Revista de Educación Matemática

Registro Nacional de la Propiedad Intelectual N° 168024

ISSN 0326-8780 (versión impresa)

ISSN 1852-2890 (en línea)

Página web: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index
Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

Revista de Educación Matemática

Volumen 37, N° 3 – 2022

ÍNDICE

También encontrarás al final las *¡Sucesiones al toque!*

Nota Editorial: Una oferta que no pude rechazar

por Antonio Cafure

El 1 de febrero de 1982 se cristalizaban los deseos de gran parte de la comunidad matemática argentina: se editaba el primer número de la Revista de Educación Matemática (RevEM) de la Unión Matemática Argentina (UMA) y del, en ese entonces, Instituto de Matemática, Astronomía y Física, hoy en día, Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación de la Universidad Nacional de Córdoba. De esta manera se concretaba una idea que venía siendo considerada desde algunos años atrás y que había sido formalmente establecida en 1980 mediante un convenio firmado por Orlando Villamayor, presidente de la UMA, y Juan Tirao, vicepresidente y, a la vez, director del instituto. Sobre Cristián Sánchez, matemático cordobés, recaía la tarea de ser el director de la publicación. En su primer editorial escribió:

> *"La inquietud por crear esta revista surgió de varios puntos y es difícil en este momento hacer justicia ya que muchas personas en diversos lugares del país acariciaban esta idea e incluso hablaban de ella con entusiasmo y ánimo de realización."*

Sobre cómo Sánchez tuvo a su cargo tal responsabilidad, vale la pena seguir leyendo sus propias palabras.

> *"Todo el mundo sabe bien, que a los efectos de ser designado para la realización de una tarea, nada hay mejor que no participar de la reunión donde tal realización se discute. Esta es la mejor explicación que se me ocurre y seguro que a mucha otra gente también, para que el Presidente de la UMA me pidiera hacerme cargo de la dirección de esta revista sin darme la menor oportunidad de rechazar el honroso ofrecimiento. Sólo me resta pensar, que esto no será por mucho tiempo y que cuando esta empresa empiece a funcionar, otros verdaderamente capaces de realizar bien la tarea se avendrán a reemplazarme."*

Esa mezcla de honestidad brutal y de humor es ciertamente una clave que explica la para nada despreciable magnitud de la empresa que estaba comenzando a tomar forma. Lejos de ser una boutade, lo escrito por Sánchez manifiesta la conciencia plena que se tenía sobre lo que estaba poniéndose en marcha. Lo que Sánchez decía es que estaba comenzando una tarea que requería del involucramiento del conjunto de la comunidad matemática, porque ante las evidentes dificultades que iban a surgir, ante los vaivenes siempre esperables en el ámbito de la ciencia argentina, la única forma de encarar ese desafío era colectiva. Porque, sin dudas, es el trabajo colectivo el que pavimenta el camino que lleva a que los proyectos trasciendan, que perduren en el tiempo.

Ante la evidencia debemos rendirnos. Esa empresa iniciada hace cuarenta años sigue en pie y llega a la madurez con mucha vitalidad. La Revista de Educación Matemática, nuestra querida RevEM, cumple cuarenta años y tenemos que celebrarlo. Hacerlo es celebrarnos como comunidad, esa de la que formamos parte, esa que se nutre de nuestras pequeñas colaboraciones. Las fechas redondas son una ocasión propicia para recordar, para poner en perspectiva y valorar el trabajo, el esfuerzo y la dedicación de los que nos precedieron. Por ese motivo queremos recordar a quienes tuvieron la responsabilidad de dirigirla hasta 2016. Ya presentamos a Cristián Sánchez, el primer director. Llevó adelante esta tarea entre 1982 y 1987. Lo sucedió Oscar Brega, quién tomó la posta de la dirección entre 1987 y 1990. En 1990 tiene lugar una innovación de carácter editorial: se crea la figura del vicedirector. Así fue que hasta 1996, Roberto Miatello y Élida Ferreya fungieron como director y vicedirectora, respectivamente. Jorge Vargas tuvo a su cargo la dirección junto a Élida Ferreya como vicedirectora entre 1997 y 2005, mientras que Carina Boyalian lo acompañó entre 2006 y 2016.

Son muchas, como para nombrar en estas líneas, las personas que fueron miembros y colaboradores del equipo editorial a lo largo de los años. El apartado Historia de la Revista de la página web de la RevEM reúne sus nombres. Seguramente encontraremos una gran cantidad de conocidos. Siguiendo un estricto orden alfabético sí vamos a recordar a Nilda Gali, Luisa Gallardo, Marta García e Irma Germain. A lo largo de sucesivos años, ellas formaron parte del equipo administrativo de ReVEM y fueron pilares fundamentales al acompañar y sostener las diversas labores que una tarea de esta índole requería.

La decisión inicial contemplaba la publicación de un volumen anual con tres números. Así fue durante 1982. Sin embargo, es 2022 y publicamos el volumen 37 en lugar del 41. La década del ochenta presentó algunos obstáculos. La edición del volumen 2 tuvo una duración inusitada. Comenzó el 21 de febrero de 1983 con la publicación de su primer número. El segundo número se editó recién el 21 de mayo de 1985. En su editorial, Sánchez escribe:

> *"Varias veces hemos llegado a pensar, y quizá dolorosamente a convencernos, de que esta tarea era demasiado difícil para nosotros desde donde estamos y con los medios que tenemos. Sin embargo, otras tantas veces hemos visto renacer nuestra esperanza de continuar con la revista. En estos momentos la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad de Córdoba, que edita la revista por convenio con la Unión Matemática Argentina, ha decidido dar un mayor apoyo a la misma que asegure su continuidad y facilite una distribución eficiente."*

Finalmente, el 20 de mayo de 1986 se completa el volumen 2. La publicación del volumen 4 comenzó el 5 de febrero de 1989 y ese turbulento año marcó el inicio de la publicación ininterrumpida de la revista.

Los 111 números de la RevEM están disponibles en forma electrónica en su sitio web. Reúnen alrededor de 300 artículos con al menos 300 autores diferentes. Es una grata sorpresa recorrer los diferentes volúmenes y encontrar los nombres de grandes matemáticos y educadores matemáticos argentinos. A la vez, la calidad de los artículos publicados hacen que la revista sea un gran reservorio de conocimiento matemático, de reflexión e investigación en educación matemática, de material para la divulgación y la popularización.

A partir de 2017, la RevEM inició una política de expansión editorial con la intención de generar condiciones a largo plazo que la transformen en vehículo natural de la educación matemática argentina. Se crearon las figuras de Editor Ejecutivo, rol asumido por Leandro Cagliero, y la de Editor Asociado, a cargo de Juan Carlos Pedraza y Mónica Villarreal. El comité editorial se enriqueció con la incorporación de especialistas del campo de la educación matemática de Argentina y del extranjero. Así la revista comenzó a ser un espacio que permite que los diferentes grupos de investigación en educación matemática difundan los resultados de su producción científica. Otro hecho significativo es el ingreso a diferentes bases de datos de indexación de revistas científicas tales como Google Académico, Latindex Catálogo, Doaj, etc.

Al igual que hace cuarenta años, la Unión Matemática Argentina entiende que debe ser un actor fundamental en la educación matemática, en el desarrollo de vocaciones, que debe ocupar un rol fundamental en la vinculación de las diferentes iniciativas que se desarrollan a lo largo del país. El desafío está ahí, es colectivo, como siempre, esperando que lo enfrentemos.

El 22 de noviembre de 1982 concluía la publicación del primer volumen de la RevEM y Cristián Sánchez escribía su tercer editorial. El 20 de diciembre de 2022, terminamos de escribir estas líneas con las que celebramos cuatro décadas de la RevEM y cerramos el volumen 37. Nos despedimos adaptando a estos tiempos algunas de las palabras de Sánchez. *Como saldo positivo de estos primeros cuarenta años nos queda la satisfacción de haber sostenido la tarea y el interés despertado tanto en lectores como en autores. Aspiramos a que nuestra revista, la RevEM, perdure y sea útil.* En ese camino seguimos.

Antonio Cafure

Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento

CONICET

(✉) *acafure@campus.ungs.edu.ar*

Revista de Educación Matemática
Volumen 37, N° 3 (2022), páginas 6–32
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Investigación en Educación Matemática

IDENTIFICACIÓN DE LAS ESTRUCTURAS DE AUTORIDAD EN EL DISCURSO DEL AULA DE MATEMÁTICA: LAS PRIMERAS EXPERIENCIAS DE UN PROFESOR EN UN CONTEXTO NUEVO

David Wagner y Beth Herbel-Eisenmann[1]

Traducción de Trad. Lorena Baudo y revisada por el Consejo Editorial

Resumen. Exploramos un marco conceptual para analizar el discurso en el aula de matemática a fin de comprender cómo se ejerce la autoridad. En este estudio de caso, un profesor se traslada de una escuela donde ya es conocido a un entorno totalmente nuevo. Esta situación nos ofrece la oportunidad de explorar el uso del marco conceptual como una herramienta para comprender cómo se relacionan la práctica del lenguaje y la autoridad en el contexto de un aula de matemática. Este estudio de caso pone de manifiesto los desafíos que supone establecer la autoridad disciplinaria en un nuevo contexto y al mismo tiempo desarrollar el sentido de autoridad de los estudiantes dentro de la disciplina. Para analizar la comunicación en la clase del 12º grado[2] en la primera escuela y en la clase del 9º grado[3] a principios de año en la nueva escuela, utilizamos las cuatro categorías de posicionamiento extraídas de nuestro anterior análisis de los patrones lingüísticos dominantes en las aulas de matemática: autoridad personal, discurso como autoridad, inevitabilidad discursiva y libertad de acción personal.

Palabras clave: Profesor de matemática, Aula de matemática, Marco conceptual, Práctica del lenguaje, Estructura de autoridad.

[1] Traducido con autorización de Springer Nature: *ZDM Mathematics Education*. Identifying authority structures in mathematics classroom discourse: a case of a teacher's early experience in a new context, David Wagner & Beth Herbel-Eisenmann, 2014. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0587-x

[2] NdT: El 12° grado equivale al último año de la escuela secundaria en el sistema educativo argentino, con estudiantes cuya edad ronda los 17-18 años.

[3] NdT: El 9° grado es un nivel de la escuela secundaria – generalmente el primero en otros sistemas educativos – con estudiantes cuya edad ronda los 14-15 años.

Abstract. We explore a conceptual frame for analyzing mathematics classroom discourse to understand the way authority is at work. This case study of a teacher moving from a school where he is known to a new setting offers us the opportunity to explore the use of the conceptual frame as a tool for understanding how language practice and authority relate in a mathematics classroom. This case study illuminates the challenges of establishing disciplinary authority in a new context while also developing the students' sense of authority within the discipline. To analyze the communication in the teacher's grade 12 class in the first school and grade 9 class early in the year at the new school, we use the four categories of positioning drawn from our earlier analysis of pervasive language patterns in mathematics classrooms—personal authority, discourse as authority, discursive inevitability, and personal latitude.

Keywords: Mathematics Teacher, Mathematics Classroom, Conceptual Frame, Language Practice, Authority Structure.

§1. Introducción

El valor de verdad de las afirmaciones matemáticas[4] es indiscutible; es decir, detrás de cada afirmación existe una autoridad que confirma esa verdad, pero la autoridad no es nada sencilla en un aula de matemática. Se espera que los profesores[5] tengan autoridad y al mismo tiempo desarrollen el sentido de autoridad de sus estudiantes dentro de la disciplina de la matemática. Esta doble tarea significa un desafío para los profesores de matemática, sobre todo cuando recién empiezan en una nueva escuela o durante los primeros días de un curso. En este artículo exploramos un marco conceptual para analizar el discurso en el aula y poder entender cómo se ejerce la autoridad. En este estudio de caso, un profesor se traslada de una escuela donde ya es conocido a un entorno totalmente nuevo. Esto nos ofrece la oportunidad de explorar el uso del marco conceptual como una herramienta para comprender cómo se relacionan la práctica del lenguaje y la autoridad en el contexto de un aula de matemática.

Durante los últimos años hemos trabajado con profesores para tratar de comprender mejor los problemas que ellos y sus estudiantes asocian con la autoridad y para buscar estrategias que ayuden a gestionar estos problemas. Los grabamos en clases puntuales tanto al principio de nuestra colaboración como cuando querían prestarle atención especial a un cierto aspecto de su práctica. Uno de los profesores, Mark[6], era un docente con mucha experiencia y durante nuestra colaboración con él, comenzó a trabajar en otra escuela de su distrito escolar debido al cierre de su escuela anterior. Tanto él como nosotros coincidimos en que una

[4]NdT: El concepto de afirmaciones matemáticas y el valor de verdad respecto de ellas se desprende del original en inglés *truth claims*.
[5]NdT: Se emplea el masculino genérico plural meramente por cuestiones de concisión.
[6]Todos los nombres son ficticios.

escuela nueva sería un contexto muy oportuno para poder apreciar la manera en que un profesor de matemática estructura la autoridad en clase, ya que la autoridad de sus años de experiencia no se trasladaría al nuevo entorno. Esta situación se asemejaba mucho a la de un profesor novato de matemática quien necesitaba ganar credibilidad entre los estudiantes de la escuela, lo cual es esencial para cualquier profesor que quiera establecer estructuras de autoridad en un entorno nuevo.

En este artículo se toma un estudio de caso de la experiencia de este profesor a fin de explorar el uso de un marco conceptual para el análisis del discurso en el aula con el objetivo de comprender la forma en que se ejerce la autoridad. Utilizamos las cuatro categorías de posicionamiento extraídas de nuestro análisis anterior de los patrones lingüísticos dominantes en las aulas de matemática: *autoridad personal, discurso como autoridad, inevitabilidad discursiva y libertad de acción personal* (Herbel-Eisenmann y Wagner, 2010). El trabajo anterior se basa en el análisis de la transcripción de 148 videos de clases que nos permitió encontrar tendencias generales en un gran conjunto de datos, pero con menos profundidad en cuanto a la exploración de las categorías dentro de un contexto particular. Aquí seguimos construyendo sobre la base de ese trabajo usando este marco conceptual para llevar a cabo un análisis minucioso de las transcripciones de la experiencia de Mark en su contexto inicial y luego las transcripciones de sus primeras semanas en la escuela nueva para poder comprender cómo aparecen los problemas de autoridad y posicionamiento, y cómo este marco conceptual nos ayuda a identificar tales cuestiones. Los comentarios de Mark sobre la experiencia conectan sus intenciones con sus prácticas discursivas.

§2. La autoridad en las aulas de matemática

La autoridad es uno de los tantos recursos que emplean los profesores para establecer el control y se la define en el contexto educacional como "una relación social en la que se le concede a algunas personas la legitimidad para liderar y otras personas aceptan ese liderazgo" (Pace y Hemmings, 2007, p. 6). Esta relación es algo sumamente negociable y los estudiantes se aferran a una red de relaciones de autoridad que incluyen amigos, familia y el profesor (Amit y Fried, 2005). Las investigaciones en el área de educación sobre la autoridad del profesor suelen diferenciar distintos tipos de autoridad (por ejemplo (Amit y Fried, 2005; Pace y Hemmings, 2007)). Aquí lo más relevante es la distinción entre *ser* una autoridad por el conocimiento que uno posee sobre el contenido y *ejercer* autoridad meramente por la posición que uno ocupa (por ejemplo (Skemp, 1980)). Ser una autoridad significa que el conocimiento que uno posee es relevante en una situación. Ejercer autoridad significa que uno ocupa un puesto de poder o responsabilidad como, por ejemplo, un rol institucional. Pace (2003) demostró que estos tipos de autoridad se combinan a medida que los participantes interactúan en un aula. Oyler (1996) postuló razonamientos en contra de la idea de que la autoridad sea un recurso escaso: "si un profesor comparte la autoridad, no es como compartir una galleta en que, si se da la mitad, solo queda la otra mitad. Más bien, cuando un profesor comparte la autoridad, el poder sigue desplegándose y circulando, pero tal vez de maneras distintas (y potencialmente más encubiertas" (p. 23).

Algunas de estas maneras más encubiertas se pusieron de manifiesto en nuestro análisis cuantitativo a gran escala de los patrones lingüísticos dominantes en las aulas de matemática de secundaria (Herbel-Eisenmann y Wagner, 2010). En ese estudio, usamos un programa informático para identificar patrones dominantes del habla (es decir, "paquetes léxicos") que, según los lingüistas de corpus, son tan sutiles que incluso los analistas del discurso rara vez les dedican atención. La mayoría de los paquetes léxicos que encontramos pertenecen a una categoría llamada "paquetes léxicos de postura", que comunican "emociones personales, actitudes, juicios de valor o evaluaciones" (Biber, Conrad, y Cortes, 2004, p. 966). Los paquetes léxicos de postura se pueden identificar por rasgos gramaticales que reflejan las implicancias del posicionamiento de los participantes y se relacionan con la autoridad del profesor. Dividimos a estos paquetes léxicos de postura en categorías teniendo en cuenta las distintas formas en que ayudaron a construir las relaciones de autoridad. Las categorías abarcaron *autoridad personal, exigencias del discurso como autoridad, autoridad discursiva más sutil* y *libertad de acción personal*. En este artículo simplificaremos los nombres de nuestra segunda y tercera categorías, y nos referiremos a ellas como *discurso como autoridad* e *inevitabilidad discursiva*, respectivamente. Estas cuatro estructuras de autoridad pueden coexistir (y de hecho, lo suelen hacer) en la misma conversación. Efectivamente, nuestro análisis lo demuestra a continuación.

Ejemplos de autoridad y cambios de autoridad son comunes en el análisis de la enseñanza de matemática basada tanto en la investigación como en la reforma. Por ejemplo, la descripción de Yackel y Cobb (1996) sobre el desarrollo de las normas sociomatemáticas en un aula señaló que los estudiantes estaban "acostumbrados a apoyarse en la autoridad y el estatus para desarrollar razonamientos" (p. 467). Otros académicos han impulsado enfoques de la enseñanza de la matemática que cambian las estructuras de autoridad (por ejemplo (Skovsmose, 2001)), a veces sin referencia a la *autoridad* en sí, como Hufferd-Ackles, Fuson, y Sherin (2004), que describieron una trayectoria para ayudar a los profesores a cambiar la fuente de ideas matemáticas en sus aulas. Cuando se abandona la mirada de que "el profesor es la fuente de donde provienen todas las ideas matemáticas para adoptar una perspectiva en que las ideas de los estudiantes también provocan un impacto[...] el sentido matemático se convierte en criterio de evaluación" (p. 88).

Como la autoridad funciona tanto explicita como implícitamente, creemos que es importante desarrollar modelos conceptuales para las estructuras de autoridad, como así también herramientas complementarias para identificar dichas estructuras. El modelo conceptual que proponemos se basa en el análisis de nuestro anterior trabajo con un gran corpus analítico, el cual es muy singular dentro de la literatura por tener en cuenta las formas muy implícitas en que se interpreta la autoridad en el discurso del aula. Las características léxico-gramaticales del modelo hacen que la identificación de las estructuras de autoridad sea relativamente sistemática. En este estudio de caso describiremos las herramientas del modelo y luego exploraremos su uso en un contexto que se asemeja a la bibliografía que suele abordar la autoridad.

§3. Marco para analizar los aspectos de la autoridad en las aulas de matemática

Como se muestra en nuestro análisis cuantitativo, los paquetes léxicos más dominantes que encontramos fueron los paquetes léxicos de postura (Herbel-Eisenmann, Wagner, y Cortes, 2010), que tienen que ver con la autoridad del profesor (Herbel-Eisenmann y Wagner, 2010). Como aplicamos el conjunto de categorías que encontramos allí para explorar un nuevo cuerpo de datos, aquí entramos más en detalle sobre esas categorías.

De estos paquetes léxicos de postura, los patrones de discurso más comunes apelaban explícitamente a la *autoridad personal* del profesor y apuntaban a la expectativa de que los estudiantes siguieran la autoridad de su profesor. Esta estructura de autoridad se identificó por el uso de pronombres de primera y segunda persona juntos. Por ejemplo, "yo quiero (que tú)" y "a mí me gustaría (que tú)" tienen el pronombre de primera persona *yo* actuando como sujeto que expresa un deseo relacionado con *tú*. El posicionamiento interpersonal en las interacciones que contienen estos patrones lingüísticos sugería que el profesor actuaba como guía de los estudiantes. En este tipo de relación personal, los estudiantes cumplen los deseos de sus profesores y confían en que estos se preocupan por sus intereses. Esto se relaciona con el hecho de un profesor que está *ejerciendo* la autoridad. Los profesores ocupan una posición de responsabilidad en el aula y, por tanto, controlan todo lo que pasa ahí dentro.

A este patrón lingüístico lo pueden emplear profesores, estudiantes cuando hablan con profesores o estudiantes cuando hablan entre ellos, pero el análisis cuantitativo demostró que lo usan casi exclusivamente los profesores. Si el profesor dirige la clase de esta manera sin dar ninguna razón estaríamos en presencia de lo que (Alrø y Skovsmose, 2004) llaman *absolutismo burocrático*. En su investigación, comparan las relaciones interpersonales comunes dentro del aula con las frustraciones que provoca la burocracia, "buenas o malas razones,

razones morales, razones administrativas, razones lógicas y otras razones, todas aparecen de la misma manera” (p. 26). Alrø y Skovsmose, entre otros académicos, identificaron instancias en que los estudiantes se posicionan como profesores en diálogos con otros estudiantes (por ejemplo, p. 41). Notamos que la gramática de *autoridad personal* es un factor que suele estar presente en estas interacciones.

Otra estructura de autoridad predominante en las aulas de matemática daba a entender que había que seguir lo que dictaba la disciplina, lo cual llamamos “demandas del discurso como autoridad”, y es a lo que nos referimos aquí en términos de *discurso como autoridad*. Patrones lingüísticos que incluyen palabras como “debemos” y “necesitamos” identifican explícitamente las obligaciones por los verbos modales en inglés *necesitar* (*need to*) y *deber* (*have to*) (c.f. (Morgan, 1998)), por ende, se deben seguir las reglas. Estas reglas, que se originan fuera de las relaciones personales, pueden atribuirse a la disciplina de la matemática (o quizás a la matemática escolar). A esta disciplina la llamamos discurso. Durante la elaboración del concepto de paquete léxico de postura, notamos la importancia del sujeto en estas oraciones. Cuando uno dice “(*nosotros*) *necesitamos*” o “(*tú*) *necesitas*”, estos pronombres personales con frecuencia son generalizaciones y no se refieren a personas específicas (Herbel-Eisenmann y Wagner, 2010); c.f. (Pimm, 2019; Rowland, 1992). También notamos una conexión con el uso de *ellos* para referirse a un grupo o una entidad no especificada que potencialmente puede haber tomado alguna decisión en la matemática que deben resolver los estudiantes. Este pronombre *ellos* puede referirse a la disciplina de la matemática o a algún grupo que pueda ser tomado como representación de la disciplina (c.f. (Herbel-Eisenmann, 2009)).

Esta estructura de *discurso como autoridad* tiene que ver con lo que Pickering (1995) llamó *agencia disciplinaria*, “que nos guía mediante una serie de manipulaciones dentro de un sistema conceptual establecido” (p. 115). Identificó, asimismo, que los científicos, en cierto sentido, son “pasivos en la práctica conceptual disciplinada” (p. 115). Alrø y Skovsmose (2004) afirmaron que el absolutismo burocrático “se caracteriza por la dificultad de poder contactarse con la autoridad ‘real’” (p. 26), pero no aclararon qué es lo que deniega el acceso. Observamos que el discurso comprende un enorme colectivo de personas y que la gramática de esta estructura de autoridad oculta esta fuente y la sitúa fuera del aula.

Una tercera estructura de autoridad en las aulas de matemática comprendía un discurso que ocultaba la presencia de la autoridad, pero en el que las acciones eran predecibles, lo que denominamos “autoridad discursiva más sutil” y que aquí damos en llamar *inevitabilidad discursiva*. Esta estructura de autoridad se basa en prácticas lingüísticas que *sugiere*n inevitabilidad; lo que importa no es la probabilidad real de un acontecimiento, sino el lenguaje que sugiere inevitabilidad. Con esta estructura, no hay una referencia explícita a la obligación, sino un sentido de predeterminación. Discursos que incluyen patrones como 'vas a' y 'va a' implican que no se van a tomar decisiones. Las próximas acciones o pensamientos son inevitables. No se reconoce la autoridad de los participantes en el discurso con este tipo de inevitabilidad. Por ende, al igual que con la estructura anterior, la autoridad parecería estar de alguna manera fuera del contexto. Sin embargo, no hay una referencia explícita a la autoridad.

Esta estructura de autoridad puede ser una versión más profunda del absolutismo burocrático descrito por Alrø y Skovsmose (2004) y de la agencia disciplinaria descrita por Pickering (1995). Es más profunda porque el lenguaje oculta la presencia de una autoridad aun más que otras formas de expresar autoridad. Cuando alguien dice "(tú) tienes que", uno recuerda la presencia de una norma y, tal vez, en las personas detrás de esa norma, pero cuando alguien dice "(tú) vas a", no hay tal recordatorio. Es posible que esta estructura de autoridad respalde lo que Alrø y Skovsmose llaman la "ideología de la certeza" (p. 135). Encontramos una conexión con la identificación de Bishop (2004) de los valores en la matemática, específicamente con el valor del control: "Los 'hechos' y los algoritmos de la matemática que conocemos pueden ofrecer sensaciones de seguridad y control a los que es difícil resistirse" (p. 71). El valor del control también se vincula con la estructura de *discurso como autoridad*, pero los aspectos reconfortantes de seguridad probablemente se alinean con referencias sutiles a la previsibilidad más que a la obligación explícita.

El cuarto patrón que encontramos en las aulas de matemática sugería *libertad de acción personal*, que reconocía que los participantes en el aula podían tomar decisiones y, por tanto, tenían autoridad. Esta estructura de autoridad fue la menos común de las cuatro que encontramos en nuestro análisis cuantitativo (Herbel-Eisenmann y Wagner, 2010). Este patrón se identificó generalmente con la presencia de una pregunta. Sin embargo, nuestro análisis y la bibliografía que clasifica las preguntas nos indican que la agencia de los estudiantes solo se ve favorecida si la pregunta abre el diálogo. La distinción entre el diálogo de apertura y el de cierre está teorizada por la lingüística de la valoración (para ampliar esta distinción, véase (Wagner, 2012; Wagner y Herbel-Eisenmann, 2008; Martin y White, 2005)). Otras formas de libertad de acción personal mostraban situaciones en que alguien cambiaba de opinión. La clave de esta estructura de autoridad está en reconocer que las personas están tomando decisiones. Cambiar de opinión significa una toma de decisión. En las tres primeras estructuras de autoridad, los estudiantes y los profesores no están enmarcados como responsables de tomas de decisiones, pero en esta cuarta sí lo están.

Esta estructura de *libertad de acción personal* se relaciona con lo que Pickering (1995) llamó *agencia humana* en contraposición a la *agencia disciplinaria* descrita anteriormente. En las transcripciones utilizadas en nuestro anterior análisis

(Herbel-Eisenmann y Wagner, 2010), la mayoría de las instancias eran casos de agencia docente. Creemos que el hecho de que un profesor muestre a los estudiantes que está tomando decisiones matemáticas ya abre la puerta a que los estudiantes vean la posibilidad de que ellos también puedan hacerlo. Sin embargo, nosotros, al igual que gran parte de la bibliografía sobre educación matemática (por ejemplo, (Boaler, 2003)), intentamos promover prácticas que desarrollen la agencia del estudiante de forma más explícita. Por otra parte, Schoenfeld (1992), al tiempo que promovía lo que llamaba *autoridad interna*, señalaba lo infrecuente de su existencia entre los estudiantes, que tienen "poca idea, y mucho menos confianza, de que pueden actuar como jueces de la corrección matemática, ya sea individual o colectivamente" (p. 62). Roesken, Hannula, y Pehkonen (2011) destacaron que los estudiantes de matemática necesitan un sentido de autonomía.

La distinción entre autoridad personal y autoridad disciplinaria puede leerse en los fundamentos de la teoría del posicionamiento, particularmente en la distinción entre factores *trascendentes* e *inmanentes* en la configuración social (Wagner y Herbel-Eisenmann, 2009). La disciplina de la matemática es *trascendente*; es decir que está fuera de la experiencia y de las decisiones de las personas que participan en el discurso del aula. Esta trascendencia se evidencia en las categorías *discurso como autoridad* e *inevitabilidad discursiva* y fue identificada por otros académicos con una terminología distinta (por ejemplo, (Alrø y Skovsmose, 2004; Skovsmose, 2001). Por el contrario, las categorías *autoridad personal* y *libertad de acción personal* identifican a la autoridad dentro del aula.

§4. Contexto y datos para este estudio de caso

En 2008, comenzamos una colaboración de tres años con profesores de matemática de las Provincias atlánticas de Canadá que nos habían manifestado su interés por estudiar el papel de la autoridad en sus aulas. Tras entrevistar a cada profesor en el inicio, grabamos 15 sesiones consecutivas de las clases de matemática que cada uno había elegido. El grupo de profesores se reunió con nosotros aproximadamente una vez cada seis semanas durante la investigación. Se realizaron más grabaciones en el aula cuando querían probar cosas nuevas relacionadas con la autoridad. Además de grabar el video, también usamos grabadores de voz para captar audio más localizado de los trabajos grupales de los estudiantes. También entrevistamos periódicamente a los profesores participantes y, a veces, a estudiantes que habían estado presente en las clases grabadas.

Mark, el profesor en el que nos enfocamos aquí, contaba con 4 años y medio de experiencia en enseñanza antes de comenzar este estudio. Enseñaba todos los cursos de matemática de los grados 9 a 12 en una escuela secundaria rural con unos 150 estudiantes. Mark eligió un aula de 12º grado para realizar observaciones.

Las familias de los estudiantes tenían, en general, ingresos inferiores a la media provincial, que es incluso inferior a la media nacional. Muchos de los padres trabajaban en la industria maderera o se desplazaban entre 1 y 1,5 horas a un centro más grande para trabajar. Luego del primer año de colaboración, Mark aceptó un puesto en una escuela urbana con más de 1000 estudiantes y contextos familiares mucho más diversos. Dejó de ser el único profesor de matemática del colegio y pasó a ser uno más. Enseñó varios módulos de matemática de 9º grado y de física de 11º grado. Los estudiantes no lo conocían y él nos describió la sensación de tener que establecer su autoridad tanto matemática como de profesor que se preocupa por sus estudiantes. La situación de Mark nos proporcionó un escenario en el que pudimos explorar el caso de cómo un profesor considera y ejerce la autoridad en contextos cambiantes (es decir, de un contexto familiar en el que se sentía cómodo y establecido en una escuela pequeña a un contexto desconocido con una demografía diferente en una escuela mucho más grande) a los fines de comprender la forma en que nuestras categorías mencionadas anteriormente pueden darnos una idea de cómo funciona la autoridad.

Como es habitual en los estudios de caso, los datos y los análisis se entrelazan. Comenzamos entablando conversaciones con los profesores sobre la autoridad, luego pudimos observarlos mientras daban clases y después continuamos las conversaciones sobre sus consideraciones. Buscamos y debatimos de forma reiterada los patrones que observamos y modificamos las preguntas de las entrevistas y las observaciones según fuera necesario (Yin, 2006). Por ejemplo, advertimos que el cambio de escuela podía permitir que afloraran determinados aspectos de la autoridad, por lo que acordamos observar casi todos los días a Mark durante el inicio del ciclo lectivo. Su situación nos parece un caso interesante de un profesor que lidia con la autoridad en dos contextos distintos durante un período de tiempo.

Presentamos este estudio de caso longitudinal en secuencia cronológica (Yin, 2006). Además de nuestras descripciones de los cambios de contexto de la práctica docente de Mark, analizamos las transcripciones de su contexto más conocido, una clase de matemática de 12º grado, y de sus primeras semanas dando una clase de 9º grado en la nueva escuela. Analizamos esas transcripciones en función de las cuatro estructuras de autoridad identificadas en la sección anterior. Hicimos más que buscar paquetes léxicos que nos ayudaran a identificar estas cuatro categorías. Buscamos en la gramática patrones de habla que se parezcan a esos paquetes léxicos y también buscamos más allá de la gramática otros indicios de las estructuras de autoridad. La Tabla 1 pone en funcionamiento el marco conceptual y guía nuestro análisis de la comunicación en el aula utilizando las cuatro estructuras de autoridad.

Estructura de autoridad	**Pistas lingüísticas**	**Indicadores generales de la estructura (que puede no incluir las pistas lingüísticas particulares identificadas anteriormente)**
Autoridad personal	▪ *Yo* y *tú* en la misma oración ▪ Formas imperativas exclusivas ▪ Preguntas cerradas ▪ Respuestas al unísono	Buscar otras pruebas de que alguien sigue los deseos de otro sin una razón explícita.
Discurso como autoridad	▪ Verbos modales que sugieren necesidad (por ejemplo, *tener que* [*have to*], *necesitar* [*need to*], y *deber* [*must*])	Buscar otras pruebas de que se deben realizar determinadas acciones cuando no se identifica a ninguna persona o personas que lo exijan.
Inevitabilidad discursiva	▪ (*tú*) *vas a* / (*eso*) *va a*	Buscar otras pruebas de que las personas hablan como si supieran lo que va a pasar sin dar razones de por qué lo saben.
Libertad de acción personal	▪ Preguntas abiertas ▪ Formas imperativas inclusivas ▪ Verbos que indican un cambio de opinión (por ejemplo, *iba a*, *podría haber*) ▪ Construcciones que sugieren opciones alternativas (por ejemplo, *si quieres*, *quizá podrías/deberías*[7])	Buscar otras pruebas de que las personas son conscientes de que ellas mismas o los demás están tomando decisiones.

TABLA 1. Guía analítica para identificar estructuras de autoridad

§5. Análisis de la autoridad en medio de cambios de contexto

En la siguiente implementación de nuestro marco conceptual, primero damos información contextual a partir de lo que Mark nos expresó sobre su pensamiento acerca de la autoridad al inicio de la investigación. Luego analizamos las transcripciones de cada uno de los dos entornos escolares. Por último, detallamos la iniciativa de Mark por transformar las estructuras de autoridad en su nuevo

[7]NdT: La expresión "you might want to" empleada en el texto fuente del inglés puede traducirse también de forma más comunicativa como "es aconsejable/recomendable" o "una buena opción sería".

entorno abordando explícitamente las cuestiones de autoridad en la conversación con su clase.

5.1. Debate con Mark sobre la autoridad en su contexto conocido. En la entrevista inicial con Mark, se le preguntó sobre su rol como profesor de matemática, a lo que respondió:

> Los estudiantes te ven como su única fuente de conocimiento, muy pocos [toman] la iniciativa de ir a buscar respuestas por su cuenta. [. . .] Por ejemplo, si haces una investigación con ellos, cuando llegas al final te miran y dicen: "¿Por qué simplemente no nos dijiste eso?" [...] Son bastante reacios a aceptarse como autoridad. (Mark, primera entrevista)

La caracterización de Mark en cuanto a la estructura de autoridad en el aula de matemática coincidía con su autoridad personal. Los estudiantes confiaban en él para que los orientara. Él quería que "se aceptaran como autoridad", lo que sugería su esperanza de que mostraran libertad de acción personal. No pareció mencionar las formas en que la matemática como disciplina desempeña un rol en las relaciones de autoridad en el aula.

La conceptualización de Mark respecto de su discurso en el aula estaba bastante centrada en la autoridad y, por supuesto, estuvo condicionada por su participación en esta investigación. Cuando se le plantearon preguntas más específicas sobre la autoridad, la atención de Mark se focalizó en que sus estudiantes trabajaran en ejercicios para reforzar y aplicar las ideas que habían aprendido en sus investigaciones. A la pregunta "¿Qué o a quién ven sus estudiantes como autoridades en sus aulas?", respondió:

> No creo que busquen más allá [de nosotros, los profesores de matemática]. Sienten que nosotros deberíamos tener todas las respuestas y a lo mejor no se dan cuenta de que a veces nosotros también tenemos que ir a buscar respuestas. Así que, aunque demostremos que la autoridad se encuentra en otros lugares, como los libros de texto, otros colegas y cosas por el estilo, ellos siguen focalizados en su profesor. Su profesor es quien debe tener todas las respuestas. (Mark, primera entrevista)

Podemos inferir claramente de sus referencias espontáneas al libro de texto que se utiliza en las aulas de matemática de la provincia, que este libro es una fuente de autoridad para Mark y para los estudiantes de su clase. De hecho, todos los días que lo observamos, utilizó el libro de texto como fuente de investigaciones y también como una fuente para buscar problemas de práctica para asignar a los estudiantes.

Cuando se le preguntó qué pasaría si él no estuviera de acuerdo con el libro de texto, afirmó que a los estudiantes "les costaría creerme por encima del libro de texto". Sin embargo, recordó situaciones en las que repasó las respuestas con sus estudiantes, porque ellos estaban convencidos de que había un error en el libro de texto. No obstante, el enfoque de Mark en esta entrevista pasó del desarrollo de la comprensión a "la obtención de respuestas".

Cuando se le preguntó: "¿Cómo saben los estudiantes lo que tienen que hacer en matemática?" Mark parecía no entender la pregunta. Quizás la idea de que los estudiantes hacen lo que les dice su profesor era hegemónica para Mark y, por tanto, la pregunta no tenía sentido. Cuando focalizamos la pregunta en cómo los estudiantes deciden qué hacer cuando abordan un problema matemático, nos respondió: "Algunos de ellos que han recordado enseñanzas anteriores simplemente [...] acuden de forma automática a las reglas que aprendieron con anterioridad". Miraban los ejemplos que les daba, pero algunos se limitan a preguntar todo el tiempo: "¿Qué hago ahora?", "¿qué hago ahora?", "¿qué hago ahora?". Se podía palpar la frustración que sentía Mark ante la dependencia de los estudiantes.

5.2. Observación de la docencia de Mark en un contexto conocido. En el contexto conocido de Mark; es decir, el aula en la que enseñó durante cinco años y medio antes de cambiar de escuela, encontramos ejemplos de cada estructura de autoridad. Seleccionamos la siguiente transcripción para este artículo porque es representativa de lo que hemos observado e incluye ejemplos de cada estructura de autoridad. Las estructuras coexisten y no son fáciles de identificar de forma clara en algunos casos.

a7	Mark	Bien, hemos estado viendo casos como irse de viaje y hemos calculado cosas como la velocidad media entre puntos en el viaje, ¿de acuerdo? [...] En un coche, se utiliza el cuentakilómetros. [...] ¿Y el velocímetro? ¿Qué mide? ¿Qué te dice de la velocidad?	
a8	Zach	La velocidad a la que vas por hora.	[*en simultáneo*]
	Rachel	Cuántos kilómetros recorres por hora.	
a9	Mark	Por hora, bien. ¿Pero es realmente cuántos kilómetros vas a recorrer en una hora?	
a10	Zach	No.	
a11	Mark	No, bien. Entonces, ¿qué te dice el velocímetro, realmente?	
a12	Alan	La velocidad a la que vas.	

a13	Mark	Exacto, te está diciendo la velocidad a la que vas en ese momento. Entonces, ese es el tema que vamos a ver ahora. Muy bien, vamos a empezar a ver las tasas de cambio instantáneas.
a14	Lucas	¿Deberíamos tomar nota?
a15	Mark	Como siempre. Bien, entonces vamos a comenzar a analizar y encontrar las tasas instantáneas de cambio, es decir, lo rápido que están cambiando las cosas en ese mismo momento. [*pausa*] Entonces, ¿qué es? Desde el punto de vista técnico es el cambio en una variable dependiente sobre un cambio infinitamente pequeño en la variable independiente, ¿estamos de acuerdo? Esa es la definición técnica. Cuando lleguen a 12º grado van a empezar a hablar de límites.
a16	Connor	A eso ya lo vimos.
a17	Mark	En realidad, no. En 12º grado empezarán a ver cómo la variable independiente se acerca a un valor particular y, como mencionamos, la velocidad instantánea es una tasa de cambio instantánea. La velocidad instantánea es lo que mide el velocímetro en un coche. En ese caso, se trata de un cambio de desplazamiento en un período de tiempo infinitamente pequeño. Es decir, ahora mismo. [*Reparte una hoja de papel cuadriculado a cada alumno*] ¿Estamos de acuerdo? ¿Todo bien hasta ahora? A esto no lo tienen que anotar. Bien, como hemos mencionado hasta ahora, vamos a calcular las tasas de cambio promedio, pero lo que vamos a ver hoy es si tomamos esos dos puntos y los acercamos cada vez más. Hemos calculado las tasas de cambio promedio a lo largo de varios períodos o varios intervalos, ¿verdad? ¿Pero qué pasa si empezamos a achicar ese intervalo cada vez más?
a18	Zach	¿Qué pasa si se tocan?
a19	Mark	¿Qué pasa si se tocan? Se obtiene una tasa de cambio instantánea. Si queremos encontrar la tasa de cambio instantánea en un gráfico particular, podemos aproximar este valor achicando el intervalo que concluye este punto o podría ser los intervalos en el extremo inferior o el extremo superior de ese intervalo o podrías tener dos puntos acercándose cada vez más desde cualquier extremo, ¿de acuerdo? Así que lo que necesito que hagan ahora es dibujar este gráfico, ¿de acuerdo? Simplemente un gráfico y es igual a x al cuadrado.
a20	Zach	¿Quieres que lo dibujemos hasta 4.5?

a21	Mark	Claro, o pueden marcar cada dos cuadrados y empezar "uno, dos" hasta cinco. Y tu eje y debe ir hasta veinte, ¿de acuerdo? [*Recorre el aula revisando el trabajo de los estudiantes*]. Traten de trazar los puntos, ¿de acuerdo? Asegúrense de pasar uno horizontal y uno vertical. Dos horizontal, cuatro vertical, tres horizontal, nueve vertical, cuatro horizontal, dieciséis vertical, y ese es el último punto que pueden trazar cuando llegan a veinte en su eje y. [*Los estudiantes trabajan algunos minutos en silencio*]. Entonces lo que vamos a empezar a hacer es a usar x es igual a 4 y lo que vamos a tratar de encontrar eventualmente es la tasa de cambio instantánea, ¿de acuerdo? Pero para empezar, quiero que encontremos la tasa de cambio promedio entre cero y cuatro. Así que el intervalo debería ir de cero [*Escribe en el pizarrón*], es decir que encontramos "f en cuatro" menos "f en cero" sobre "cuatro menos cero". Entonces, ¿qué sería "f en cuatro?" Dieciséis, bien, "f en cero" sería cero y así continuamos, [*sigue escribiendo en el pizarrón*] ¿de acuerdo? Ahora buscaremos la tasa de cambio promedio de uno a cuatro. [*Sigue escribiendo en el pizarrón*].
a22	Ella	¿Por qué puso el signo *menor o igual*[8]después del uno?
a23	Mark	¿Aquí?
a24	Ella	Sí.
a25	Mark	Porque este es el intervalo al que vamos a ir desde uno vertical.
a26	Ella	Bien.
a27	Mark	¿Cuál creen que será el próximo intervalo?

En esta transcripción, encontramos evidencia de autoridad personal. Teniendo en cuenta la gramática que se asemeja a los paquetes léxicos que ejemplifican esta estructura de autoridad, buscamos los pronombres *yo* y *tú* en la misma oración. Aquí, vemos a Mark diciendo, al final del turno a19, "lo que (*yo*) *necesito que hagan* ahora es..." Además, en la mitad del turno a21 dijo: "*Quiero que* (*nosotros*) encontremos...". Su referencia a *nosotros* incluye a los estudiantes, por lo que estaba articulando sus expectativas para ellos; esto es similar a "quiero que (*tú*) encuentres...". En ambos casos, no se les dio una razón a los estudiantes; simplemente se esperaba que hicieran el gráfico porque Mark "necesita" que lo hagan. Sin una razón explícita, los estudiantes pueden haberse quedado perplejos a la hora de tomar decisiones en su trabajo. Por ejemplo, ¿a qué escala harían el gráfico? Si hubieran sabido el motivo por el que Mark quería que hicieran el gráfico, podrían haber pensado en cómo diseñar la escala del gráfico, pero como no sabían

[8]NdT: Énfasis añadido.

para qué se iba a utilizar el gráfico, se preguntaban cómo configurarlo. Entonces, un alumno le pregunta, "¿Quieres que lo dibujemos hasta 4,5?" (turno a20) y Mark respondió a esta pregunta con aún más detalles sobre cómo dibujar el gráfico, aunque sin justificar estas instrucciones específicas.

Este patrón en el que los estudiantes le preguntan a Mark qué quiere que hagan fue frecuente. Incluso cuando Mark no daba instrucciones explícitas, estaba claro que confiaban en su autoridad personal para decirles lo que debían hacer. Por ejemplo, en esta transcripción, en el turno a14, alguien le preguntó a Mark: "¿Deberíamos tomar nota?". Confió en la autoridad de Mark a la hora de decidir qué escribir y qué no en sus anotaciones.

En esta transcripción también se encontró evidencia del discurso como autoridad. Mark posicionó la autoridad de la disciplina matemática como algo trascendente, fuera del aula. Teniendo en cuenta la gramática que se asemeja a los paquetes léxicos que ejemplifican esta estructura de autoridad, buscamos verbos modales que sugieren necesidad. Encontramos las estructurales modales *tener que* (*have to*), *necesitar* (*need to*) y *deber* (*should*). En la mitad del turno a17, Mark dijo "A esto no lo tienen que anotar" y, como se señaló anteriormente, en el turno a19, Mark había dicho "lo que necesito que hagan ahora". En estos casos, la necesidad apunta a la autoridad inmanente de Mark, no a una fuente trascendente. En el turno a21, Mark señala "el eje *y debe* ir hasta veinte", pero sin explicar por qué. La única otra estructura verbal modal que sugiere necesidad en esta transcripción es *pueden* (*you can*). Mark dijo, en el turno a21, "ese es el último punto que *pueden* trazar". Le dijo a la clase que era imposible ir más allá. Basándonos en nuestra experiencia en la enseñanza de la matemática, nos parece que Mark habría tenido razones matemáticas para decir lo que *debían* y *podían* hacer aquí, aunque los estudiantes pueden haberse preguntado si esto era simplemente otro caso en el que debían seguir la autoridad del profesor.

Además de los verbos modales que indican una fuerza disciplinaria que regula la acción, observamos que Mark marcó el poder discursivo de la disciplina [matemática] al referirse a definiciones de vocabulario que provienen de afuera del aula: "Desde el punto de vista técnico es el cambio en una variable dependiente sobre un cambio infinitamente pequeño en la variable independiente" (turno a15). Sin embargo, no dijo de dónde había sacado estas definiciones. Con la ausencia de pronombres personales, en yuxtaposición con su uso persuasivo (a veces tácito) de *nosotros* en muchos de sus otros turnos, apunta a una disciplina trascendente. Además, nos preguntamos si las indicaciones "*asegúrense* de pasar uno horizontal y uno vertical" podrían pertenecer a esta estructura de autoridad, ya que se está describiendo un procedimiento como si no hubiera otras opciones y no se están dando razones de por qué alguien podría seguir este procedimiento.

Esta transcripción también presenta evidencia de inevitabilidad discursiva. Teniendo en cuenta la gramática que se asemeja a los paquetes léxicos que ejemplifican esta estructura de autoridad, buscamos la estructura modal *va a / van a / vamos a* (*going to*) que sugiere conocimiento de lo que va a pasar. En este caso, Mark utilizó esta estructura no para atribuirse el conocimiento de lo que producirá la matemática, sino para mostrar su conocimiento de lo que él y otros profesores harían hacer a sus estudiantes. Comienza en el turno a13 afirmando: "vamos a empezar a ver las tasas de cambio instantáneas". En el turno a15, dijo que "cuando lleguen a 12º grado van a empezar a hablar de límites". (Ellos) *van a*, aparentemente, se refiere al profesor de los estudiantes en una futura clase de 12º grado (hay dos clases de matemática de 12º grado para los estudiantes que aspiran a la matrícula universitaria en ciencias). Esta referencia a *ellos* es extraña porque Mark sería su profesor en esa clase. Por lo tanto, es posible que se refiera al libro de texto o al plan de estudios con el pronombre tácito *ellos*. Esta estructura continuó en el turno a17 con el mismo "van a empezar a hablar" y también con un futuro más inmediato (las acciones de la clase este día): "Vamos a calcular" y "vamos a ver". Estas instancias de la inevitabilidad discursiva se mezclan con la autoridad personal porque la confianza de Mark en que los estudiantes harían estas cosas se debe a su expectativa de que harán lo que él les pida.

Aunque las instancias de lenguaje que sugieren inevitabilidad discursiva en esta transcripción se confunden con el lenguaje de autoridad personal, Mark empleó una inevitabilidad discursiva más centrada en la matemática posteriormente en la misma clase. Antes de permitir que los estudiantes resolvieran un problema, dijo: "Así que nos va a dar 4188" (turno a74). No había duda de lo que iba a ocurrir, por lo que las acciones de todas las personas en el aula (incluido el propio Mark) se consideraron superfluas. En este caso, la confianza de Mark no venía de su control social, sino de su conocimiento de lo que iba a ocurrir basándose en la matemática. 4188 era el único resultado correcto que podían obtener los estudiantes.

Por último, esta transcripción presenta evidencia de libertad de acción personal. Teniendo en cuenta la gramática que se corresponde con los conjuntos léxicos que ejemplifican esta estructura de autoridad, buscamos preguntas que abran el diálogo, en vez de cerrarlo, porque estas preguntas invitan a que haya múltiples voces, múltiples posibilidades y múltiples perspectivas. También buscamos "si quieres" e "iba a". Estas instancias se refieren a posibles intenciones. Al final del turno a17, Mark hizo una pregunta cerrada. "¿Qué pasa si empezamos a achicar ese intervalo cada vez más?". Es una pregunta cerrada porque ya tiene una respuesta concreta en mente. Sin embargo, cuando alguien pregunta: "¿y si se tocan?", se evidencia una expectativa en el aula de que es permisible que las preguntas matemáticas de los estudiantes desvíen el plan de Mark. Hay varios ejemplos de este tipo de desviación en esta clase. En esta transcripción apareció otro ejemplo en los turnos a22 a a26, cuando otro alumno le pidió una aclaración a Mark. Estos estudiantes demuestran que tomaron el discurso de Mark como un diálogo abierto incluso cuando la estructura de su discurso parecía haberlo cerrado. La característica del discurso de Mark que pone de manifiesto este fenómeno es su disposición a aceptar sus preguntas. Sin embargo, aunque los estudiantes expresaban su libertad personal al plantear sus propias preguntas, seguían confiando en su autoridad, ya que lo consideraban un representante de la disciplina para responder a sus preguntas.

También en esta misma clase una alumna le preguntó a Mark si había una forma más fácil de escribir el intervalo $0 < x < 4$. Un alumno preguntó si el método que se estaba discutiendo siempre daría la tasa. En la primera media hora de clase (de discusión con toda el aula) cinco de los once estudiantes tomaron la iniciativa de hacer preguntas. Mark fijó el orden del día (siguiendo el plan de estudios), pero los estudiantes ejercieron su libertad de acción personal pensando en las eventualidades a las que podrían enfrentarse y pidiendo a Mark aclaraciones que les ayudaría a afrontarlas.

También hay otros ejemplos de libertad de acción personal. Mark dijo en el turno a19: "*Si queremos* encontrar la tasa de cambio instantánea", lo cual supone que la clase puede tener la intención de hacerlo, y más tarde, en el mismo turno, dijo "o *podría ser*" y "o *podrías tener*", lo que sugiere que él y los estudiantes tienen opciones sobre cómo hacer la matemática. Sin embargo, algunos de estos casos de reconocimiento de intención y posibilidad pueden haber sido retóricos porque la búsqueda de tasas de cambio instantáneas era exigida por el plan de estudios.

La libertad de acción personal expresada por los estudiantes de la clase de Mark se podría atribuir a varios factores. Lo más importante es que Mark se mostró receptivo a sus preguntas y, por lo tanto, los incentivó a que hicieran más preguntas. Además, hubo oportunidad de desarrollar cercanía dentro de la clase poco numerosa entre un grupo de compañeros relativamente estable durante doce años y Mark.

5.3. Observación de la docencia de Mark en un nuevo contexto. Las circunstancias que dieron lugar al discurso entre Mark y sus estudiantes no se replicaron en su nueva escuela. Los estudiantes de la clase descrita anteriormente habían tenido a Mark como profesor durante varios años y algunos de ellos tenían hermanos mayores y amigos que también habían tenido a Mark como profesor. Sin embargo, en la nueva escuela, ninguno de sus estudiantes lo conocía ni había oído hablar de él.

Con Mark acordamos que grabar las clases iniciales podría ser muy revelador. Todos nos dimos cuenta de que Mark y su clase se instalaron en un discurso que dependía mucho más de él como autoridad. Aunque sentía que tenía que establecer su autoridad matemática, seguía diciendo que deseaba crear una situación en la que los estudiantes "desarrollaran su propia autoridad". Al tener que adaptarse ellos mismos a una nueva escuela grande, estos estudiantes de 9º grado pueden haberse sentido un tanto perdidos en su primer año de secundaria y, por tanto, más dependientes de su profesor.

Al igual que en el contexto escolar anterior, cada una de las cuatro estructuras de autoridad apareció en esta clase (autoridad personal, discurso como autoridad, inevitabilidad discursiva y libertad de acción personal), pero Mark describió a este grupo como mucho más dependiente de él. Hemos seleccionado la siguiente transcripción para este artículo porque es representativa de lo que observamos en el aula e incluye ejemplos de cada estructura de autoridad. Se trata de la primera transcripción completa que pudimos recopilar debido al tiempo que nos llevó conseguir el consentimiento de los estudiantes para ser grabados. Tomamos esta conversación cuando Mark está presentando al grupo la factorización en primos de 72. Hasta ahora tienen $3 \times 3 \times 2 \times 4$.

b134	Mark	Para realizar la factorización en primos tenemos que descomponer el número de modo que todos los factores sean números primos. Así que ahora tenemos tres de nuestros cuatro números que son números primos, ¿correcto? Entonces sigan trabajando. Así que ahora tenemos: "¿Dos por cuánto serían los factores de cuatro?".
b135	Alexis	Dos por dos.
b136	Mark	Dos por dos. Dos por dos es el cuatro. Y además tenemos nuestro tres por tres. De los cinco factores que tenemos, ¿cuántos son números primos?
b137	Estudiantes	Todos.
b138	Mark	Bien, si volvemos a mirar acá, "Dos por dos por dos por tres por tres por tres[9]". Así es cómo partimos desde setenta y dos. Así es cómo llevamos a cabo la factorización en primos. Bien. Por eso decía que no se espera que sepan inmediatamente cómo factorizar en primos correctamente.
b139	Simone	¿Dónde necesitaríamos y dónde utilizaríamos una pregunta así?
b140	Mark	Lo van a usar más adelante. Esto hace que sea más fácil más adelante cuando tengamos que simplificar o dividir por números.

[9]NdT: Como figura en el original. Debería decir "Dos por dos por dos por tres por tres"

b141	Jerry	No, ¿en qué trabajo necesitaríamos aplicar esto?
b142	Mark	¿En qué trabajo? Eh, no todo lo que hacemos en matemática en la secundaria va a dar, eh, se va a utilizar en la vida cotidiana. Bueno. En la vida diaria haces algunas sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, ¿verdad? Bueno.
b143	Emily	Yo duermo.
b144	Mark	Tú duermes. ¿No gastas dinero? Bien, de todos modos, el propósito de nuestros cursos de matemática es que nos den todas las herramientas que necesitamos para que, más adelante, cuando se decidan por la carrera que quieran seguir, tengan todas las oportunidades disponibles.
b145	Kate	¿Y si uno quiere seguir algo que no tenga nada que ver con la matemática?
b146	Mark	Ah, pero todo tiene que ver con la matemática.
b147	Jordan	¿Y si ella quiere trabajar en McDonald's?
b148	Mark	Dinero, dinero, dinero es matemática, matemática, matemática.
b149	Estudiantes	[*Muchos estudiantes hablan*].
b150	Mark	Bueno. Volvamos a las reglas de la matemática. Volvamos al mundo real. Bien, entonces encontremos los factores y la factorización en primos. Bueno. Intenten resolver esto ustedes solos. Quiero que encuentren los factores primos de treinta y dos. Treinta y dos, los factores primos de treinta y dos. Utilicen las reglas de divisibilidad si les cuesta mucho.

En esta transcripción, encontramos evidencia de autoridad personal. En primer lugar, buscamos los pronombres *yo* y *tú* en la misma oración. En el turno b150, Mark dijo "(Yo) quiero que encuentren los factores primos de treinta y dos". (*Yo*) *quiero que* (*ustedes*) identifica la tarea como un beneficio para él o como una relación de confianza en la que los estudiantes que sigan sus indicaciones obtendrán un resultado favorable. Si se tiene en cuenta la conversación que antecede a esta afirmación, es posible pensar que el resultado favorable sea simplemente encontrar la factorización en primos, estar preparados para usar la factorización en primos cuando hagan cosas como "cancelar o dividir por números", o incluso preparar a los estudiantes para poder hacer lo que quieran cuando "decidan seguir una carrera". Mark no dio ninguna razón para que los estudiantes siguieran su instrucción, excepto identificar que era su deseo.

Además de los casos en los que la gramática nos muestra una estructura de autoridad personal, vemos que Mark utilizó imperativos y preguntas que cierran el diálogo. En el turno b134 les dijo a los estudiantes que "siguieran trabajando" y en el turno b150 les dijo: "Intenten resolver esto". Estas formas imperativas indicaban un único plan de acción, por más que el verbo *prueben* suene más a una invitación. Las preguntas cerradas de Mark fueron consideradas cerradas por estos estudiantes, a diferencia de los estudiantes de su entorno anterior. Cuando preguntó en el turno b134: "¿Dos por cuánto sería factor de cuatro?", un alumno respondió con la única respuesta esperada: "Dos por dos". Y cuando Mark preguntó en el turno b136: "¿Cuántos [de los factores] son números primos?", los estudiantes respondieron todos juntos con la única respuesta esperada: "Todos". La respuesta al unísono es un fuerte indicador de una estructura de autoridad personal porque toda la clase demuestra estar de acuerdo en que su papel es seguir los deseos de Mark. También es un indicador de inevitabilidad discursiva porque la respuesta al unísono admite el reconocimiento de que solo hay una respuesta posible.

En esta transcripción también se encontró evidencia de discurso como autoridad. La estructura modal *tienen que* (*have to*) llama la atención en el turno b134 sobre el único plan de acción impuesto al profesor y a los estudiantes por la matemática: "Para realizar la factorización en primos *tenemos que* (*we have to*) descomponer el número para que todos los factores sean números primos". Otra prueba del discurso como autoridad aparece en esta transcripción en la que Mark señaló: "no se espera que lo sepan inmediatamente". No está claro quién no esperaría que los estudiantes identificaran la factorización en primos inmediatamente sin este proceso más largo, pero el análisis de la gramática empleada sugiere que sería alguien o algo fuera del contexto del aula. Una referencia más explícita a la naturaleza controladora de la matemática se encuentra en el turno b150, en el que Mark desvía la atención de los estudiantes de sus preocupaciones con la frase: "Volvamos a las reglas de la matemática". Además de esta invocación explícita a la autoridad de la disciplina, ejerció su autoridad personal para guiar/controlar lo que ocurre en su aula.

Esta transcripción también presenta evidencia de inevitabilidad discursiva. Observamos la estructura verbal modal *va a* (*going to*) en la respuesta de Mark a las preguntas de los estudiantes sobre la importancia del tema. Así, al igual que en el contexto descrito anteriormente, Mark no hizo referencia a la inevitabilidad de los resultados matemáticos. En ese contexto se refirió a la inevitabilidad de lo que pasaría en clases posteriores de matemática, pero en este nuevo contexto se refirió primero a la inevitabilidad tanto de las futuras prácticas en el aula de matemática como de la trayectoria de las experiencias de vida de los estudiantes. En el turno b140 dijo: "*Van a* (*going to*) usar [esta habilidad] más adelante". Cuando los estudiantes aclararon que querían saber la importancia que esto tendría en sus vidas, no en las futuras clases de matemática, Mark continuó con la estructura de inevitabilidad discursiva, diciendo que su competencia matemática "se *va a* (*going* *to*) utilizar en la vida cotidiana" (turno b142). Incluso fue más allá, en el turno b144 para prever que los estudiantes se decidirían por una carrera ("cuando decidan seguir una carrera") aunque no utilizó *ir a* (*going to*) en la estructura lingüística. Estos casos de inevitabilidad discursiva tienen la misma estructura gramatical que "nos va a dar 4188" (turno a74 en el caso anterior), pero la confianza de Mark no parece estar depositada en el mismo tipo de razonamiento en este caso.

Por último, esta transcripción nos muestra evidencia de libertad de acción personal, pero hay diferencias significativas con respecto a la agencia del estudiante en el contexto anterior. Una vez más, observamos las preguntas, que son una marca de libertad de acción personal. En el turno b139, un alumno pregunta "¿Dónde utilizaríamos una pregunta así?". La respuesta de Mark sugiere que tomó esta pregunta como las que ya conocía en su anterior contexto escolar. Le pareció que el alumno había preguntado por la aplicación de esta habilidad en [clases de] matemática de años posteriores. El alumno lo corrigió en el turno b141: "No, ¿en qué trabajo necesitaríamos...?". Mark reconoció la expresión de libertad de acción personal del alumno al responder a la pregunta y otros estudiantes participaron en este discurso, uno con la provocación "yo duermo" (turno b143) y otro con la pregunta legítima sobre carreras que no necesitan matemática avanzada (turno b145). Cuando este discurso se convirtió en un bullicio (turno b149), Mark ejerció su autoridad personal y cortó las preguntas autónomas de los estudiantes.

5.4. Renegociación de la autoridad en un nuevo contexto. A Mark le preocupaba la dinámica en su nuevo contexto. Después de dos meses de frustración por lo que consideraba la falta de agencia matemática de sus estudiantes, decidió dedicar el tiempo necesario para plantear desafíos a los estudiantes con preguntas sobre la autoridad. Comenzó una clase contándoles a los estudiantes su interés por la autoridad como participante en la investigación. El siguiente extracto proviene del principio de una clase:

c17	Mark	Estamos estudiando [la autoridad] no necesariamente de la manera en que ustedes pueden llegar a pensar en la autoridad. No estamos hablando de quién está al mando, precisamente. Ese tipo de autoridad. Como un tipo de autoridad policial. Si bien ese tipo de autoridad, obviamente, tiene un espacio en el aula. Pero aquí nos estamos enfocando más bien en la autoridad como el poseedor del conocimiento. ¿Quién posee el conocimiento? ¿Yo?
c18	Estudiantes	No.
c19	Mark	Bueno

c20	Niña	Nosotros.
c21	Mark	Bueno. Bien. Hay varias fuentes de autoridad. ¿Verdad? Si hablamos de autoridad matemática, hay muchas fuentes. ¿Correcto? Yo soy, supongo, me considero una fuente de autoridad matemática en el aula. Sin embargo, también considero que cada uno de ustedes es una fuente de autoridad matemática. [...] la idea es distribuir un poco más la autoridad para que no sea solo una gran fuente y que ese sea el único lugar donde se puede obtener información, el único lugar que se puede pensar como una fuente de conocimiento, una fuente de información. La idea es que se conviertan en su propia fuente de autoridad.

A continuación, Mark mostró con su proyector $2 + 3 = 5$ y $2 + 3 = 7$. Preguntó cuál de las dos expresiones era certera y por qué. Muchos estudiantes se mostraron inquietos. Al principio, los estudiantes decían que sabían que $2 + 3$ era 5 porque los profesores así lo habían dicho, lo que sugería que dependían de la autoridad personal de los profesores. Finalmente, una niña explicó por qué tiene que ser cinco, demostrando que entiende que (el discurso de) la disciplina puede tener autoridad; agrupó dos dedos en una mano con tres en la otra y dijo: "Lo aprendimos cuando éramos más chicos: son los números para contar. Usábamos las manos para contar y sumar números. Con el pasar de los años, te adaptas a que el resultado sea cinco".

A continuación, Mark mostró otras dos ecuaciones, $2 + 3 \times 5 = 25$ y $2 + 3 \times 5 = 17$. Un alumno dijo, "Depende de cómo se aplica el orden de las operaciones"[10]. Mark repitió la pregunta y toda la clase explotó. Se destacó una voz que decía: "Si lo resuelves bien, te da 17; si lo resuelves mal, te da 25". Esto sugería una referencia a la disciplina como autoridad o inevitabilidad discursiva (solo hay una respuesta posible), pero no estaba claro de dónde procedía esta autoridad. Cuando Mark preguntó quién había decidido este orden de operaciones, los estudiantes respondieron adivinando nombres: *tú* (refiriéndose a Mark), Stephen Hawking, Albert Einstein. Los estudiantes llegaron a la conclusión de que la convención se transmitía de generación en generación, pero no sabían cómo había empezado. Alguien sugirió que era así "desde el comienzo de los tiempos".

Mark ya no estaba siguiendo ningún plan y hablaba casi tanto como los estudiantes (en las discusiones habituales de clase hablaba mucho más que los estudiantes). Es significativo cómo los estudiantes empezaron a ejercer su libertad de acción personal pidiéndole cosas. A los 31 minutos de la conversación una alumna dijo: "Estás haciendo una pregunta difícil. Un ejemplo nos ayudaría mucho". Mark respondió con un caso de un juego y otra alumna lo interrumpió y

[10]NdT: En el artículo original se utiliza el acrónimo basado en la regla mnemotécnica "BEDMAS", por la letra inicial de las palabras: paréntesis, potencia, división, multiplicación, suma y resta.

dijo: “No, un ejemplo de la vida real”. Entonces, Mark empezó a utilizar un ejemplo de cuando construyó su terraza, pero los estudiantes pidieron un ejemplo de su vida real, no de la de él. Cuando utilizó el ejemplo de la elección de un paquete de datos para telefonía móvil, la clase finalmente se quedó satisfecha.

Cuando Mark desafió a sus estudiantes con preguntas sobre la autoridad, ellos ejercieron la autoridad diciéndole cómo querían que les enseñara. Reflexionando sobre la conversación, un alumno le dijo a Mark: “Hiciste todas estas preguntas, pero no tenían respuesta”. La conversación duró unos 44 minutos, lo que demuestra el interés de los estudiantes y la dedicación de Mark para desarrollar una estructura de autoridad diferente en clase. Teníamos curiosidad por saber cómo este intercambio cambiaría la dinámica del aula. Sin embargo, no fue posible clasificar la clase en una sola estructura de autoridad, porque las cuatro estructuras aparecieron en todas las clases, aunque con variaciones que solo pueden describirse cualitativamente. Mark observó que los estudiantes empezaron a hacer preguntas después de esta conversación, lo que sugería un mayor margen de libertad personal que en las sesiones de clase anteriores. Se estaban asemejando a la clase de su escuela anterior. En una presentación formal a otros profesores más adelante en el año, Mark describió a estos estudiantes como “muy insatisfechos”, “no comprometidos con su propio aprendizaje” y “participantes pasivos” al principio del año, e identificó un cambio hacia “estudiantes que cuestionan”, “piden métodos alternativos”, “exigen explicaciones” y “dan sus propios ejemplos de problemas que desean analizar”. La pasividad de principio de año sugería una estructura de autoridad personal en la que los estudiantes hacían todo lo que él les decía casi sin cuestionarlo. También dio un ejemplo de cinco meses más tarde: un alumno le pidió que demostrara un cierto tipo de problema y otros le dieron más indicaciones sobre lo que querían que se demostrara, e incluso plantearon sus propios problemas. Consideró que se trataba de un cambio para que los estudiantes compartieran la autoridad de su propio aprendizaje. Esto supuso un cambio hacia una mayor libertad de acción personal. En sus descripciones, se centró en quiénes ejercían la autoridad en el aula y no analizó cómo la disciplina de la matemática era también una autoridad.

§6. Reflexión

En este estudio de caso, nuestro marco conceptual nos ayudó a ver la complejidad de la autoridad en las aulas de matemática y la posición de Mark como profesor. A través de este caso nos planteamos varios interrogantes. En primer lugar, aunque las cuatro categorías se descubrieron por primera vez a través de un amplio análisis del corpus que nos permitió identificar patrones generales en los paquetes léxicos de postura, también podemos ver cómo estas categorías son útiles para analizar algunas de las formas en que la autoridad se instala en las aulas. Descubrimos que era útil recurrir a los rasgos gramaticales de los paquetes léxicos de postura, pero también descubrimos que había otras formas de ejemplificar las cuatro categorías que podrían pasar desapercibidas si nuestra atención principal se basaba en los rasgos gramaticales.

Para continuar con el desarrollo de este marco conceptual, creemos que sería útil centrarnos más específicamente en una de las categorías en un caso particular y explorar más a fondo cómo se estructura la autoridad en esa categoría, así como analizar la posibilidad de otras estructuras de autoridad en las aulas de matemática aparte de las cuatro que ya hemos identificado. Delimitaciones como las que presenta nuestro marco conceptual y las que se derivan de su ampliación pueden llevar a simplificar en exceso la complejidad de las interacciones que se entablan en el aula. Sin embargo, reconocemos que estas delimitaciones proporcionan una lupa útil a través de la cual los profesores pueden ver y hablar de sus prácticas en el aula y tomar decisiones mejor fundamentadas sobre cómo quieren negociar la autoridad con los estudiantes.

En segundo lugar, en relación con el posicionamiento de Mark en el aula, nos preguntamos si estas categorías podrían ser útiles para comprender cómo cambia la autoridad a lo largo del tiempo, no solo en diferentes contextos, sino también en el mismo contexto. Sería interesante ver si los diferentes tipos de contextos contribuyen en este aspecto. Por ejemplo, en el contexto rural en el que Mark llevaba años y tenía un amplio conocimiento de las familias y los estudiantes, es posible que la autoridad personal pasara a un primer plano porque transcurrió el tiempo necesario para establecer la confianza. Es posible que los estudiantes vieran que Mark tenía en cuenta sus intereses, por lo que obedecieron lo que él "quería" que hicieran. Queda pendiente la pregunta sobre lo que ocurre cuando algunos tipos de autoridad se anteponen a otros. Por ejemplo, cuando la autoridad personal es la más dominante, la justificación matemática o el razonamiento pueden pasar a un segundo plano. ¿Cuál podría ser el impacto de estas estructuras de autoridad? Este tipo de preguntas puede complementar la bibliografía que analiza las posibilidades de los profesores para cambiar las estructuras de autoridad (por ejemplo, (Hufferd-Ackles y cols., 2004; Skovsmose, 2001)). También nos preguntamos hasta qué punto era importante la necesidad percibida de Mark de establecer su autoridad en su nuevo contexto y si esa necesidad percibida podría cambiar con el transcurso del tiempo. Por ejemplo, si hubiéramos continuado el seguimiento a Mark durante los primeros años en este nuevo contexto, ¿habríamos visto cómo estas categorías se desplazan y cambian a medida que Mark negocia la autoridad con sus estudiantes? Es importante ser una autoridad en matemática y tener cierta autoridad como profesor, pero también es importante establecer una rutina en la que cada alumno se vea a sí mismo como autoridad de su propio aprendizaje para que también pueda convertirse en una autoridad en matemática. Es probable que los propios estudiantes hayan tenido dilemas similares: querer ser independientes de Mark y, al mismo tiempo, depender de él para que los guíe de distintas maneras. Sin embargo, se sabe poco sobre esta tensión.

En tercer lugar, las reflexiones de Mark sobre su autoridad y su intento de mantener discusiones explícitas con los estudiantes sobre la autoridad nos hicieron ver la importancia de colaborar con los profesores cuando exploramos la autoridad. Observamos la discusión explícita de Mark sobre la autoridad con sus estudiantes, lo que no habría ocurrido antes de nuestro trabajo conjunto sobre la autoridad, precisamente. Se ha demostrado la importancia de que los profesores de matemática "miren desde afuera" o mantengan metaconversaciones sobre las normas (Cobb, Yackel, y Wood, 1993; Rittenhouse, 1998), pero no hemos detectado tanta atención en la bibliografía sobre otros aspectos importantes de las normas. La autoridad es un elemento central de estas normas, por lo que sostenemos que las metaconversaciones sobre la autoridad en las aulas de matemática pueden ayudar a los estudiantes a reconciliarse con su propia matemática. Es necesario seguir investigando acerca de profesores que utilizan este tipo de estrategias.

§7. Agradecimientos

Esta investigación recibió el respaldo del Consejo de Investigación de Ciencias Sociales y Humanidades de Canadá, como parte de una beca titulada "Positioning and Authority in Mathematics Classrooms" (*Posicionamiento y autoridad en las aulas de matemática*).

Bibliografía

Alrø, H., y Skovsmose, O. (2004). *Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection, critique* (Vol. 29). Springer Science & Business Media.

Amit, M., y Fried, M. N. (2005). Authority and authority relations in mathematics education: A view from an 8th grade classroom. *Educational studies in Mathematics*, *58*(2), 145–168.

Biber, D., Conrad, S., y Cortes, V. (2004). If you look at…: Lexical bundles in university teaching and textbooks. *Applied linguistics*, *25*(3), 371–405.

Bishop, A. (2004). *Mathematical enculturation. A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Boaler, J. (2003). (Ed.). En *Studying and capturing the complexity of practice—the case of the "dance of agency": Proceedings of the 27 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA, Honolulu, Hawaii* (*Vol. I*) (pp. 3–16).

Cobb, P., Yackel, E., y Wood, T. (1993). Theoretical orientation. En D. Dillon (Ed.), *Rethinking elementary school mathematics: Insights and issues, Monograph #6.* NCTM: Reston, VA.

Herbel-Eisenmann, B. (2009). Negotiation of the "presence of the text": How might teachers' language choices influence the positioning of the textbook? En J. Remillard, B. Herbel-Eisenmann, y G. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (p. 134–151). New York: Routledge.

Herbel-Eisenmann, B., y Wagner, D. (2010). Appraising lexical bundles in mathematics classroom discourse: Obligation and choice. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(1), 43–63.

Herbel-Eisenmann, B., Wagner, D., y Cortes, V. (2010). Lexical bundle analysis in mathematics classroom discourse: The significance of stance. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(1), 23–42.

Hufferd-Ackles, K., Fuson, K. C., y Sherin, M. G. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. *Journal for research in mathematics education*, *35*(2), 81.

Martin, J. R., y White, P. R. (2005). *The language of evaluation: appraisal in English* (Vol. 2). Nueva York: Palgrave.

Morgan, C. (1998). *Writing mathematically: The discourse of 'investigation'*. Bristol, PA: Falmer Press.

Oyler, C. (1996). *Making Room for Students: Sharing Teacher Authority in Room 104.* Nueva York: Teachers College Press.

Pace, J. L. (2003). Using ambiguity and entertainment to win compliance in a lower-level US history class. *Journal of Curriculum Studies*, *35*(1), 83–110.

Pace, J. L., y Hemmings, A. (2007). Understanding authority in classrooms: A review of theory, ideology, and research. *Review of educational research*, *77*(1), 4–27.

Pickering, A. (1995). *The mangle of practice: Time, agency, and science*. University of Chicago Press.

Pimm, D. (2019). *Speaking mathematically*. London: Routledge and Kegan Paul.

Rittenhouse, P. S. (1998). The teacher's role in mathematical conversation: Stepping in and stepping out. En Lampert y Blunk (Eds.), *Talking mathematics in school: Studies of teaching and learning* (pp. 163–189). Nueva York: Cambridge University Press.

Roesken, B., Hannula, M. S., y Pehkonen, E. (2011). Dimensions of students' views of themselves as learners of mathematics. *ZDM*, *43*(4), 497–506.

Rowland, T. (1992). Pointing with pronouns. *For the Learning of Mathematics*, *12*(2), 44–48.

Schoenfeld, A. (1992). Reflections on doing and teaching mathematics. En A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53–70). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Skemp, R. R. (1980). Intelligence, learning and action. *British Journal of Educational Studies*, *28*(3).

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *33*(4), 123–132.

Wagner, D. (2012). Opening mathematics texts: Resisting the seduction. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(1), 153–169.

Wagner, D., y Herbel-Eisenmann, B. (2008). "Just don't": The suppression and invitation of dialogue in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 143–157.

Wagner, D., y Herbel-Eisenmann, B. (2009). Re-mythologizing mathematics through attention to classroom positioning. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 1–15.

Yackel, E., y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for research in mathematics education*, *27*(4), 458–477.

Yin, R. (2006). Case Study Methods. En J. Green, G. Camilli, y P. Elmore (Eds.), *Handbook of Complementary Methods in Education Research* (pp. 111–122). Mahwah, NJ: LEA & AERA.

(Dejamos constancia que, debido a la edición en bibtex, podría haber algunas mínimas diferencias en algunas referencias en relación a cómo aparecen en el artículo original)

David Wagner
University of New Brunswick
Fredericton, NB, Canada
(✉) *dwagner@unb.ca*

Beth Herbel-Eisenmann
Michigan State University
East Lansing, MI, USA
(✉) *bhe@msu.edu*

Recibido: *7 de junio de 2022*.
Aceptado: *11 de noviembre de 2022*.
Publicado en línea: *26 de diciembre de 2022*.

Nota Editorial: IV Jornadas de Estudio en Educación Matemática. Trayectorias de estudio e interacciones

por Cristina B. Esteley y Mónica E. Villarreal

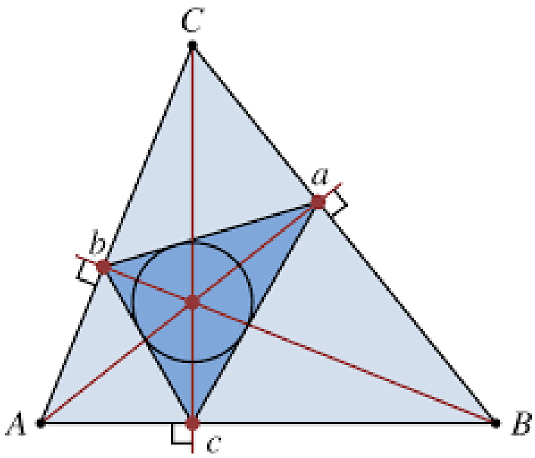
Los días 1 y 2 de diciembre de 2022 se llevaron a cabo las IV Jornadas de Estudio en Educación Matemática (IV JEEM) en la Universidad Nacional de Córdoba (UNC). Estas jornadas se realizan cada tres años y son organizadas por el Grupo de Enseñanza de la Ciencia y la Tecnología (GECyT) de la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación en el marco de una trayectoria de trabajo y estudio que se inició con las primeras Jornadas en el año 2013. Las JEEM tienen como objetivo central promover el estudio y debate en torno a problemáticas actuales del campo de la educación matemática con aportes de investigadores reconocidos en el ámbito internacional. Con cada edición las JEEM se van consolidando como espacio de formación e intercambio para la comunidad de educadores matemáticos de Argentina.

Las I JEEM contaron con la visita del Dr. Yves Chevallard, profesor emérito de la Universidad d'Aix-Marsella (Francia) quien disertó acerca de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. En 2016, las II JEEM recibieron a los Dres. Alan Kuzniak y Laurent Vivier, de la Universidad París-Diderot (Francia) y a la Dra. Elizabeth Montoya Delgadillo, de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile), quienes abordaron el enfoque de los Espacios de Trabajo Matemático. Las III JEEM se organizaron en torno a la participación a distancia de la Dra. Rita Borromeo Ferri, docente e investigadora de la Universidad de Kassel (Alemania) quien trató diversos aspectos de la Modelización Matemática desde la perspectiva educativa. La temática propuesta para las IV JEEM fue: Educación Matemática y Sociedad. Se trata de una temática poco abordada en las investigaciones del campo de la educación matemática en nuestro país. En esta oportunidad los especialistas invitados fueron la Dra. Paola Valero, de la Universidad de Estocolmo (Suecia), y el Dr. David Wagner, de la Universidad de New Brunswick (Canadá). Ambos especialistas son miembros activos de la comunidad *MES*, sigla en inglés para *Educación Matemática y Sociedad*. Brevemente, la comunidad *MES* promueve debates amplios sobre dimensiones sociales, éticas, culturales y políticas de la educación matemática [1].

[1]Para mayores detalles sobre la comunidad MES, consultar en https://www.mescommunity.info/

dado un triángulo acutángulo T, el triángulo inscripto en T de menor perímetro es el determinado por el cruce de las alturas de T con los lados de T?

En 1775, Giovani Fagnano planteó el problema de encontrar el triángulo de menor perímetro inscripto en un triángulo acutángulo dado T. La solución está dada por el triángulo *órtico* o *podal* P de T, que es el triángulo formado por los pies de las alturas de T, es decir, los puntos de intersección de los lados de T con las perpendiculares a los lados que pasan por los vértices de T. En la imagen, el triángulo $T = \triangle ABC$ tiene triángulo podal $P = \triangle abc$.



La solución fue hallada por el mismo Fagnano [2] usando métodos analíticos (cálculo) y un resultado intermedio debido a su padre Giulio Carlo. Luego aparecieron algunas pruebas geométricas, entre ellas las de Schwarz, Fejér, Kazarinoff, Coxeter, etc. Estas pruebas usan las propiedades geométricas de las reflexiones para determinar algún camino minimal que representa el perímetro. También existen pruebas que usan trigonometría.

La demostración geométrica que daremos a continuación se basa en la versión de la prueba de Schwarz presentada en el libro de Coxeter y Greitzer [1] la cual utiliza la siguiente propiedad del triángulo podal P, que el mismo Fagnano probó en [2] (y que omitiremos):

(1) las bisectrices de los ángulos del triángulo podal P son las alturas del triángulo original T.

• Consideramos el triángulo $T = \triangle ABC$ donde tenemos dibujado el triángulo podal P con lados a, b, c y algunos ángulos. Reflejamos T por la recta $\overleftrightarrow{BC}$ obteniendo $\triangle BA'C$. En la Figura 1 se puede ver la situación.

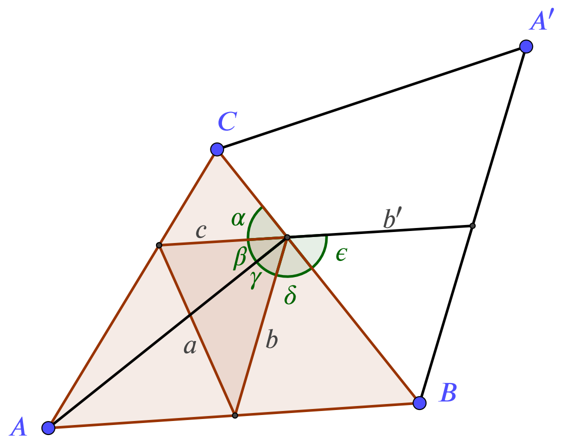


FIGURA 1. Triángulo T y su reflejado por la recta BC.

Veamos primero que si b' es el segmento reflejado de b con respecto a la recta $\overleftrightarrow{BC}$, es decir $b' = S_{\overleftrightarrow{BC}}(b)$, entonces:

(2) los segmentos c y b' quedan alineados (forman un ángulo llano).

Para demostrar que c y b' están alineados basta probar que $\beta+\gamma+\delta+\epsilon = 180°$. El hecho de que P sea podal nos dice que

$$\alpha+\beta = \gamma+\delta = 90°,$$

así que solo resta probar que $\beta+\epsilon = 90°$.

Al reflejar el segmento b con respecto a la recta $\overleftrightarrow{BC}$ se forma el ángulo ϵ que, por la reflexión, es igual a δ. Además, la propiedad **(1)** implica que $\beta = \gamma$, y por lo tanto $\alpha = \delta$. De este modo $\beta+\epsilon = \beta+\delta = \beta+\alpha = 90°$, como queríamos probar.

• Ahora vamos a probar que P es el triángulo inscripto en T de perímetro menor. Para ello, dibujamos otro triángulo inscripto arbitrario Q con lados u, v, w y queremos probar que el perímetro de P es menor que el de Q.

Reflejamos el triángulo T y los triángulos inscriptos P y Q sucesivamente a lo largo de los lados BC, AB, AC, BC y AB, obteniendo la Figura 2. De este modo obtenemos 6 triángulos grandes (5 nuevos congruentes a T). Aclaramos que, para no recargar la notación en la Figura 2, llamamos de igual modo a los puntos o segmentos que van resultado a partir de los originales a través de las 5 reflexiones realizadas.

Lo primero que observamos en la Figura 2 es que, la poligonal punteada roja, que va desde S_0 hasta S_5, está formada por el segmento w original, el 1er reflejado v, el 2do reflejado u, el 3er reflejado w, el 4to reflejado v y el 5to reflejado u. Así concluimos que:

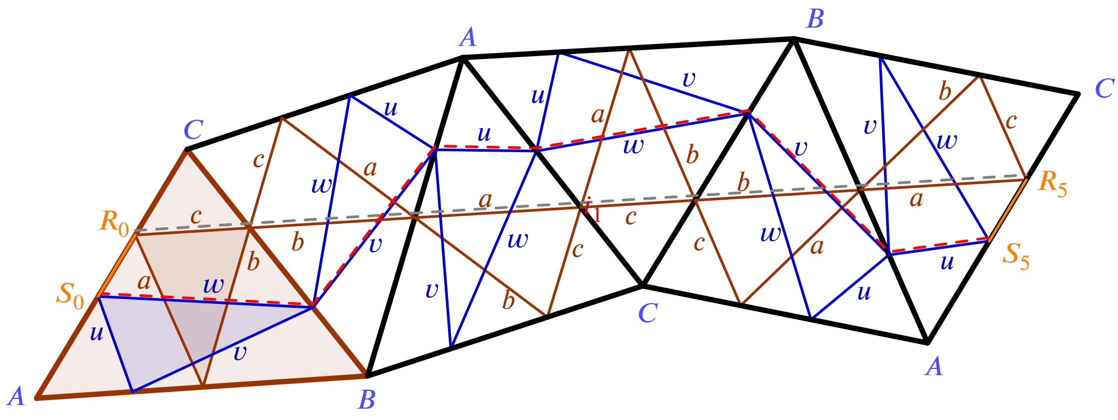


FIGURA 2. Triángulos T y P y sus sucesivas reflexiones.

(3) la longitud de la poligonal roja $\widetilde{S_0S_5}$ es igual al doble del perímetro de Q.

De igual modo, la poligonal punteada gris, que va desde R_0 hasta R_5, está formada por el segmento c original, el 1er reflejado b, el 2do reflejado a, el 3er reflejado c, el 4to reflejado b y el 5to reflejado a. Pero en este caso, aplicando repetidas veces la propiedad **(2)**, vemos que esta poligonal gris es en realidad igual al segmento $\overline{R_0R_5}$.

Resumiendo lo observado, concluimos que:

(4) la longitud del segmento gris $\overline{R_0R_5}$ es el doble del perímetro de P.

Afirmamos ahora que el segmento original $\overline{AC}$ y el segmento final $\overline{AC}$ son paralelos. Para ello miremos la sucesión de segmentos

$$\overline{AC} \to \text{1er } \overline{AC} \to \text{2do } \overline{AC} = \text{3er } \overline{AC} \to \text{4to } \overline{AC} \to \text{5to } \overline{AC}$$

que fueron construidos a partir del original $\overline{AC}$ (el 2do y 3er $\overline{AC}$ coinciden pues ahí se reflejó con respecto a $\overline{AC}$). Resulta que si bien los segmentos fueron construidos reflejando, también podemos pensar que fueron construidos rotando el doble del ángulo que cada segmento forma con el eje de reflexión. Así, si consideramos la orientación antihoraria como positiva, la sucesión puede ser construida así:

$$\overline{AC} \xrightarrow{R_{C,2\hat{C}}} \text{1er } \overline{AC} \xrightarrow{R_{A,2\hat{A}}} \text{2do } \overline{AC} = \text{3er } \overline{AC} \xrightarrow{R_{C,-2\hat{C}}} \text{4to } \overline{AC} \xrightarrow{R_{A,-2\hat{A}}} \text{5to } \overline{AC}$$

(aquí $R_{X,\hat{\theta}}$ indica la rotación de centro X y ángulo orientado $\hat{\theta}$). Vemos que la suma de los ángulos orientados que fueron utilizados para ir desde el AC original hasta el quinto $\overline{AC}$ da cero. Esto implica que el $\overline{AC}$ original y el quinto $\overline{AC}$ son paralelos (uno es el trasladado del otro).

De este modo, el segmento $\overline{R_0S_0}$ en el primer $\overline{AC}$ es congruente y paralelo al segmento $\overline{R_5S_5}$ en el quinto $\overline{AC}$ y, por lo tanto, los vértices R_0, R_5, S_5, S_0 forman un paralelogramo $\square R_0R_5S_5S_0$. Esto implica que $\overline{R_0R_5} \equiv \overline{S_0S_5}$. Combinando esto con **(4)** obtenemos:

(5) la longitud del segmento $\overline{S_0S_5}$ es el doble del perímetro de P.

Ahora, por **(3)**, sabemos que el doble del perímetro de Q es la longitud de la poligonal roja, que es más extensa que el segmento $\overline{S_0S_5}$ que cuya longitud es el el doble del perímetro de P, de donde es inmediato deducir que el perímetro de P es menor que el perímetro de Q, como queríamos ver.

Referencias

[1] H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer, *Geometry revisited*, (MAA) Random House, 1967. Disponible electrónicamente en https://www.math.unipd.it/~legovini/Coxeter_Greitzer_Geometry_revisited.pdf

[2] G.F. Fagnano, *Problemata quaedam ad methodum maximorum et minimorum spectantia*, Nova Acta Eruditorum: 281–303. Disponible electrónicamente en http://www.izwtalt.uni-wuppertal.de/Acta/NAE1775.pdf

Giovanni Francesco Fagnano dei Toschi (31-1-1715 – 14-5-1797) fue un matemático y sacerdote italiano nacido en Senigallia, hijo de Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano, también matemático. En 1752 se convirtió en canónigo, y en 1755 fue designado como archidiácono. Es conocido por el problema que lleva su nombre (¡el de este artículo!), aunque también resolvió parcialmente el problema de encontrar la mediana geométrica de conjuntos de cuatro puntos en el plano. Éste es el punto que minimiza la suma de sus distancias a cuatro puntos dados. Como demostró Fagnano, cuando los cuatro puntos forman los vértices de un cuadrilátero convexo, la mediana geométrica es el punto donde las dos diagonales del cuadrilátero se cruzan. En el otro caso posible, que no fue considerado por Fagnano, un punto se encuentra dentro del triángulo formado por los otros tres, y este punto interno es la mediana geométrica.

Acta Eruditorum fue la primer revista científica alemana, publicada mensualmente y en latín entre 1682 y 1782, fundada en Leipzig por Otto Mencke por iniciativa de Gottfried Leibniz y con el apoyo del duque de Sajonia. Acta Eruditorum comprendía resúmenes de textos nuevos, críticas, ensayos cortos y notas, esencialmente sobre ciencias naturales y matemáticas, pero también cubría temas de teología y filosofía. Tras la muerte de Otto Mencke, las Acta fueron retomadas por su hijo, Johann Burckhardt Mencke hasta su propio fallecimiento en 1732. Él también fue reemplazado por su hijo Friedrich Otto Mencke, y entonces la revista cambió de nombre para pasar a ser la *Nova Acta Eruditorum*.

Karl Hermann Amandus Schwarz (25-1-1843 – 30-11-1921) fue un matemático alemán, conocido por sus trabajos en análisis complejo. En 1868 se casó con Marie Kummer, la hija del conocido matemático Ernst Kummer. Schwarz estudió originalmente química en Berlin pero Ernst Kummer y Karl Weierstrass lo convencieron de que se dedique a la matemática. Recibió su doctorado (Ph.D.) por la Universidad de Berlín en 1864 bajo la supervisión de Kummer y Weierstrass.

Revista de Educación Matemática
Volumen 37, N° 3 (2022), páginas 38–59
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Investigación en Educación Matemática

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y LA DIGNIDAD DE ESTAR SIENDO

Paola Valero, Gloria García, Francisco Camelo, Gabriel Mancera y Julio Romero[1]

Traducción de Trad. Lorena Baudo y revisada por Paola Valero

Resumen. A partir de nuestro trabajo como investigadores, formadores de docentes y profesores comprometidos con un enfoque sociopolítico en la educación matemática en Colombia, proponemos entender la *democracia* en términos de la posibilidad de construir una subjetividad social para la dignidad de estar siendo. Abordamos el dilema de cómo, históricamente, la inserción de la matemática escolar en relación con el proyecto colonial de asimilación de los pueblos indígenas latinoamericanos a la episteme de la Ilustración y la Modernidad entra en conflicto con la posibilidad de fomentar una subjetividad social en las aulas de matemática. Ejemplificamos una posibilidad pedagógica de avanzar hacia una educación matemática para la subjetividad social con nuestro trabajo al rearticular la noción de espacio geométrico en el plan de estudios de matemática en la secundaria de Colombia con las nociones de espacio de la geografía crítica y el problema de la territorialización, y la epistemología latinoamericana con la noción del espacio íntimo como elemento importante de la subjetividad social.

Palabras clave: Subjetividad social, historia cultural de la matemática escolar, dignidad de estar siendo, espacio geométrico, espacio íntimo, territorialización.

Abstract. On the grounds of our work as researchers, teacher educators and teachers engaging with a socio-political approach in mathematics education in Colombia, we propose to understand democracy in terms of the possibility of constructing a social subjectivity for the dignity of being. We address the dilemma of how the historical insertion of school mathematics in relation to the Colonial project of assimilation of Latin American indigenous peoples into the episteme of the Enlightenment and Modernity is in conflict with the possibility of the promotion of a social subjectivity in mathematics classrooms. We illustrate a pedagogical possibility to move towards a mathematics education for social subjectivity with our work in reassembling the notion of geometrical space in the Colombian secondary school mathematics curriculum with notions of space from critical geography and the problem of territorialisation, and Latin American epistemology with the notion of intimate space as an important element of social subjectivity.

Keywords: Social subjectivity; cultural history of school mathematics; dignity of being; geometrical space; intimate space; territorialisation.

[1] Traducido con autorización del original: Valero, P., García, G., Camelo, F., Mancera, G., & Romero, J. (2012) Mathematics education and the dignity of being. *Pythagoras, 33*(2), 9 pages. http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v33i2.171

§1. Introducción

No creemos necesario comenzar este artículo con una descripción cruda de las condiciones de pobreza, violencia y falta de dignidad que muchos alumnos de las aulas de matemática experimentan en su vida cotidiana. Estas situaciones y la incidencia de la educación matemática en su (re)producción ya se han documentado en varias investigaciones (p. ej., Valero y Pais (2012)). La existencia de estas situaciones aún en la actualidad justifica que se retome el debate sobre la conexión entre la educación matemática y la democracia en un número especial de una revista de investigación como *Pythagoras*. La conexión entre la educación matemática y la democracia ha sido el tema de ediciones completas de revistas internacionales (p. ej., *ZDM: The International Journal on Mathematics Education* 30[6], *ZDM* 31[1]) y de artículos sueltos (p. ej., De Mattos y Batarce (2010); Skovsmose y Valero (2008)). En la última década, pareciera que temas como la "equidad" y la "justicia social" han desplazado el debate sobre la democracia en la literatura de investigación sobre educación matemática. Aun así, los editores de este ejemplar especial convocan a los investigadores para que informen sobre los avances en el tema y exploren, a través de discusiones teóricas y empíricas, el significado de la conexión entre la educación matemática y la democracia en relación con el desarrollo.

En un equipo colaborativo de profesores, investigadores y formadores de docentes, hemos estado trabajando en la recontextualización de las ideas en torno a la educación matemática crítica propuesta por Skovsmose (1994) y Vithal (2003) para estudiar y transformar las prácticas de educación matemática en las aulas y escuelas de las llamadas comunidades "en riesgo" en Bogotá, Colombia (Camelo, Mancera, Romero, García, y Valero, 2010; García y cols., 2009). Atender a las especificidades del contexto y escuchar a los alumnos y profesores nos ha llevado a la búsqueda intelectual de una resignificación de los posibles vínculos entre la educación matemática y la democracia. En este proceso recurrimos a diversas fuentes como la filosofía contemporánea y literatura política y pedagógica latinoamericana, la investigación educativa crítica basada en la obra de Michel Foucault, y la investigación crítica y política en educación matemática. Nuestro objetivo es aportar a la investigación internacional en educación matemática la discusión de un marco teórico para repensar el rol de la matemática escolar en la construcción de sujetos históricos que luchen por vivir en y con dignidad. Basamos nuestro trabajo en la investigación realizada con profesores y niños de comunidades cuyas posibilidades de vida están lejos de acceder a las promesas de los discursos globalizados de la democracia social y económica.

Comenzamos nuestro artículo formulando una interpretación de la democracia en términos de la posibilidad de una subjetividad social para la dignidad de estar siendo. Se aborda, entonces, la cuestión de cómo la inserción histórica de la matemática escolar en relación con el proyecto colonial de asimilación de los pueblos indígenas latinoamericanos a la episteme de la Ilustración y la Modernidad entra en conflicto con la posibilidad de una subjetividad social en las aulas de matemática. Luego presentamos la estructura teórica sobre la cual construimos una propuesta curricular para trabajar con los alumnos de un aula colombiana sobre la noción de espacio. La propuesta curricular es un ejemplo de un intento de descentrar el núcleo del programa de estudios de matemática abriendo sus posibles significados con otros campos discursivos afines en los que se encuentran las nociones de espacio. La propuesta curricular reúne la geometría euclidiana, la geografía crítica y el problema de la territorialización, y la filosofía latinoamericana contemporánea con la noción de espacio íntimo como elemento importante de la subjetividad social. Argumentamos que este descentramiento abre la posibilidad de que haya formas de subjetividad que se niegan en el plan de estudios convencional de matemática. Finalizamos con algunas observaciones sobre la importancia de los tipos de estudios que hemos realizado para contribuir a una resignificación de las conexiones entre la educación matemática y la democracia en diferentes contextos históricos y geográficos.

§2. De la democracia a la dignidad de estar siendo

La idea de conectar la educación matemática y la democracia se materializó en la investigación de la educación matemática en la década de 1980. Se trata de un planteamiento muy reciente en la educación matemática que se hizo comprensible en la confluencia de al menos tres tendencias. En primer lugar, durante la década de 1980, los matemáticos y los educadores matemáticos cuestionaron el resultado del movimiento de la Matemática Moderna de reforzar la construcción de un plan de estudios de matemática escolar para una élite de alumnos selectos que continuarían estudiando matemática a un nivel superior. La preocupación por una "matemática para todos" (Damerow, 1984) se introdujo en el debate de los educadores matemáticos en una época de consolidación y expansión de los sistemas educativos en todo el mundo. En segundo lugar, en la investigación en educación matemática se han adoptado cada vez más marcos teóricos sociológicos y filosóficos en el estudio de las persistentes malas calificaciones de los alumnos en matemática (Lerman, 2000). La tendencia sociocultural y política en la investigación en educación matemática ha hecho posible ampliar el objeto de investigación del campo desde los estrechos problemas de la enseñanza y el aprendizaje hasta su comprensión como prácticas sociales (Valero, 2010). En tercer lugar, existió una tendencia mundial de hacer de la educación el pilar de la democratización, tal y como expresó la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) en, por ejemplo, el programa mundial de "Educación para Todos" (UNESCO, 1992). A diferencia de las tendencias educativas anteriores en diferentes países, este acuerdo internacional en particular fue un intento de universalización de la educación básica para todos los niños del mundo, dentro de un discurso de democratización y ampliación del acceso a la educación. Es en el cruce de estas diferentes tendencias que la educación matemática comenzó a relacionarse con el poder en la sociedad y con la generación y mantenimiento de mecanismos de inclusión y exclusión. La vinculación de la educación matemática con la democracia es una formulación tan reciente que todavía puede hacer despertar dudas en la gente. Sin embargo, esta idea se ha adoptado rápidamente en ciertos círculos de investigación e incluso de política como una nueva y poderosa justificación para la mejora necesaria de las prácticas educativas en las aulas de matemática (p. ej., Gutiérrez (2013)).

El resultado es la construcción de un discurso que postula a la educación matemática, desde el punto de vista de los educadores matemáticos, como la materia escolar que puede salvar a los niños excluidos de la falta de un futuro (Lundin, 2012). Tanto en las políticas como en los documentos de investigación, afirmaciones como "la competencia matemática (y científica) es la clave del bienestar de nuestra nación en una economía global" o "los niños que cuentan con mejores competencias matemáticas tendrán un mejor futuro" contribuyen a difundir el mito de que el aprendizaje matemático puede ser una forma de salvar el mundo, la nación y el individuo. Paralelamente, la investigación en educación matemática se posiciona como la disciplina científica con los conocimientos, las pruebas y las técnicas para lograr este objetivo tan noble (Popkewitz, 2004).

Queremos empezar nuestro replanteamiento de la educación matemática y la democracia sobre la base de que la investigación y las prácticas de la educación matemática, si están presentes, no son ni la causa ni la solución de la dura estratificación y la reducción de millones de personas en el mundo a la miseria y a condiciones de violencia cotidiana. Pais y Valero (2010, 2012) han postulado que una lectura Política (con P mayúscula) de la educación matemática aborda las diferentes prácticas que la integran como formas económicas, sociales, culturales e históricas de razonar y de actuar. Nos vemos obligados a reconocer modestamente que la narrativa redentora de la investigación en educación matemática no es más que un ejemplo de una práctica discursiva que pone de manifiesto la función privilegiada que la matemática como materia escolar ha desempeñado en la construcción de las sociedades y subjetividades modernas y capitalistas. No hacerlo permitiría a los investigadores seguir negando la elaborada red de relaciones históricas, sociales, políticas y económicas en la que se forman constantemente la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

La democracia como lucha por una oportunidad de vida digna es, por tanto, una meta para la que los educadores matemáticos solo pueden aportar su grano de arena. Sin embargo, incluso una contribución tan pequeña merece el esfuerzo de reflexionar sobre ella. Es una vía de acceso a una forma de pensar sobre cómo la educación matemática es una de las áreas del plan de estudios escolar que, como discutiremos, contribuye fuertemente al manejo de la conducta de los niños.

Particularmente, en el caso de lo que puede significar una lucha por la "democracia" en Colombia, nos hemos encontrado con el conflicto que surge entre el discurso universalizador de "la matemática para todos", tal y como se configuró en la década de 1980 y que ahora circula internacionalmente, y las condiciones particulares para la creación de una subjetividad social en Colombia. En nuestra investigación (García y cols., 2009) llegamos a la conclusión que cualquier intento serio de desarrollar ideas curriculares en la matemática para alumnos posicionados como excluidos debía articularse en torno a su significado para la construcción de una subjetividad social. ¿Esto qué significa? A diferencia de otras visiones de planes de estudios estructurados en torno a ideas o competencias matemáticas centrales, propusimos el desplazamiento de los conceptos matemáticos centrales y tradicionales como el eje principal del plan de estudios. Este descentramiento abre el espacio para que la subjetividad se convierta en el eje articulador en torno al cual podrían organizarse las formas matemáticas de razonar y actuar. Al hacer de la subjetividad un punto de articulación del plan de estudios, es posible abrirse a otras formas de ser diferentes a las que están histórica y culturalmente arraigadas en el plan de estudios tradicional de matemática. Este desplazamiento subraya la idea de que el saber no está separado del ser, una idea que se ha expresado recientemente en las teorías socioculturales del aprendizaje de la matemática (p. ej., Radford (2008)), pero también por los estudios foucaultianos de la ciencia y la educación: las formas de conocimiento afectan el poder y se ven afectadas por el poder al reunir el saber y el ser como dos caras de una misma moneda. Las formas de conocimiento no solo conllevan las reglas de cómo se conoce y qué es lo que se conoce, sino que también imponen formas de ser a los que cuentan con el conocimiento. El conocimiento construye subjetividades particulares a través de sus tecnologías (p. ej., Daston y Galison (2007); Popkewitz (2009)). Si el saber y el ser son inseparables, surge la pregunta de cuáles son las formas de saber y de ser que el plan de estudios de matemática instaura en los niños y si esas formas de subjetividad son deseables. Esto se convierte en una pregunta central de la educación matemática vista como una tecnología del yo (Foucault, 1982), confrontada con un deseo de "democracia".

Zemelman (1997) sostiene que en el contexto de las sociedades latinoamericanas y su historia, el concepto de subjetividad social es una categoría epistemológica que no solo apunta a la necesidad de pensar a los seres humanos como seres necesariamente colectivos, sino también al imperativo de repensar los procesos sociales a partir del reconocimiento de la realidad multifacética y compleja de Latinoamérica. A diferencia de las nociones europeas del sujeto como individuo monádico, la noción de subjetividad social de Zemelman hace hincapié en la constitución social de sujetos históricos concretos que articulan el tiempo y el espacio para la construcción de posibles nuevos proyectos de un futuro colectivo. Frente a un contexto histórico en el que la colonización y una educación colonizada han enseñado a los latinoamericanos a cómo ser "un sujeto que siempre está pensando en cómo ser lo que no es" (Rivas Díaz, 2005, p. 117), la construcción de una subjetividad social, particularmente en relación con la educación, es un intento de hacer que los sujetos tomen conciencia de su posición histórica, para que conozcan y piensen el mundo con otros, con la intención de generar posiblemente nuevas visiones comunes de futuras condiciones de vida.

La particular historia colonial de América Latina, tan variada en los distintos países del continente (y también distinta a la historia colonial de África y de muchas naciones asiáticas), no solo ocupó las mentes de la población indígena colonizada. También creó formas históricas de subjetividades con dos características principales. En primer lugar, el dominio civilizador de las potencias coloniales instaló tecnologías exitosas del yo que generaron ideas del europeo blanco como la norma a la que aspirar, despreciando así a todos los que no son como el colonizador. Aprender el deseo de asimilarse o de ser "lo que no es" se convirtió en una característica central de los sujetos coloniales (Guillén, 1996), Quintar en (Rivas Díaz, 2005).

La segunda característica es que todas las formas de subjetividad que no se asimilan a la norma y que se atreven a desafiarla deben ser silenciadas y exterminadas (Guerra, 1997). Guerra sostiene que la noción de democracia y ciudadanía que surgió en América Latina durante la consolidación de los estados-nación a principios del siglo XX está arraigada en una idea de indiferenciación y correspondencia. Se opone a las ideas de diferencia, diversidad y heterogeneidad. La democracia como una forma de gobernar —la combinación de técnicas particulares de gobierno y su racionalidad que funciona tanto a nivel de los individuos y de su persona como a nivel de la población (Foucault, 1988; Lemke, 2002)— para llegar a la indiferenciación fue claramente un pilar de los regímenes totalitarios en auge en la década de 1970. Estos regímenes se presentaban como "democráticos" porque se empeñaron en garantizar un gran número de derechos civiles para una nación unificada. De este modo, los regímenes lograron restringir eficazmente la expresión de las subjetividades sociales.

En Colombia, Díaz (2010) afirma que la noción de indiferenciación como característica central en la formación de un estado-nación con un régimen político democrático se insertó en la Constitución Política de 1886 a través de la declaración de Colombia como nación unificada por la religión católica, apostólica y romana. Además, esta declaración ponía la organización y la dirección de la educación pública en manos de la Iglesia católica y de sus diversas órdenes representativas, en particular la Compañía de Jesús. Tal disposición garantizaba una educación laica para todos los colombianos. A su vez, esto repercutió en la exclusión de personas con diferentes expresiones y orientaciones políticas, culturales y sexuales.

Si estos han sido los efectos de poder de la colonización, entonces el desafío de una educación que permita la reconstrucción de una subjetividad social es precisamente construir una nueva interpretación de la democracia. En lugar de seguir persiguiendo los fantasmas europeos y norteamericanos de la Libertad, la Igualdad y la Fraternidad, la democracia puede pensarse como una lucha por el respeto a la diferencia y a los múltiples sentidos posibles del futuro. La democracia consiste en reclamar el derecho a ser dignamente lo que uno es socialmente y podría ser en función de su realidad.

§3. De la matemática a la subjetividad social con la matemática

La expansión de la educación matemática escolar y su desarrollo particularmente en países como Colombia no puede separarse de la historia de la colonización española (desde el siglo XVI hasta principios del siglo XIX) y de la formación de un estado nacional independiente (desde el siglo XIX hasta mediados del siglo XX) (Meyer, Ramirez, y Soysal, 1992). Como parte del poder colonial, la enseñanza matemática en el territorio que es Colombia fue posible gracias a la Real Expedición Botánica. La expedición fue una gran iniciativa "científica" en América que, junto a la explotación económica del nuevo continente, pretendía documentar para los naturalistas europeos, encabezados por el sueco Karl Linnaeus, las maravillas botánicas del Nuevo Mundo. José Celestino Mutis, médico, matemático y sacerdote jesuita español, llegó a América como médico personal del virrey y fue el encargado de dirigir la Real Expedición Botánica. Es reconocido por ser el que inició el primer curso de matemática en el Colegio Mayor de Nuestra Señora del Rosario en 1761 (Sánchez y Albis, 2012). Para un naturalista como José Celestino Mutis, la matemática era importante como método de razonamiento y herramienta práctica para todas las personas: "ya sean campesinos, ciudadanos, plebeyos, cortesanos, soldados, artesanos. Sabios, seculares, eclesiásticos, todos sin importar su condición y estatus, deberían dedicarse a un estudio tan útil" (José Celestino Mutis citado en Sánchez y Albis (2012, p. 110). Las herramientas de la matemática fueron esenciales en el propósito de crear tipologías generalizadas e ideales de las especies naturales que reflejaran la virtud epistemológica de los "científicos" de la época (Daston y Galison, 2007). La introducción de la matemática como parte del afán de los colonizadores católicos españoles con la evangelización de las poblaciones indígenas (y la explotación económica de sus recursos naturales) iba de la mano de la inserción de los colonizados en la episteme clásica europea (Foucault, 1971) dentro de la cual se conformaban las racionalidades y los discursos científicos en la segunda mitad del siglo XVIII.

En una historiografía de la enseñanza de la matemática en Colombia, (Sánchez y Albis, 2012) muestran cómo, desde sus inicios, la enseñanza matemática, principalmente en las universidades, estuvo fuertemente asociada a cómo las figuras prominentes de la sociedad colombiana (una élite criolla descendiente de ancestros españoles) se propusieron poner al país al nivel del pensamiento de las potencias europeas y, posteriormente, norteamericanas. Desde mediados del siglo XIX hasta principios del siglo XX, la visión de la construcción de un estado-nación que debía promover el desarrollo económico a través del avance de la ingeniería para la dominación de la naturaleza tropical colombiana estuvo asociada a la instauración y el crecimiento de la matemática en la Escuela Militar y, posteriormente, en la nueva Universidad Nacional de Colombia. En ese contexto, las discusiones sobre el rol de la matemática para el desarrollo del país pueden interpretarse como el elemento a través del cual se debía llevar el pensamiento racional y científico a la población. Además, la expansión de la matemática de las universidades a las escuelas también representa el movimiento hacia la inserción del mayor número posible de personas en la episteme moderna. La enseñanza y el aprendizaje de la matemática como materia escolar para las masas es una innovación bastante reciente que está vinculada con la universalización de la educación a principios del siglo XX (Radford, 2004).

Popkewitz (2008) ha estudiado los efectos de la educación y las ciencias de la educación en la constitución del ciudadano cosmopolita de la Modernidad en los Estados Unidos durante el siglo XX. El cosmopolitismo hace referencia a la "esperanza de la Ilustración de un ciudadano del mundo cuyos compromisos trascienden las preocupaciones provinciales y locales con valores ideales sobre la humanidad" (p. 1). El programa escolar de matemática es una tecnología poderosa del yo. Las tecnologías del yo son las técnicas que los seres humanos han desarrollado históricamente para entenderse y regularse a sí mismos como humanos. Estas tecnologías: permiten a los individuos ejercer por sus propios medios, o con la ayuda de otros, un cierto número de operaciones sobre su propio cuerpo y alma, pensamientos, conducta y forma de ser, con el fin de transformarse para alcanzar un cierto estado de felicidad, pureza, sabiduría, perfección o inmortalidad (Foucault, 1997, p. 225).

Siguiendo a Foucault, aunque el programa escolar de matemática parece enseñar a los niños una serie de conocimientos valiosos y útiles, lo que en realidad hace es enseñarles a todas las personas implicadas maneras particulares de ser un sujeto. Personifica y pone a disposición las formas cosmopolitas de la razón, que se basan en la idea de que la razón humana fundamentada en la ciencia tiene una capacidad universal y emancipadora para cambiar el mundo y las personas. La agencia humana, la esperanza de progreso, la ciencia como medio para liderar y lograr el progreso, y la planificación del tiempo desembocan en una tesis sobre quién es el sujeto humano: el ser con una "mente sin hogar" (Popkewitz, 2008, p. 29). La mente sin hogar es un tipo de "individualidad que es a la vez objeto y sujeto de reflexión" y que sitúa a los "individuos en una relación con categorías trascendentales que parecen no tener una ubicación histórica determinada o un autor que les otorgue un hogar" (Popkewitz, 2008, p. 30). Esta tesis se hace posible, entre otras cosas, cuando la cuantificación opera el desplazamiento de las cualidades del conocer a las cantidades que pueden ser operadas y modeladas como hechos, así como cuando la ciencia (tanto las ciencias naturales como las humanas, que en ese momento estaban en proceso de conformar sus divisiones tal como hoy las conocemos) hace del mundo de las cosas y de los humanos un objeto de reflexión y planificación. El plan de estudios de matemática como asignatura escolar en aquella época, y todavía hoy, se convirtió en una de las áreas de escolarización que más eficazmente podía "iluminar" a toda la población y transformarla en este tipo de ser. Desde principios del siglo XIX hasta la actualidad, el plan de estudios de matemática es una importante tecnología del yo que inserta sujetos en las formas de pensar y actuar necesarias para que las personas se conviertan en el ciudadano cosmopolita ideal.

Si observamos en especial la historia de Colombia, el ideal del sujeto cosmopolita de Europa y Estados Unidos viaja y se reinscribe en las particularidades de la historia colombiana. En este punto es importante señalar que en la historia de los EE. UU., la agenda educativa reformista estaba unida a la narrativa luterana de redención para la creciente población urbana. Por otro lado, la educación colombiana estaba en manos de la Compañía de Jesús en su misión de catolizar y evangelizar a la población indígena del país (Ahern, 1991). La alianza política entre el poder colonial y la Iglesia católica fue una estrategia doblemente eficaz no solo para subordinar a los colonizados a un nuevo régimen, sino, sobre todo, para europeizarlos a través de la fidelización a Dios y a la Corona española (Herrán Baquero, 1998).

En segundo lugar, el proceso de consolidación de un estado-nación en la década de 1960 guardó una estrecha vinculación con las iniciativas de cooperación internacional en pos del desarrollo y la modernización por parte de organismos como el Banco Mundial. En su estudio sobre el programa de estudios de matemática en Colombia, García (2003) fundamenta que en la década de 1960 el Gobierno nacional respondió a los desafíos cruciales de la deserción escolar causada por el desplazamiento demográfico de las áreas rurales a las grandes urbes. La respuesta para ampliar y fortalecer la educación siguió las políticas de desarrollo de los organismos internacionales que impulsaron la adopción y aplicación de estrategias de planificación tecnocrática en la educación. Una buena educación para el desarrollo significa no solo una dirección política y administrativa de la educación para atender las necesidades del desarrollo económico y social del país, sino también la incorporación de la tecnología educativa para que los procesos de educación sean más eficaces, flexibles y constantemente educativos. Unos años más tarde, esta formulación se hizo más evidente cuando la eficacia educativa (cualitativa y cuantitativamente) se vinculó también a la optimización de la inversión en educación. De este modo, toda la lógica de la educación para el desarrollo como parte de la conducción del Estado iba acompañada de tecnologías educativas concretas que determinaban la conducta de los niños.

Estas dos tendencias se concretaron unos años más tarde en la formulación y aplicación de la Renovación Curricular en la década de 1980. El primer plan de estudios escolar unificado de matemática se formó bajo la dirección de Carlos Eduardo Vasco. Filósofo y matemático, con estudios de posgrado en Estados Unidos y Alemania, y perteneciente a la Compañía de Jesús, Carlos Vasco fue asesor del Ministerio de Educación de Colombia entre 1978 y 1993. Fue el encargado del primer intento sistemático de difundir entre los profesores las ideas basadas en la psicología de la educación matemática (Molano, 2011).

La nueva tecnología de la matemática escolar se denominó "enfoque sistémico", y pretendía diferenciarse de otros intentos de incluir el enfoque de la matemática moderna en la matemática escolar en Colombia. El enfoque sistémico define un sistema (S) como un conjunto de objetos y sus relaciones y operaciones. Todo sistema matemático puede definirse en función de un subconjunto de objetos (A), un subconjunto de operaciones (O) y un subconjunto de relaciones binarias entre los objetos de A, (R); es decir, un sistema puede definirse como $S = (A, O, R)$. El plan de estudios escolar de matemática propuso trabajar con ocho tipos de sistemas: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas métricos, sistemas de datos, sistemas de conjuntos, sistemas de operaciones y relaciones, y sistemas analíticos (MEN [National Ministry of Education of Colombia], 1991, p. 9–17). Para complementar esta ontología de la matemática escolar, su epistemología se fundó sobre la base de la epistemología ontogenética de Jean Piaget como teoría del desarrollo infantil que podía ser operacionalizada pensando en el desarrollo cognitivo de los niños con respecto a la matemática. La Reforma Curricular de los años 1980 en Colombia fue posible a partir de la convergencia de diferentes posturas sobre la esperanza de un nuevo niño colombiano matemáticamente competente y modernizado, que pudiera convertirse en el ciudadano cosmopolita necesario para el progreso del país. La tecnología de la educación matemática se introdujo en la administración educativa con la doble autoridad de la matemática, la psicología cognitiva y la investigación educativa, bajo la dirección de un sacerdote jesuita.

Desde la década de 1980 el currículo escolar oficial de matemática en Colombia incorporó las nociones que recorren las discusiones internacionales sobre investigación en educación matemática, así como las tendencias globales de la educación nacional. Las epistemologías disponibles para el plan de estudios siguen arraigadas en las teorías constructivistas del aprendizaje derivadas de la epistemología ontogenética piagetiana. Las nuevas reformas curriculares trajeron consigo el lenguaje de la "educación basada en resultados" en la década de 1990, vinculado con la era del plan de la Unesco *Educación para todos* (Valero, 2007). Más recientemente, el lenguaje de las competencias y las normas en línea con la lógica de la Organisation for Economic Co-operation and Development (1989, 2001) se ha incorporado en los documentos curriculares. Si bien se reconfiguran los nuevos discursos y en apariencia se desplazan algunos elementos, existe una continuidad en la presunción fundamental de que la educación matemática tiene que ver con la fabricación del niño racional, eficaz y cosmopolita global del siglo XXI.

Hasta aquí hemos argumentado que, desde su introducción en Colombia, la educación matemática ha contribuido a la formación de sujetos históricos puntuales como parte de su inserción en el proyecto colonial y nacional de asimilar la cultura, la economía, el régimen político y también a los ciudadanos al mundo desarrollado, científico occidental y moderno. A esta altura muchos pensarán, pero ¿cuál es el problema? Ese es un objetivo por alcanzar y sería ideal que la educación matemática cumpliera esa función social. Como señalan León y Zemelman (1997), el problema es que la lealtad de las élites latinoamericanas al orden históricamente establecido por la racionalidad blanca europea ha reducido cualquier otra forma de ser a la de una existencia indigna, impedida de hacer y promulgar su propia historia. El sistema de razón de la Modernidad y sus manifestaciones actuales hacen casi imposible la construcción de una subjetividad social basada en la dignidad de ser latinoamericano, o de ser colombiano.

Cuando se aplican en el ámbito de las prácticas matemáticas escolares, las tecnologías educativas que insertan a los alumnos en la estructura del sujeto moderno, cosmopolita y ahora global provocan la exclusión de todos los que no se ajustan a la norma, señalando quiénes y cómo deben ser redimidos los que son diferentes. Popkewitz (2008) sostiene que toda tesis cultural sobre los sujetos de la escolarización produce abyecciones. La abyección es el modo en que se produce la exclusión como efecto de la definición de la norma de inclusión y de su esperanza para los que no forman parte de esa norma. Cuando las directrices curriculares de la matemática anuncian la esperanza de los futuros ciudadanos racionales y cosmopolitas, están al mismo tiempo anunciando quiénes no forman parte de los que se acomodan a la norma. El plan de estudios de matemática, como tecnología del yo, produce el ajuste a la norma en la mente, el cuerpo y la conducta de los niños y, por tanto, opera inclusiones y exclusiones.

§4. De la espacialidad matemática al espacio social y al espacio íntimo

En el caso de las escuelas, los niños y los profesores con los que hemos estado trabajando, la existencia de un discurso deficitario para con los alumnos que viven en el cinturón de pobreza de Bogotá es una expresión del uso efectivo de las herramientas de las tecnologías educativas matemáticas no solo para enseñar matemática a los niños, sino también para crear una clara posición de exclusión para ellos. Los profesores se referían colectivamente a la clase 703 (grado 7, grupo 3) como aquellos que "tienen escasos valores", "tienen poco interés en su aprendizaje, especialmente en el aprendizaje de la matemática" y: ...no tienen un centro de atención bien definido y su dispersión genera una dinámica complicada en el aula. Pasan por encima de los estudiantes que tienen el deseo de involucrarse en las actividades propuestas (García y cols., 2009, p. 18).

Este discurso incorpora la idea de que el niño ideal en edad escolar es uno con "valores altos", que se interesa por el aprendizaje de la matemática, que respeta a los demás niños y que se involucra en las propuestas de los profesores. Es decir, el niño normal y deseado es uno que ha aprendido a ser y a comportarse según las normas de una especie de clase media "culturizada". De este modo, los niños de la clase 703, sus familias y sus experiencias se sitúan como desviados y necesitados de corrección y salvación. En este caso, la mayoría de los profesores encontraban a estos niños tan "desviados" que habían desistido de seguir intentando con ellos.

Era más que evidente que la exclusión de estos alumnos se observaba ya en el contraste constante entre las expectativas de los profesores de que los niños fueran racionales y cognitivos y el compromiso de los alumnos con el mundo. El asunto que se planteaba entonces era cómo podíamos comprometernos como profesores y como investigadores a ir más allá de nuestra comprensión de esa situación, y cómo podíamos comprometer a los alumnos a recuperar una cosa: su dignidad de ser los seres humanos sociales e históricos que eran, con la posibilidad de imaginar un futuro.

Con este trabajo no queremos hacer de salvadores de los niños de la clase 703. De hecho, un año después de nuestro trabajo en la escuela, algunos de los profesores que participaron en nuestro equipo dejaron la escuela por otros trabajos, el director de la escuela fue reemplazado y, muy probablemente, toda la situación volvió a ser la misma de antes. En otros trabajos (por ejemplo, Camelo y cols. (2010); García y cols. (2009)) presentamos el diseño de secuencias didácticas que se basan en los escenarios de investigación de Skovsmose (2001) como una herramienta importante para llevar a la práctica algunas de las preocupaciones de la educación matemática crítica. En este artículo, nos apartamos de esa literatura para reinterpretar el diseño y las actividades desde el punto de vista del conflicto entre las subjetividades que ofrece el plan de estudios de matemática, y la posibilidad de una educación matemática para una subjetividad social.

Como se mencionó anteriormente, la clase 703 era el "grupo problemático" de la escuela: el dolor de cabeza de todos los profesores. Se trataba de un grupo de 39 alumnos de séptimo grado, cuya edad estaba entre 11 y 15 años. La escuela estaba ubicada en las afueras de Bogotá, donde años atrás hubo terrenos que luego se convirtieron en barrios obreros de personas desplazadas a la ciudad debido a los numerosos focos de violencia en el campo colombiano.

Para llevar a cabo esta investigación participativa se tomaron en cuenta todas las consideraciones éticas con respecto a la participación de profesores y alumnos. Los profesores y los alumnos participaron voluntariamente. Los profesores participantes también formaron parte del equipo colaborativo de investigación. Se les informó a los niños y a sus padres y se les pidió permiso para participar. En el siguiente informe mantuvimos los nombres reales de los profesores, ya que son los propios investigadores, pero mantenemos como anónimos los nombres de los niños.

Cuando empezamos nuestro trabajo en la escuela en 2008, Francisco Camelo era profesor de matemática en esa institución. Junto con otros profesores de matemática, ciencias, biología y educación física, Francisco cuestionó la afirmación de que "no había nada que hacer con estos chiquillos". El concepto del porvenir de los alumnos (Alrø, Skovsmose, y Valero, 2009; Skovsmose, 2005) nos permitió en aquel momento alejarnos de una explicación deficitaria de la "falta de compromiso" de los niños con la matemática escolar y la educación basada en las carencias en su entorno. En cambio, estaba la alternativa de pensar en la relación entre el compromiso de los alumnos con su educación (matemática) y su interpretación de las posibilidades de futuro.

Nos encontramos con el desafío de conceptualizar y poner en práctica unidades de enseñanza o aprendizaje de matemática que se basaran en los porvenires de los alumnos y que los introdujeran en un escenario de investigación. ¿Cómo lo hacemos? ¿Dónde empezamos? "Escuchen a los alumnos, pregúntenles por su vida y no intenten adivinar qué puede ser interesante para ellos", señaló Paola Valero a todo el equipo de investigación. "El concepto de espacio es importante en la matemática. ¿Por qué no empezamos por ahí?" Gabriel Mancera propuso una idea y esta idea resonó en Gloria García. Ella formaba parte de un equipo de investigación con geógrafos críticos y participaba en un debate sobre las representaciones del tiempo, el espacio y la construcción de las identidades territoriales. Gonzalo Peñaloza pensó que esta idea podía conectarse con su experiencia de trabajo con cartografía social con profesores en Bogotá, como una forma de que profesores y alumnos pudieran indagar sobre la comunidad escolar, los niños y los problemas que pudieran generar un aprendizaje interdisciplinario y una acción social (Peñaloza y cols., 2006). Parecía que la idea del espacio podía ser fructífera como base para crear un escenario para el aprendizaje de la matemática. Llegar a esta decisión no fue algo sencillo. Hubo muchas discusiones, lecturas e interpretaciones entre el equipo de investigación que hicieron posible la confección de esa idea.

Según los Lineamientos Curriculares de Colombia (MEN [National Ministry of Education of Colombia], 1991), el plan de estudios de matemática en la secundaria debe promover las nociones de espacio en geometría euclidiana y en menor medida en geometría proyectiva. Los contenidos curriculares tienden a reducirse al establecimiento de figuras geométricas y sus propiedades. En la geometría euclidiana, el espacio se construye a partir de la reflexión sobre las propiedades de las formas geométricas, evidenciadas mediante el uso de la regla y el compás. En combinación con el sistema de coordenadas cartesianas, permite pensar en el espacio como un sistema de posiciones que puede describirse de forma precisa y uniforme (Gálvez, 1985). La geometría proyectiva invita a una exploración activa del espacio tridimensional en una realidad externa o imaginada y mediante la representación de objetos sólidos en el espacio. Las directrices describen los procesos cognitivos que los niños deben alcanzar como el resultado de la enseñanza de las nociones centrales de la geometría euclidiana y proyectiva en la definición del espacio:

Se espera que los alumnos pasen de una comprensión intuitiva o sensomotriz del espacio (relacionada con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipular objetos y localizarlos en un entorno) a una conceptual y abstracta relacionada con la capacidad de representar el espacio internamente (MEN [National Ministry of Education of Colombia], 1991, p. 56). El concepto de espacio que hay que reconstruir en la comprensión de los alumnos es el de un espacio racional y referencial con puntos fijos en dos o tres dimensiones. Se supone que el desarrollo conceptual del niño conducirá a una representación interna y abstracta que contribuirá a formar un niño descontextualizado, liberado de las capacidades prácticas de actuar con objetos en el espacio, en particular de los espacios donde desarrolla su vida cotidiana.

Es evidente que la visión curricular del espacio y la espacialidad contrasta con la experiencia de muchos de los alumnos de la clase 703. Sus historias personales en su barrio eran las de un espacio social en una ubicación geográfica en transformación por las prácticas de vivir y sobrevivir, llena de los malos olores de uno de los mayores vertederos de la ciudad. Las sensaciones de desapego y de apego a las nuevas ubicaciones geográficas a causa del desplazamiento forzoso o voluntario de los lugares de origen o las localidades de origen a la ciudad debido a la violencia política eran parte de la vida de los niños. Los espacios íntimos donde algunos niños habían aprendido a ser se encontraban mucho más llenos de suciedad, personas, prácticas, conflictos y sentimientos que los espacios limpios invocados por el espacio euclidiano promovido por la matemática escolar.

En nuestro trabajo, la cuestión de cómo articular una experiencia de enseñanza o aprendizaje en las aulas de matemática que permitiera a los alumnos ir más allá de la subjetividad moderna hacia una subjetividad social tomó forma dentro de una nueva estructura conceptual, permitiéndonos pensar en el espacio como algo que incorpora la experiencia social de los niños con el espacio. La sugerencia de

Skosvmose de crear campos semánticos para organizar escenarios de investigación abiertos (Skovsmose, 1994) fue un punto de partida que nos permitió juntar dos perspectivas adicionales sobre el espacio. El espacio geométrico euclidiano y proyectivo se reconfiguró con la noción de *territorialización* de la geografía crítica, y la noción de *espacio íntimo* en la epistemología social latinoamericana. Visto en retrospectiva, la reconfiguración de la noción de espacio con estos otros dos espacios semánticos referentes al "espacio" puede reformularse como un intento por nuestra parte de descentrar la noción de espacio euclidiano como la manera principal y fundamental de pensar en el espacio que forma parte de un plan de estudios tradicional centrado en la matemática. Coincidimos con Deleuze y Guattari (1987) en la estrategia de descentrar las nociones matemáticas centrales del plan de estudios desplazando su significado a campos semánticos relacionados pero que no son matemáticos. La estrategia de descentramiento es un intento consciente por parte nuestra de articular el plan de estudios en torno a la construcción de la subjetividad. En el desplazamiento de una noción unificada y singular del espacio, se invitó a los alumnos a llenar con sus cuerpos, experiencias y prácticas el vacío impoluto del espacio euclidiano escolar, permitiendo así la posibilidad de ser y saber quiénes son y de imaginar su futuro.

La teoría social contemporánea ha reivindicado el pensamiento sobre el espacio desde el ámbito de la matematización al campo del pensamiento político, económico e histórico (p. ej., Lefèbvre (1991)). Este desplazamiento ha afectado a los discursos geográficos tradicionales, haciendo posible la aparición de la geografía crítica y la preocupación por la inseparabilidad del espacio físico y geográfico de las prácticas y de los procesos de formación de la identidad social y cultural y de la subjetivación (p. ej., Crang y Thrift (2000)). En América Latina, la geografía crítica aporta un análisis geopolítico de la relación entre espacio y poder en los procesos de organización de los territorios a nivel local, regional y mundial. También aborda la cuestión de la apropiación y representación territorial de los diferentes pueblos y comunidades y las reivindicaciones del derecho al territorio mediante la realización de cartografías críticas y sociales basadas en sistemas de información participativos (Delgado, 2006).

La noción de espacio íntimo (Tapia, 1997), anclada en la filosofía latinoamericana contemporánea, nos permitió conectar la relevancia de pensar el espacio, la espacialidad y la construcción de una subjetividad social. Tras la recuperación del espacio como categoría importante para pensar la sociedad y la práctica, Tapia afirma que un espacio social, como posibilidad de constituir un mundo material y cultural, se produce a partir de la relación entre el yo y los otros cuando se configuran y se delimitan diferentes posiciones. Así, analizar el espacio social es una cuestión de "ordenar las posiciones correlativas, es decir, ordenar las coexistencias" (p. 159). Convertirse en sujeto significa una doble acción de reconocimiento de la alteridad y de reconocimiento del yo. Por lo tanto, la posibilidad de una subjetividad social también requiere un espacio íntimo de acción, pero con plena conciencia del otro. Esto es diferente de, por ejemplo, un espacio individual que podría tender a cerrarse en sí mismo. El espacio íntimo está cerca del sujeto, pero en convivencia con el otro.

La reflexión sobre el espacio en las conexiones entre estos tres campos semánticos relacionados (el espacio geométrico, la territorialización y el espacio íntimo) nos llevó a proponer a los alumnos un escenario de aprendizaje bastante diferente al que ofrece el plan de estudios tradicional de matemática. Establecimos tres puntos de entrada en el escenario del aprendizaje: ¿Quién soy? ¿Quiénes somos como miembros de la clase 703 de nuestra escuela? ¿Quiénes somos como habitantes de esta localidad de la ciudad capital? Cada uno de estos puntos de entrada, además de ser pensado como un lugar de aprendizaje, también fue pensado como un "punto nodal" de la subjetividad social que, según Zemelman (1997, p. 30), permite conectar espacios íntimos del ser con espacios colectivos de acción para la búsqueda de un futuro viable diferente.

En cada punto nodal una serie de actividades reunía diferentes nociones matemáticas relacionadas con el espacio, así como otros muchos temas del plan de estudios. Sin embargo, la actividad matemática siempre se llevó a cabo permitiendo conexiones con las experiencias de los alumnos en la familia, en la escuela y en la localidad. Por ejemplo, en el primer punto nodal '¿Quién soy yo?' se pidió a los alumnos que escribieran una historia sobre sí mismos en su familia. Jeimy, una de las alumnas, escribió lo siguiente: Antes había chozas de paja sin servicios públicos, antes no había calles pavimentadas y antes había menos gente. Ahora hay servicios públicos. Las casas tienen uno o dos pisos, hay más gente, 128 parcelas, antes había menos el barrio tiene alumbrado público, pero todavía nos falta el pavimento en las calles y tener un parque donde los niños podamos divertirnos y mejorar el salón comunitario para tener un comedor comunitario y algunas otras necesidades que todos esperamos. (Carta de Jeimy en la actividad "¿Quién soy?").

Las historias personales y familiares se relacionaban con el crecimiento de la localidad y la territorialización de ese espacio en las comunidades donde viven los alumnos. Se utilizó Google Earth como herramienta para localizar los lugares importantes de la práctica. Se utilizaron los mapas para trazar los recorridos y los movimientos que los alumnos suelen realizar en su localidad. Los mapas también permitieron conectar las prácticas de las comunidades en el entorno de la escuela con las prácticas de los niños y sus familias. Muchos alumnos pudieron ubicar sus casas y comprender la relación entre ellos, sus familias, la escuela, las actividades económicas de la localidad e incluso los lugares y las prácticas por las que se veían amenazados, como el narcotráfico, las actividades en torno al enorme relleno sanitario de la localidad, etc.

En cada punto nodal, moverse entre matematizaciones, los espacios geográficos socialmente constituidos y la cercanía con la experiencia de los niños fue una estrategia para descentrar el sentido del espacio como un objeto matemático limpio y abstracto.

§5. La matemática y la subjetividad social para la dignidad de estar siendo

Puede haber muchas formas de pensar acerca de la relación entre la educación matemática y la democracia. Sostenemos que cualquier intento de teorizar sobre esta idea y de intentar llevarla a cabo en la práctica educativa debe considerar los efectos del poder del plan de estudios escolar de matemática en la promoción del sujeto racional, objetivo, sin hogar y cosmopolita de la Modernidad. La tesis del niño matemáticamente competente, sin embargo, se inscribe en tiempos y espacios particulares. Por lo tanto, no existe un análisis universal de cómo el plan de estudios escolar de matemática crea sujetos. Debemos prestar atención al estudio de las historias culturales de lo que constituye a la democracia y en qué condiciones de posibilidad se inscriben las subjetividades matemáticas en las historias nacionales. Si retomar el tema de la educación matemática y la democracia pretende ser un movimiento más allá de los discursos redentores de empoderamiento con y a través de la matemática que efectúa una clara abyección de todos aquellos niños cuyas formas de vida y experiencias no se alinean con las de un niño cosmopolita, entonces tenemos que considerar seriamente cómo queremos entender la democracia y la educación matemática en cada punto histórico y de la sociedad.

En Colombia se nos hizo evidente que las formas de ser y conocer que estaban puestas a disposición por los lineamientos curriculares nacionales en matemática estaban implicadas en la exclusión sistemática de los niños que no se ajustaban a la norma establecida por la tesis del niño como agente cognitivo abstracto y piagetiano sobre el que pretendía actuar el plan de estudios. Descentramos los conceptos clave del plan de estudios de matemática, como el de espacio, en un intento de facilitar la aparición de subjetividades sociales. El descentramiento del plan de estudios de matemática escolar puede abrir la posibilidad de un proyecto educativo en matemática que permita diferentes subjetividades. Esa posibilidad es precisamente una alternativa para una democracia que reivindica la dignidad de estar siendo.

§6. Agradecimientos

Este artículo forma parte del proyecto *Estudio de ambientes de aprendizaje en matemática y procesos de exclusión en el aula* patrocinado por el Instituto Colombiano para el Avance de la Ciencia y la Tecnología (COLCIENCIAS). El proyecto cuenta con el apoyo de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, la Universidad Distrital de Bogotá y la Universidad de Aalborg de Dinamarca.

El artículo es el resultado de muchos años de investigación en colaboración con otros profesores y formadores de profesores como Gonzalo Peñaloza, Sandra Samacá, Claudia Salazar y Maria Rosa González. También agradecemos a los estudiantes de grado y posgrado que han participado con nosotros en el trabajo en las escuelas que conforman el proyecto.

Agradecemos a Thomas Popkewitz y a su "Grupo de los Miércoles" de la Universidad de Wisconsin (EE. UU.), a Gelsa Knijnik de Unisinos (Brasil) y a los miembros del grupo SMERG de la Universidad de Aalborg (Dinamarca) por sus comentarios sobre las versiones anteriores de este artículo.

§7. Intereses contrapuestos

Los autores afirman que no tienen ninguna relación financiera o personal que pueda haber influido de forma indebida en la redacción de este artículo.

§8. Contribuciones de los autores

G.G. (Universidad Pedagógica Nacional) es la persona encargada del proyecto. G.G., F.C., G.M. y J.R. (Universidad Distrital Francisco José de Caldas) participaron en el proyecto mediante la elaboración del diseño curricular y la recopilación de información. P.V. (Universidad de Aalborg) contribuyó al desarrollo teórico del proyecto y redactó el manuscrito, con aportes de todos los autores.

Bibliografía

Ahern, E. (1991). El desarrollo de la educación en Colombia: 1820-1850. *Revista Colombiana de Educación*, *22*, 5–63.

Alrø, H., Skovsmose, O., y Valero, P. (2009). Inter-viewing foregrounds: Students' motives for learning in a multicultural setting. En M. César y K. Kumpulainen (Eds.), *Social interactions in multicultural settings* (pp. 13–37). Rotterdam: Sense Publishers.

Camelo, F., Mancera, G., Romero, J., García, G., y Valero, P. (2010). The importance of the relation between the socio-political context, interdisciplinarity and the learning of the mathematics. En U. Gellert, E. Jablonka, y C. Morgan (Eds.), *Proceedings of the International Mathematics Education and Society Conference* (Vol. 1, p. 199–208). Descargado de http://www.ewi-psy.fu-berlin.de/en/v/mes6/documents/proceedings/Band_1_Finale.pdf

Crang, M., y Thrift, N. (2000). *Thinking space* (Vol. 9). Routledge London.

Damerow, P. (1984). Mathematics for all. En M. Dunkley, B. Nebres, y B. Werry (Eds.), . Paris: UNESCO.

Daston, L., y Galison, P. (2007). *Objectivity*. New York, NY: Zone Books, distributed by MIT Press.

Deleuze, G., y Guattari, F. (1987). *A thousand plateaus: Capitalism and schizophrenia*. Minneapolis, MN: University of Minnesota Press.

Delgado, O. (2006). *Debates sobre el espacio en la geografía contemporánea*. Universidad Nacional de Colombia.

De Mattos, A. C., y Batarce, M. S. (2010). Mathematics education and democracy. *ZDM*, *42*(3), 281–289. Descargado de http://dx.doi.org/10.1007/s11858-009-0232-2

Díaz, A. (2010). Democracia y nación en el siglo XIX colombiano. *La ciudad: Periodismo inédito*. Descargado de http://www.revistalaciudad.com/

Foucault, M. (1971). *The order of things. An archaeology of the human sciences* (*April 1994 edn.*). New York, NY: Vintage Books.

Foucault, M. (1982). The subject and power. *Critical inquiry*, *8*(4), 777–795. Descargado de http://dx.doi.org/10.1086/448181

Foucault, M. (1988). The political technology of individuals. En L. H. Martin, H. Gutman, y P. Hutton (Eds.), *Technologies of the self: A seminar with Michel Foucault* (pp. 145–162). Amherst, MA: University of Massachusetts Press.

Foucault, M. (1997). Technologies of the Self. En M. Foucault y . P. Rabinow (Eds.), *Ethics: Subjectivity and truth* (pp. 223–251). New York, NY: The New Press.

García, G. (2003). *Currículo y evaluación en matemáticas*. COOP. EDITORIAL MAGISTERIO.

García, G., Valero, P., Camelo, F., Mancera, G., Peñaloza, G., Romero, J., y Samacá, S. (2009). *Escenarios de aprendizaje de las matemáticas. Un estudio desde la perspectiva de la educación matemática crítica.* Universidad Pedagógica Nacional de Colombia.

Guerra, C. (1997). Hacia una sociología del sujeto: democracia y sociedad civil. En E. León y H. Zemelman (Eds.), *Subjetividad: umbrales del pensamiento social* (pp. 107–136).

Guillén, F. (1996). *El poder político en Colombia* (*4th edn.*). Bogotá: Planeta.

Gutiérrez, R. (2013). The sociopolitical turn in mathematics education. *Journal for research in mathematics education*, *44*(1), 37–68.

Gálvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria* (Tesis Doctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Mexico.

Herrán Baquero, M. H. (1998). Fundación del colegio máximo de la compañía de Jesús y el colegio de San Bartolomé en el Nuevo Reino de Granada. *Revista Historia de la educación colombiana*, *1*(1), 9–34.

Lefèbvre, H. (1991). *The production of space*. London: Blackwell.

Lemke, T. (2002). Foucault, governmentality, and critique. *Rethinking Marxism*, *14*(3), 49-64. Descargado de https://doi.org/10.1080/089356902101242288 doi: 10.1080/089356902101242288

León, E., y Zemelman, H. (1997). *Subjetividad: umbrales del pensamiento social*. Barcelona: Anthropos.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19–44). Westport, CT: Ablex Publishing.

Lundin, S. (2012). Hating school, loving mathematics: On the ideological function of critique and reform in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(1), 73–85. Descargado de http://dx.doi.org/10.1007/s10649-011-9366-6

MEN [National Ministry of Education of Colombia]. (1991). *Marco general de matemáticas. Propuesta de programa curricular para noveno grado*. Bogotá: MEN.

Meyer, J. W., Ramirez, F. O., y Soysal, Y. N. (1992). World expansion of mass education, 1870-1980. *Sociology of education*, 128–149. Descargado de http://dx.doi.org/10.2307/2112679

Molano, M. (2011). Carlos Eduardo Vasco Uribe. Trayectoria biográfica de un intelectual colombiano: una mirada a las reformas curriculares en el país. *Revista Colombiana de educación*, *61*, 161–198.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (1989). *Education and the economy in a changing society*. Paris: OECD.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2001). *Knowledge and skills for life. First result from the OECD Programme for International Student Assessment (PISA) 2000*. Paris: OECD. Descargado de http://www.oecd.org/dataoecd/44/53/33691596.pdf

Pais, A., y Valero, P. (2010). Beyond disavowing the politics of equity and quality in mathematics education. En B. Atweh, M. Graven, W. Secada, y P. Valero (Eds.), *Mapping equity and quality in mathematics education* (pp. 35–48). New York, NY: Springer.

Pais, A., y Valero, P. (2012). Researching research: Mathematics education in the political. *Educational studies in mathematics*, *80*(1), 9–24. Descargado de http://dx.doi.org/10.1007/s10649-012-9399-5

Peñaloza, G., Boada, M., Acosta, M. G., Becerra, J., Galeano, J., y Gallego, C. (2006). *Territorio y territorialidades en La Candelaria*. Bogotá: Secretaría de Educación de Bogotá.

Popkewitz, T. (2004). The alchemy of the mathematics curriculum: Inscriptions and the fabrication of the child. *American educational research journal*, *41*(1), 3–34. Descargado de http://dx.doi.org/10.3102/00028312041001003

Popkewitz, T. (2008). *Cosmopolitanism and the age of school reform: Science, education, and making society by making the child*. New York, NY: Routledge.

Popkewitz, T. (2009). Curriculum study, curriculum history, and curriculum theory: The reason of reason. *Journal of Curriculum studies*, *41*(3), 301–319. Descargado de http://dx.doi.org/10.1080/00220270902777021

Radford, L. (2004). From truth to efficiency: Comments on some aspects of the development of mathematics education. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, *4*(4), 551–556. Descargado de http://dx.doi.org/10.1080/14926150409556635

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. En L. Radford, G. Schubring, y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215–234). Rotterdam: Sense Publishers.

Rivas Díaz, J. (2005). Pedagogía de la dignidad de estar siendo. Entrevista con Hugo Zemelman y Estela Quintar. *Revista interamericana de educación de adultos*, *27*(1), 113–140. Descargado de https://www.redalyc.org/pdf/4575/457545085021.pdf

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *33*(4), 123–132. Descargado de http://dx.doi.org/10.1007/BF02652747

Skovsmose, O. (2005). Foregrounds and politics of learning obstacles. *For the Learning of Mathematics*, *25*(1), 4–10. Descargado de http://www.jstor.org/stable/40248476

Skovsmose, O., y Valero, P. (2008). Democratic access to powerful mathematical ideas. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education. Directions for the 21st Century* (*2nd edn*) (pp. 415–438). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Sánchez, C., y Albis, V. (2012). Historia de la enseñanza de las matemáticas en Colombia. De Mutis al siglo XXI. *Quipu*, *14*(1), 109–157.

Tapia, M. (1997). El espacio íntimo en la construcción intersubjetiva. En E. León y H. Zemelman (Eds.), *Subjetividad: Umbrales del pensamiento social* (pp. 153–170). Barcelona: Anthropos.

UNESCO. (1992). *Education for all: An expanded vision*. París: UNESCO.

Valero, P. (2007). In between the global and the local: The politics of mathematics education reform in a globalized society. En B. Atweh, A. C. Barton, M. Borba, N. Gough, C. Keitel, y C. Vistro-Yu (Eds.), *Internationalisation and globalisation in mathematics and science education* (pp. 421–439). New York, NY: Springer. Descargado de http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4020-5908-7_23

Valero, P. (2010). Mathematics education as a network of social practices. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. LIV–LXXX). Lyon: Institut National de Récherche Pédagogique.

Valero, P., y Pais, A. (2012). Mathematics education between utopia and reality:

Examining research in contexts of conflict, poverty and violence. En A. Halai y D. Wiliam (Eds.), *Research methodologies from the 'South'* (pp. 159–177). Karachi, Pakistan: Oxford University Press.

Vithal, R. (2003). *In search of a pedagogy of conflict and dialogue for mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Descargado de http://dx.doi.org/10.1007/978-94-010-0086-4

Zemelman, H. (1997). Sujetos y subjetividad en la construcción metodológica. En E. León y H. Zemelman (Eds.), *Subjetividad: Umbrales del pensamiento social* (pp. 21–35). Barcelona: Anthropos.

(Dejamos constancia que, debido a la edición en bibtex, podría haber algunas mínimas diferencias en algunas referencias en relación a cómo aparecen en el artículo original.)

Paola Valero
Departamento de Enseñanza y Aprendizaje, Universidad de Estocolmo
Estocolmo, Suecia
(*En 2012, Departamento de Aprendizaje y Filosofía, Universidad de Aalborg, Dinamarca*)
(✉) *paola.valero@su.se*

Gloria García Oliveros
Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá, Colombia
(✉) *gloriag@pedagogica.edu.co*

Francisco Javier Camelo
Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, Colombia
(✉) *fjcamelob@udistrital.edu.co*

Gabriel Mancera
Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, Colombia
(✉) *gmancerao@udistrital.edu.co*

Gabriel Mancera
Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, Colombia
(✉) *juliohernandorr@yahoo.com*

Recibido: *6 de septiembre de 2022*.
Aceptado: *23 de noviembre de 2022*.
Publicado en línea: *26 diciembre de 2022*.

Revista de Educación Matemática
Volumen 37, N° 3 (2022), páginas 60–65
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Investigación en Educación Matemática

SUBJETIVACIÓN MATEMÁTICA, DEMOCRACIA Y LA DIGNIDAD DE ESTAR SIENDO: UNA DÉCADA DESPUÉS

Paola Valero

Resumen. ¿Qué retos enfrenta la educación matemática hoy en día con respecto a su posible contribución a la democracia? Atención a los tipos de subjetividades que se fabrican en las prácticas de la educación matemática y se promueven con los planes curriculares abre la posibilidad de cuestionar la violencia que suele suceder en el encuentro con las matemáticas escolares. El mundo actual de cambio climático requiere que tal cuestionamiento nos lleve a nuevas imaginaciones pedagógicas que permitan la dignidad de estar siendo.

Palabras clave: Cambio climático, violencia, subjetivación matemática.

Abstract. What challenges does mathematics education face today with respect to its possible contribution to democracy? Paying attention to the types of subjectivities that are fabricated in the practices of mathematics education, and promoted by curricular plans, opens the possibility of questioning the violence that often happens in the encounter with school mathematics. The current world of climate change requires that such questioning leads us to new pedagogical imaginations that allow the dignity of being.

Keywords: Climate change, Violence, Mathematical subjectivation.

Hace una década se publicó el artículo "La educación matemática y la dignidad de estar siendo" (Valero et al., 2012) que se reproduce en esta revista traducido al español. En ese entonces, casi una década después de la finalización de mi tesis doctoral (Valero, 2003), la investigación sobre cómo la educación matemática escolar se forma en medio de procesos políticos y democráticos en las aulas, escuelas y en la sociedad me habían llevado al problema fundamental de la constitución de la subjetividad. En pocas palabras, conocer y ser son inseparables. Aprender matemática es simultáneamente objetivar formas culturales de conocimiento que reconocemos como matemática y llegar a ser un cierto tipo de sujeto con y a través del conocimiento. En la última década ha habido una cantidad creciente de estudios que, dentro del eje socio-cultural-político (Planas y Valero, 2016), han explorado diferentes aspectos significativos de la subjetivación e identidad matemática (p. ej., Graven y Heyd-Metzuyanim (2019)).

El punto central que se discute en el artículo en cuestión coincide con resultados de investigación producidos en otros contextos geográficos (ver p. ej., Yolcu (2019)). Muchos estudiantes posicionados como personas en situaciones de "riesgo" experimentan conflictos al enfrentarse con las prácticas usuales de las aulas de matemática. Tales conflictos ponen al descubierto cómo el fracaso en matemática se conecta menos con las propias capacidades cognitivas de los estudiantes, que con las normas de conocimiento matemático, comunicación, comportamiento e incluso hábitos corporales que se han constituido como "normales" y deseados en las prácticas educativas (ver p. ej., Diaz (2017)), en los planes de estudio (ver p. ej., Llewellyn (2018)) y en la sociedad en general (ver p. ej., Doğan y Haser (2014)). Los procesos de educación matemática siempre conllevan una transformación del ser a través del saber. Esto no es sorprendente, si tenemos en cuenta que, en general, el proyecto mismo de la educación en la escuela es el de enculturar a los niños a través de los conocimientos científicos, científicamente estructurados en planes de estudio escolares.

De una forma u otra, el cambio que requiere la educación —y tener éxito en un área como la matemática— conlleva una violencia. Esta violencia está viva en esos conflictos y confrontaciones entre varias formas de vida de los niños y niñas, sus familias y comunidades, y aquella forma de vida que explícita e implícitamente promete la educación. El fracaso escolar o los problemas de (no) apropiarse de la matemática (escolar) es una expresión de esos conflictos, pues los eventos diarios en el aula son inevitablemente y están constantemente atravesados por las múltiples dimensiones que se cruzan en nuestro estar siendo. Con esto me refiero a que en toda aula y escuela se re-activan a diario diferencias de género u orientación sexual, clase social y estatus socio-económico, de lenguaje, de raza, etnicidad y cultura —incluso aquellas que tienen que ver con sub-culturas juveniles que chocan con las sub-culturas de los adultos. Todas están presentes y se intersecan entre ellas (ver p. ej., Bullock (2018)), también con las diferencias en cómo cada uno se embarca en la objetivación de los conocimientos matemáticos.

Por lo tanto, las historias de desplazamiento, pobreza y también esperanza de los niños y profesores de la clase 703 (Valero et al., 2012) no son algo que se puede ignorar o dejar a un lado para poder concentrarnos en lo que "nos interesa" en matemática: los conceptos, el pensamiento, la geometría, el espacio… Esas historias no se pueden interrumpir ni mucho menos ignorar. Tal vez se puedan momentáneamente dejar a un lado para abrir espacio a la posibilidad de una idea matemática. No obstante, el estar siendo siempre se manifiesta en su complejidad, incluso en el aula de matemática. De ahí la gran enseñanza que humildemente aprendimos en el equipo de investigación de ese entonces: Escuchar a los niños y a las niñas y encontrar maneras de mitigar la violencia del encuentro con las matemáticas escolares nos llevó al intento de desplazar las nociones centrales del currículo para abrirlas con otras ideas que, más que desencaminarnos, nos permitieron re-significar las nociones e intenciones de los planes de estudio en matemática.

Una década ha pasado. Muchos altibajos hemos vivido en todo el mundo: por un lado hemos vivido la promesa global del desarrollo y la riqueza —para algunos— en medio de la crisis financiera, el avance de autoritarismos políticos, la agudización de conflictos culturales y sociales, sin contar los años devastadores de pandemia. En general, los "cambios climáticos" —en un sentido amplio de las transformaciones en las condiciones materiales de existencia de los seres del planeta (Latour, 2018)— que se han gestado y hoy explotan en nuestra cara retan diariamente nuestra necesidad de buscar algún resquicio de sosiego. Mi deseo de escribir un texto que acompañe al artículo en cuestión surge de la pregunta: ¿Hoy puedo, con seguridad, afirmar lo mismo que encontramos en ese entonces? ¿Qué ha cambiado y qué merece conservarse? En particular, ¿cómo concebir esa idea de democracia y su relación con la educación matemática? Sin duda la dignidad del estar siendo es vital para toda sociedad. Parece ser que los avances en las reivindicaciones —y pocos logros materiales— de muchos grupos oprimidos y excluidos han desatado lo que hoy en día se llama la "guerra cultural", una pugna creciente entre visiones que anhelan un regreso al pasado, a las "buenas" tradiciones y a un mundo de privilegio masculino, blanco y "civilizado". Esto en oposición a las múltiples luchas de grupos llamados "diversos" por una dignidad del estar siendo. Toda esta situación sin duda es agravada por la creciente desinformación, los nuevos fenómenos de burbujas mediáticas generadas por las redes sociales y, nada más ni nada menos, por la propagación de una desconfianza en la democracia como forma de gobierno.

Nuevamente un educador matemático —investigador y/o profesor— se preguntaría: ¿Y esto cómo me toca? Por un lado podríamos decir que en este momento, más que nunca, tiene sentido aferrarse a la matemática como un conocimiento que nos exige hacer un movimiento epistémico de objetivación, para poder distinguir lo que es un hecho y una verdad reconocida, de distintas presentaciones idiosincráticas, fabricadas y falsas, incluso cuando ellas se presentan con elementos del discurso matemático como números y diagramas. El peligro bien conocido de "cómo mentir con estadísticas" se ha hecho más actual hoy en día que nunca, en un tiempo en que la tergiversación de los hechos de la vida privada y pública ya no se hace con la manipulación de hechos con los números o las escalas en un diagrama, sino incluso con la negación misma de datos existentes. No se necesita más que adentrarse un poco en las controversias sobre el cambio climático o sobre conteos electorales para presenciar tales manipulaciones. Así que una subjetivación matemática sigue siendo imperante (ver p. ej., Parra (2021)).

Pero, por otro lado, esa subjetivación no puede seguir siendo ni violenta ni ingenua, ni tampoco alinearse con una noción de neutralidad de las matemáticas y de la educación matemática. ¡Al contrario! No se trata de decir que "cualquier cosa vale" ni que las diferencias en las formas de vida y diversidades en el estar siendo de por si generan otros hechos matemáticos. Este es un falso argumento que no capta el punto de las contestaciones que se han hecho en las investigaciones sobre diversidad, inclusión y justicia social en educación matemática. El punto más bien es reconocer que tanto las matemáticas como las matemáticas escolares —al igual que los sujetos de la educación— están atravesadas en sus historias y sus haceres por las múltiples dimensiones de los seres, tiempos y espacios en las que se ponen en práctica. Puesto en términos más concretos, el reto de hoy en día es generar formas de educación matemática que permitan el estar siendo en dignidad. Ejemplos de estas prácticas tanto de investigación como de enseñanza revisan seriamente la ética de la matemática y la educación matemática (ver p. ej., Ernest (2021); Skovsmose (2020, 2021)); y le hacen frente a la reproducción colonial (ver p. ej., Fernandes (2021); Osibodu (2020); Parra y Valero (2021)), al racismo (ver p. ej., Valoyes-Chavez y Andrade-Molina (2022)), a la diferencia sexual (ver p. ej., Gholson y Martin (2019)), a la diferencia por el lenguaje y la cultura (ver p. ej., Caligari, Norén, y Valero (2021)). Es de notar que la mayoría de estas investigaciones y esfuerzos pedagógicos se han localizado en otras latitudes. No obstante en América Latina comienzan a surgir muchos de estos esfuerzos (ver p. ej., Revista Latinoamericana de Etnomatemática).

Y este esfuerzo requiere no sólo de imaginación pedagógica, sino también de arriesgarse a cruzar los límites que las demarcaciones del currículo y las disciplinas académicas han impuesto sobre la manera como nos pensamos y entendemos como "educadores matemáticos". Re-pensar el currículo nos invita a ser profesores de matemática intelectuales, que reconocen las intersecciones de la matemática con otros saberes, otros mundos y otras posibilidades de conocer y de ser. Ser un profesor de matemática intelectual es traer la fascinación por el conocimiento matemático y las amplias relaciones con otros conocimientos para abordar, con seriedad y responsabilidad, el proceso político de transformación del estar siendo de los niños y niñas, con dignidad, mitigando su violencia.

Bibliografía

Bullock, E. C. (2018). Intersectional analysis in critical mathematics education research: A response to figure hiding. *Review of Research in Education*, *42*(1), 122–145. Descargado de `https://doi.org/10.3102/0091732x18759039`

Caligari, L., Norén, E., y Valero, P. (2021). Multilingual students working with illustrated mathematical word problems as social praxis. En *Multilingual Education Yearbook 2021* (pp. 175–194). Springer. Descargado de https://doi.org/10.1007/978-3-030-72009-4_10

Diaz, J. D. (2017). *A cultural history of reforming math for all. The paradox of making in/equality*. Routledge.

Doğan, O., y Haser, Ç. (2014). Neoliberal and nationalist discourses in Turkish elementary mathematics education. *ZDM*, *46*(7), 1013–1023. Descargado de https://doi.org/10.1007/s11858-014-0605-z

Ernest, P. (2021). A dialogue on the deep ethics of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *41*(3), 47–52.

Fernandes, F. S. (2021). Matemática e colonialidade, lados obscuros da modernidade: giros decoloniais pela Educação Matemática. *Ciência & Educação (Bauru)*, *27*. Descargado de https://doi.org/https://doi.org/10.1590/1516-731320210065

Gholson, M. L., y Martin, D. B. (2019). Blackgirl face: Racialized and gendered performativity in mathematical contexts. *ZDM*, *51*(3), 391–404. Descargado de https://doi.org/10.1007/s11858-019-01051-x

Graven, M., y Heyd-Metzuyanim, E. (2019). Mathematics identity research: The state of the art and future directions. *ZDM*, *51*(3), 361–377. Descargado de https://doi.org/10.1007/s11858-019-01050-y

Latour, B. (2018). *Down to Earth: Politics in the New Climatic Regime*. Polity Press.

Llewellyn, A. (2018). *Manufacturing the mathematical child: A deconstruction of dominant spaces of production and governance*. Routledge.

Osibodu, O. (2020). *Embodying Ubuntu, Invoking Sankofa, and Disrupting with Fela: A Co-Exploration of Social Issues and Critical Mathematics Education with Sub-Saharan African Youth*. Michigan State University. Lancing.

Parra, A. (2021). Mathematics education, researchers and local communities: A critical encounter in times of pandemic, pareidolia and post-factualism. En D. Kollosche (Ed.), *Exploring new ways to connect: Proceedings of the Eleventh International Mathematics Education and Society Conference* (pp. 65–80). @zenodo_org. Descargado de https://doi.org/10.5281/zenodo.5336638

Parra, A., y Valero, P. (2021). Propio as a decolonising tool for mathematics education. En A. Andersson y R. Barwell (Eds.), *Applying critical mathematics education* (pp. 71–99). Brill. Descargado de https://doi.org/https://doi.org/10.1163/9789004465800_004

Planas, N., y Valero, P. (2016). Tracing the socio-cultural-political axis in understanding mathematics education. En A. Gutiérrez, G. C. Leder, y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. The Journey Continues* (pp. 447–479). Sense Publishers.

Skovsmose, O. (2020). Banality of mathematical expertise. *ZDM*, *52*(6), 1187–1197. Descargado de https://doi.org/10.1007/s11858-020-01168-4

Skovsmose, O. (2021). Mathematics and crises. *Educational Studies in Mathematics*, *108*(1), 369–383. Descargado de https://doi.org/10.1007/s10649-021-10037-0

Valero, P. (2003). *Reform, democracy and mathematics education: Towards a socio-political frame for understanding change in the organization of secondary school mathematics*. [PhD Thesis, Danish University of Education] Copenhagen.

Valoyes-Chavez, L., y Andrade-Molina, M. V. (2022). Black Immigrant Children: Abjection, In (ex) clusion and School Mathematics Reform. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, *15*, 1–24. Descargado de https://doi.org/doi:10.11144/Javeriana.m15.bica

Yolcu, A. (2019). Research on equitable mathematics teaching practices: Insights into its divergences and convergences. *Review of Education*, *7*(3), 701–730. Descargado de https://doi.org/https://doi.org/10.1002/rev3.3163

Paola Valero
Departamento de Enseñanza y Aprendizaje, Universidad de Estocolmo
Estocolmo, Suecia
(✉) *paola.valero@su.se*

Recibido: *3 de noviembre de 2022*.
Aceptado: *23 de noviembre de 2022*.
Publicado en línea: *26 de diciembre de 2022*.

Sección de Problemas

☞ *por Juan Pablo Rossetti*

En este número, los tres problemas que se presentan están relacionados a la Copa del Mundo de Fútbol, como un pequeño homenaje a los Campeones y porque *la matemática está en todas partes*.

Las soluciones se encuentran en las páginas siguientes.

[Se agradece la colaboración de Bruno Giordano en el primer problema.]

Problema 1. *Cantidad de Mundiales posibles.* En la fase de grupos del Mundial de fútbol hay 8 grupos, de 4 equipos cada uno. Solo 2 equipos de cada grupo pasan a la siguiente fase del torneo; el que sale primero y el que sale segundo. Estos dos equipos pasan a jugar la fase eliminatoria. Se arma un cuadro y se juegan los octavos de final; que luego continúan con cuartos de final, semifinal y final, con el mismo formato que los torneos de tenis, es decir, por simple eliminación. Una vez que comienza el Mundial, pensemos en cuántos *cuadros* distintos podría haber para esta fase eliminatoria, es decir, las distintas posibilidades de que salgan un 1ero y un 2do en cada Grupo, y luego cómo pueden salir los octavos de final, los cuartos, la semi y la final. Supongamos que en el Mundial 2022, cada persona del planeta hacía su pronóstico y elegía un *cuadro* ¿podían elegir los cuadros como para asegurarse que al menos una persona fuera a acertar?

¿Y si le permitimos a cada persona que elija mil cuadros distintos?

¿Cuántos cuadros posibles hay?

Problema 2. *En el Mundial de Fútbol.*

(a) ¿Podría un equipo salir campeón sin ganar ningún partido?
(b) ¿Podría un equipo salir campeón perdiendo dos partidos?
(c) ¿Podría un equipo ganar 6 partidos, empatar uno y no salir campeón?
(d) ¿Podría un equipo empatar 4 partidos, perder dos, ganar uno, y salir campeón?
(e) ¿Podría un equipo ganar dos partidos y quedar eliminado en la fase de grupos?
(f) ¿Podría un equipo no ganar ningún partido y salir primero en su grupo?

(g) ¿Podría un equipo ganar el Mundial sin hacer ni un solo gol?
(h) ¿Podría salir campeón sin ganar ningún partido y perdiendo un partido?
(i) ¿Podría un equipo perder 3 partidos y salir campeón?
(j) Si un equipo pierde los 3 primeros partidos ¿sale último en su grupo?
(k) Si de los tres primeros partidos gana dos y empata uno ¿sale primero en su grupo?

[Aclaración: si un partido va a definición por penales se considera empatado.]

Problema 3. *¡Definición por penales!* En esta definición, Brasil (B) y Argentina (A) están muy parejos: luego del 3er penal pateado por B, quedaron arriba por un gol. A A le quedan 3 penales por patear y a B dos. Debido al gran arquero de A, la probabilidad de convertir de B es de un medio en cada penal. En cambio para A, las chances de convertir cada penal se calculan en $2/3$. En esta situación ¿quién tiene mayor probabilidad de ganar?

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones?

- $\{a_n\}$: 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, ...
- $\{b_n\}$: 1, 3, 5, 7, 9, 15, 17, 21, 27, 31, 33, ...
  que escrita en sistema binario es así:
  1, 11, 101, 111, 1001, 1111, 10001, 10101, 11011, 11111, 100001, ...
- $\{c_n\}$: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29, 31, 41, 43, 59, 61, 71, 73, 101, 103, 107, ...
- $\{d_n\}$: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 17, 25, 38, 57, 86, 129, 194, 291, 437, 656, 985, ...

Podés encontrar las soluciones en las páginas siguientes.

SOLUCIONES

Solución 1. *Respuesta:* No se puede asegurar que aciertan, ni siquiera eligiendo mil cuadros distintos de la fase eliminatoria del Mundial cada persona.

Un simple cálculo combinatorio nos dice que, en cada grupo, las posibilidades de obtener un primero y un segundo son $4 \times 3 = 12$. Como son 8 grupos, el cuadro de octavos de final tiene 12^8 posibilidades. A partir de allí, cada partido tiene 2 posibilidades, hay 2^8 formas distintas de que salgan los octavos. Análogamente, hay 2^4 posibles resultados en los cuartos, 2^2 en las semifinales y 2 en la final. Todos estos números se multiplican para obtener $12^8 \times 2^{15} = 14{,}089{,}640{,}214{,}528$.

Por otra parte, la población del mundo es aprox. 8 mil millones de personas, por lo que nuestro número de cuadros del Mundial es mayor que mil veces la cantidad de habitantes del planeta.

Solución 2. *Respuesta:* Todas son *sí*, excepto al final, las preguntas (i) y (k), en las que la respuesta es *no* o *no necesariamente*.

Quizás lo más sorprendente sea que un equipo podría salir campeón sin hacer ni siquiera un gol. Esto podría ocurrir si en su grupo los 6 partidos terminan 0 a 0 y por tener menos tarjetas rojas y amarillas que los demás (o por sorteo) el equipo avanza a los octavos de final, donde termina sus partidos 0 a 0 pero gana en la definición por penales.

Otra situación notable se da cuando un equipo, con solo 2 puntos, clasifica a la siguiente fase. Esto puede ocurrir si en ese grupo hay un equipo que gana los 3 partidos y los otros tres partidos son empates. esto responde la pregunta (h).

Para responder (b) hay que pensar en un grupo en el que un equipo gana sus 3 partidos y los otros tres equipos se van ganando uno a otro en forma cíclica, por ejemplo: A gana sus tres partidos, B le gana a C, C le gana a D y D le gana a B. Así terminan A con 9 puntos y los otros tres con 3 puntos cada uno.

Solución 3. *Respuesta:* Son muy parejas las chances. De hecho, si pensamos que B va a convertir aprox. 1 penal de cada 2, entonces se espera que sume un gol en los dos penales que le quedan, mientras que A convierte 2 de cada 3, entonces se espera que convierta 2 de los 3 que le quedan en cuyo caso terminarían igualados esta serie.

Uno podría tentarse a decir que las probabilidades de ganar de los dos equipos son las mismas. Pero esto no es así. Como veremos, en este problema, hay una ligera diferencia en favor A, que aparece al desarrollar el modelo de probabilidad adecuado para este ejemplo.

Notemos que $p(B = 0) = (\frac{1}{2})^2$, es decir, la probabilidad de que B convierta cero goles en los 2 penales que le quedan es de un cuarto. Análogamente $p(B = 2) = (\frac{1}{2})^2$. También, $p(B = 1) = 2\,(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$. Por otro lado, $p(A = 0) = (\frac{1}{3})^3$ es la probabilidad que A no convierta goles en los 3 penales que pateará. Análogamente, calculamos $p(A = 1) = 3\,(\frac{2}{3})\,(\frac{1}{3})^2 = \frac{2}{3^2}$, $p(A = 2) = 3\,(\frac{2}{3})^2\,(\frac{1}{3}) = (\frac{2}{3})^2$ y $p(A = 3) = (\frac{2}{3})^3$. Consideramos como independientes los eventos de B y de A, por lo que la probabilidad de combinar dos de ellos es el producto de las probabilidades. Así, realizamos una tabla con todos estos valores.

	$p(A=0) = (\frac{1}{3})^3$	$p(A=1) = \frac{2}{3^2}$	$p(A=2) = (\frac{2}{3})^2$	$p(A=3) = (\frac{2}{3})^3$
$p(B=0) = (\frac{1}{2})^2$	$1/(2^2 \cdot 3^3)$	$1/(2 \cdot 3^2)$	$1/3^2$	$2/(3^3)$
$p(B=1) = \frac{1}{2}$	$1/(2 \cdot 3^3)$	$1/(3^2)$	$2/(3^2)$	$2^2/3^3$
$p(B=2) = (\frac{1}{2})^2$	$1/(2^2 \cdot 3^3)$	$1/(2 \cdot 3^2)$	$1/3^2$	$2/3^3$

Con el cuadro, ahora es fácil hacer la cuentas.

La probabilidad de ganar de A es la suma de tres entradas del cuadro, la que corresponden a cuando A supera por 2 ó 3 a B (ya que A está uno abajo de B). Es decir, la probabilidad de ganar de A es

$$p(A = 3 \wedge B = 0) + p(A = 3 \wedge B = 1) + p(A = 2 \wedge B = 0) = \frac{2}{3^3} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{1}{3^2} = \frac{2+4+3}{3^3}$$

Por lo tanto, la probabilidad de ganar de A es $\frac{9}{23} = \frac{1}{3} = \frac{18}{54}$.

La probabilidad de empatar es la suma de 3 entrads en diagonal del cuadro, donde A suma uno más que B, que arroja el resultado $\frac{19}{54}$.

Mientras que la probabilidad de ganar de B es igual a $p(B \geq A)$, puesto que B ya tenía un gol más que A. Esta se calcula sumando los 6 entradas del cuadro donde B es mayor o igual que A, cuya resultado es $\frac{17}{54}$.

Por lo tanto, A tiene mayor probabilidad de ganar.

Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $a_9 = 82$,
  en general $a_n = n^2 + 1$.

- $b_{12} = 45$, o mejor $b_{12} = (101101)_2$.
  Son los números que escritos en sistema binario son palindrómicos (capicúa).

- $c_{19} = 109$.
  Son los llamados *primos gemelos* (*twin primes*).

- $d_{18} = 1477$.
  d_n es la parte entera de $1{,}5^n = \lfloor (\frac{3}{2})^n \rfloor$.

Viene de páginas anteriores.