2$.

Triángulo de Sierpinski. Por otro lado, miremos lo que hacemos en las iteraciones (1'), (2') y (3') del triángulo de Sierpinski.

El triángulo rectángulo original es el siguiente conjunto

$$T_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \text{ y } x + y \leq 1\}.$$

Resulta que, en sistema binario, el conjunto T_0 se describe de manera muy sencilla. Recordemos que en binario

$$\frac{1}{2} = 0,1 \quad \frac{1}{4} = 0,01 \quad \frac{3}{4} = 0,11.$$

También recordemos que cuando un número tiene desarrollo binario finito, también tiene un desarrollo binario infinito debido a que

$$1 = 0,1111\dots$$

Así,

$$\frac{1}{2} = 0,01111\dots \quad \frac{1}{4} = 0,001111\dots \quad \frac{3}{4} = 0,101111\dots$$

Para describir T_0 , observemos que si expresamos a x e y en sistema binario:

$$\begin{aligned} x &= 0,a_1a_2a_3\dots, & \text{con } a_i &= 0 \text{ ó } 1, \\ y &= 0,b_1b_2b_3\dots, & \text{con } b_i &= 0 \text{ ó } 1, \end{aligned}$$

la condición $x + y \leq 1$ se traduce en que x e y tienen representación binaria tal que a_1 y b_1 no son simultáneamente iguales a 1. En efecto, si $a_1 = 1$ entonces $x \geq \frac{1}{2}$ y por lo tanto $y \leq \frac{1}{2}$. Si $y < \frac{1}{2}$ entonces $b_1 = 0$. Si $y = \frac{1}{2}$ la representación infinita de $y = \frac{1}{2}$ tiene $b_1 = 0$.

De este modo,

$$T_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x = 0,a_1a_2a_3\dots, \quad \text{con } a_i = 0 \text{ ó } 1 \\ y = 0,b_1b_2b_3\dots, \quad \text{con } b_i = 0 \text{ ó } 1 \end{array} \text{ y } a_1 = 0 \text{ ó } b_1 = 0 \right\}.$$

Ahora miremos el paso (2'). Resulta que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot T_0 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x = 0,0a_1a_2a_3\dots, \quad \text{con } a_i = 0 \text{ ó } 1 \\ y = 0,0b_1b_2b_3\dots, \quad \text{con } b_i = 0 \text{ ó } 1 \end{array} \text{ y } a_1 = 0 \text{ ó } b_1 = 0 \right\}, \\ \frac{1}{2} \cdot T_0 + \left(\frac{1}{2}, 0\right) &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x = 0,1a_1a_2a_3\dots, \quad \text{con } a_i = 0 \text{ ó } 1 \\ y = 0,0b_1b_2b_3\dots, \quad \text{con } b_i = 0 \text{ ó } 1 \end{array} \text{ y } a_1 = 0 \text{ ó } b_1 = 0 \right\}, \\ \frac{1}{2} \cdot T_0 + \left(0, \frac{1}{2}\right) &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x = 0,0a_1a_2a_3\dots, \quad \text{con } a_i = 0 \text{ ó } 1 \\ y = 0,1b_1b_2b_3\dots, \quad \text{con } b_i = 0 \text{ ó } 1 \end{array} \text{ y } a_1 = 0 \text{ ó } b_1 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

En definitiva, tenemos que

$$T_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots, \quad \text{con } a_i = 0 \text{ ó } 1 \\ y = 0, b_1 b_2 b_3 \dots, \quad \text{con } b_i = 0 \text{ ó } 1 \end{array} \text{ y } \begin{array}{l} a_1 = 0 \text{ ó } b_1 = 0 \\ y \\ a_2 = 0 \text{ ó } b_2 = 0 \end{array} \right\}.$$

Siguiendo ahora con el paso (3') obtenemos que el conjunto de Sierpinski es

$$T_\infty = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots, \quad a_i = 0 \text{ ó } 1 \\ y = 0, b_1 b_2 b_3 \dots, \quad b_i = 0 \text{ ó } 1 \end{array} \text{ y, para todo } i \geq 1, a_i = 0 \text{ ó } b_i = 0 \right\}.$$

Luego, hemos mostrado que el triángulo de paridad de Pascal y el triángulo de Sierpinski están en correspondencia y por lo tanto, podemos afirmar que el triángulo de Pascal es fractal.

Gracias al teorema de Lucas ya mencionado, para cada primo p se podría hacer lo mismo mirando triángulos de Pascal módulo p . Luego, usando los desarrollos p -ádicos de los números entre 0 y 1, se podría obtener que los triángulos de Pascal módulo p son también fractales.

Wacław Franciszek Sierpiński (14/3/1882 – 21/10/1969) fue un matemático polaco, muy conocido por sus notables aportes a la teoría de conjuntos, la teoría de números, la topología y la teoría de funciones. En teoría de conjuntos realizó importantes contribuciones para el axioma de elección y la hipótesis del continuo. Estudió la teoría de la curva que describe un camino cerrado que contiene todos los puntos interiores de un cuadrado. Publicó más de 700 trabajos y 50 libros. Tres conocidos fractales llevan su nombre: el triángulo de Sierpinski, la alfombra de Sierpinski y la curva de Sierpinski. También los números de Sierpinski en teoría de números han sido nombrados así en su honor.

Blaise Pascal (19/6/1623 – 19/8/1662) fue un matemático, físico y filósofo francés. Sus contribuciones a la matemática y a la historia natural incluyen el diseño y construcción de calculadoras mecánicas, aportes a la teoría de la probabilidad, investigaciones sobre los fluidos y la aclaración de conceptos tales como la presión y el vacío.

Entre sus descubrimientos e invenciones como científico destacan: el triángulo de Pascal, el principio de Pascal, la pascalina. La unidad de presión "pascal" lleva su nombre en honor a sus contribuciones en hidrodinámica, hidrostática y sus experimentos de la presión y el vacío con un barómetro.⁵

François Édouard Anatole Lucas (4/03/1842 – 3/10/1891), conocido como Édouard Lucas, fue un reconocido matemático francés. Trabajó en el Observatorio de París, y más tarde fue profesor de matemáticas en la capital del Sena. Se le recuerda, sobre todo, por sus trabajos acerca de la sucesión de Fibonacci, que él denominó de esa manera, y por el test de primalidad que lleva su nombre, pero también porque fue el inventor de algunos juegos recreativos matemáticos muy conocidos, como el de las Torres de Hanói.

MODELO DE CRECIMIENTO POBLACIONAL DE MORSA DEL PACÍFICO (*ODOBENUS ROSMARUS*) TRAS LA DISMINUCIÓN DEL HIELO ESTIVAL EN EL MAR DE CHUKCHI POR EL CAMBIO CLIMÁTICO

Barzola Elizagaray, Pehuén; Alberto, Marcelo Eduardo; Bageta, Carlos Rubén;
Bevaqua, Alicia; Ceconato, Adrián; Garriga, Marcela; Tirador, Marta; Nodaro,
Verónica; Enrique, Melisa; Gayá Tosoni, María Victoria

RESUMEN. El presente artículo muestra un ejemplo de trabajo interdisciplinario entre la matemática aplicada, la ecología y la docencia. En el mismo se detalla el proceso de construcción de un modelo poblacional para las morsas del Pacífico (*Odobenus rosmarus*), a partir de su información biológica y etológica, con el agregado de los efectos del cambio climático sobre su ambiente. Describimos paso a paso el razonamiento en cada etapa del modelado, realizamos una simulación del mismo con el *software* RStudio e interpretamos los resultados. Consideramos que este trabajo puede servir para ejemplificar las herramientas pedagógicas que se requieren para la enseñanza de la matemática aplicada en relación a las problemáticas ambientales del presente, permitiendo dar un sentido concreto a los resultados teóricos de la matemática.

ABSTRACT. This article provides an example of interdisciplinary work involving applied mathematics, ecology, and education. It describes the process of developing a population model for Pacific walruses (*Odobenus rosmarus*) based on biological and ethological data, as well as the effects of climate change on their environment. We describe the reasoning at each stage of the modeling step by step, then simulate it with the RStudio software and interpret the results. We believe that this work can serve as an example of the pedagogical tools required for the teaching of applied mathematics in relation to current environmental problems, allowing theoretical mathematical results to be given concrete meaning.

Palabras clave: Biomatemática, sistema de ecuaciones en diferencias, matemática aplicada, simulación.

Keywords: Biomathematics, difference equation system, applied mathematics, simulation.

§1. Introducción

En la actualidad la solución de problemas complejos exige el abordaje interdisciplinario de los mismos, el cual cobra especial relevancia cuando se trata de cuestiones ambientales. No basta con que se trabajen los problemas desde diversas disciplinas como compartimentos, sino que éstas deben dialogar entre sí y construir las soluciones en forma conjunta.

Una de las temáticas que aborda la Matemática Aplicada, en interacción con la Ecología de Poblaciones, es el crecimiento poblacional de especies que se ven afectadas por el cambio climático, a fin de predecir estadios futuros, encontrar posibles equilibrios dinámicos y aportar herramientas para el manejo de los recursos naturales y el ambiente.

En este trabajo mostramos, a partir de un caso particular, cómo se puede llevar adelante este proceso de diálogo e interacción entre estas disciplinas para dar por resultado un modelo matemático; finalmente justificamos las distintas decisiones que se toman a la hora de su construcción y evaluamos los resultados de la simulación en términos del problema original.

La idea disparadora surgió de los doctores Fernando Córdova-Lepe, Ricardo Castro-Santis y Nelson Velázquez-Soto y de lo trabajado en clase durante el curso-taller que dictaron en mayo de 2019 en la Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad Nacional de Cuyo denominado: “*Elementos de Ecología y Matemática para el modelamiento de sistemas biológicos*”. En el mismo, nos instaron a construir un modelo que explicara el crecimiento poblacional de una especie de morsas del estrecho de Bering, teniendo en cuenta sus ciclos migratorios y los efectos del cambio climático en dicho ecosistema.

Para ello, partimos de un video documental de diez minutos, seleccionado por los docentes, realizamos una revisión bibliográfica de la especie y un estudio del ciclo de vida, comportamiento alimenticio, reproductivo y migratorio de la población. Decidimos generar un modelo discreto que permitiera una interpretación y predicción más razonable de acuerdo a los modos de vida de esta especie. Nuestro modelo refleja, por tanto, la influencia particular de cada fase del ciclo anual de migración de la especie sobre el tamaño poblacional al año siguiente (año $k + 1$ en función del año k). A continuación, mostramos el camino que seguimos para construirlo.

§2. Información sobre la especie

La Morsa del Pacífico (*Odobenus rosmarus*) es una especie crítica del ecosistema beringio, tanto por su rol trófico como por la dependencia que tienen de ella las comunidades de Siberia, Alaska, el mar de Chukchi y el de Bering. Entender los cambios en su distribución, abundancia y ciclo de vida resulta urgente para

entender las consecuencias que se empiezan a manifestar en la región debido al cambio climático (Krupnik y Ray, 2007).

Se trata de una especie migratoria que habita típicamente la interfaz hielo-agua del océano Ártico. Junto con los avances y retrocesos de los hielos, las morsas alternan estacionalmente entre el mar de Bering en invierno, al Sur del estrecho del mismo nombre, y el mar de Chukchi en el verano, al Norte (Figura 1). Se alimenta de la fauna bentónica de las plataformas continentales. Los individuos viven entre 30-40 años, poseen un ciclo migratorio anual y su periodo de gestación dura aproximadamente 15 meses (Fay, 1982).

2.1. Situación histórica

En invierno (de diciembre a marzo) la población se encuentra en los bordes helados del mar de Bering, la isla St. Lawrence, la bahía de Bristol (al suroeste de Alaska) y las costas continentales del golfo de Anadyr (Fay, 1982). En esta estación se produce el apareamiento de forma panmíctica, comportándose como una única población (Garlich-Miller y cols., 2011; MacCracken, 2012).

Durante la primavera (de abril a junio), los hielos del mar se van derritiendo y comienza la migración hacia el Norte por el estrecho de Bering. Durante la misma, tiene lugar el nacimiento de las nuevas crías, las cuales se mantienen junto a sus madres durante al menos dos años (Fay, 1982).

Las morsas se separan para pasar el verano (de junio a noviembre) en hordas que pueden ir de cerca de una centena de individuos a varios miles. Mientras que las hembras y juveniles viajan al Norte a través del estrecho de Bering utilizando las plataformas de hielo que se van resquebrajando, los machos migran hacia las costas continentales al Norte del estrecho: la península de Chukotka (al oeste del estrecho), Alaska o la isla de Wrangel; o bien permanecen en las costas al Sur del mismo (Fay, 1982; Fay y cols., 1984). Las hembras y juveniles habitan preferentemente los témpanos y hielos marinos de la plataforma continental, que utilizan para descansar y salir a buscar alimento. Esta separación durante el verano asegura la máxima disponibilidad de alimento y el resguardo de las crías que se ven afectadas por los amontonamientos en las playas (Fay, 1982; Krupnik y Ray, 2007).

Finalmente, hacia fines del verano y principios de otoño, mientras el mar se va cubriendo de hielo nuevamente, comienzan las migraciones hacia el Sur de todos los individuos. Debido a que no hay pariciones, esta migración es mucho más rápida que la de primavera.

2.2. Situación actual

En las últimas décadas se han registrado modificaciones en las dinámicas de los hielos del Ártico debido al cambio climático (Jay y cols., 2012). La cobertura de hielo flotante durante el verano ha disminuido más de un 20 % (Figura 2) y las

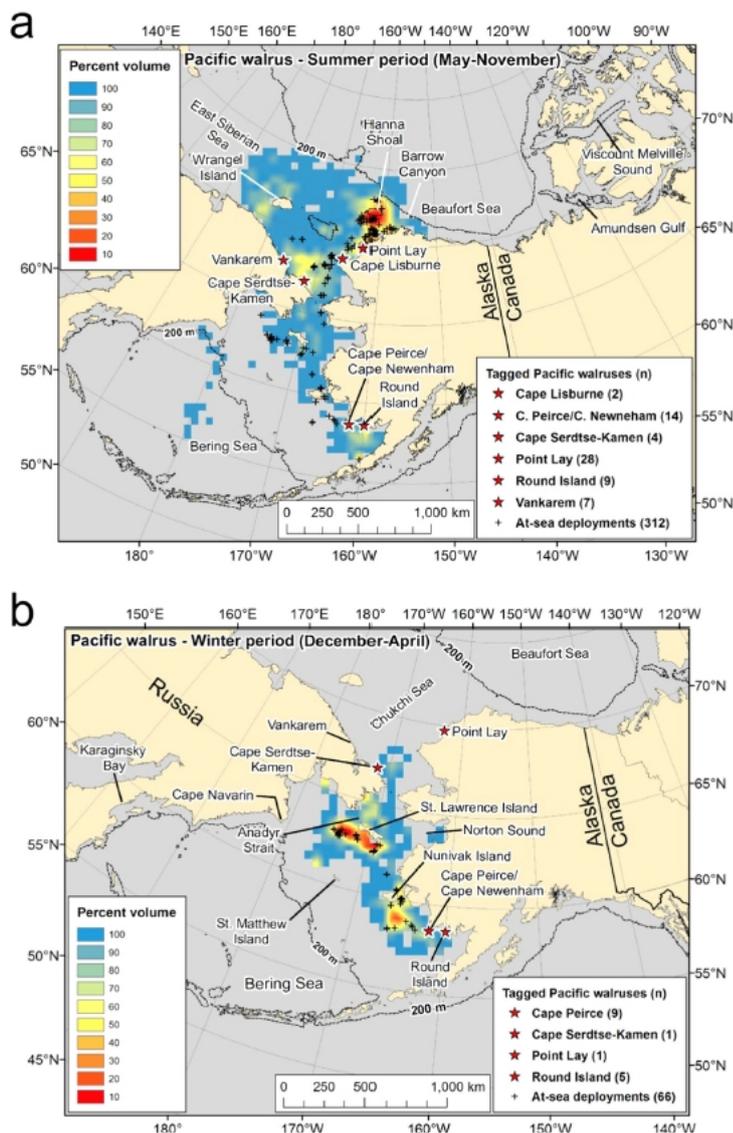


FIGURA 1. Distribución de Morsa del Pacífico con marcadores satelitales durante (a) periodo mayo-noviembre y (b) periodo diciembre-abril. Se indican las locaciones donde se marcaron las morsas p(estrellas) y cuántas brindaron datos de presencia en cada estación. Fuente: (Citta y cols., 2018)

proyecciones muestran que continuará disminuyendo en más de un 50 % hacia fines de este siglo (ACIA, 2004).

Con la disminución del hielo flotante los patrones migratorios de las morsas y el hábitat disponible han cambiado. Es probable que juveniles y hembras empiecen a ocupar cada vez más las costas continentales junto con los machos para descansar y alimentarse durante el verano (Jay y cols., 2012). Esto lleva a un aumento de la mortandad intraespecífica de todos los individuos; por un lado, por el incremento de la competencia por alimentos y por otro, de juveniles especialmente, ya que son

más propensos a morir aplastados en los amontonamientos que se producen en las costas. Estas hordas pueden llegar a tener entre algunos miles hasta varias decenas de miles de individuos, muchas veces encimados unos a otros (MacCracken, 2012).

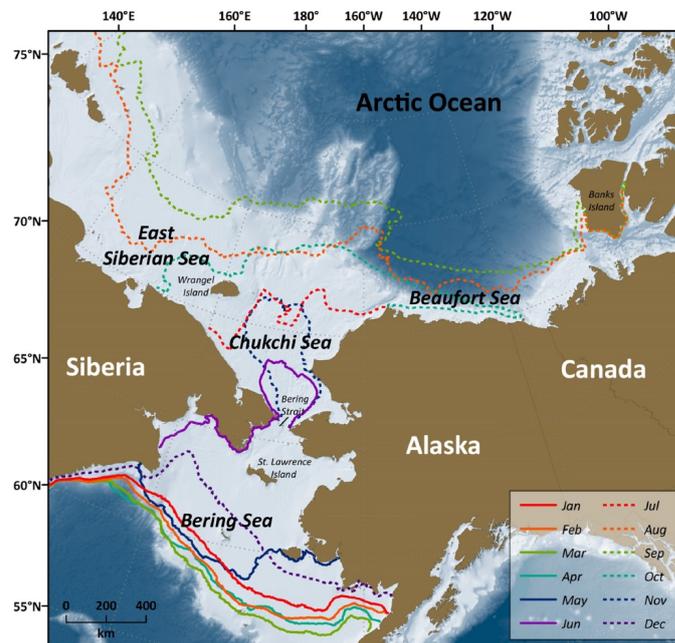


FIGURA 2. Hábitat de la Morsa del Pacífico. Las líneas indican el borde del hielo marino (promedio con límite de concentración de 15 %, satélite AMSR-E), de 2003 a 2011 (ene-sep) y de 2003 a 2010 (oct-dic). Fuente: (Frey y cols., 2015).

§3. Consideraciones preliminares para el modelo

Asumimos un tiempo discreto, teniendo en cuenta el carácter anual del ciclo migratorio, y consideramos cuatro etapas durante las cuales la población de morsas se mueve, en términos generales, como una unidad. Es decir, asumimos que toda la población de morsas se encuentra en una sola de las cuatro posiciones, según la estación del año. En invierno: la estadía en el Sur, en primavera: la migración al Norte, en verano: la estadía en el Norte y en otoño, la migración al Sur. Si bien la duración de cada etapa no coincide exactamente con la de las estaciones, simplificamos el modelo en este sentido.

Para simbolizar el ciclo y la etapa consideramos un tiempo donde k marca el ciclo (año). En invierno, el k es entero, en primavera se considera $k + 0,25$, en verano, $k + 0,5$ y en otoño, $k + 0,75$ y en el invierno siguiente $k + 1$, etc. En cada $k + 1$ el modelo computa el recuento de la abundancia poblacional en el intervalo entre las etapas estacionales (Figura 3).



FIGURA 3. Esquema de cada etapa en la vida de la morsa. **Fuente:** Elaboración propia.

En la etapa reproductiva (invierno) se produce un cambio estructural en la población debido al reclutamiento, ya que una fracción del grupo juvenil se incorpora a los adultos reproductivos (hembras o machos). La tasa de reclutamiento se diferencia entre los sexos, teniendo en cuenta que los tiempos de madurez son diferentes para machos (15 años) y hembras (4-7 años) (Fay, 1982). Si p y q son las tasas a las que las crías recién nacidas alcanzan la madurez sexual para machos y hembras adultos, respectivamente, las consideramos inversamente proporcionales al número de años en que se demoran en hacerlo. Esta tasa también debiera ser afectada por la proporción de crías que nacen de uno y otro sexo. Según lo que sugiere la bibliografía, lo asumimos $\frac{1}{2}$ para cada uno (Udevitz y cols., 2013).

En la etapa de migración al Norte (primavera) se verifican los nacimientos de la población, por lo que el cambio en la población se verifica en la abundancia. Como las morsas tienen un periodo de gestación de aproximadamente un año, con tres meses de retraso (Fay, 1982), los nacimientos en el k -ésimo año dependen de la interacción entre los machos y hembras del año $k - 1$. Esta última característica le confiere a nuestro modelo un retardo.

Durante la estadía en el Norte (verano) toda la población sufre las consecuencias del hacinamiento, para esto se optó por una curva de mortandad Holling tipo III para los adultos. Como la mortandad en los juveniles es la más sensible, se le asigna una curva Holling tipo II, que refleja un aumento más pronunciado a bajas densidades poblacionales (Fernández-Arhex y Corley, 2004).

Finalmente, durante la migración al Sur (otoño) las hordas vuelven adelantándose al congelamiento de las aguas árticas y se dirigen a las plataformas continentales meridionales del estrecho. Esta migración es más rápida y menos accidentada debido a que no ocurren pariciones.

En cuanto al tamaño poblacional que soporta el ecosistema beringio, los estudios sugieren que, en condiciones históricas y sin el impacto de la pesca, los mares de Chukchi y Bering soportan alrededor de 250000 – 300000 morsas, a pesar de que no se conoce que estos datos históricos correspondan con una capacidad de carga real del sitio. No obstante, este número ha disminuido desde 1980 y en 2006 se registraron un total de 129000 morsas (Speckman y cols., 2011; MacCracken, 2012). Con ello suponemos que, salvo por las restricciones ambientales debidas al descongelamiento de los casquetes flotantes, la población podría crecer mucho más por encontrarse a la mitad de valor históricos registrados. La mayor competencia

por el alimento, no se debe a la disminución de éste en el mar, sino al solapamiento de nichos de machos y hembras durante la temporada estival, lo cual afecta su tasa de supervivencia.

§4. Construcción del modelo

La población total de morsas (N) es igual a la suma de las poblaciones de machos adultos (M), hembras adultas (H) e individuos juveniles sin distinción de sexo (J), lo que nos da la primera ecuación:

$$(4.1) \quad N = M + H + J.$$

Cada año y cada comienzo de etapa (Figura 3) se colocan como subíndice a los valores poblacionales N , M , H y J . Propusimos ecuaciones para el modelo discreto en que la población de M , H y J , para cada k de la Figura 3 depende de la fase anterior. De atrás hacia adelante, son las siguientes: Para el instante $k + 1$ (instante en que se vuelve de la migración al Sur), al no producirse aumentos poblacionales durante este periodo, consideramos que la población de esta etapa es simplemente una proporción de los individuos que comenzaron la migración en el instante $k + 0,75$, de manera que

$$(4.2) \quad M_{k+1} = s_o M_{k+0,75},$$

$$(4.3) \quad H_{k+1} = s_o H_{k+0,75},$$

$$(4.4) \quad J_{k+1} = s_o J_{k+0,75},$$

donde s_o es la tasa de supervivencia durante el otoño y toma valores entre 0 y 1. Para simplificar y ante la falta de información al respecto, consideramos esta tasa de supervivencia igual para las tres subpoblaciones.

Para el instante $k + 0,75$ (previo al inicio de la migración al Sur, pero posterior a la estadía estival), consideramos que los individuos presentes en este momento son aquellos que sobreviven al momento de alimentación en otoño, durante el cual existe una competencia intraespecífica importante, sobre todo considerando el hacinamiento provocado por la ausencia de hielo flotante. Como bajo estas condiciones, toda la población veranea en el mismo hábitat en lugar de separarse machos por un lado y hembras y juveniles por otro, debe modelarse considerando todos los individuos de la población, por lo que incorporamos la variable N a la función correspondiente.

No usamos la misma función mortandad por hacinamiento durante el otoño para adultos y juveniles, ya que la bibliografía sugiere que éstos últimos se ven más afectados por el mismo. Para representar esto, utilizamos una curva Holling tipo III para los adultos $\left(\frac{N^2}{N^2+a^2}\right)$ y una Holling tipo II para los juveniles $\left(\frac{N}{N+a}\right)$ (Fernández-Arhex y Corley, 2004). La primera curva implica un aumento escaso

a valores pequeños de N , y sólo comienza a ser significativo cuando ésta es muy grande; en cambio, la segunda muestra un crecimiento significativo incluso a valores pequeños de N . Como en el modelo no representamos la mortandad sino la sobrevida, la Holling elegida se resta de 1:

$$(4.5) \quad M_{k+0,75} = \left(1 - \frac{N_{k+0,5}^2}{N_{k+0,5}^2 + a^2}\right) \cdot M_{k+0,5},$$

$$(4.6) \quad H_{k+0,75} = \left(1 - \frac{H_{k+0,5}^2}{H_{k+0,5}^2 + a^2}\right) \cdot H_{k+0,5},$$

$$(4.7) \quad J_{k+0,75} = \left(1 - \frac{N_{k+0,5}}{N_{k+0,5} + a}\right) \cdot J_{k+0,5}.$$

Cabe aclarar que estas ecuaciones modelan la situación actual, con cambio climático (sección 2.2). Al realizar las simulaciones del apartado 6, decidimos comparar la situación análoga, por lo que modificamos estas ecuaciones de manera que se represente la escisión de la población que se verifica en la situación histórica (sección 2.1). En ese caso, sustituimos N por M en la ecuación (4.5) y por $H + J$ en la ecuación (4.6) y (4.7).

Para el instante $k + 0,5$ (momento de llegada luego de la migración al Norte) ocurre algo similar que para $k + 1$, donde observamos una tasa de supervivencia de los individuos en el periodo de migración. Pero, además, este momento registra los nacimientos de nuevos individuos, que se incorporan a la subpoblación de juveniles. Estos se agregan en la ecuación (4.10) y se consideran como proporcionales a los encuentros entre machos y hembras adultos del año previo (durante el cual se produjeron los apareamientos). Este término que introducimos, le incorpora al modelo un retardo de grado 1.

$$(4.8) \quad M_{k+0,5} = s_P M_{k+0,25},$$

$$(4.9) \quad H_{k+0,5} = s_P H_{k+0,25},$$

$$(4.10) \quad J_{k+0,5} = s_P J_{k+0,25} + b M_{k-1} H_{k-1}.$$

Donde s_P es la tasa de supervivencia durante primavera y toma valores entre 0 y 1. Debido a las pariciones, esta migración es más lenta que la anterior, por lo que s_P se considera menor a s_0 . Por su parte, b es la tasa de encuentros exitosos entre M y H que producen descendencia viable.

Para el instante $k + 0,25$ (previo a la migración al Norte, pero luego de la estadía invernal en el Sur), consideramos nuevamente una tasa de supervivencia uniforme para las tres subpoblaciones. Además, se debe considerar el proceso de reclutamiento. Para ello, consideramos que cada subpoblación de adultos incrementa su número en proporción a los juveniles que llegaron al Sur vivos

teniendo en cuenta los distintos años de maduración para hembras y machos (en la sección 3 explicamos los parámetros p y q). Este traspaso es cerrado, por lo que los individuos que ingresan a M y H son los mismos que salen de J .

$$(4.11) \quad M_{k+0,25} = s_I M_k + p J_k,$$

$$(4.12) \quad H_{k+0,25} = s_I H_k + q J_k,$$

$$(4.13) \quad J_{k+0,25} = s_I J_k - (p + q) J_k.$$

Reemplazando sucesivamente las ecuaciones de (4.5) a (4.13) en (4.2), (4.3) y (4.4) obtenemos un modelo unificado como sigue.

Primero, reemplazamos (4.11) en (4.8), luego (4.12) en (4.9) y finalmente (4.13) en (4.10):

$$(4.14) \quad M_{k+0,5} = s_P s_I M_k + s_P p J_k,$$

$$(4.15) \quad H_{k+0,5} = s_P s_I H_k + s_P q J_k,$$

$$(4.16) \quad J_{k+0,5} = s_P s_I J_k - s_P (p + q) J_k + b M_{k-1} H_{k-1}.$$

Luego, reemplazamos (4.14) en (4.5), además (4.15) en (4.6) y por último, (4.16) en (4.7):

$$(4.17) \quad M_{k+0,75} = s_o \left(1 - \frac{N_{k+0,5}^2}{N_{k+0,5}^2 + a^2} \right) (s_P s_I M_k + s_P p J_k),$$

$$(4.18) \quad H_{k+0,75} = s_o \left(1 - \frac{N_{k+0,5}^2}{N_{k+0,5}^2 + a^2} \right) (s_P s_I H_k + s_P q J_k),$$

$$(4.19) \quad J_{k+0,75} = s_o \left(1 - \frac{N_{k+0,5}}{N_{k+0,5} + a} \right) (s_P s_I J_k + s_P (p + q) J_k + b M_{k-1}).$$

En estas ecuaciones encontramos la variable $N_{k+0,5}$, pero necesitamos que todo dependa de instantes donde k es entero, para unificar los modelos. Según la ecuación (4.1), podemos escribir que

$$(4.20) \quad N_{k+0,5} = M_{k+0,5} + H_{k+0,5} + J_{k+0,5}.$$

Por lo tanto, si reemplazamos (4.14), (4.15) y (4.16) en la ecuación (4.20) nos queda que:

$$N_{k+0,5} = s_P s_I M_k + s_P p J_k + s_P s_I H_k + s_P q J_k + s_P s_I J_k + b M_{k-1} H_{k-1} - s_P (p + q) J_k.$$

Operando, resulta:

$$(4.21) \quad N_{k+0,5} = s_P s_I (M_k + H_k + J_k) + b M_{k-1} H_{k-1} = X_k.$$

A esta variable le llamaremos X_k , para distinguirla del valor $N_k = M_k + H_k + J_k$. Por lo tanto, reemplazando finalmente (4.17) en (4.2), (4.18) en (4.3) y (4.19) en (4.4), y teniendo en cuenta (4.21); obtenemos el modelo final con un sistema de

ecuaciones en diferencias con retardo:

$$(4.22) \begin{cases} M_{k+1} &= \left(1 - \frac{X_k^2}{X_k^2 + a^2}\right) (s_o s_P s_I M_k + s_o s_P p J_k), \\ H_{k+1} &= \left(1 - \frac{X_k^2}{X_k^2 + a^2}\right) (s_o s_P s_I H_k + s_o s_P q J_k), \\ J_{k+1} &= \left(1 - \frac{X_k}{X_k + a}\right) (s_o s_P s_I J_k + s_o b M_{k-1} H_{k-1} - s_o s_P (p + q) J_k), \end{cases}$$

donde $X_k = s_P s_I (M_k + H_k + J_k) + b M_{k-1} H_{k-1}$.

§5. Simulación

A partir del modelo que obtuvimos dado por (4.22), realizamos una simulación en *RStudio* (*RStudio-Team, 2022*), interfaz gráfica que trabaja sobre *R* (*R-CoreTeam, 2022*). Asignamos valores estimados a los parámetros, según diversos criterios, siguiendo las características y comportamiento de la especie, ya que no disponemos de datos diacrónicos reales de población para ajustarlos. Se fijaron como sigue:

- La semilla del modelo (valores poblacionales iniciales para comenzar la iteración) se fijó en 55000 para M y H , y en 20000 para J , debido a que, según la bibliografía, la población en 2006 se encontraba en aproximadamente 130000 individuos.
- Los parámetros s_o , s_P y s_I se fijaron en valores muy cercanos a 1: $s_o = 0,98$, $s_P = 0,963$ y $s_I = 0,973$. El modelo resulta extremadamente sensible a estos parámetros.
- El parámetro a se fijó en 1500000 para la situación sin cambio climático y en 2000000. Estos valores se establecieron arbitrariamente para la simulación. No fue posible establecer relación entre este parámetro del modelo y alguno poblacional, como no sea un múltiplo de la capacidad de carga del ambiente.
- EL parámetro b es el más difícil de estimar, debido a que no se encontró información al respecto. Tras probar la dinámica del modelo ante variaciones del mismo se fijó en $\frac{8}{1000000}$.
- Los parámetros p y q son $\frac{1}{30}$ y $\frac{1}{8}$. La tasa p se construye con el producto entre $\frac{1}{15}$ (la inversa de los años que demora en madurar un juvenil macho) y 0,5 (ya que asumimos que la mitad de juveniles que nacen son machos). De manera análoga se construye q como el producto entre 0,25 y 0,5.
- Para comparar el modelo propuesto con la situación pre cambio climático, realizamos una modificación a las ecuaciones (4.5), (4.6) y (4.7) representando la separación de machos y hembras+juveniles, con lo cual los impactos de hacinamiento en la población se vieron reducidos considerablemente. Así, en la situación sin cambio climático el coeficiente

que afecta a la población en (4.5) depende sólo de $M_{k+0,5}$, y las de (4.6) y (4.7) de $H_{k+0,5}$ y $J_{k+0,5}$.

Simulamos dos situaciones con dos escalas temporales. Por un lado, el comportamiento de la población con y sin cambio climático a corto plazo (50 años) y, por el otro, las mismas poblaciones a largo plazo (500 años), a fin de entender el punto de estabilización que predice el modelo para un t lo suficientemente grande (Figura 4).

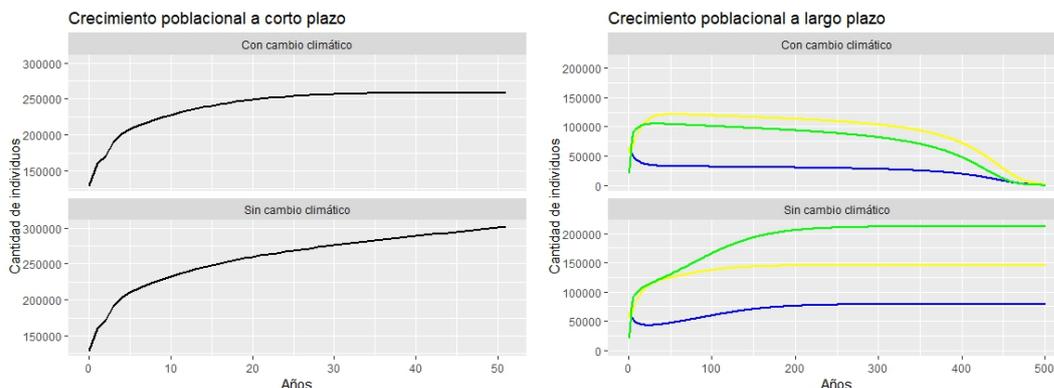


FIGURA 4. Simulación para los primeros 50 años de la población completa (a) y para los primeros 500 años de la población según clase etaria (b). Referencias: negro=total morsas, azul=machos adultos, amarillo=hembras adultas, verde=juveniles. **Fuente:** Elaboración propia en base a simulación.

Según los resultados de las simulaciones, observamos que el modelo predice un comportamiento parecido para ambas situaciones durante los primeros 50 años. Si consideramos que al año 2006 le corresponde un $k = 0$, entonces el año 2020 equivale a $k = 14$. Para ese año, el modelo con cambio climático predice unos 240000 individuos, lo que se condice con la última estimación realizada que reporta unos 283000 individuos (Beatty y cols., 2022). Sin embargo, a largo plazo el modelo predice que la población de morsas comenzará a disminuir hasta la extinción. En el escenario sin cambio climático, la población se estabilizaría en alrededor de 437000 individuos. Valor razonable, considerando los mayores valores estimados en la bibliografía. En la siguiente tabla se presentan los valores finales para 500 iteraciones del modelo.

Por otra parte, la estructura poblacional que el modelo muestra para la población también se condice con lo encontrado en la bibliografía (Beatty y cols., 2022). El modelo muestra que la población se compone de aproximadamente un 50% de juveniles y del doble de hembras que de machos.

Según estos resultados podemos decir que el modelo muestra resultados razonables respecto de lo que se encuentra en la bibliografía en cuanto a población actual, la población en capacidad de carga y la estructura etaria de la misma. Cabe

	Sin cambio climático	Con cambio climático
Machos	78934	350
Hembras	145626	1314
Juveniles	212053	56
Total	436613	1721

CUADRO 1. Tamaños poblacionales finales simulados para $k = 500$ años.

aclarar que el escenario con cambio climático solo modela la modificación en el comportamiento migratorio de la morsa durante el verano y cómo esto afecta a la competencia intraespecífica por espacio y alimento de esta especie. No considera otros factores como la pesca o las futuras modificaciones del clima que pudieran afectar a las poblaciones de las cuales se alimenta la morsa o a su propia capacidad reproductiva, por lo que es necesario suponerlas constantes para poder interpretar los resultados del mismo. Esta limitación forma parte de los recortes de la realidad de la especie, que es necesario hacer para modelar los aspectos considerados más relevantes.

§6. Conclusiones

Tras el ejercicio propuesto por los profesores, realizamos la construcción teórica de un modelo matemático para una población de morsas afectadas por el cambio climático. Al haber construido el modelo desde cero, el mismo es inédito. En este caso, se trata de un modelo discreto que predice la evolución de la población de un año para otro, teniendo en cuenta su estructura etaria y su ciclo migratorio estacional.

Las simulaciones muestran resultados coherentes, en tanto que representan los contrastes con y sin cambio climático y la tendencia actual que observan los investigadores. De continuar la situación actual, el modelo predice una disminución poblacional de morsas y su posterior extinción a largo plazo. El proceso de ajuste de parámetros teniendo en cuenta datos reales y el análisis de puntos de equilibrio y estabilidad del modelo exceden los objetivos de este trabajo, pero quedan pendientes para futuras investigaciones.

El modelo obtenido presenta gran complejidad ya que sería necesario realizar un seguimiento muy riguroso de la población durante cierto tiempo a fin de que la estimación de los parámetros presentes fuera exacta. Hecha esta salvedad, se trata de mediciones y estimaciones sencillas de realizar a campo.

Si bien se trata de un modelo teórico, sin contraste con datos reales, queríamos presentar los resultados para comunicar las líneas de trabajo en las que incursionamos. Asimismo, consideramos que constituye un ejemplo valioso para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática aplicada, que ilustra el

procedimiento que debe realizarse para la construcción interdisciplinaria de modelos matemáticos a partir de información biológica.

Bibliografía

- ACIA (Arctic Climate Impact Assessment). (2004). *Impacts of a warming arctic*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.
- Beatty, W. S., Lemons, P. R., Everett, J. P., Lewis, C. J., Taylor, R. L., Lynn, R. J., ... others (2022). Estimating pacific walrus abundance and survival with multievent mark-recapture models. *Marine Ecology Progress Series*, 697, 167–182. doi: 10.3354/meps14131
- Citta, J. J., Lowry, L. F., Quakenbush, L. T., Kelly, B. P., Fischbach, A. S., London, J. M., ... others (2018). A multi-species synthesis of satellite telemetry data in the pacific arctic (1987–2015): overlap of marine mammal distributions and core use areas. *Deep Sea Research Part II: Topical Studies in Oceanography*, 152, 132–153. doi: 10.1016/j.dsr2.2018.02.006
- Fay, F. H. (1982). Ecology and biology of the pacific walrus, *odobenus rosmarus divergens illiger*. *North American Fauna*, 74, 1–279. doi: 10.3996/nafa.74.0001
- Fay, F. H., Kelly, B. P., Gehrich, P. H., Sease, J. L., y Hoover, A. A. (1984). *Modern populations, migrations, demography, trophics, and historical status of the pacific walrus*. University of Alaska and Fairbanks Institute of Marine Science.
- Fernández-Arhex, V., y Corley, J. C. (2004). La respuesta funcional: una revisión y guía experimental. *Ecología austral*, 14(1), 83–93.
- Frey, K. E., Moore, G., Cooper, L. W., y Grebmeier, J. M. (2015). Divergent patterns of recent sea ice cover across the bering, chukchi, and beaufort seas of the pacific arctic region. *Progress in Oceanography*, 136, 32–49. doi: 10.1016/j.pocean.2015.05.009
- Garlich-Miller, J., MacCracken, J. G., Snyder, J., Meehan, R., Myers, M., Wilder, J. M., ... Matz, A. (2011). Status review of the pacific walrus (*odobenus rosmarus divergens*). *US Fish and Wildlife Service*.
- Jay, C. V., Fischbach, A. S., y Kochnev, A. A. (2012). Walrus areas of use in the chukchi sea during sparse sea ice cover. *Marine Ecology Progress Series*, 468, 1–13. doi: 10.3354/meps10057
- Krupnik, I., y Ray, G. C. (2007). Pacific walruses, indigenous hunters, and climate change: bridging scientific and indigenous knowledge. *Deep sea research part II: topical studies in oceanography*, 54, 2946–2957. doi: 10.1016/j.dsr2.2007.08.011
- MacCracken, J. G. (2012). Pacific walrus and climate change: observations and predictions. *Ecology and evolution*, 2(8), 2072–2090. doi: 10.1002/ece3.317
- R-CoreTeam. (2022). *R: A language and environment for statistical computing*. Descargado de <https://www.R-project.org/>

- RStudio-Team. (2022). *RStudio: Integrated development for R, version 2022.7.1.554*.
Descargado de <http://www.rstudio.com/>
- Speckman, S. G., Chernook, V. I., Burn, D. M., Udevitz, M. S., Kochnev, A. A., Vasilev, A., ... Benter, R. B. (2011). Results and evaluation of a survey to estimate pacific walrus population size, 2006. *Marine Mammal Science*, 27(3), 514–553. doi: 10.1111/j.1748-7692.2010.00419.x
- Udevitz, M. S., Taylor, R. L., Garlich-Miller, J. L., Quakenbush, L. T., y Snyder, J. A. (2013). Potential population-level effects of increased haulout-related mortality of pacific walrus calves. *Polar Biology*, 36, 291–298. doi: 10.1007/s00300-012-1259-3

PEHUÉN BARZOLA ELIZAGARAY

Cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias (FCA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUIYO); Instituto Interdisciplinario de Ciencias Básicas, CONICET/UNCUIYO

(✉) pehuen.be@gmail.com

MARCELO EDUARDO ALBERTO

Cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias (FCA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUIYO); Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UNCUIYO

(✉) malberto@fca.uncu.edu.ar

CARLOS RUBÉN BAGETA

Cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias (FCA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUIYO)

(✉) sichar@gmail.com

ALICIA BEVAQUA

Cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias (FCA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUIYO); Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UNCUIYO

(✉) aliciabevaqua@gmail.com

ADRIAN CECCONATO

Cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias (FCA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUIYO); Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UNCUIYO

(✉) ajcecconato@gmail.com

MARCELA GARRIGA

Cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias (FCA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUIYO)

(✉) marcegarriga@gmail.com

MARTA TIRADOR

Cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias (FCA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUIYO)

(✉) marta.etirador@gmail.com

VERÓNICA NODARO

Cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias (FCA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUIYO)

(✉) nodaro.vero@gmail.com

MELISA ENRIQUE

Cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias (FCA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUIYO); Estudiante

de Ingeniería en Recursos Naturales Renovables, FCA, UNCUYO

(✉) *melienrique24@gmail.com*

MARÍA VICTORIA GAYÁ TOSONI

Cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias (FCA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUYO); Estudiante de Ingeniería en Recursos Naturales Renovables, FCA, UNCUYO

(✉) *mvgayatosoni@gmail.com*

Recibido: 6 de junio de 2022.

Aceptado: 24 de noviembre de 2022.

Publicado en línea: 27 de abril de 2023.

RAÍCES DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

Eduardo Degiorgio, Guillermo Farías

RESUMEN. El objetivo de este trabajo es obtener una fórmula general para hallar las raíces de funciones como

$$f(x) = k \operatorname{sen}(a(x - c)) + b, \quad g(x) = k \operatorname{cos}(a(x - c)) + b,$$

para diferentes valores de a , b , c y k . Para ello se comienza hallando, para cada una de las funciones, una raíz x_R y la abscisa x_M de un punto máximo adyacente a x_R . A partir de la distancia entre estos dos valores y del período de la función se determinan todas las demás raíces.

ABSTRACT. The aim of this work is to obtain a general formula for the roots of functions of the type

$$f(x) = k \sin(a(x - c)) + b, \quad g(x) = k \cos(a(x - c)) + b,$$

for different values of a , b , c and k . We start finding, for each one of the given functions, a root x_R and the abscise x_M of a maximum point which is adjacent of x_R . From the distance between these two values and the period of the function, all the other roots are determined.

Introducción

Hallar las raíces de una función H es uno de los problemas más antiguos de la Matemática, y significa encontrar los valores de x para los que $H(x) = 0$. Gráficamente, equivale a determinar la abscisa de cada punto de intersección de la gráfica de H con el eje $y = 0$.

La importancia de encontrar las raíces de una función se debe a que estas aparecen con mucha frecuencia en la resolución de problemas pertenecientes a diversas ramas de la Matemática, como el cálculo, el álgebra o las ecuaciones diferenciales, entre otras.

Siempre que se pueda, resulta útil contar con una fórmula que permita obtener explícitamente todas las raíces de una función. Por fórmula *explícita* se entiende a toda aquella que permita calcular las raíces de la función a partir

Palabras clave: Raíces de una función, seno, coseno.

Keywords: Roots of a function, sine, cosine.

de expresiones que involucren solamente a los coeficientes y/o parámetros de la función. Este es el caso de la resolvente para funciones cuadráticas donde, a partir de la función inversa de $h: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida como $h(x) = x^2$, se pueden determinar explícitamente las raíces reales de cualquier otra función cuadrática. Más precisamente, si $H(x) = ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$) tiene raíces reales, están dadas por

$$x = \frac{-b \pm h^{-1}(b^2 - 4ac)}{2a}.$$

Dado el éxito conseguido con la función cuadrática, es natural preguntarse si algo similar ocurre con funciones polinomiales de grado mayor que 2. De manera más formal, es natural plantearse si siempre es posible calcular las raíces de funciones polinomiales mediante radicales, es decir, con fórmulas en las que se utilizan solamente los coeficientes de los polinomios junto a las operaciones de suma, resta, producto y división, y las inversas de las funciones $p(x) = x^n$ para $n = 2, 3, \dots$

Para el caso de raíces reales de polinomios cúbicos hay una respuesta afirmativa y fue proporcionada por Cardano quien, mediante hábiles manipulaciones algebraicas, consigue reducir el caso cúbico al cuadrático (no obstante, no toda raíz real de una función cúbica se obtiene con la fórmula de Cardano, lo que llevó a Cardano a formularse una pregunta muy interesante para la época: ¿cuántas raíces tiene una ecuación cúbica?). Adaptando las técnicas de Cardano, su alumno Ferrari consigue una fórmula para determinar raíces de polinomios de grado 4, reduciendo el problema a encontrar raíces de un polinomio de grado 3.

Sin embargo, no es posible seguir con esta idea para polinomios de grado 5 o más. Más precisamente, Ruffini, y posteriormente Abel, establecen que no es posible hallar una fórmula para las raíces de una ecuación polinómica *general* de grado mayor o igual que 5, mediante una cantidad finita de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíces de los coeficientes (una descripción detallada sobre el desarrollo de la teoría de ecuaciones polinómicas puede verse en (Tignol, 2016)). Así, por ejemplo, las inversas de $p(x) = x^n$ ($n = 2, 3, \dots$) junto a las operaciones de suma, resta, producto y división, no son suficientes para dar una fórmula en términos de los coeficientes para todas las raíces de un polinomio general de grado 5.

El objetivo de este trabajo es probar que es posible hallar una fórmula para una familia de funciones que se obtiene al modificar

$$F(t) = \text{sen}(t) \quad \text{y} \quad G(t) = \text{cos}(t).$$

Concretamente, obtendremos una fórmula general para determinar todas las raíces de funciones de la forma

$$(1) \quad f(x) = k \text{sen}(a(x - c)) + b \quad \text{y} \quad g(x) = k \text{cos}(a(x - c)) + b,$$

para diferentes valores de a , b , c y k (siendo a y k distintos de cero), en términos de las funciones inversas de F y G , respectivamente.

Recordemos que la función $F(t) = \text{sen}(t)$ representa la variación de la ordenada de un punto Q situado en el círculo unitario centrado en el origen de coordenadas, en función de su ángulo t medido en radianes (ver Figura 1). Por otra parte, la función $G(t) = \text{cos}(t)$ representa la variación de la abscisa del punto en función de su ángulo t .

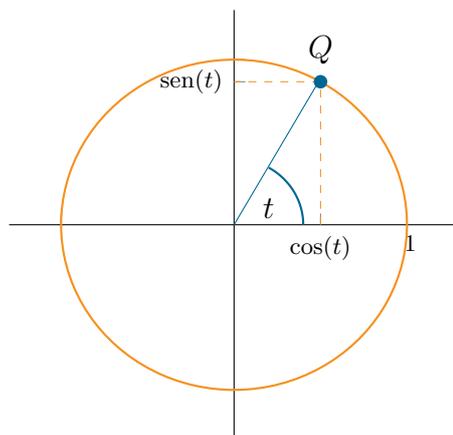


FIGURA 1. Ángulo t determinado por un punto Q ; $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$.

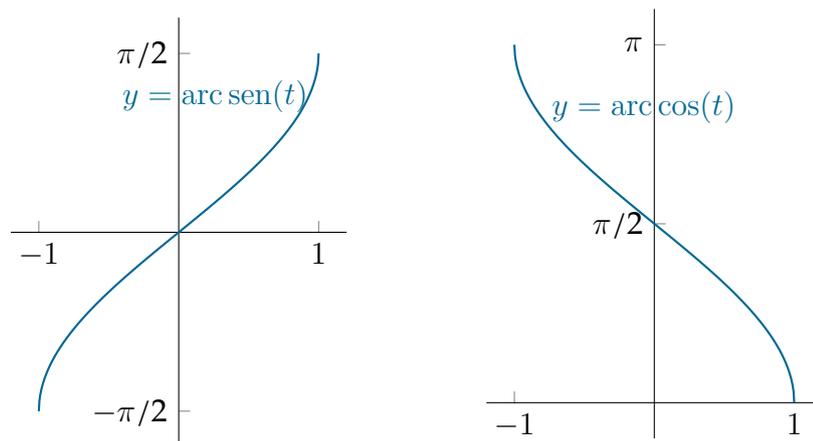
De la definición de F y G se deducen algunas propiedades muy conocidas que nos resultará útil recordar aquí:

- Si el punto Q parte de la posición $t = 0$, entonces Q dará una “vuelta completa” en sentido antihorario cuando t sea 2π . Es decir, en ese momento vuelve a su posición inicial, por lo que $F(0) = F(2\pi)$ y $G(0) = G(2\pi)$ y, así, los valores comenzarán a repetirse de forma periódica a medida que Q recorra el círculo, sin importar cuántas vueltas haya dado. En otras palabras, ambas funciones tienen período 2π : $F(x + 2\pi n) = F(x)$ y $G(x + 2\pi n) = G(x)$ para todo entero n .
- Antes que comience la segunda vuelta, la ordenada de Q habrá tomado dos veces el valor cero: cuando $t = 0$ y cuando $t = \pi$. Estos valores son las únicas dos raíces de F en $[0, 2\pi)$, y podremos obtener todas las raíces de F sumando múltiplos enteros del período a cada una de ellas.
- Similarmente, la abscisa de Q vale cero dos veces antes de comenzar la segunda vuelta: cuando $t = \frac{\pi}{2}$ y cuando $t = \frac{3\pi}{2}$. Como antes, obtendremos todas las raíces de G sumando a estos valores múltiplos enteros del período 2π .
- La imagen de ambas funciones es, claramente, el intervalo $[-1, 1]$.

El hecho de ser periódicas hace que no sean inyectivas si consideramos a todos los reales como su dominio. Sin embargo, sí lo serán si restringimos

adecuadamente el dominio de cada una. Precisamente, un punto Q sobre el círculo unitario recorre todas alturas diferentes cuando su ángulo pertenece al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, mientras que las abscisas no se repiten si el ángulo va desde 0 a π . Así, con el fin de que resulten biyectivas y disponer de sus funciones inversas, consideramos $F: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ y $G: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$.

La función inversa de F se denomina *arcoseno* y se denota como \arcsen , por lo que su dominio es el intervalo $[-1, 1]$ y su imagen es $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Similarmente, la función inversa de G se llama *arcocoseno* y se indica como \arccos , su dominio es el intervalo $[-1, 1]$ y su imagen es $[0, \pi]$.



Volviendo a las funciones f y g dadas en (1), cada uno de los parámetros involucrados produce un efecto sobre la gráfica de las funciones F y G :

- a modifica el período, el cual es $P = \frac{2\pi}{|a|}$,
- b produce un desplazamiento vertical,
- c produce un desplazamiento horizontal,
- k modifica la amplitud.

En la Figura 2 se puede ver la gráfica de f para los valores $a = 2, b = 3, c = 1$ y $k = 4$.

Como el objetivo es hallar raíces de f y g , lo primero que debemos hacer es asegurarnos de que existan. Para ello se deben analizar los valores posibles de los parámetros a, b, c y k . Notar que a y c no influyen en el hecho de que estas funciones tengan o no raíces, ya que modifican sus gráficas solo en sentido horizontal: a dilata o contrae en dicho sentido según si su valor absoluto es menor o mayor que 1, mientras que c desplaza hacia izquierda o derecha. Quienes sí resultan determinantes para la existencia de raíces son los parámetros b y k .

El teorema de Bolzano del valor intermedio establece que si una función continua toma en los extremos de un intervalo $[u, v]$ valores de signo opuesto, entonces la función admite, al menos, una raíz en dicho intervalo. Así, sabiendo

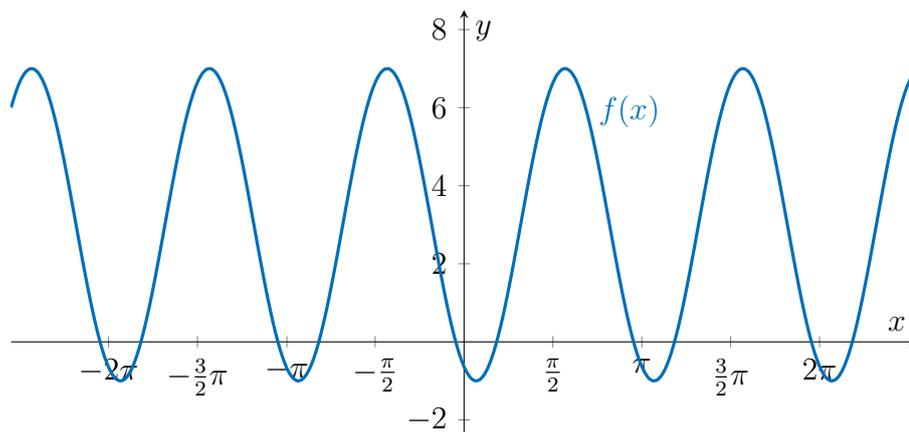


FIGURA 2. Gráfica de $f(x) = 4 \operatorname{sen}(2(x - 1)) + 3$.

que estamos trabajando con funciones continuas, para que f tenga raíces debe ocurrir que su máximo sea mayor o igual que cero y que su mínimo sea menor o igual que cero. En otras palabras, no queremos que la gráfica quede completamente por arriba del eje horizontal, ni tampoco completamente por abajo, para que existan raíces. Esto se consigue con la relación

$$|b| \leq |k|,$$

es decir, $-|k| \leq b \leq |k|$. Esta desigualdad se deduce del hecho que, si $k > 0$, entonces

$$-k + b \leq k \operatorname{sen}(a(x - c)) + b \leq k + b,$$

mientras que

$$-k + b \geq k \operatorname{sen}(a(x - c)) + b \geq k + b$$

cuando $k < 0$. Así, en cualquiera de los casos, el máximo es $M = |k| + b$ y el mínimo es $m = -|k| + b$, porque la función seno toman valores entre -1 y 1 . Lo mismo vale para g . Queremos $M \geq 0$ y $m \leq 0$, lo cual equivale a $-|k| \leq b \leq |k|$. Así, el teorema del valor intermedio garantiza la existencia de raíces.

Cuando no hay desplazamiento vertical, es decir, cuando $b = 0$, es suficiente con hallar una sola raíz, y las demás se determinan fácilmente a partir de ella y el período P , sumando múltiplos enteros de $\frac{P}{2}$ (esto es, $\frac{n\pi}{|a|}$ con $n \in \mathbb{Z}$). El problema surge cuando $b \neq 0$ ya que esto no funciona debido a que, al desplazar verticalmente la gráfica, la distancia entre dos raíces consecutivas deja de ser igual a $\frac{P}{2}$. Sin embargo, lo que no modifica b es el hecho de que dentro de cada intervalo de longitud menor estricta que P hay, a lo sumo, dos raíces. Así, si encontramos dos raíces x_R y x_R^* que disten menos que P , por la periodicidad de las funciones consideradas, basta con trasladar cada una de ellas para obtener todas las demás raíces.

En este trabajo proponemos calcular, primero, una raíz x_R de la función utilizando la respectiva función inversa. Luego, hallamos la abscisa x_M de un punto máximo adyacente a x_R . A partir de la distancia entre estos dos valores, se obtiene otra raíz x_R^* que resulta “vecina” a x_R , en el sentido que distan, a los sumo, $\frac{P}{2}$. Trasladando cada una de ellas mediante múltiplos enteros de P , obtenemos una fórmula para todas las raíces de las funciones f y g , en términos de los coeficientes y las funciones inversas de F y G , respectivamente.

El método

Analicemos primero el caso de f . Para hallar una raíz de la función f simplemente planteamos la ecuación

$$k \operatorname{sen}(a(x - c)) + b = 0,$$

la cual equivale a

$$\operatorname{sen}(a(x - c)) + \frac{b}{k} = 0.$$

Así, las raíces de f coinciden con las de \tilde{f} , siendo $\tilde{f}(x) = \operatorname{sen}(a(x - c)) + \frac{b}{k}$. Al resolver cualquiera de estas ecuaciones obtenemos

$$x_R = c + \frac{\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{b}{k}\right)}{a}.$$

Notar que la relación entre b y k implica que el número x_R está bien definido.

Como mencionamos en la Introducción, para el caso $b \neq 0$, no es posible obtener el resto de las raíces de \tilde{f} sumando múltiplos enteros de $\frac{P}{2}$. Para solucionar esto, proponemos comenzar hallando la abscisa de un punto máximo de \tilde{f} adyacente a x_R . Para ello recordamos que el máximo de \tilde{f} es $M = 1 + \frac{b}{k}$, y planteamos

$$\operatorname{sen}(a(x - c)) + \frac{b}{k} = 1 + \frac{b}{k}.$$

Sabiendo que $\operatorname{arc\,sen}(1) = \pi/2$, despejamos x para obtener

$$x_M = c + \frac{\pi}{2a}.$$

Para nuestro objetivo vamos a considerar la distancia d entre la raíz x_R y x_M . Supongamos, primero, que $a > 0$. Entonces $x_M > x_R$, por lo que

$$d = c + \frac{\pi}{2a} - c - \frac{\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{b}{k}\right)}{a} = \frac{\pi}{2a} - \frac{\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{b}{k}\right)}{a}.$$

La idea del método para hallar todas las raíces es:

- (i) Notar que la raíz “siguiente” a x_R (a la derecha de x_R) está a distancia d del valor que denotamos con x_M . En otras palabras, para llegar a dicha raíz hay

que “avanzar” una distancia igual a $2d$ desde x_R . Así, tenemos que

$$x_R^* = x_R + 2d = c + \frac{\pi - \arcsen\left(-\frac{b}{k}\right)}{a}.$$

(ii) Puesto que $d \leq \frac{P}{2}$, las demás raíces se obtienen sumando múltiplos enteros del período P (es decir, nP con $n \in \mathbb{Z}$) a estas dos raíces x_R y x_R^* .

Finalmente, notar que si $a < 0$ lo único que pasa es que el valor x_M queda a la izquierda de x_R (ver Figura 3). Así, la raíz “vecina” se obtiene **restando** de x_R el doble de la distancia entre x_R y x_M (que ahora es $-d$, siendo d el valor definido anteriormente), obteniendo el **mismo valor** para x_R^* pero ahora con $x_R^* < x_R$.

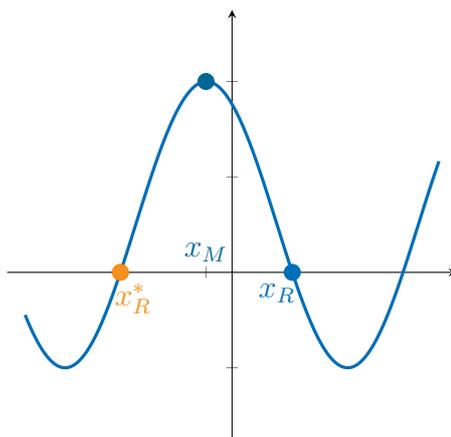


FIGURA 3. Caso $a < 0$.

Por último, para lograr una fórmula más simple para las raíces, usaremos el siguiente hecho que nos permitirá reescribir lo obtenido.

- Si n es un entero arbitrario, entonces

$$nP = \frac{2\pi n}{|a|} = \frac{2\pi \ell}{a},$$

siendo $\ell = \pm n$ según el signo de a . Es decir, múltiplos enteros de P equivalen a múltiplos enteros de $\frac{2\pi}{a}$. Esto nos permite eliminar el valor absoluto de a y operar. Así,

$$x_R + nP = c + \frac{\arcsen\left(-\frac{b}{k}\right) + 2\pi\ell}{a},$$

$$x_R^* + nP = c + \frac{\pi - \arcsen\left(-\frac{b}{k}\right) + 2\pi\ell}{a}.$$

Así, concluimos que:

Todas las raíces de la función $f(x) = k \operatorname{sen}(a(x - c)) + b$, donde a y k son distintos de cero y $-|k| \leq b \leq |k|$, se obtienen como:

$$R_\ell = c + \frac{\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{b}{k}\right) + 2\pi\ell}{a},$$

$$R_\ell^* = c + \frac{(2\ell + 1)\pi - \operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{b}{k}\right)}{a},$$

con $\ell \in \mathbb{Z}$.

Pasemos ahora al caso de g . La idea central es la misma, solamente cambian algunos valores. Aquí tenemos que

$$x_R = c + \frac{\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{b}{k}\right)}{a}, \quad x_M = c,$$

donde hemos usado que $\operatorname{arc\,cos}(1) = 0$ para determinar la abscisa x_M de un punto máximo de $\tilde{g}(x) = \cos(a(x - c)) + \frac{b}{k}$, adyacente a x_R (menor o mayor que x_R , según el signo de a).

Si $a > 0$, la distancia entre x_R y x_M es

$$d = \frac{\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{b}{k}\right)}{a},$$

ya que x_M es menor que x_R . Así, la otra raíz se obtiene restando de x_R el doble de esta distancia:

$$x_R^* = x_R - 2d = c - \frac{\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{b}{k}\right)}{a}.$$

Si $a < 0$, entonces x_M es mayor que x_R , por lo que la otra raíz se obtiene sumando a x_R el doble de la distancia entre x_R y x_M que, ahora, es $-d$, llegando al mismo valor para x_R^* . Nuevamente tenemos que $d \leq \frac{P}{2}$, por lo que las demás raíces se obtienen sumando múltiplos enteros de P a x_R y x_R^* .

Para obtener una fórmula final más simple para las raíces recordamos que, como vimos antes, múltiplos enteros de P equivalen a múltiplos enteros de $\frac{2\pi}{a}$, por lo que podemos concluir que:

Todas las raíces de la función $g(x) = k \operatorname{cos}(a(x - c)) + b$, donde a y k son distintos de cero y $-|k| \leq b \leq |k|$, se obtienen como:

$$R_\ell = c + \frac{\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{b}{k}\right) + 2\pi\ell}{a},$$

$$R_\ell^* = c + \frac{2\pi\ell - \operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{b}{k}\right)}{a},$$

con $\ell \in \mathbb{Z}$.

Haciendo clic en los siguientes códigos QR, o escaneando los mismos, se pueden observar los resultados de las fórmulas obtenidas para las raíces de f y g , respectivamente, de forma gráfica y numérica mediante GeoGebra para diferentes valores de los parámetros:



Para finalizar, presentamos casos particulares de los parámetros b y k que permiten calcular fácilmente los valores de $\arcsin\left(-\frac{b}{k}\right)$ y $\arccos\left(-\frac{b}{k}\right)$, para obtener expresiones explícitas para las raíces de las funciones correspondientes. Más precisamente, consideremos primero el caso $b = k$, es decir,

$$\bar{f}(x) = k \operatorname{sen}(a(x - c)) + k \quad \text{y} \quad \bar{g}(x) = k \operatorname{cos}(a(x - c)) + k,$$

con a y k no nulos. En este caso, puesto que $\arcsin\left(-\frac{b}{k}\right) = -\frac{\pi}{2}$ y $\arccos\left(-\frac{b}{k}\right) = \pi$, de la fórmula obtenida se puede concluir que todas las raíces de \bar{f} están dadas por

$$R_{\ell}^{\bar{f}} = c + \frac{\pi(4\ell - 1)}{2a},$$

mientras que todas las raíces de \bar{g} son

$$R_{\ell}^{\bar{g}} = c + \frac{\pi(2\ell + 1)}{a},$$

para $\ell \in \mathbb{Z}$ en ambos casos.

A su vez, cuando $b = -k$ tenemos que $\arcsin\left(-\frac{b}{k}\right) = \frac{\pi}{2}$ y $\arccos\left(-\frac{b}{k}\right) = 0$, por lo que las raíces de

$$\hat{f}(x) = k \operatorname{sen}(a(x - c)) - k \quad \text{y} \quad \hat{g}(x) = k \operatorname{cos}(a(x - c)) - k,$$

para a y k distintos de cero, son

$$R_{\ell}^{\hat{f}} = c + \frac{\pi(4\ell + 1)}{2a} \quad \text{y} \quad R_{\ell}^{\hat{g}} = c + \frac{2\pi\ell}{a},$$

con $\ell \in \mathbb{Z}$.

Agradecimientos. Los autores desean agradecer a María Eugenia Maumary y a Marilina Carena por su enorme aporte y apoyo al artículo. También se agradece al editor así como al revisor/revisora de este artículo, por su minuciosa lectura y sus detalladas sugerencias y comentarios que mejoraron mucho la calidad del trabajo.

Bibliografía

Tignol, J.-P. (2016). *Galois' theory of algebraic equations* (Second ed.). World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ.

EDUARDO DEGIORGIO

Alumno de la Escuela Industrial Superior (UNL)

(✉) degiorgioeduardo@gmail.com

GUILLERMO FARÍAS

Alumno de la Escuela Industrial Superior (UNL)

(✉) guillote369@gmail.com

Recibido: 7 de septiembre de 2022.

Aceptado: 30 de marzo de 2023.

Publicado en línea: 27 de abril de 2023.
