

Revista de Educación Matemática

Consejo Editorial

Editor Ejecutivo

Leandro Cagliero, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Editores Asociados

Juan Carlos Pedraza, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Mónica Villarreal, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Comité Editorial

Abraham Arcavi, Weizmann Institute of Science, Israel

Carlos D'Andrea, Universitat de Barcelona, España

Cristina Esteley, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

José Nicolás Gerez Cuevas, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

Susana Paula Graça Carreira, Universidade do Algarve, Portugal

Patricio Herbst, Universidad de Michigan, Estados Unidos

Teresa Krick, Universidad de Buenos Aires - CONICET, Argentina

Ricardo Podestá, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Nélia Maria Pontes Amado, Universidade do Algarve, Portugal

Juan Pablo Rossetti, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Gabriel Rubén Soto, Fac. de Ingeniería, U. Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Argentina

Jhony Alexander Villa-Ochoa, Universidad de Antioquia, Colombia

Registro Nacional de la Propiedad Intelectual N° 168024

ISSN 0326-8780 (versión impresa)

ISSN 1852-2890 (en línea)

Página web: <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index>

Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

Revista de Educación Matemática

Volumen 37, N° 1 – 2022

ÍNDICE

- Curiosidades del 2022 3
- Las matemáticas que unen
Nota Editorial de Juan Carlos Pedraza 95

ARTÍCULOS

- EL ARRASTRE EN UN PROGRAMA DE GEOMETRÍA DINÁMICA. SU DOMINIO DE VALIDEZ COMO ASUNTO DE INTERACCIÓN ENTRE ESTUDIANTES Y DOCENTES
Daniel Arias, Verónica Grimaldi, Horacio Itzcovich, Rodolfo Murúa, Silvia Segal 7
- TASELANDO EL PLANO CON POLÍGONOS CONVEXOS
Ricardo A. Podestá 31
- DIVERSIDAD DE IDEAS CONSTRUIDAS POR ESTUDIANTES SOBRE LOS NÚMEROS REALES, LOS NÚMEROS IRRACIONALES, EL ORDEN Y LA DENSIDAD
Virginia Montoro, Martha Ferrero 61

SECCIONES FIJAS

- ¿Sabías que...?
por L. Cagliero y R. Podestá 93
- Sección de Problemas
por J.P. Rossetti 98

También encontrarás al final las *¡Sucesiones al toque!*

Curiosidades del 2022

Todos los números tienen alguna curiosidad, aquí compartimos algunas del 2022.

Comenzamos con algunas curiosidades generales del 2022 (chequearlas). Los divisores propios de 2022 son 1, 2, 3, 6, 337, 674 y 1011 y su suma da 2034 que es más grande que 2022 y, por lo tanto, 2022 es un número *abundante*. Notar que $337 + 674 = 1011$ y que $337 + 674 + 1011 = 2022$. También es suma de dos números primos consecutivos

$$2022 = 1009 + 1013.$$

Por otra parte, 2022 es un *número de Harshad* (es un número n tal que la suma de sus dígitos divide a n); en efecto,

$$2 + 0 + 2 + 2 = 6 \quad \text{y} \quad 2022 = 6 \times 337.$$

No sólo esto, sino que los siguientes 3 años 2023, 2024 y 2025 también son números de Harshad. Para que se vuelva a dar el hecho de que haya 4 años consecutivos que sean números de Harshad deberíamos esperar hasta el año 3030.

Además, el reverso de 2022 es 2202 y sus cuadrados

$$2022^2 = 4088484 \quad \text{y} \quad 2202^2 = 4848804$$

¡también son reversos! El siguiente año con la propiedad de que el cuadrado del reverso es el reverso del cuadrado es 2101.

Expresiones con los dígitos

2022 puede ser escrito de muchas formas curiosas, por ejemplo:

- Con las operaciones elementales (incluyendo la potenciación) tanto en forma ascendente como descendente con los diez dígitos:

$$\begin{aligned} 2022 &= -(1 + 2) + 3^4 \times (-5 + 6 + 7 + 8 + 9) \\ &= -1 \times 2 + (3 + 4 \times 5) \times (6 - 7 + 89) \\ &= 1234 + 5 - 6 + 789 \\ 2022 &= (9 + 8 \times (7 \times 6 - 5 + 4)) \times (3 + 2 + 1) \\ &= -9 + 87 + \frac{6^5}{4} \times \frac{3}{2+1} \\ &= 9 - 8 - 7 + 6 \times (-5 + (4 + 3)^{2+1}) \\ &= 9 - 876 + (5 + 4) \times 321. \end{aligned}$$

Se puede hacer lo mismo permitiendo también el 10 y existen expresiones de este tipo usando factoriales o raíces cuadradas o ambas ¿te animás a encontrar alguna?

- Usando sólo uno cualquiera de los dígitos:

$$\begin{aligned}
 2022 &= (1 + 1) \times (11 + (11 - 1)^{1+1+1}) \\
 &= 2^{\frac{22}{2}} - 22 - 2 - 2 \\
 &= 3 + 3 + (3 + 3) \times (333 + 3) \\
 &= 4 + (4 + 4) \times (4^4 - 4) + \frac{4+4}{4} \\
 &= (5 + \frac{5}{5}) \times (5 \times 5 + \frac{5^5-5}{5+5}) \\
 &= 6 + 6 \times 6 + 66 \times (6 \times 6 - 6) \\
 &= (7 - \frac{7}{7}) \times (7 \times 7 \times 7 - 7 + \frac{7}{7}) \\
 &= 88 \times (8 + 8 + 8) - 88 - \frac{8+8}{8} \\
 &= \frac{9+9}{9} \times (999 + \frac{99+9}{9}).
 \end{aligned}$$

- La misma representación (decimal) usando un único dígito a :

$$2022 = \frac{(aaaa - aaa + aa) \times (a + a)}{a \times a} = \frac{(aaaaa + aa - a) \times (a + a)}{a \times aa}$$

para cualquier $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (¿por qué funciona?).

- Usando los mismos dígitos en bases y potencias:

$$2022 = 1^3 + 3^6 - 4^1 + 6^4 = 1^2 - 2^3 + 3^6 + 4^1 + 6^4$$

y usando además dígitos consecutivos en las bases:

$$\begin{aligned}
 2022 &= 0^4 + 1^7 + 2^1 + 3^6 + 4^5 + 5^0 + 6^3 + 7^2 \\
 &= 0^7 - 1^8 - 2^4 + 3^6 + 4^5 + 5^1 + 6^3 + 7^0 + 8^2 \\
 &= 0^6 + 1^9 + 2^8 - 3^7 + 4^4 + 5^5 + 6^0 + 7^2 + 8^3 + 9^1.
 \end{aligned}$$

- Como sumas (de potencias) distintas pero con los dígitos involucrados en el mismo orden:

$$2022 = 1^9 + 44^2 + 72^0 + 84^1 = 19 + 442 + 720 + 841.$$

- Como sumas que son iguales al reflejarlas como espejos de arriba-a-abajo o de izquierda a derecha (y recíprocamente):

$$\begin{array}{c}
 8+|+|+|00|+|00|+|+|+8 \\
 |+|+8|+|8+88+8|8+8+8|8+88+8|+|8+|+|
 \end{array}$$

Similarmente, usando el tipo de números de las viejas calculadoras idéntico resultado se puede obtener usando 0's, 1's, 2's y 5's

$$2022 = 2 + 1 + 5 + 1 + 1001 + 1 + 1 + 1001 + 1 + 5 + 1 + 2.$$

Suma de cuadrados y ternas Pitagóricas

- 2022 se puede escribir de 5 formas como suma de 3 cuadrados (sin importar el orden de las sumas y sin usar números negativos)

$$\begin{aligned} 2022 &= 2^2 + 13^2 + 43^2 \\ &= 5^2 + 29^2 + 34^2 \\ &= 7^2 + 23^2 + 38^2 \\ &= 11^2 + 26^2 + 35^2 \\ &= 13^2 + 22^2 + 37^2, \end{aligned}$$

de 15 formas como suma de 4 cuadrados

$$\begin{aligned} 2022 &= 1^2 + 2^2 + 9^2 + 44^2 = 1^2 + 4^2 + 18^2 + 41^2 = 1^2 + 4^2 + 22^2 + 39^2 \\ &= 1^2 + 6^2 + 7^2 + 44^2 = 1^2 + 6^2 + 31^2 + 32^2 = 1^2 + 7^2 + 26^2 + 36^2 \\ &= 1^2 + 9^2 + 28^2 + 34^2 = 1^2 + 10^2 + 20^2 + 39^2 = 1^2 + 10^2 + 25^2 + 36^2 \\ &= 1^2 + 12^2 + 14^2 + 41^2 = 1^2 + 14^2 + 15^2 + 40^2 = 1^2 + 14^2 + 23^2 + 36^2 \\ &= 1^2 + 16^2 + 26^2 + 33^2 = 1^2 + 17^2 + 24^2 + 34^2 = 1^2 + 22^2 + 24^2 + 31^2 \end{aligned}$$

y de una sola forma como suma de 5 cuadrados

$$2022 = 1^2 + 2^2 + 21^2 + 26^2 + 30^2.$$

- 2022 satisface las siguientes ternas pitagóricas: esta

$$1050^2 + 1728^2 = 2022^2$$

donde la hipotenusa mide 2022 y estas

$$\begin{aligned} 2022^2 + 2696^2 &= 3370^2 \\ 2022^2 + 340704^2 &= 340710^2 \\ 2022^2 + 113560^2 &= 113578^2 \\ 2022^2 + 1022120^2 &= 1022122^2 \end{aligned}$$

donde el cateto más corto mide 2022.

Matrices

- Hay 2022 matrices 3×3 con coeficientes 0, 1, 2 de determinante 1. Es decir,

$$\#\{A \in M_{3 \times 3}(\{0, 1, 2\}) : \det(A) = 1\} = 2022.$$

- Hay 2022 matrices cuadradas $n \times n$ con coeficientes enteros positivos que suman 28 y cuyas filas y columnas suman lo mismo (notar que n solo puede ser 1, 2, 4, 7). Por ejemplo:

$$(28), \quad \begin{pmatrix} 1 & 27 \\ 27 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 14 & 14 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cuadrados mágicos

Un cuadrado mágico de tamaño n es un arreglo de $n \times n$ donde se colocan los números $1, 2, \dots, n^2$, de modo tal que todas las filas y columnas y las 2 diagonales principales tienen la misma suma. Más generalmente podemos usar n^2 números distintos consecutivos, pero no necesariamente comenzando desde el 1 sino desde cualquier $k \in \mathbb{N}$. Si además el resto de diagonales rotas (o sea las que se continúan por los bordes del cuadrado) poseen la misma suma, el cuadrado mágico se dice *pandiagonal*.

A continuación damos un cuadrado mágico pandiagonal de 12×12 cuya suma es 2022, formado por 9 bloques que también son cuadrados mágicos pandiagonales de 4×4 de igual suma (¡controlar!).

151	204	97	222	152	203	98	221	153	202	99	220
114	205	168	187	113	206	167	188	112	207	166	189
240	115	186	133	239	116	185	134	238	117	184	135
169	150	223	132	170	149	224	131	171	148	225	130
154	201	100	219	155	200	101	218	156	199	102	217
111	208	165	190	110	209	164	191	109	210	163	192
237	118	183	136	236	119	182	137	235	120	181	138
172	147	226	129	173	146	227	128	174	145	228	127
157	198	103	216	158	197	104	215	159	196	105	214
108	211	162	193	107	212	161	194	106	213	160	195
234	121	180	139	233	122	179	140	232	123	178	141
175	144	229	126	176	143	230	125	177	142	231	124

Por ejemplo, la diagonal principal del primer bloque (arriba a la izquierda) suma $151 + 205 + 186 + 132 = 774$, al igual que la diagonal rota justo debajo de ésta: $114 + 115 + 223 + 222 = 774$.

Muchas de las curiosidades de este artículo han sido obtenidas del artículo *Mathematical Beauty of 2022* de Inder Taneja disponible en <https://inderjtaneja.com>.

EL ARRASTRE EN UN PROGRAMA DE GEOMETRÍA DINÁMICA. SU DOMINIO DE VALIDEZ COMO ASUNTO DE INTERACCIÓN ENTRE ESTUDIANTES Y DOCENTES

Daniel Arias, Verónica Grimaldi, Horacio Itzcovich, Rodolfo Murúa y Silvia Segal

RESUMEN. Desde hace más de dos años venimos desarrollando una investigación que se propone estudiar el proceso de producción de conocimientos geométricos y didácticos de un grupo de docentes-estudiantes¹ en interacción con sus profesores, a raíz de un trabajo de construcciones geométricas mediado por el uso del programa GeoGebra.

El uso de dicho programa introduce una variable estudiada por diferentes autores y autoras que marca una diferencia con el trabajo en lápiz y papel: la posibilidad de impregnarle movimiento a los dibujos que se construyen, es decir, “arrastrarlos”.

El análisis que realizamos del trabajo desarrollado por los y las docentes-estudiantes —en torno a las construcciones geométricas— nos permitió interrogarnos acerca de la relación entre el arrastre, las propiedades de la figura y la validez de lo construido. En este contexto, la idea de “soportar el arrastre”² y su relación con el uso de ciertas propiedades nos resultó insuficiente para interpretar las elaboraciones de los y las docentes-estudiantes en términos de producción de conocimiento.

En este artículo nos proponemos problematizar este asunto a partir del análisis de algunos episodios acontecidos en las clases del Seminario de Geometría de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria de la Universidad Pedagógica Nacional (Unipe).

Palabras clave: Geometría dinámica, Arrastre, Enseñanza de la geometría.

ABSTRACT. For more than two years we have been developing an investigation that aims to study the process of production of geometric and didactic knowledge of a group of teacher-students³ in interaction with their teachers, as a result of a work of geometric constructions mediated by the use of the program GeoGebra.

¹Se trata de docentes de escuelas primarias en ejercicio que se encuentran estudiando una carrera.

²La expresión “soportar el arrastre”, refiere a la invariancia de las propiedades que definen a la figura que se representa mediante un programa de geometría dinámica, al desplazar los elementos que la constituyen.

³These teachers teach in elementary school and they are also studying a career.

The use of this program introduces a variable studied by different authors that makes a difference with the work in pencil and paper: the possibility of impregnating movement to the drawings that are constructed, that is, “dragging” them.

The analysis that we developed of the work carried out by the teacher-students —around geometric constructions— has allowed us to question ourselves about the relationship between dragging, the properties of the figure and the validity of the construction. In this context, “the dragging test”⁴ and its relationship with the use of certain properties was insufficient for us to interpret the elaborations of the teacher-students in terms of knowledge production.

In this article we propose to problematize this issue from the analysis of some episodes that occurred in the classes of the Geometry Seminar of the Bachelor of Mathematics Teaching for Primary Education of the National Pedagogical University (Unipe).

Palabras clave: Dynamic Geometry-Drag-Teaching Geometry.

§1. Introducción. Puntos de partida

En este artículo pretendemos avanzar en una discusión sobre nuevos problemas de enseñanza de la Geometría que se nos presentan al proponer tareas que involucran el uso de un programa de geometría dinámica, en este caso, GeoGebra.

Nos situamos en un aula de formación de Licenciadas y Licenciados en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria, en la cual la enseñanza de la Geometría tiene como punto de partida que las y los docentes-estudiantes se ubiquen en una posición de producción de conocimiento. Desde este marco queremos compartir algunos nuevos desafíos que se presentan para quienes estamos a cargo de dicha enseñanza cuando las interacciones se encuentran mediadas por el software anteriormente mencionado.

En este ámbito nos vimos sorprendidos ante situaciones de interacción con las y los docentes-estudiantes que nos llevaron a reconsiderar la validación de ciertos procedimientos que toman una impronta distintiva respecto de aquellos que ocurren habitualmente cuando se utilizan los instrumentos tradicionales de la Geometría.

En aras de ganar claridad en la exposición de las ideas que se van a ir desarrollando en el presente artículo, es que resulta necesario describir sucintamente el trabajo que realizamos en la carrera mencionada. Las consideraciones que siguen tienen como finalidad contextualizar las tareas que realizamos a la luz de un modo particular de asumir el trabajo geométrico que queremos que viva en el aula, tanto para la formación profesional como en otros niveles de enseñanza.

El trabajo de las y los docentes-estudiantes en la carrera está situado en torno a tres aspectos: uno ligado a la formación disciplinar, es decir, se trata de construir una posición de dominio de la disciplina en los maestros y maestras, ampliando su formación de grado. Otro aspecto, más cercano a la didáctica específica, propone

⁴The expression “dragging test” refers to the invariance of the properties that define the figure that is represented by a dynamic geometry program by moving its constituent elements.

el estudio analítico de proyectos de enseñanza y de producciones teóricas que alimenten las discusiones en el aula de formación. Por último, la construcción de un marco compartido con el objetivo de problematizar las prácticas de enseñanza para su estudio. Estos aspectos se entrelazan continuamente y su presentación separada solo tiene sentido a efectos de una caracterización general.

A lo largo del Seminario de Geometría, se les propone a las y los docentes-estudiantes un conjunto de problemas geométricos con el objetivo de que se involucren en una tarea de producción de argumentaciones que sustenten los conocimientos que ponen en juego en cada resolución. Hemos tomado la decisión de que el uso del programa GeoGebra aparezca desde el inicio de las actividades, más allá de la experiencia que tengan en su uso. Pretendemos que lo discutido y analizado se constituya en un punto de referencia para el trabajo en las aulas de la escuela primaria, aunque en muchos casos los problemas geométricos presentados no sean los mismos que se abordan en el nivel destino de enseñanza. En particular, nos proponemos que las situaciones y la gestión de la clase pongan de relieve aspectos del trabajo matemático-didáctico que desnaturalicen algunas prácticas que asocian la enseñanza de la geometría principalmente a un conjunto de definiciones, afirmaciones y vocabulario en relación a ciertas figuras (Fregona, 2005; Sadovsky, Parra, Itzcovich, y Broitman, 1998). El carácter descriptivo que en numerosas oportunidades se otorga a las tareas presentadas en las escuelas deja de lado un aspecto que nos interesa particularmente y que tiene relación con el potencial anticipatorio y la búsqueda de argumentaciones propias de la Geometría.

De esta forma, una propuesta de este Seminario es que el trabajo de orden matemático (en principio) permita discutir: la pertinencia de las prácticas ostensivas en Geometría, el papel de la visualización, los puntos de apoyo que pueden tener las argumentaciones en la clase, el potencial didáctico de considerar a las alumnas y a los alumnos como productores de conocimiento geométrico, los diferentes niveles de validación de una propiedad, la puesta en juego de los supuestos epistemológicos que asumen diferentes tipos de trabajo geométrico, tanto en la selección de problemas como en su tratamiento en la clases.

Los momentos de exploración de los problemas geométricos propuestos para ser resueltos con GeoGebra se encuentran atravesados tanto por la complejidad del trabajo disciplinar como por el uso del programa.

Para acotar el tipo de problemas geométricos y de tareas, es que hemos elegido, primordialmente, las construcciones geométricas a partir de ciertos datos iniciales. Entendemos que esta tarea permite poner en juego las propiedades de las figuras y al mismo tiempo dar lugar a la búsqueda y emergencia de argumentaciones⁵.

Con respecto al modo de organización de la clase, contemplamos instancias de resolución individual y grupal. Ellas constituyen el punto de inicio para el

⁵En el apartado sobre aspectos metodológicos se profundiza esta idea.

intercambio de conocimientos que, a posteriori, darán lugar a diferentes escrituras, formulaciones y argumentaciones que, desde la mirada de cada docente-estudiante, sustentan el trabajo realizado.

La experiencia de las y los docentes-estudiantes en el uso de programas de geometría dinámica es muy diversa. Los primeros pasos, en general, se suceden en torno a la selección de las herramientas a utilizar, traccionados por la tarea que supone una construcción geométrica. Entendemos que esta selección, luego de las primeras exploraciones, crea un espacio fértil para asociar las decisiones tomadas en acto a una o más propiedades geométricas. En un segundo momento, se instala en la clase un espacio de argumentación con intención de conocer por qué lo realizado responde a la consigna en cuestión.

Justificar el paralelismo, la perpendicularidad o decidir si dos figuras son congruentes, son cuestiones que invitan a la elaboración de diferentes tipos de argumentaciones al trabajar en un entorno de geometría dinámica. Un diálogo entre lo perceptivo y lo argumentativo empieza a constituirse como el modo en que se desarrolla esta parte del seminario. El espacio para la validación de las construcciones permite considerar los diferentes alcances de las formulaciones matemáticas propuestas y sus relaciones con los aspectos procedimentales de la construcción.

El programa GeoGebra permite mover⁶ ciertos elementos con diferentes grados de libertad, de acuerdo a la selección y orden en que se utilicen las herramientas disponibles y del objeto matemático en cuestión. De este modo, el programa va armando un protocolo de la construcción que preserva las relaciones definidas de acuerdo al orden en que estas fueron ejecutadas.

Esta lógica con la cual se ha diseñado el programa (en constante evolución) imprime algunas características que nos resultan muy interesantes a la hora de poner en relación las decisiones que toma un sujeto —al momento de construir un dibujo en GeoGebra— con las herramientas y propiedades de las figuras, asunto central del Seminario. Esta característica resulta de especial interés para quienes, como nosotros, consideran la disposición de los conocimientos de las alumnas y los alumnos como condición para ofrecer situaciones de enseñanza situadas.

Así, por ejemplo, si se construye un cuadrado, que en apariencia lo es o se tiene algún argumento para constatar su construcción, es el mismo programa —mediante el movimiento— quien nos habilita a identificar si se han tomado o no las decisiones explícitas de perpendicularidad y equidistancia que se necesitan para dicha construcción. De aquí se entiende que el programa haya sido construido relacionando propiedades geométricas con herramientas, es decir, para que un dibujo realizado en GeoGebra —que representa a cierta figura— mantenga invariante

⁶GeoGebra, en tanto recurso tecnológico, considera la misma denominación de un punto aunque se lo desplace en el plano.

las propiedades involucradas, es necesario apelar a las herramientas que se vinculan con las relaciones que definen a la figura en cuestión.

De este modo el uso de GeoGebra permite imprimirle una ventaja a las construcciones con respecto al uso del lápiz y papel: la posibilidad de que los movimientos se encuentren “atados” a las relaciones geométricas. Con esta característica, si se ha construido un cuadrado con ciertas herramientas pertinentes, al mover alguno de sus elementos seguirá siendo cuadrado. En este caso se considera que “resiste el arrastre” (Laborde y Capponi, 1994; Restrepo, 2008; Arcavi y Hadas, 2003; Acosta Gempeler, 2005; Soury-Lavergne, 2011).

Algunos estudios sobre la enseñanza, que incluyen programas de geometría dinámica, han aprovechado esta cualidad para realizar clasificaciones en torno a las construcciones en términos de su potencial didáctico⁷. De ellas parece devenir el hecho que si una figura resiste el arrastre entonces está construida mediante relaciones geométricas pertinentes; en cambio, si “se desarma” nos indica que, en algún paso de la construcción, alguna propiedad no se ha utilizado de manera explícita, es decir no se ha recurrido a ciertas herramientas pertinentes. En el presente artículo daremos cuenta de que, para el tipo de trabajo que describimos, estas clasificaciones nos resultaron insuficientes y es por esta razón que hemos necesitado considerar nuevas categorías.

Al principio decíamos que una de las cuestiones directrices de nuestro trabajo en el dictado del Seminario supone que los y las docentes-estudiantes produzcan conocimiento; es condición necesaria entonces acceder a dichos conocimientos para ofrecer tareas que permitan su evolución. Para estas condiciones, como hemos mencionado en el párrafo anterior, no nos fue suficiente que una construcción resista o no el arrastre. Muchos conocimientos que se ponían en juego en ciertas construcciones, constitutivos de sus esquemas geométricos, no se podían relevar de este modo. Intentamos realizar un aporte, no por oposición, sino con la intención de ampliar el constructo teórico y caracterizar ciertas prácticas “interesantes” desde el punto de vista geométrico que exceden el tipo de clasificación propuesta.

§2. Consideraciones metodológicas

Este artículo, como ya fue mencionado, emerge de una investigación que venimos desarrollando en la Universidad Pedagógica Nacional y que se propone estudiar el proceso de producción de conocimientos geométricos y didácticos por parte de un grupo de docentes-estudiantes, en interacción con sus profesores⁸, en el marco de las condiciones que plantea el desarrollo de un seminario de Geometría que forma parte de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria. Más específicamente, el estudio focaliza en el período en que se involucra

⁷Estos aspectos se desarrollan en el Marco Teórico.

⁸Los profesores y profesoras del Seminario también son integrantes del proyecto de investigación.

a las y los participantes del Seminario en un trabajo de construcción de figuras geométricas, mediado por el uso del programa GeoGebra, así como la reflexión sobre el mismo proceso de resolución.

Las construcciones geométricas, bajo ciertas condiciones, favorecen el estudio de las propiedades de las figuras. ¿Por qué afirmamos esto? Al intentar realizar un dibujo que sea representante de una cierta figura —recurriendo a los datos con los que se cuenta y utilizando ciertos instrumentos y trazos—, la exigencia de preservar o lograr atrapar en esa representación las propiedades o características que la definen, pone en relación el dibujo —o los dibujos— con dicho referente teórico para que el trazado sea reconocido como una de las posibles representaciones del objeto que se pretende construir, incluso más allá de lo que indique “el ojo”. Es decir, se trata de establecer si los elementos que se dan para representar una figura la determinan o no, y este análisis pone en juego propiedades geométricas (Sadovsky y cols., 1998).

En el desarrollo del Seminario se les solicitó a las y los docentes-estudiantes la entrega de todos los ensayos realizados al intentar resolver algunos de los problemas, sean estos erróneos, incompletos o correctos, con la finalidad de “rastrear” el recorrido, las dificultades, las transformaciones que operaron, etc. En este sentido, aprovechamos una ventaja con que cuenta GeoGebra que es la posibilidad de acceder al proceso de construcción mediante su protocolo.

Cada clase del seminario fue grabada en video así como registrados algunos diálogos o debates con audios. Se transcribieron todas las grabaciones con la finalidad de contar con diversas fuentes para el análisis del proceso de producción de ideas matemático-didácticas por parte de las y los docentes-estudiantes.

Numerosos fenómenos que ocurrieron en el aula del Seminario y que no habíamos anticipado emergieron posteriormente a la luz del análisis de las grabaciones desarrollado por el equipo. Esta diferencia en el tiempo nos impidió volver al aula para poner en debate con los y las docentes-estudiantes algunos aspectos que identificamos como nodales.

Previo al dictado de este Seminario habíamos observado que muchas prácticas de enseñanza que involucran el uso de GeoGebra se apoyaban en una clonación (Damisa, M.L., y Piedra Cueva, 2017) de actividades pensadas originalmente para ser desarrolladas en lápiz y papel, lo que nos llevó a interrogarnos acerca de las tareas que propondríamos y los recursos que podrían desplegar los y las docentes-estudiantes, íntimamente asociados con dicha práctica. Anticipábamos que el movimiento o arrastre pondría en tensión las concepciones sobre la geometría y su enseñanza que tenían los y las docentes-estudiantes, habituados al trabajo con lápiz y papel e instrumentos geométricos. El análisis posterior que realizamos —dentro del equipo de investigación— de las producciones que emergieron en el aula del Seminario nos alertó que las categorías a las que pudimos tener acceso

para comprender y explicar algunas de las construcciones geométricas comenzaron a resultarnos insuficientes.

§3. Referencias teóricas

Diferentes trabajos (Laborde y Capponi, 1994; Berthelot y Salin, 1994; Sadovsky y cols., 1998; Itzcovich, 2005, etc.) dan cuenta de las dificultades que encuentran muchos y muchas docentes para lograr otorgarle sentido a la enseñanza de la Geometría. Tanto en su experiencia escolar como en su formación inicial, la perspectiva que suelen elaborar las maestras y los maestros sobre la enseñanza de esta rama de la matemática queda asociada principalmente a un conjunto de definiciones, afirmaciones y vocabulario que se aplican a ciertas figuras.

La perspectiva recientemente descrita incide en el despliegue de prácticas de enseñanza —asociadas a los objetos geométricos— que han sido identificadas en diferentes investigaciones como “un conjunto de procedimientos didácticos que caracteriza cierta forma de introducir las nociones a través de “definiciones” (Fregona, 2005). Se elude, de esta manera, cualquier tipo de interacción entre los objetos presentados y las actividades intelectuales que podrían desarrollar las y los estudiantes al enfrentarse a un problema que demande la producción de relaciones geométricas (Berthelot y Salin, 1992). Este tipo de práctica *ostensiva* (Ratsimba-Rajohn, 1977; Berthelot y Salin, 1992; Fregona, 2005) tiene como supuesto que la percepción, la manipulación de dibujos y las definiciones, por parte de los alumnos y las alumnas, les permitirían “ver” el conjunto de características que definen a las nociones presentadas.

En una primera aproximación, entendemos que los objetos geométricos están caracterizados por relaciones que justamente constituyen el propósito del estudio de la Geometría. Las relaciones que se pueden establecer entre los elementos que constituyen una figura —o entre figuras— no provienen de la experiencia sensorial, ni de las medidas, sino que son el resultado de procesos deductivos, dentro de un cierto sistema axiomático. Se trata de un tipo de trabajo que involucra la posibilidad de producir o inferir relaciones que verifican las figuras, a partir de los datos que se disponen y de propiedades conocidas, de manera independiente de la experimentación. Sin embargo, en la trayectoria de las maestras y los maestros tanto lo sensorial como lo empírico intervienen en el proceso de construcción de un vínculo con la Geometría, de un modo que nos proponemos problematizar.

Estas consideraciones ponen en el centro la complejidad de las relaciones entre dibujos y figuras, considerando, en principio, que un dibujo es una marca, un trazo, en tanto que la figura sería el objeto ideal, teórico que resulta representado por dicho dibujo. Diferentes autores y autoras (Arsac y cols., 1992; Fregona, 1995; Laborde y Capponi, 1994; Berthelot y Salin, 1994, etc.) comparten la perspectiva que sostiene que la figura es el objeto geométrico descrito por el texto que la define,

una idea, en tanto que el dibujo es una representación de este objeto (Parzysz, 1988). Laborde (1997) incluye la idea de dibujo en tanto significante de un referente teórico (que anteriormente se ha designado con el término de figura). Y va un poco más allá:

La figura geométrica consiste en el emparejamiento de un referente dado con todos sus dibujos, queda entonces definida como el conjunto de pares formados por dos elementos, siendo el primer elemento el referente, el segundo uno de los dibujos que lo representa; el segundo elemento se toma del universo de todos los dibujos posibles del referente. El término figura geométrica así entendido remite al establecimiento de una relación entre un objeto geométrico y sus posibles representaciones. (Laborde, 1997, p.67)

Al considerar desde la enseñanza de la Geometría la inclusión del desplazamiento o el movimiento de los dibujos que se construyen, se vuelve a poner en el centro la complejidad de las relaciones entre dibujos y figuras. La posibilidad de movimiento o “arrastre” genera una expectativa sobre el resultado de las decisiones tomadas: si el dibujo se deforma o no, si sigue siendo lo que se intentaba dibujar o se desarma. Hipotetizamos que esta “sorpresa” (Arcavi y Hadas, 2003) abona al análisis de las relaciones entre las propiedades de la figura, las herramientas utilizadas y las relaciones geométricas subyacentes.

A lo largo de todos estos años, la noción de arrastre se fue profundizando y resignificando. Restrepo (2008) menciona a varios autores (Arzarello, Olivero, Paola, y Robutti, 2002; Olivero, 2003) que plantearon diferentes usos y sentidos del desplazamiento por parte de las y los estudiantes, durante un proceso abierto de resolución de problemas utilizando el software de geometría dinámica llamado Cabri⁹. Posteriormente, Restrepo (2008) estudiando la génesis del desplazamiento utiliza estas caracterizaciones del movimiento en su investigación y a raíz de las mismas, identifica nuevos sentidos.

Como sostienen estos autores y autoras, al mover un dibujo realizado en un programa de geometría dinámica, a partir de sus puntos móviles, interviene una nueva variable que no está presente en lápiz y papel: el tiempo. En consecuencia, es posible considerar inicialmente el dibujo original y luego el dibujo en su posición final, lo que involucra una mirada discreta. Esta perspectiva, que Olivero (2003) denomina foto-desplazamiento, no focaliza en el proceso de cambio del dibujo original.

⁹El programa CABRI-GÉOMÉTRE II fue diseñado por Jean Marie Laborde y Franck Bellemain en la Universidad Joseph Fourier de Grenoble (Francia) a principios de los años '80. Al igual que otros programas de geometría dinámica permite la realización de dibujos que se pueden “mover” conservando las propiedades que les han sido atribuidas en la construcción.

Por otro lado, cuando sí se considera a toda la familia de dibujos resultante del movimiento, [Olivero \(2003\)](#) lo llama cine-desplazamiento. Esta mirada continua, creemos que potencia el análisis de los invariantes de la figura, en función de cierta intencionalidad docente.

[Restrepo \(2008\)](#) toma estos dos desplazamientos, pero les incorpora nuevos sentidos. En particular, nos detendremos en dos de ellos: desplazamiento para validar una construcción y desplazamiento para invalidarla. Veamos las definiciones que incorpora la investigadora:

1. Mover para validar una construcción (prueba de arrastre): mover todos los puntos móviles de una construcción para ver si conserva las propiedades aparentes en el estado inicial. Si es así, entonces se valida la construcción; en el caso contrario, se invalida, la construcción, no se construyó de acuerdo con las propiedades geométricas requeridas.

El sujeto asume que la construcción es correcta y que, gracias al desplazamiento, ésta será validada; por lo tanto, es posible que se sorprenda al encontrar una posición en la que su construcción pueda ser invalidada. Para poder validar una construcción, el desplazamiento debe observarse continuamente y, por lo tanto, utilizar un cine-desplazamiento.

2. Desplazamiento para invalidar una construcción: mover los puntos base de una construcción para encontrar una posición que permita invalidarla. El sujeto asume que la construcción no se construyó correctamente y utiliza el desplazamiento para encontrar una posición para invalidarla. El objetivo es encontrar una configuración particular de la figura, el desplazamiento se utiliza de manera discreta, por lo que usamos un foto-desplazamiento (p. 44).

Nos resulta desafiante, en función de nuestra experiencia e investigación en la enseñanza de la Geometría incorporando el programa GeoGebra, problematizar estos conceptos teóricos. Creemos que estudiar sus alcances, sus límites, la misma idea de arrastre y sus diferentes sentidos y usos, puede resultar un insumo potente para propiciar un debate didáctico en nuestras aulas, aspecto que detallaremos a lo largo de las próximas páginas con la intención de abrir a nuevas miradas posibles.

Problematizar estos distintos usos y sentidos que podrían adquirir los desplazamientos es parte de la intención de este trabajo, en particular el referido a la idea de “soportar el arrastre”.

§4. Dos episodios: se desarma, pero...

A continuación presentamos dos episodios acontecidos en nuestras aulas de la Universidad que abonaron a nuestros interrogantes. El primero refiere a la construcción de un rectángulo desarrollada por una docente-estudiante que recurre a la propiedad de cuatro ángulos rectos pero que “se desarma” al mover alguno de sus elementos. El segundo episodio también refiere a una construcción de un rectángulo a partir de dos de sus lados, que son perpendiculares, en la cual la construcción no soporta el arrastre a pesar de considerar la propiedad de lados opuestos iguales y un ángulo recto. Estas resoluciones dieron origen al estudio de nuevas condiciones y relaciones entre figuras que no habíamos anticipado y nos movilizaron a intentar problematizar la noción de “soportar el arrastre”.

4.1. Episodio 1: ¿soporta o no soporta el arrastre? Una de las tareas que las y los docentes-estudiantes debían resolver en la segunda clase del Seminario, implicaba la construcción de un rectángulo con GeoGebra de manera tal que, al mover cualquiera de sus elementos, siguiera siendo rectángulo. Es decir, que la construcción “soporte el arrastre”. Este problema tenía por finalidad, entre otras cuestiones, establecer relaciones entre el movimiento y las herramientas utilizadas como medio para tratar las propiedades del rectángulo, propiedades que las y los docentes-estudiantes ya conocían.

El asunto clave era el debate que se pretendía desarrollar en torno a la relación entre dichas propiedades y las herramientas a las que recurrían para su construcción, asumiendo que, en numerosas oportunidades, ciertas propiedades pueden ser expresadas o reconocidas por las y los docentes-estudiantes, pero no siempre son puestas en juego a la hora de resolver un problema geométrico. El arrastre resulta un buen recurso para tratar esta cuestión.

Una de las docentes-estudiantes, Ornella, desarrolló la siguiente construcción¹⁰:

dibujó en primer lugar, con la herramienta *Segmento*, un segmento de extremos AB , ambos puntos libres, es decir, se pueden mover por cualquier lugar de la pantalla. Luego, con la herramienta *Perpendicular*, seleccionó el segmento y trazó

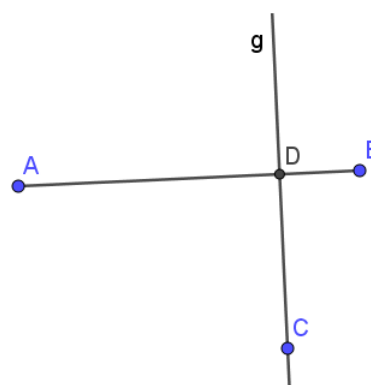


FIGURA 1. Segmento AB , g recta perpendicular a AB , punto C y punto de intersección D entre la recta y el segmento.

¹⁰Le recomendamos al lector o a la lectora ingresar al siguiente enlace e ir recorriendo la construcción de Ornella viendo el protocolo de construcción: <https://www.geogebra.org/m/ajkvqens>

una perpendicular por un punto C —libre— que, en principio, no forma parte del segmento ni de la recta en la que se encuentra dicho segmento. Así, determinó el punto de intersección D entre el segmento y la recta perpendicular, tal como se puede observar en la Figura 1:

A continuación, dibujó un punto E sobre el segmento AB y una recta perpendicular al segmento AB que pasa por E , tal como se observa en la Figura 2:

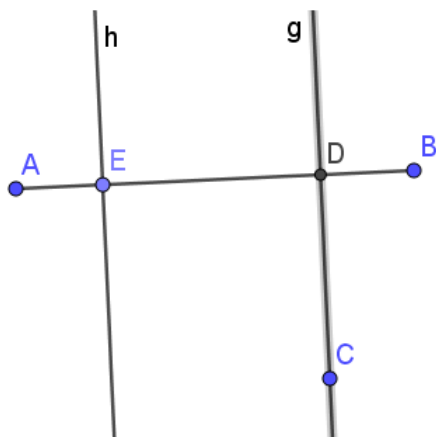


FIGURA 2. Punto E sobre el segmento AB y recta h perpendicular al segmento AB por el punto E .

Finalmente trazó una nueva recta perpendicular a la última dibujada (h), que pasa por C , marcó el punto F como intersección, determinando los cuatro vértices del rectángulo. Recurrió a la herramienta *Polígono* para “marcar” el rectángulo $EFCD$, tal como se identifica en la Figura 3:

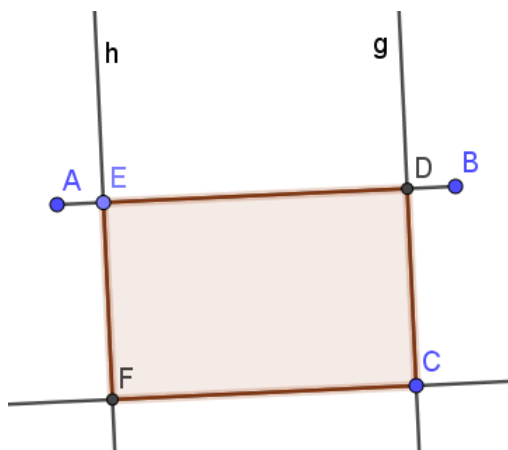


FIGURA 3. Recta perpendicular a h que pasa por C , punto F y polígono $EFCD$.

Ahora cabe preguntarse: esta construcción ¿soporta el arrastre? Es decir, al desplazar cualquier punto móvil, la construcción ¿se desarma o no? Notemos que, al desplazar C o E , como se muestra en la Figura 4, podemos generar otros rectángulos.

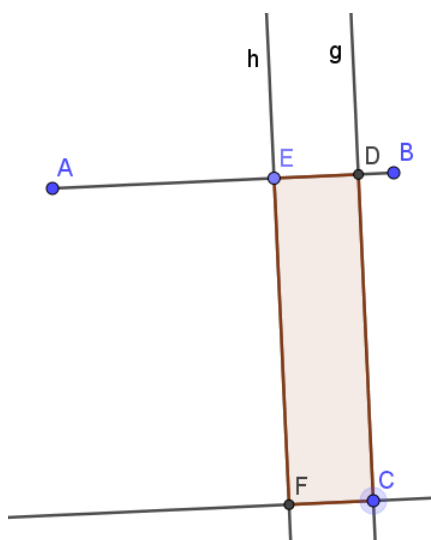


FIGURA 4. Nuevo rectángulo generado a partir del movimiento de E y C .

Más aún, podemos asegurar que este nuevo cuadrilátero es rectángulo por el proceso de construcción de Ornella, que garantiza los cuatro ángulos rectos.

Veamos ahora en la Figura 5 qué ocurre cuando movemos C —que era punto libre— “más allá”¹¹ de B :

¹¹Al decir “más allá” de B , hacemos referencia al movimiento de la recta g hacia la derecha —a través del punto C — hasta que la misma no interseque al segmento AB , tal como se muestra en la Figura 5.

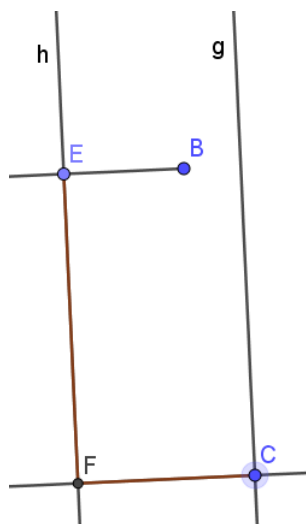


FIGURA 5. Un posible movimiento de C para que el rectángulo desaparezca.

En principio, utilizando el desplazamiento para invalidar una construcción —retomando a Restrepo (2008)—, la imagen anterior parece mostrar que la construcción de Ornella no soporta el arrastre ya que se encontró una configuración particular donde no es posible determinar un rectángulo. Sin embargo, como hemos mencionado anteriormente, en este artículo nos proponemos problematizar esta idea.

Veamos dos cuestiones. En primer lugar, la docente-estudiante consideró una de las relaciones que caracterizan a un rectángulo: cuatro ángulos rectos. En segundo lugar, a pesar de que AB es un segmento, es posible identificar que al mover el punto A , el B , y el C , se obtiene toda la “familia” de rectángulos¹². Cabe preguntarse entonces, ¿soporta o no soporta el arrastre?

Analicemos el primer asunto. En la Figura 5 vimos un caso donde al mover C hacia la derecha de B ¹³, el dibujo deja de representar un rectángulo. Pero esto también ocurre cuando C está a la izquierda de A , como se muestra en la Figura 6.

¹²Más adelante volveremos sobre esta cuestión.

¹³Si bien apelamos a expresiones que no forman parte del vocabulario geométrico, las consideramos en función de haber sido las que emergieron en el aula.

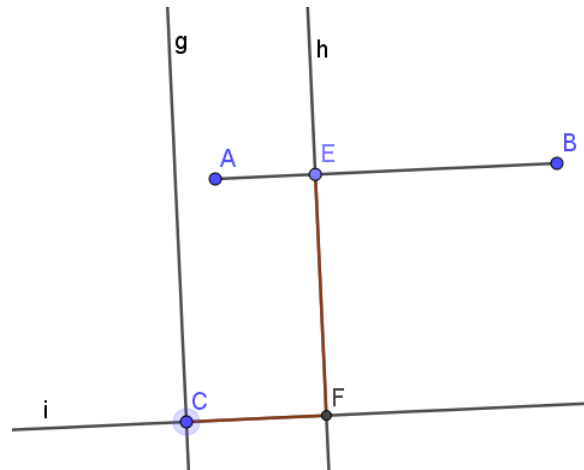


FIGURA 6. Al mover C hacia la izquierda de A el rectángulo también desaparece.

Pensemos ahora en las condiciones geométricas que se deben verificar para que la construcción soporte el arrastre. Si se trazan dos rectas (j y k) perpendiculares al segmento AB y que pasan por A y B respectivamente y luego se definen los puntos de intersección entre dichas rectas y la recta i —trazada anteriormente por Ornella— (ver Figura 7), la condición para que el rectángulo siga siéndolo es que C pertenezca al segmento GH ; donde G y H fueron previamente definidos con el trazado de las nuevas rectas perpendiculares.

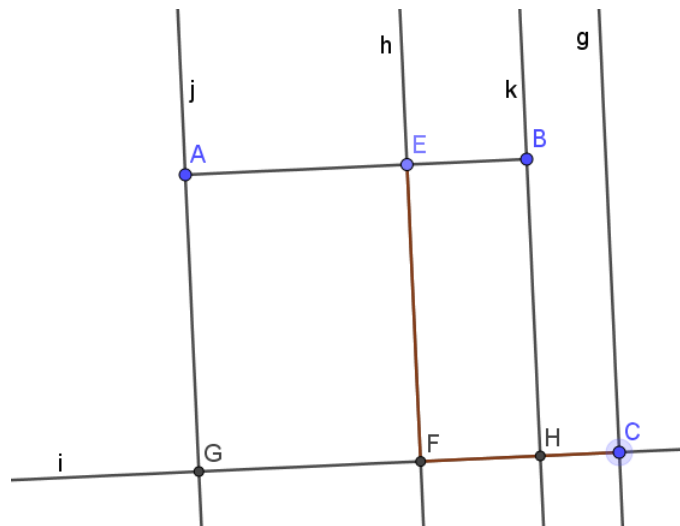


FIGURA 7. Trazado de j y k y definición de los puntos G y H como intersección.

Esta es una de las condiciones que se le puede solicitar a la construcción para que soporte el arrastre.

Pasemos ahora a la segunda cuestión. Ya hemos mencionado que es posible generar todos los rectángulos al desplazar ciertos puntos móviles de la construcción de Ornella. Entendemos que fijados A y B , para que haya rectángulo, C tiene que pertenecer al segmento GH . Pero como A y B son libres, el segmento puede ser “tan grande” como se quiera, es decir, se puede alargar “infinitamente”. Por lo tanto, más allá de no poder hacerse empíricamente, podemos suponer que es posible construir cualquier rectángulo que se quiera —a partir de la construcción de Ornella—, ya que puede variarse la longitud de sus lados, manteniendo siempre los cuatro ángulos rectos.

Iniciamos este episodio mencionando el sentido que nosotros le habíamos otorgado anticipadamente a esta tarea: establecer relaciones entre las herramientas utilizadas para la construcción, el movimiento y las propiedades del rectángulo que se pondrían en juego. Desde esta intencionalidad nos resultó insuficiente considerar la construcción en términos de “soporta el arrastre” o “no soporta el arrastre”. Entendemos que esta dicotomía limita las interacciones que se podrían desarrollar dentro del aula.

Ornella, en el momento de la discusión colectiva, sostuvo que hizo su construcción “a partir del segmento (AB) , perpendicular, perpendicular, perpendicular...”. Es decir, la docente-estudiante recurre a relaciones que caracterizan a los rectángulos y sin embargo el mismo deja de serlo para ciertos movimientos. En cambio, para “otros arrastres”, a partir de ciertos elementos, se preservan todas las relaciones y es posible generar toda la familia de rectángulos. En este sentido, se puede identificar que la familia que genera la construcción de Ornella incluye otras figuras (poligonales abiertas con tres ángulos rectos) y la de los rectángulos es una subfamilia de las figuras mencionadas anteriormente. Esto nos resulta diferente a lo acontecido en otras experiencias de nuestra práctica docente. Por ejemplo, cuando frente a la tarea de construir un rectángulo que soporte el arrastre algunos alumnos construyen la familia de los cuadrados. En este último caso, la familia que se construye está incluida en la que se buscaba dibujar; en cambio, en el caso de Ornella, la familia que construyó incluye a la que se pretendía dibujar.

En consecuencia, nuevas relaciones son requeridas y que no habían sido anticipadas. Por ejemplo, la idea de polígono abierto o polígono cerrado para poder interpretar los movimientos y sus consecuencias en términos de relaciones geométricas. En este juego, no se trata entonces sólo de analizar si soporta el arrastre o no, sino la incidencia también del procedimiento de construcción como condicionante de la invariancia frente al arrastre. Es decir, hay relaciones geométricas que pueden ser explicitadas en las construcciones realizadas bajo las cuales se preserva el arrastre y otras condiciones bajo las cuales el arrastre no se preserva. Este debate, entendemos, también abona a la producción de propiedades o conjeturas en torno a ellas.

4.2. Episodio 2: El dibujo se desarma pero... Otra tarea que se les propuso a los y las docentes-estudiantes fue completar el dibujo de un rectángulo a partir de dos segmentos AB y BC perpendiculares ya dibujados en la pantalla, tal como se muestra en la Figura 8¹⁴. La construcción debía llevarse a cabo sin usar las herramientas *Paralela* y *Perpendicular* de manera que, al mover cualquiera de sus elementos, siga siendo rectángulo.



FIGURA 8. Dibujo que aparece en la pantalla al abrir el archivo.

En el dibujo original, A y B son puntos libres y el punto C se mueve sobre una recta (oculta) perpendicular al segmento AB y que pasa por B . ¿Por qué inhabilitamos las herramientas de paralelismo y perpendicularidad? Así planteado, esperábamos que los y las docentes-estudiantes apelen a otras propiedades que permitan asegurar que la construcción sea un rectángulo, desarrollando al menos tres procedimientos diferentes: garantizando ángulos rectos a través del uso de la herramienta *Ángulo de amplitud dada*, trasladando lados opuestos iguales, mediante el uso de la herramienta *Compás*, o bien apoyarse en las propiedades de las diagonales. Una vez realizada la construcción, se pondría el foco en la validación de la construcción, tomando como referencia las propiedades del rectángulo asociadas a las herramientas utilizadas.

La situación habilita a problematizar cuáles son las condiciones mínimas que garantizan que la construcción sea rectángulo y, en ese sentido, tratar con la relación entre definición y propiedades de las figuras. Se da lugar, así, al estudio de definiciones alternativas del rectángulo.

Algunas y algunos docentes-estudiantes apelaron al uso de la herramienta *Compás* para trasladar las medidas de los lados que se ofrecían como dato y generar lados opuestos iguales. De esta manera, los conocimientos disponibles acerca de las propiedades de las circunferencias, contruidos mayoritariamente a partir de experiencias en lápiz y papel, fueron movilizados para resolver esta situación¹⁵.

¹⁴En el siguiente link se encuentra la consigna del problema tal como fue presentada en el seminario. <https://www.geogebra.org/m/fatxnagm>

¹⁵Le recomendamos al lector o lectora que ingrese al siguiente link para explorar el comportamiento de la construcción: <https://www.geogebra.org/m/rvsugeq7>

La Figura 9 muestra algunas de las configuraciones que se obtienen al mover los puntos A , B y C de esta construcción, la cual permite obtener la “familia” de rectángulos.

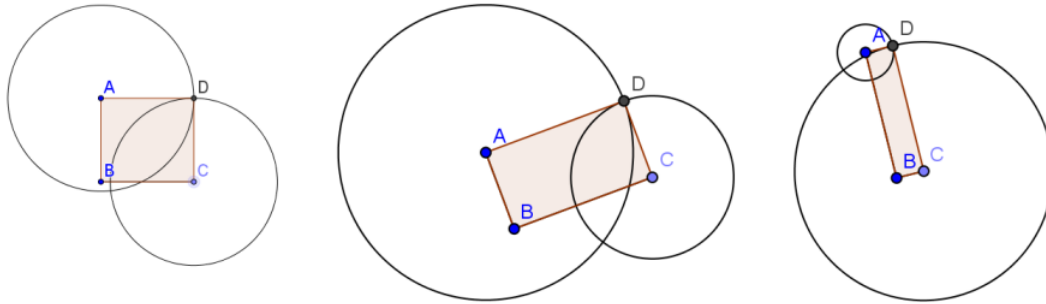


FIGURA 9. Rectángulos obtenidos a partir del arrastre de los puntos A , B y C .

En la puesta en común, se discutió sobre cómo se puede asegurar que se trata de una familia de rectángulos si sólo se sabe que los lados opuestos son iguales y que el ángulo B es recto. Es decir, cómo se puede demostrar que ese cuadrilátero tiene, efectivamente, los cuatro ángulos rectos. Trazando la diagonal AC , como muestra la Figura 10 (a) se puede inferir que los dos triángulos obtenidos son congruentes y como B es recto entonces el ángulo D también. Del mismo modo se infiere que los ángulos A y C son iguales a partir del trazado de la otra diagonal, como muestra la Figura 10 (b): dado que se trata de ángulos interiores de un cuadrilátero convexo, se puede asegurar que son ángulos rectos.

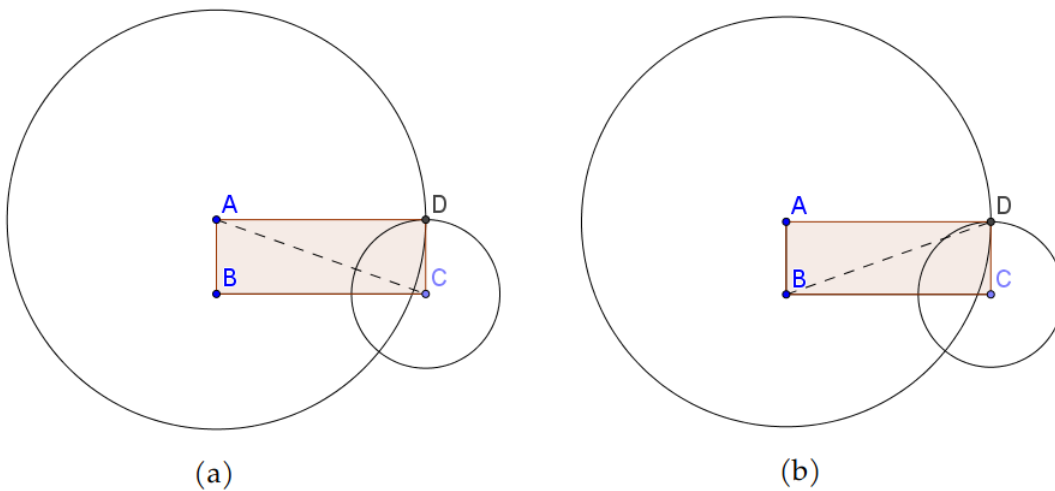


FIGURA 10. Figuras de análisis para plantear una demostración.

Configuraciones como las que analizamos en la Figura 9, que por el modo en que se lleva adelante la construcción garantiza lados opuestos iguales y un ángulo recto, aseguran en efecto, cuatro ángulos rectos. Ubicar las características iniciales de la construcción en tanto condiciones mínimas que garantizan que la figura sea un rectángulo permite elaborar una definición diferente a la que circula usualmente. Así, esta construcción nos sugirió en ese momento la siguiente definición alternativa: un rectángulo es un cuadrilátero que tiene un ángulo recto y lados opuestos iguales. Veremos a continuación que estas características definen un universo más amplio de figuras, una de las cuales es el rectángulo.

El episodio sobre el cual nos queremos detener tuvo lugar fuera del aula de formación, cuando en una de nuestras reuniones de investigación volvimos sobre estas construcciones. En este contexto, comenzamos a mover los puntos A , B y C y advertimos que al mover el punto C sobre la recta BC , el rectángulo “se desarma” como se muestra en la Figura 11.

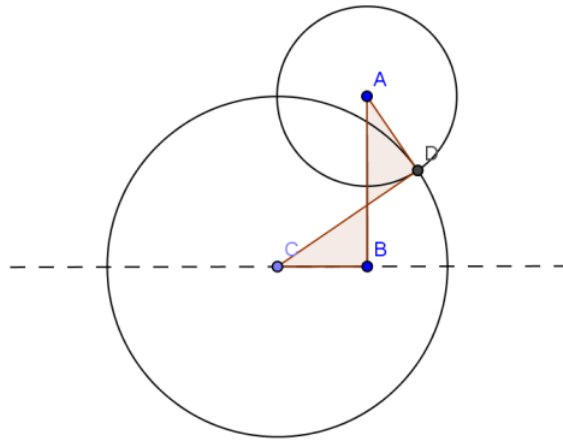


FIGURA 11. Al mover el punto C sobre la recta que contiene a BC , el rectángulo se desarma.

4.3. Explorando el arrastre del punto C . Cuando trazamos las circunferencias, quedan determinados dos puntos de intersección D y E , tal como se muestra en la Figura 12.

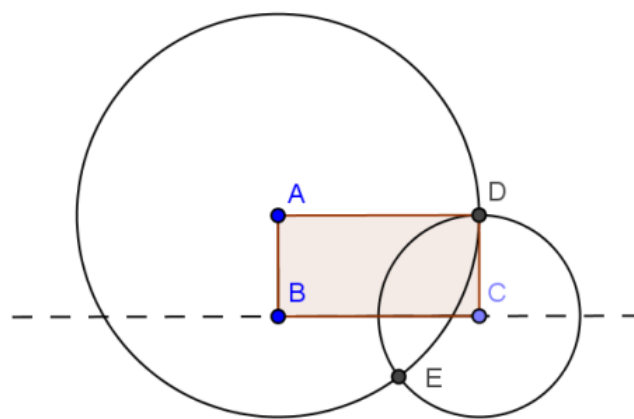


FIGURA 12. Puntos de intersección de las dos circunferencias que garantizan lados iguales.

En nuestro caso, para dibujar el rectángulo solicitado usamos el punto D , sin considerar el segundo punto de intersección. Esto podría explicarse por el hecho de que buscábamos una figura en particular: dado que queríamos construir un rectángulo, sabíamos que el punto D estaría “a la misma altura” de A . Así, desestimamos de manera implícita el punto E . Analizaremos más adelante cómo el movimiento de C colaboró en que nos resulte necesario considerar el punto E .

Es interesante señalar, asimismo, que cuando se hace la construcción en lápiz y papel, este segundo punto E de intersección de las circunferencias puede resultar “invisible” ya que habitualmente se dibujan arcos y no circunferencias. En la construcción del rectángulo en GeoGebra, este punto se “ve” en el dibujo y el hecho de elegir el punto D y no usar este otro punto E pasa inadvertido. En este sentido, podríamos afirmar que el segundo punto, también en este ámbito, parece resultar “invisible”. Una primera conjetura que formulamos fue que el punto C debía moverse sólo sobre una de las semirrectas para que la figura siga siendo rectángulo. Pero además, identificar este segundo punto de intersección de las circunferencias nos llevó a profundizar el estudio de las dos figuras y sus relaciones.

Si tomamos en cuenta los dos puntos de intersección y usamos la herramienta *Polígono* podemos dibujar simultáneamente dos figuras: el rectángulo buscado $ABCD$ y los “dos triángulos”. Moviendo el punto C sobre la recta, el rectángulo se transforma en un cuadrilátero cruzado y viceversa, como se muestra en la Figura 13¹⁶.

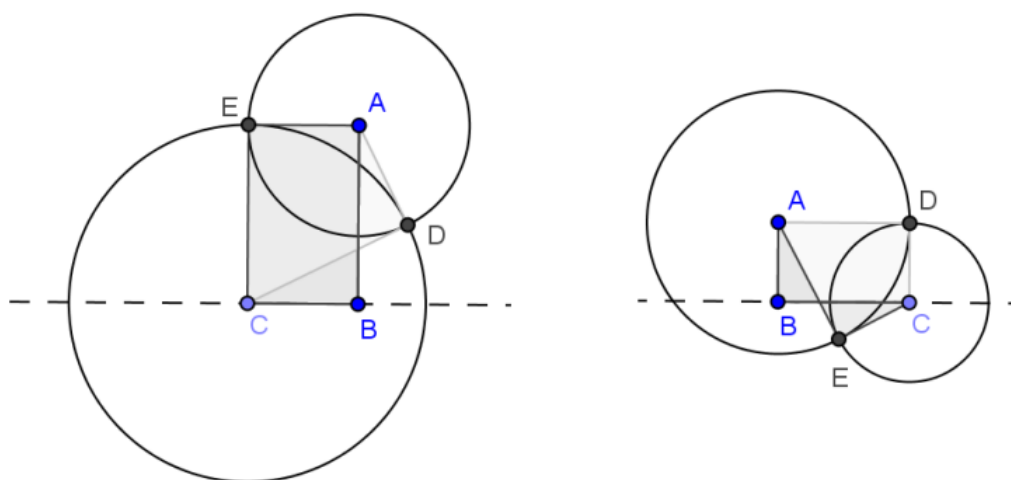


FIGURA 13. Figuras resultantes a partir del arrastre del punto C .

Resulta relevante destacar que si bien el programa nos habilita a mover el punto C por toda la recta, nunca antes habíamos llevado el arrastre de este punto “a la izquierda” de B . Hasta el momento en que emergió este episodio, el movimiento

¹⁶El lector o la lectora puede explorar el comportamiento de esta construcción en el siguiente link: <https://www.geogebra.org/m/gnv9dccx>

que le imprimíamos a C quedaba reducido a una semirrecta, y no por condicionamientos del entorno. Nos preguntamos entonces por qué habremos limitado el arrastre de este modo.

Entendemos que la seguridad que teníamos de que la construcción era válida se combinaba con nuestra experiencia de lápiz y papel, en la que este procedimiento produce efectivamente un rectángulo. Esa seguridad nos llevaba a mover los puntos “sólo un poco”, sin considerar la exhaustividad del movimiento. Advertimos, a partir de esta situación, que el arrastre de los puntos en las construcciones de GeoGebra no es “ingenuo”, tampoco para quienes, como nosotros y nosotras, tenemos cierto recorrido en el estudio de la Geometría y en el uso de este programa.

4.4. Las relaciones entre la nueva figura y el rectángulo. La construcción geométrica que se obtiene utilizando el segundo punto de intersección de las circunferencias nos generó nuevas preguntas: ¿Cuáles son las propiedades del rectángulo que se mantienen en esta nueva figura? ¿Cómo caracterizarla? Los segmentos que se cruzan, ¿se cortan en su punto medio?

En un primer momento nuestra exploración fue puramente empírica: apelamos al arrastre de los puntos A , B y C , y usamos la herramienta *Distancia o longitud* para elaborar nuestras primeras conjeturas sobre las propiedades de esta figura. Si bien no nos ayudó a demostrarlas, nos permitió precisar las relaciones que la caracterizan y cuáles de ellas era necesario demostrar.

El arrastre de los puntos nos permitió hipotetizar, más aún, afirmar que los dos triángulos que componen la nueva figura son congruentes. Pero... ¿por qué?

Apelando a la congruencia de los triángulos ABC , ADC y AEC de la Figura 14 podemos demostrar que los dos triángulos ADF y CBF son congruentes entre sí.

Esta nueva figura es un rectángulo cruzado, tiene cuatro lados, dos de los cuales se intersecan en un punto que no es un vértice y tiene dos pares de lados iguales pero sólo dos ángulos rectos.

Una propiedad interesante que relaciona a las dos figuras que se obtienen a partir de la construcción que hemos discutido (rectángulo y rectángulo cruzado) es que ambas están inscritas en una misma circunferencia cuyo centro es la intersección de las diagonales del rectángulo, como se muestra en la Figura 15. Dejamos a cargo del lector o de la lectora la demostración de esta propiedad.

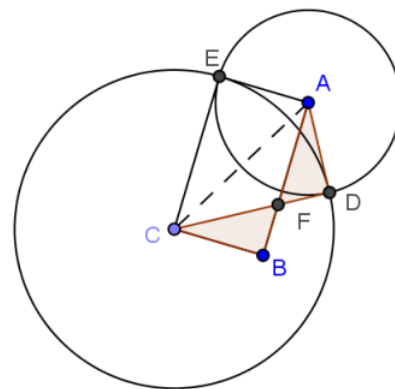


FIGURA 14. Rectángulo cruzado.

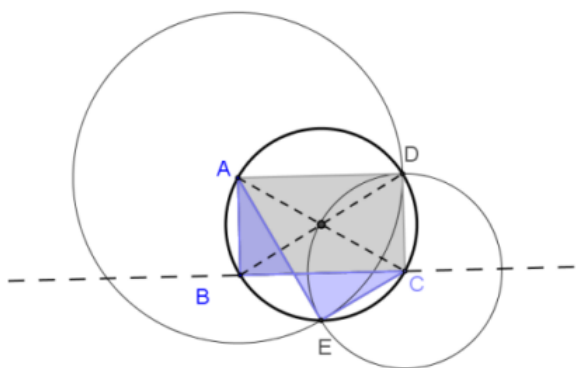


FIGURA 15. Rectángulo y rectángulo cruzado inscriptos en la misma circunferencia.

Queremos resaltar que este debate surge de problematizar la construcción cuando arrastramos el punto C sobre la recta. Es el movimiento el que puso en cuestión nuestras certezas y nos indujo a estudiar las condiciones para que la construcción se ajuste a la consigna, así como a la elaboración de nuevas propiedades y relaciones geométricas que no habíamos anticipado.

Volvamos al origen de la construcción. Si el punto C que se ofreció originalmente como vértice del rectángulo hubiera estado sobre una semirrecta, nada de esto hubiera sucedido. Por lo tanto, tal como propusimos en el episodio 1, queremos analizar la incidencia que tiene el procedimiento de construcción como condicionante de la invariancia frente al arrastre además de considerar si la construcción soporta el arrastre o no.

Una vez validada la construcción y analizadas las condiciones bajo las cuales preserva el arrastre, puede resultar interesante promover el debate acerca de las propiedades en juego cuando la figura original ya no soporta el movimiento. En nuestro caso, nos llevó a revisar la validez de la construcción para inferir que los ángulos EAB y ECB son rectos sólo porque la figura construida (el rectángulo) es un cuadrilátero convexo, característica que no habíamos tenido en cuenta antes de todo este recorrido.

§5. Reflexiones finales

Nos propusimos en este artículo problematizar la idea de “soportar el arrastre”, intentando abonar a un proceso de ampliación de su sentido.

Los y las docentes-estudiantes que llevaron a cabo las construcciones en los episodios analizados tienen disponibles propiedades que verifican las figuras que son objeto de estudio; saben que el rectángulo tiene cuatro ángulos rectos y lados opuestos iguales y paralelos. Con estos conocimientos y algunos otros menos disponibles en relación al uso de GeoGebra, comunican al programa una cierta construcción, a partir de las herramientas que el mismo ofrece y que ellos y ellas hipotetizan que atraparán las propiedades que intentan poner en juego. Podemos afirmar que cuando los y las docentes-estudiantes deciden recurrir a las herramientas *rectas paralelas*, *rectas perpendiculares* o *circunferencias*, anticipan que su uso les garantizará la presencia de los ángulos rectos y la igualdad en

las longitudes de los lados opuestos. En este caso se conjugan conocimientos geométricos y herramientas de GeoGebra que las sostienen.

Una construcción usual en la escolaridad de un rectángulo en lápiz y papel, se inicia con un segmento y luego se recurre a una escuadra que se desplaza para obtener una perpendicular (semirrecta) que pase por uno de los extremos de dicho segmento. En cambio, como analizamos en el episodio 1, la construcción con GeoGebra de la recta perpendicular al segmento no exige considerar alguno de sus extremos ya que el arrastre permite ubicarla en cualquier lugar del plano y luego moverla para que pase (al menos visualmente) por alguno de los extremos del segmento, a partir de un punto C arbitrario que define a dicha perpendicular.

En el episodio 2, el proceso de selección de un único punto de intersección entre las dos circunferencias interpretamos que remite a la tarea que implica la construcción de un rectángulo. Al mismo tiempo, la experiencia en lápiz y papel puede influir en las decisiones que se toman, ya que no siempre se dibujan las dos circunferencias completas (se suelen dibujar “arcos”), en consecuencia, no “aparecen” los dos puntos de intersección.

En ambos episodios, creemos que el arrastre que se le puede imprimir a las construcciones, además de involucrar conocimientos geométricos, está condicionado por la tarea que se solicita (en nuestro caso, construir un rectángulo). En consecuencia, en ciertas oportunidades, quien realizó la construcción limita el arrastre de los puntos móviles a los lugares del plano donde se cumplen las condiciones requeridas.

En este marco, el análisis de la pertinencia de las construcciones geométricas involucra no solo al movimiento sino también a la determinación del conjunto de puntos —o los lugares de la pantalla— en los cuales dicho movimiento o arrastre preserva las relaciones que se le intentó impregnar al dibujo. Es decir, existiría un *dominio de validez del arrastre*, que definimos como *el conjunto de restricciones que tienen los puntos móviles de la construcción para que soporte el arrastre*.

Consideramos que esta idea podría abonar, en principio, a tratar con diferentes cuestiones vinculadas a la enseñanza. Por un lado, a la interpretación de las construcciones geométricas realizadas por las y los docentes-estudiantes en términos de propiedades que pudieron ser consideradas dentro del dominio de validez del arrastre en contraposición de aquellas otras que no fueron consideradas al realizar la construcción y que generan, en algún lugar del plano, que el dibujo se deforme.

Por otro lado, analizar el dominio de validez del arrastre podría colaborar en la tarea de elaboración de argumentos que expliquen los motivos por los cuales esa construcción no soporta el arrastre en todo el plano.

Además, este análisis podría favorecer la identificación de otros objetos geométricos que surgen a partir del arrastre de algunos puntos móviles de la construcción, habilitando un espacio de exploración y búsqueda de propiedades con el fin de caracterizarlos.

Todas estas consideraciones —y otras que podrían surgir— se conjugan con el tipo de tarea que se propone, las propiedades involucradas de manera explícita o implícita, los procedimientos de construcción y las decisiones que se fueron tomando. Decimos entonces que el dominio de validez del arrastre depende de todas estas variables y que es propio de cada proceso de construcción.

Bibliografía

- Acosta Gempeler, M. (2005). Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. *Educación Matemática*, 17(3), 121-140.
- Arcavi, A., y Hadas, N. (2003). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5(1), 25-45.
- Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Gichard, Y., y Mante, M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Lyon, Francia: Presses Universitaires de Lyon. Collection IREM.
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik/International Reviews on Mathematical Education*, 34(3), 66-72.
- Berthelot, R., y Salin, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. (Tesis Doctoral no publicada). Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, Bordeaux, Francia.
- Berthelot, R., y Salin, M.-H. (1994). L'enseignement de la géométrie 'a l'ècole primaire. *Grand N*(53), 39-56.
- Damisa, C., M.L., D., y Piedra Cueva, M. (2017). *Geometría en el aula con GeoGebra. Una experiencia de trabajo colaborativo en la escuela*. Montevideo, Uruguay: Grupo Macro Editores.
- Fregona, D. (1995). *Diferentes dominios de declaración sobre las figuras*. Ponencia de la IX CIA EM.
- Fregona, D. (2005). *Prácticas ostensivas en la enseñanza de la matemática*. (Vol. 18). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Laborde, C. (1997). Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig (Ed.), *Investigar y enseñar. Variedades en educación matemática* (p. 33-48). Grupo Editorial Iberoamericano.
- Laborde, C., y Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 14(1.2), 165-210.
- Olivero, F. (2003). *The proving process within a dynamic geometry environment*. (Tesis Doctoral no publicada). University of Bristol, Bristol, Inglaterra.

- Parzysz, B. (1988). Knowing vs Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19(1), 79-92.
- Ratsimba-Rajohn, H. (1977). *Etude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques* [Memoire de Diplôme d'études Approfondies no publicada].
- Restrepo, A. M. (2008). *Genese Instrumentale du déplacement en Geometrie Dynamique chez des eleves de 6 eme* (Tesis Doctoral no publicada). Université Joseph-Fourier-Grenoble I, Grenoble, Francia.
- Sadovsky, P., Parra, C., Itzcovich, H., y Broitman, C. (1998). *Matemática. Documento de trabajo N° 5. La enseñanza de la Geometría en el 2º Ciclo*. GCBA (Inf. Téc.).
- Soury-Lavergne, S. (2011). De l'intérêt des constructions molles en géométrie dynamique. *MathémaTICE*, 25(1), 1-17.

ARIAS, DANIEL

Universidad Pedagógica Nacional-Argentina

(✉) daniel.arias@unipe.edu.ar

GRIMALDI, VERÓNICA

Universidad Pedagógica Nacional-Argentina

(✉) veronica.grimaldi@unipe.edu.ar

ITZCOVICH, HORACIO

Universidad Pedagógica Nacional-Argentina

(✉) horacio.itzcovich@unipe.edu.ar

MURÚA, RODOLFO

Universidad Pedagógica Nacional-Argentina

(✉) rodolfo.murua@unipe.edu.ar

SEGAL, SILVIA

Universidad Pedagógica Nacional-Argentina

(✉) silvia.segal@unipe.edu.ar

Recibido: 12 de julio de 2021.

Aceptado: 9 de marzo de 2022.

Publicado en línea: 25 de abril de 2022.

TESELANDO EL PLANO CON POLÍGONOS CONVEXOS

Ricardo A. Podestá

RESUMEN. En este artículo damos un panorama sobre la clasificación de los embaldosados del plano euclídeo por copias de un único polígono convexo (teselados monoedrales convexos). Primero mostramos que el teselado con polígonos regulares sólo es posible con triángulos, cuadrados y hexágonos, hecho ya conocido por los antiguos griegos, y que si el polígono es no-convexo entonces hay infinitos teselados posibles. Así, nos enfocamos en teselados convexos con polígonos no-regulares. Primero mostramos que cualquier triángulo o cuadrilátero tesela el plano. Después mostramos que un polígono que tesela el plano debe tener 6 lados o menos. A continuación, nos ocupamos de los hexágonos y mostramos que sólo hay 3 familias distintas de hexágonos convexos que teselan el plano. Finalmente consideramos el caso de los pentágonos que es más delicado, cuya clasificación completa pudo terminarse muy recientemente en 2017. Mostramos que hay sólo 15 familias distintas de pentágonos que teselan el plano.

ABSTRACT. In this article we give a panoramic view over the classification of tilings of the euclidean plane by using copies of a single convex polygon (convex monohedral tilings). First, we show that a tiling with regular polygons is only possible by using triangles, squares and regular hexagons, a fact wellknown by the ancient greeks, and that if the polygon is not convex then there are infinite possible tilings. In this way, we focus on convex tilings with non-regular polygons. First, we show that any triangle or quadrilateral tiles the plane. Then, we show that a polygon that tiles the plane must have at most 6 edges. Next, we consider the case of hexagons and show that there are only 3 different families of convex hexagons tiling the plane. Finally, we deal with pentagons, whose classification is more involved, and could be completed recently in 2017. We will show that there are 15 different families of pentagons tiling the plane.

Palabras clave: Embaldosados, polígonos convexos, polígonos regulares.

Keywords: Tilings, plane, convex polygons, regular polygons.

§1. Introducción

Teselar un plano (o embaldosar un piso en lenguaje coloquial) es un tema tan fascinante, tanto desde el punto de vista matemático como artístico, que ha cautivado a la humanidad desde siempre. Estos embaldosados han sido usados como ornamentación de templos, palacios y edificios importantes en diferentes épocas y culturas (¡de ahí el nombre!), llegando a un pico de maestría en la famosa fortaleza medieval *La Alhambra* situada en Granada, España.

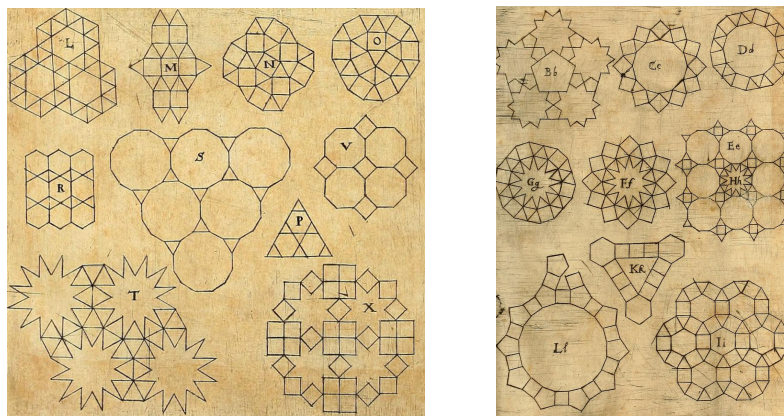
De hecho, en los innumerables mosaicos que adornan los pisos, paredes y techos de sus palacios, se pueden encontrar muchas variantes representando los 7 grupos de frisos y los 17 grupos de simetría del plano. Recordemos que un friso es una figura plana con grupo discreto de simetrías que contiene traslaciones en una sola dirección (no entraremos en



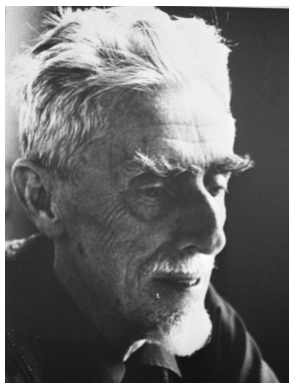
detalle sobre esto, que de por sí ya sería un tema para otro artículo). En la Figura 2 se pueden ver apenas 3 mosaicos, pero invito al lector a buscar por su cuenta en la red imágenes de mosaicos de La Alhambra para deleitarse.

El famoso astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler (Weil der Stadt, 27/12/1571 – Ratibona, 15/11/1630) se interesó por numerosos temas relacionados entre sí como los poliedros regulares, la forma de los copos de nieve, los empaquetamientos de esferas y los teselados del plano. Él fue el primero que intentó realizar un estudio sistemático de dichos temas. En la Figura 1 vemos algunos de sus experimentos y teselados del plano que aparecen en su libro *Harmonices Mundi* (La armonía de los mundos, 1619).

FIGURA 1. Estudios de Kepler sobre teselados del plano



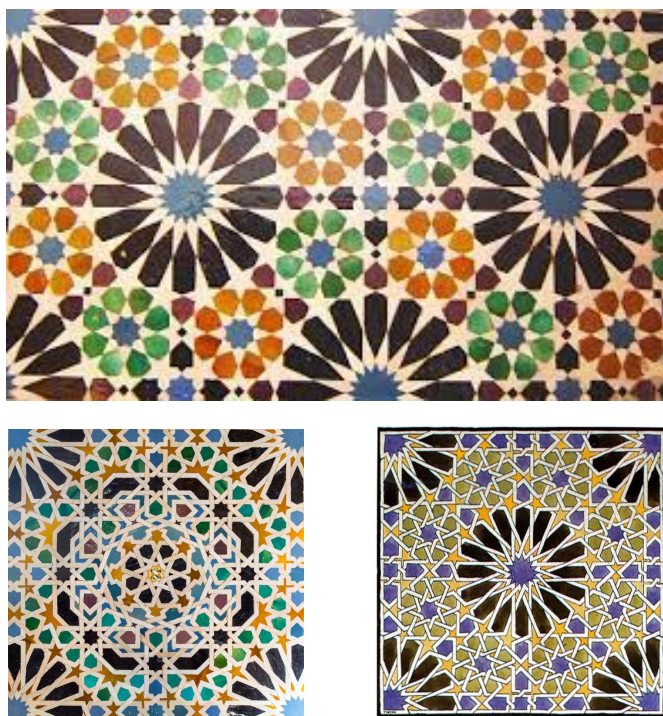
También son dignas de mención las obras del genial artista holandés Maurits Cornelius Escher (Leeuwarden, 17/6/1898 – Hilversum, 27/3/1972), quien usó teselados del plano con figuras de animales (ver por ejemplo las series *metamorfosis*) e incluso utilizó teselaciones del plano hiperbólico.



Hay tanto por decir sobre este tema que resulta imposible de abarcar en un artículo corto. En esta nota, que de todas formas pretendía ser más breve, ahondaremos en algunos detalles de la clasificación –y su historia– de los embaldosados del plano (euclídeo) con un sólo polígono convexo (y sus copias) que presentamos en la nota *¿Sabías qué..?* en el Número 2 del Volúmen 36 de la Revista de Educación Matemática

del año 2021.

FIGURA 2. Ejemplos de embaldosados en La Alhambra



§2. Embaldosados

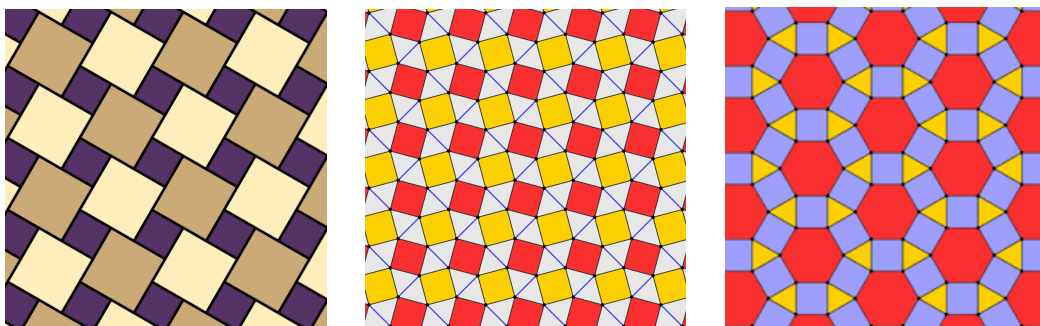
Comencemos por las definiciones básicas. Matemáticamente hablando, un embaldosado del plano es cualquier partición del plano con un número finito de formas geométricas distintas de área finita, las llamadas (proto)baldosas, que se

repiten sin solapamientos (salvo por los lados de las baldosas) ni huecos. En este artículo estamos interesados en embaldosados del plano euclídeo con polígonos, y más precisamente, con polígonos de una sola clase, es decir, todos congruentes entre sí.

Un polígono P de n -lados es una sucesión de n segmentos $a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_{n-1}a_n, a_na_1$ del plano sin más intersecciones que los vértices a_1, a_2, \dots, a_n . En esta nota, como es usual en este contexto, por polígono P nos referimos tanto a la línea poligonal cerrada formada por los lados junto a la región interior de P . Los polígonos a su vez pueden ser convexos o no-convexos. Recordamos que un polígono es convexo si todos los ángulos interiores son menores que π .

Cuando las baldosas de un teselado son todas figuras congruentes (misma forma y tamaño) se dice que el teselado es *monoedra*. Cuando se usan 2 tipos distintos de baldosas el teselado se dice *diedra* y cuando se usan 3 tipos distintos se llama *triedra*. En la siguiente figura damos ejemplos de teselados no-monoedrales.

FIGURA 3. Ejemplos de teselados no-monoedrales



El primero es conocido como teselado *pitagórico* y usa cuadrados de 2 tamaños distintos, el segundo es conocido en inglés como el *snub tiling* (teselado del desaire) y utiliza cuadrados y triángulos equiláteros y el tercero es conocido como el teselado *rombitrihexagonal* y usa triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares. El mundo de los teselados semi-regulares (se usan como baldosas polígonos regulares de al menos dos tipos distintos) es fascinante y ¡también sería tema para otro artículo! Pero ya se sabe, quien mucho abarca... Así que, de ahora en adelante, nos interesaremos principalmente por los *embaldosados monoedrales del plano euclídeo por polígonos*, al que nos referiremos simplemente por *teselado* (salvo mención explícita de lo contrario), por ser los protagonistas de la historia que queremos contar.

Sea \mathcal{T}_P un teselado del plano dado por un polígono P . Se dice que P *embaldosa* o *tesela* el plano. Por definición, esto quiere decir que es posible cubrir completamente el plano con copias simétricas de P sin más solapamientos que en

los vértices o lados de los polígonos. Más precisamente, tenemos que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{S \in \mathcal{G}} S(P)$$

donde \mathcal{G} es un subgrupo de simetrías (traslaciones, rotaciones, reflexiones o reflexiones deslizantes) del plano y para toda $S \in \mathcal{G}$ se cumple que

$$S(P) \cap P \subseteq L$$

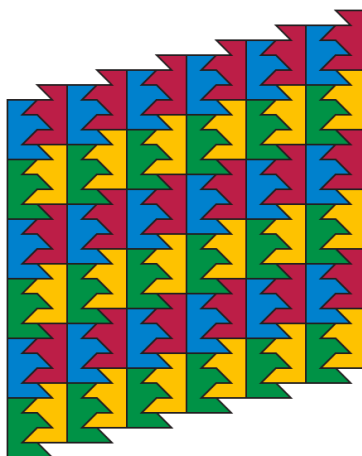
donde L es un lado de P . Luego, tenemos

$$\mathcal{T}_P = \{S(P) : S \in \mathcal{G}\}.$$

Si $S(P) \cap P = L$ para toda $S \in \mathcal{G}$ tal que $S(P) \cap P \neq \emptyset$ se dice que el teselado es *lado-a-lado*. Si P es un polígono regular (resp. no-regular), se dice que \mathcal{T} es un *teselado regular* (resp. *no-regular*). Notar que por la definición dada las baldosas del embaldosado son todas congruentes entre sí, aunque uno podría plantearse teselaciones con polígonos similares (misma forma, pero distinto tamaño, como el teselado pitagórico de la Figura 3).

Por último, definimos teselados k -isoedrales. Un teselado \mathcal{T} es *isoedral*, si para cualquier par de baldosas $P, P' \in \mathcal{T}$, y cualquier simetría S que lleva P en P' entonces S deja invariante a todo el teselado \mathcal{T} , es decir $S(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$. Se dice que \mathcal{T} es k -isoedral si k es el número de protobaldosas distintas que no pueden ser llevadas unas a otras mediante una simetría global. Un teselado k -isoedral tiene k pedazos disjuntos (las k -órbitas bajo la acción del grupo de simetrías que preservan el teselado). Notar que 1-isoedral es lo mismo que isoedral. Por ejemplo, los teselados regulares, que veremos en la sección siguiente son todos isoedrales (ver Figura 5). A continuación en la Figura 4 damos un ejemplo de teselado que no es isoedral, pero que es 2-isoedral. Notar que por definición, isoedral implica monoedral, pero no a la inversa como lo muestra dicho el ejemplo.

FIGURA 4. Un teselado 2-isoedral del plano.



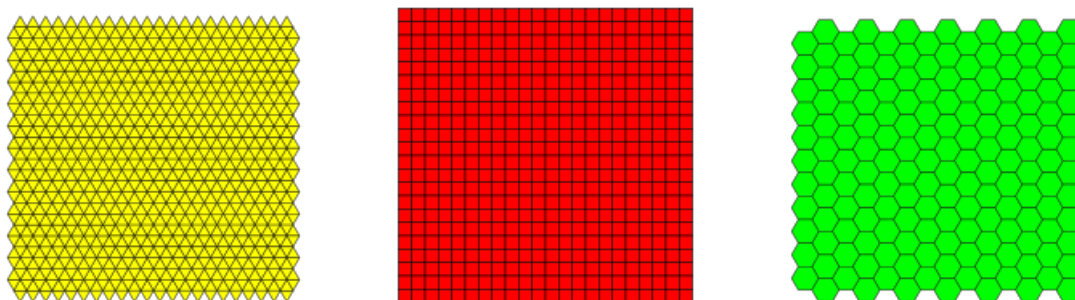
Las figuras azules y verdes forman una clase \mathcal{C}_1 y las rojas y amarillas otra clase \mathcal{C}_2 . Notar que cualquier simetría (por ejemplo una traslación) que lleve figuras de clase \mathcal{C}_1 en clase \mathcal{C}_1 también llevará figuras de clase \mathcal{C}_2 en clase \mathcal{C}_2 . Sin embargo, cualquier simetría que lleve una figura azul que comparta el lado largo con una figura roja en esa misma figura roja (por ejemplo una reflexión), no preserva las baldosas de otras franjas. Luego el teselado no es isoedral. En general, representaremos a los teselados k -isoedrales con las teselas pintadas de k colores, uno por cada órbita.

Este teselado se conoce como teselado de Heesch y fue encontrado por éste en 1935. Podríamos decir que resuelve una pregunta de la lista de 23 problemas de Hilbert. Durante el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900, Hilbert presentó una lista con 10 problemas (el resto fue agregado luego en la versión escrita) que según él eran centrales en la matemática y guiarían las investigaciones venideras. Sólo 8 de ellos han sido completamente resueltos y hay muchos con soluciones parciales o casi completas. La famosa hipótesis de Riemann es el problema número 8 y sigue completamente abierto (de hecho es uno de los problemas del milenio del Instituto Clay de Matemáticas, por el cual hay 1 millón de dólares de premio). El problema 18 consta de 3 preguntas y en una de ellas Hilbert pregunta: ¿existe un teselado poliedral del espacio cuyo grupo de simetría no actúe transitivamente? Algunos creen que lo enunció para el espacio pues el suponía que no existía un teselado así del plano, es decir un teselado no monoedral. El teselado de Heesch responde la pregunta para el plano por la afirmativa.

§3. Polígonos regulares

Lo primero que uno se pregunta es si el plano puede ser teselado con polígonos regulares (por lo tanto convexos). Cualquiera que haya jugado de chico con figuras geométricas sabe o intuye que es posible hacerlo con triángulos equiláteros, con cuadrados y con hexágonos regulares. De hecho esto es así, lo saben perfectamente los colocadores de pisos, y basta con ver la Figura 5.

FIGURA 5. Los 3 teselados regulares del plano.



Notar que estas teselaciones son lado-a-lado. ¿Hay otras posibilidades? Ya los antiguos griegos sabían que no es posible teselar el plano con otros polígonos regulares que los ya mencionados. En efecto, dado P_n un polígono regular de n lados, el ángulo interior $\alpha_{int}(P_n)$ de P_n es π menos el ángulo exterior de P_n , de donde tenemos que

$$\alpha_{int}(P_n) = \pi - \frac{2\pi}{n} = \left(\frac{n-2}{n}\right)\pi.$$

Ahora, si k es el número de polígonos congruentes a P_n coincidentes en un vértice, entonces debemos tener

$$(1) \quad k\left(\frac{n-2}{n}\right)\pi = 2\pi,$$

es decir $k = \frac{2n}{n-2}$, para no dejar huecos sin cubrir. Es fácil ver que esta ecuación sólo tiene 3 soluciones enteras (¡chequear!):

$$(k, n) = (6, 3), \quad (k, n) = (4, 4) \quad \text{y} \quad (k, n) = (3, 6),$$

representando los 6 triángulos, los 4 cuadrados y los 3 hexágonos por vértice de la Figura 5 respectivamente. Estas soluciones era conocidas por Pappus según citas directas en el libro *History of Greek Mathematics* de Thomas Heath. Notablemente, la tercera solución ¡fue conocida por las abejas mucho antes que por los griegos!



Curiosamente, el mismo argumento usado para obtener los teselados regulares del plano, sirvió a los griegos para obtener todos los sólidos regulares (poliedros cuyas caras son polígonos regulares iguales) del espacio, que hoy conocemos como *sólidos platónicos*. De hecho, si la suma de los ángulos en un vértice llegara a ser 2π el sólido sería plano en ese vértice, y como debe haber al menos 3 caras por vértice, la ecuación (1) en este caso toma la forma de las desigualdades

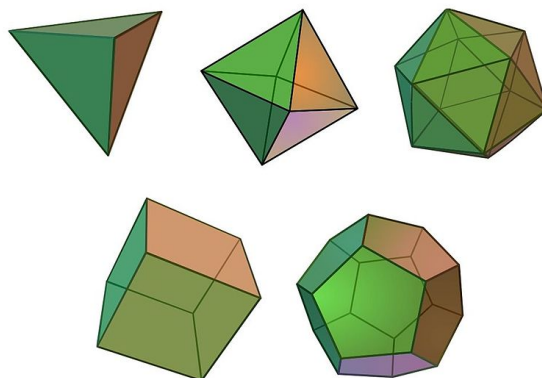
$$(2) \quad 3 \leq k < \frac{2n}{n-2}.$$

Éstas sólo tienen 5 soluciones enteras posibles, que son (¡chequear!)

$$(k, n) = (3, 3), \quad (3, 4), \quad (3, 5), \quad (4, 3), \quad (5, 3),$$

que corresponden a los 5 sólidos perfectos ya conocidos: el tetraedro, el cubo, el dodecaedro, el octaedro y el icosaedro respectivamente (ver Figura 6).

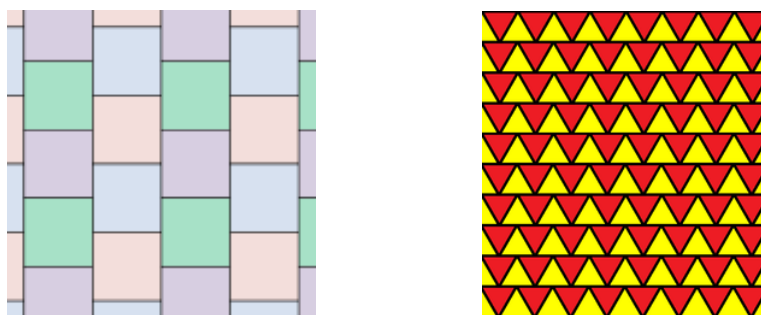
FIGURA 6. Los 5 sólidos platónicos.



Retornando a los teselados planos, con respecto a las simetrías, es claro que para los embaldosados con cuadrados y hexágonos sólo hacen falta dos traslaciones (aunque otras simetrías son posibles) para cubrir el plano a partir de una baldosa, mientras que para el caso con triángulos necesitaremos traslaciones y otra simetría, sí o sí, como reflexiones o rotaciones. Notar que, a partir de un único triángulo, usando traslaciones sólo obtenemos medio embaldosado. Más precisamente, dado un triángulo T y m el punto medio de uno de sus lados, podemos tomar S_m la simetría central respecto de m (o la rotación de $\frac{\pi}{3}$ con centro en uno de los vértices).

Hasta ahora hemos considerado el caso de teselados regulares lado-a-lado. ¿Existen teselados regulares que no sean lado-a-lado? Notemos que el plano es unión de franjas paralelas del mismo ancho (disjuntas salvo por los bordes), por lo que si con un polígono regular podemos cubrir una franja, copiando esta franja (con una traslación) tenemos un teselado regular. Pero al copiar las franjas de forma contigua de modo de cubrir sin huecos, no estamos obligados a hacer coincidir vértices con vértices. Este es el caso de los triángulos equiláteros y de los cuadrados como se puede ver en la siguiente Figura 7.

FIGURA 7. Los 2 teselados regulares, no lado-a-lado, del plano.



Intuitivamente, no podemos hacer lo mismo con hexágonos. En efecto, en esta situación de teselados no lado-a-lado, tenemos $k - 1$ polígonos coincidentes en un vértice v y uno más cuyo lado, pero no su vértice, llena el plano localmente alrededor de v . La ecuación correspondiente a (1) en este caso es

$$(3) \quad (k - 1)\binom{n-2}{n} \pi = \pi,$$

que equivale a $k - 1 = \frac{n}{n-2}$, la cual tiene solución entera sólo para $n = 3$ y 4 por lo tanto obteniendo las únicas soluciones

$$(k, n) = (4, 3) \quad \text{y} \quad (k, n) = (3, 4)$$

que son las dadas en la Figura 7.

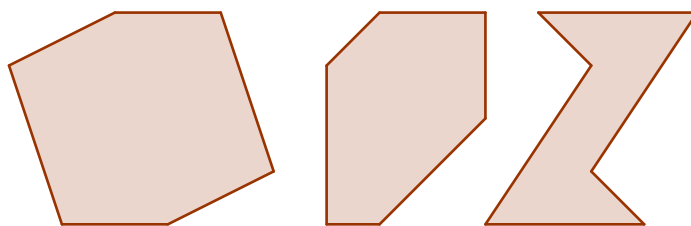
Luego, hemos clasificado todos los polígonos regulares que teselan el plano y hemos descubierto que estos teselados regulares son todos isoedrales, sean lado-a-lado o no. A continuación nos disponemos a estudiar los teselados con polígonos no-regulares.

§4. Triángulos y cuadriláteros

Ahora consideramos polígonos que no son regulares. Por la observación sobre las franjas hechas antes, es claro que es posible embaldosar el plano (como bien lo saben los albañiles) con rectángulos y con paralelogramos. Para esto sólo se necesitan dos traslaciones distintas (una a lo ancho para llenar una franja, y otra a lo largo para llenar el plano con franjas).

Un hexágono puede tener k pares de lados paralelos, con $0 \leq k \leq 3$. Nos van a interesar los hexágonos que tienen 3 pares de lados paralelos. Los hexágonos con 3 pares de lados *opuestos* paralelos se suelen llamar *hexaparelogramos* (ver Figura 8).

FIGURA 8. Diferentes hexaparelogramos

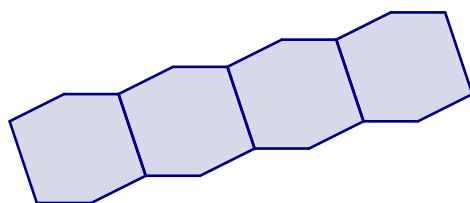


Notar que el primero y el segundo son hexaparelogramos convexos pero el primero tiene pares de lados opuestos congruentes y el segundo no. Por otra parte, el primero y el tercero tienen pares de lados opuestos congruentes, pero el primero es convexo y el tercero no. En particular, los hexágonos regulares son hexaparelogramos con todos sus lados congruentes.

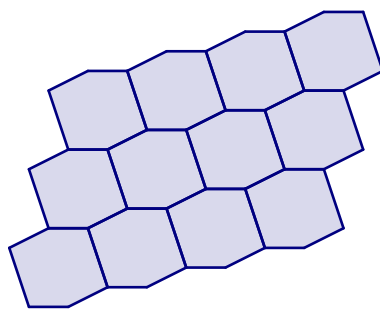
Un hecho sencillo pero muy importante sobre hexaparalelogramos que usaremos en breve es el siguiente.

Teorema 4.1. *El plano puede embaldosarse con cualquier hexaparalelogramo con lados opuestos congruentes (sin importar si es convexo o no).*

Demostración. En efecto, supongamos que tenemos un hexaparalelogramo H con lados consecutivos $abca'b'c'$, donde los pares $\{a, a'\}$, $\{b, b'\}$ y $\{c, c'\}$ son respectivamente lados paralelos y congruentes entre sí. Primero hacemos una fila de hexágonos (una “franja”) formada por copias de H “apilados”, digamos con lados a y a' en común (ver la figura siguiente donde usamos el primer hexaparalelogramo de la Figura 8 para ilustrar, se supone que continua indefinidamente hacia la izquierda y derecha).



Luego, pegamos copias de estas filas haciendo coincidir los lados b y c de una con los b' y c' de la otra (igual que en el caso de hexágonos regulares). En la siguiente figura se ven 2 iteraciones de este proceso.



Es claro que este proceso embaldosa el plano. □

Si queremos escribir formalmente el teselado, sean T_a y T_b las traslaciones que llevan el punto medio de a en el punto medio de a' y el punto medio de b en el punto medio de b' , respectivamente. Una “franja vertical” es $F_0 = \{T_a^k(P) : k \in \mathbb{Z}\}$. Las franjas verticales contiguas a F_0 son

$$F_1 = T_b(F_0) = \{T_b^k(T_a(P)) : k \in \mathbb{Z}\} = \{T_a(T_b^k(P)) : k \in \mathbb{Z}\}$$

y $F_{-1} = T_b^{-1}(F_0) = \{T_b^k(T_a(P)) : k \in \mathbb{Z}\} = \{T_a(T_b^k(P)) : k \in \mathbb{Z}\}$. O sea, el teselado está dado por

$$\mathcal{T}_P = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T_b^k(F_0) = \bigcup_{j, k \in \mathbb{Z}} T_a^j(T_b^k(P)).$$

Ahora usaremos esta observación para el caso que nos interesa de triángulos y cuadriláteros generales.

Teorema 4.2. *Cualquier triángulo o cuadrilátero tesela el plano.*

Demostración. Primero notemos que el plano puede embaldosarse usando cualquier cuadrilátero (convexo o no). De hecho, sea P el cuadrilátero. Si P no es un paralelogramo, sea m es el punto medio de uno de los lados de P . Aplicando la simetría central S_m a P tenemos el hexágono

$$H = P \cup S_m(P),$$

que por construcción tiene 3 pares de lados congruentes y paralelos. Por el Teorema 4.1, sabemos que H embaldosa el plano y por lo tanto se puede embaldosar el plano con P .

Si P es un paralelogramo (esto incluye rectángulos y rombos) la construcción anterior nos devuelve otro paralelogramo, que podemos pensarlo como un hexágono degenerado (hacer el dibujo) con lados opuestos paralelos y congruentes y por lo tanto sabemos que teselan el plano. De todas formas, estos casos pueden probarse como el caso de los hexágonos con 3 lados paralelos (y para el caso de los rectángulos usando alternativamente, si se quiere, el argumento de los ángulos visto en §3).

Ahora, usando el mismo truco, podemos ver que cualquier triángulo T embaldosa el plano. En efecto, si m es el punto medio de uno de los lados de T , el cuadrilátero $P = T \cup S_m(P)$ embaldosa el plano, por lo tanto T también lo hace. □

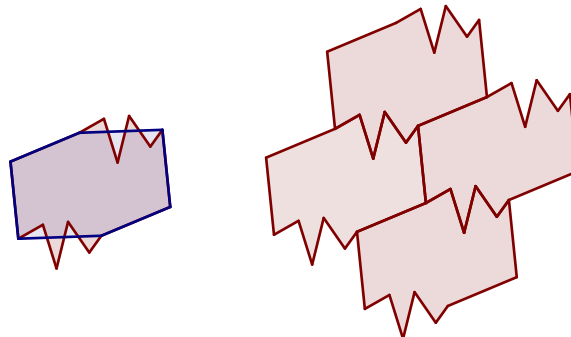
Notar que por construcción, todos los teselados con triángulos y cuadriláteros de la prueba anterior resultan isoedrales (haga el lector algunos dibujos para convencerse).

Por otra parte, veamos que el Teorema 4.1 implica que si no nos restringimos a polígonos convexos, el plano puede ser embaldosado por ciertos polígonos de n lados para cualquier $n \geq 4$. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3. *Dado un número natural $n \geq 4$, existen polígonos no-convexos de n lados que teselan el plano.*

Demostración. En efecto, si tenemos un embaldosado del plano dado por un hexaparalelogramo H con pares de lados opuestos congruentes, digamos $abca'b'c'$, podemos reemplazar los lados a , b y c por 3 líneas poligonales no-convexas

(basta con una, ver dibujo abajo), y los lados congruentes a' , b' y c' por las correspondientes líneas poligonales congruentes (trasladadas de las primeras).



Usando un hexaparalelogramo H , podemos probar que pentágonos con un par de lados paralelos teselan el plano. En efecto, basta tomar el centro de simetría o de H y los puntos medios m y m' de 2 lados opuestos paralelos. Así, el segmento $\overline{mm'}$ que une dichos puntos medios divide a H en 2 pentágonos P y P' simétricos por o que comparten el lado $\overline{mm'}$. Luego, como H tesela el plano, entonces P tesela el plano también. El caso $n = 4$ ya lo sabemos de antes.

Luego, usando este truco de las líneas poligonales no-convexas comenzando con hexágonos (resp. pentágonos) obtenemos teselados no-convexos con un número n par (resp. impar) de lados para cualquier $n \geq 4$. \square

Por ejemplo si queremos un teselado con polígonos no-convexos de 17 lados, tomamos un pentágono teselador como el de la prueba de arriba (o sea uno tal que junto al simétrico por el punto medio de uno de sus lados forma un hexaparalelogramo con lados)y cambiamos uno de sus lados por una poligonal no-convexa de 13 segmentos.

Este hecho y similares fueron muy usados por el genial artista holandés Maurits Escher para producir una gran cantidad de cuadros y grabados usando teselados con figuras no convexas. Por ejemplo la que se puede ver en la Figura 9.

Obviamente que se trata de figuras en vez de polígonos por tratarse de dibujos artísticos, pero pueden considerarse como polígonos con lados curvos en vez de segmentos. Pueden visitar la página oficial de Escher www.mcescher.com. En particular, ver las series *regular division of the plane* y *metamorfosis* por ejemplo en las páginas <https://mcescher.com/gallery/symmetry/> o <https://mcescher.com/gallery/transformation-prints/> en el sitio web oficial de Escher o bien https://mathstat.slu.edu/escher/index.php/Regular_Division_of_the_Plane_Drawings.

FIGURA 9. Teselados del plano con figuras no-convexas (Escher).



§5. Polígonos convexos no-regulares de 7 o más lados

Ya vimos que el plano puede ser embaldosado con polígonos no-convexos de cualquier cantidad de lados, por lo que nos restringimos de ahora en más a los *polígonos convexos*. También vimos el caso de embaldosados con polígonos regulares y con triángulos y cuadriláteros en general. Ahora mostraremos, siguiendo la idea de [Kershner \(1969\)](#), que no es posible dar un teselado del plano con un polígono convexo de 7 o más lados.

Para esto, necesitaremos la fórmula de Euler. Ésta, es una fórmula que sirve para cualquier poliedro convexo en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 . La fórmula descubierta por [Euler \(1758\)](#) dice que en cualquier poliedro convexo con un número F de caras, E de lados y V de vértices se cumple

$$(4) \quad V - E + F = 2.$$

Esto es sorprendente. Por ejemplo, podemos controlar con los sólidos platónicos de la Figura 6: tetraedro (T), cubo (C), octaedro (O), icosaedro (I) y dodecaedro (D):

TABLA 1. Valores de $V - E + F$ para los sólidos platónicos.

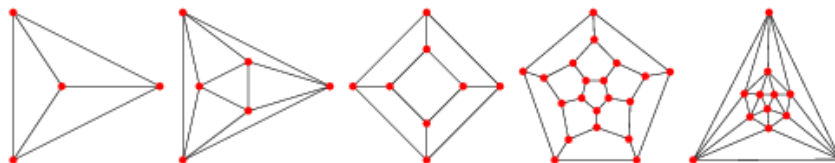
sólido	V	E	F	$V - E + F$
tetraedro	4	6	4	2
cubo	8	12	6	2
octaedro	6	12	8	2
dodecaedro	20	30	12	2
icosaedro	12	30	20	2

Lo bueno es que la fórmula también se aplica a grafos planares, es decir grafos que pueden ser dibujados en el plano sin cruces de aristas. La fórmula en este caso

toma la forma

$$(5) \quad V - E + F = 1$$

(ó $V - E + F = 2$ si contamos la cara infinita (no acotada) que queda determinada). Por ejemplo, todos los sólidos platónicos se pueden representar como grafos planares así (T , O , C , D y I):



A continuación utilizaremos la fórmula de Euler para grafos planares aplicándola a regiones acotadas de un embaledado por polígonos convexos. Consideramos un embaledado del plano por un polígono convexo y sea \mathcal{C}_R la colección (finita) de aquellos polígonos del embaledado que tienen al menos un punto dentro de $B(0, R)$, la bola abierta de radio R con centro en el origen del plano. Además, sean V , E y F el número de vértices, lados y caras del grafo planar formado por los polígonos en \mathcal{C}_R . Distinguiremos entre vértices interiores y de borde y lados interiores y de borde. Llamaremos E_i al número de lados interiores (lados de polígonos en \mathcal{C}_R con al menos un vértice en $B(0, R)$, o que separan dos caras) y sea E_b el número de lados restantes que llamamos de borde (o sea lados de polígonos en \mathcal{C}_R totalmente fuera de $B(0, R)$). Luego,

$$(6) \quad E = E_i + E_b.$$

Similarmente, denotaremos por V_b al número de vértices en el que exactamente dos lados del borde se tocan (sin lados interiores) y por V_i al número de vértices restantes (interiores), de modo que

$$(7) \quad V = V_i + V_b.$$

Como los polígonos son convexos, en cada vértice interior hay por lo menos 3 polígonos incidentes. En teselados con polígonos no-regulares, puede haber vértices con distintos números de lados incidentes (ver por ejemplo el teselado 15 en la Figura 13 donde hay vértices con 3 y 4 lados incidentes respectivamente). Luego, si k es el número medio de vértices de lados incidentes en un vértice interior tenemos $k \geq 3$. Como el número medio de lados en el borde es 2, entonces el número total de lados es $kV_i + 2V_b$, pero como cada lado es contado dos veces (uno por cada extremo), tenemos que

$$(8) \quad kV_i + 2V_b = 2E.$$

Supongamos que los polígonos tienen n lados. Queremos ver que $n \geq 7$ es imposible. El número nF daría el número total de lados del grafo, pero con los

lados interiores son contados dos veces y los lados de borde son contados una vez. De este modo tenemos

$$(9) \quad nF = 2E_i + E_b = 2E - E_b.$$

Usando las ecuaciones (7) – (9) en la fórmula de Euler (4), pues no consideramos la cara no acotada del grafo, luego de cuentas de rutina se llega a la siguiente ecuación

$$(10) \quad 2(n + k) - kn = \frac{2n}{V_i} - \frac{2(2V_b - E_b)}{V_i}.$$

Ahora, la ecuación (10) vale para el número de vértices interiores, vértices de borde y lados de borde de cualquier colección \mathcal{C}_R de polígonos que cubren la bola $B(0, R)$. Como el radio R es arbitrario y lo podemos tomar tan grande como queramos, el lado derecho de la ecuación (10) tiende a 0 cuando R tiende a infinito, pues V_b y E_b aumentan linealmente con R mientras que V_i aumenta cuadráticamente. Este es un resultado profundo cuya prueba escapa a la intención de este artículo (esto está relacionado con retículos y conteo de puntos reticulares interiores en bolas. El lector puede intentar convencerse estudiando por ejemplo el número de puntos interiores a bolas de radio entero centradas en el origen del plano y contando puntos del retículo \mathbb{Z}^2 que están dentro del círculo y contando los puntos fuera del círculo más cercano). Luego,

$$2(n + k) - kn = 0,$$

donde k es ahora el valor límite del número medio de lados por vértice en el embaldosado. En otras palabras, tenemos

$$n = \frac{2k}{k - 2}.$$

Notemos que la ecuación de arriba es la (1), aunque apareció en forma distinta. Luego, ya sabemos que tiene 3 soluciones con $n \leq 6$. Esto muestra que el polígono convexo que embaldosa el plano debe tener a lo sumo 6 lados.

Dos muy buenos artículos sobre la imposibilidad de usar polígonos de 7 o más lados para teselar el plano con condiciones más generales que las que nos interesan son los de [Grünbaum y Shephard \(1977\)](#) y [Niven \(1978\)](#).

§6. Hexágonos convexos

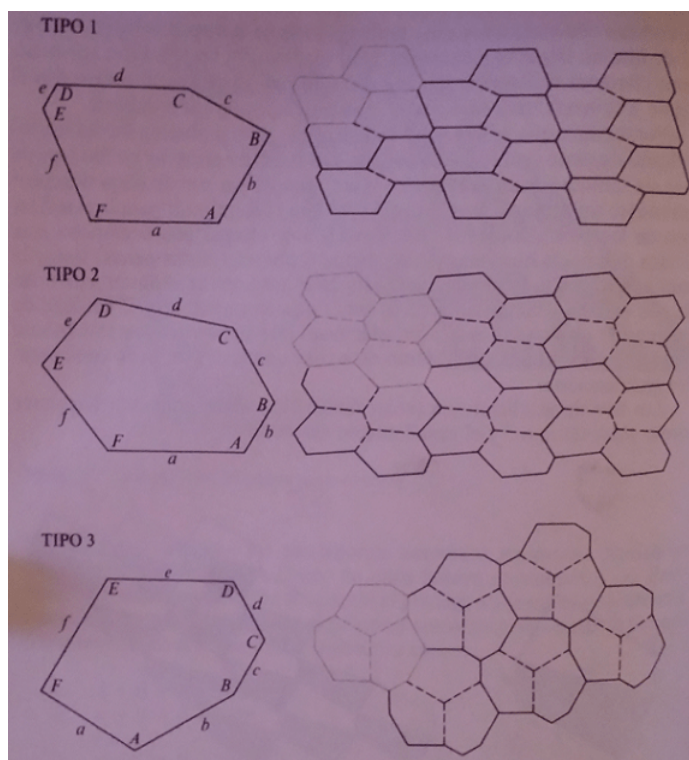
Por lo visto hasta ahora, sólo nos quedan cubrir los casos para $n = 5$ y 6 , es decir, estudiar embaldosados del plano con pentágonos y hexágonos convexos no-regulares. En esta sección nos ocuparemos de los hexágonos y en la siguiente de los pentágonos. Las demostraciones de estas clasificaciones están más allá del alcance de este artículo, tanto por complejidad como por extensión.

Karl Reinhardt en su tesis de 1918 (Reinhardt, 1918) por la Universidad de Frankfurt se ocupó del problema de los pentágonos y hexágonos, haciendo avances sustanciales. En lo que respecta a hexágonos el probó que sólo hay 3 familias de hexágonos convexos (no-regulares) que teselan el plano. En efecto, si llamamos a los lados del hexágono convexo de forma consecutiva $abcdef$ y a los ángulos $ABCDEF$, donde A es el ángulo que forman a y b , etc, las familias están dadas por:

- **Tipo 1.** $A + B + C = 2\pi$ y $a = d$.
- **Tipo 2.** $A + B + D = 2\pi$ con $a = d$ y $c = e$.
- **Tipo 3.** $A = C = E = \frac{2\pi}{3}$ on $a = b, c = d$ y $e = f$.

Ejemplos de hexágonos de cada una de estas familias y el correspondiente teselado se puede ver en la Figura 10.

FIGURA 10. Las 3 familias de hexágonos convexos que teselan \mathbb{R}^2 .



Cabe mencionar que algunos hexágonos pueden pertenecer a dos o más familias. Por ejemplo en el caso de hexágonos regulares tenemos que

$$A = B = C = D = E = F = \frac{2\pi}{3} \quad \text{y} \quad a = b = c = d = e = f$$

y por lo tanto es el caso límite de las 3 familias.

§7. Pentágonos convexos: una historia de 100 años

Dejamos los pentágonos para el final, pues son los que protagonizan la historia más interesante de la clasificación.

Reinhardt, 1918. Las primeras 5 familias de pentágonos convexos que teselan el plano fueron halladas por Reinhardt (1918) en su tesis. Más precisamente, el dió 5 familias (tipos 1 al 5) paramétricas de condiciones para los lados y ángulos de pentágonos de modo que cada tipo de condición asegura:

- (I) la existencia de un pentágono P satisfaciendo esas condiciones y,
- (II) la existencia de por lo menos un teselado del plano por medio de P .

Este esquema fue seguido por todos los autores que le sucedieron.

Kerschner, 1968. Medio siglo después, y usando otros métodos, Richard Brandon Kershner en 1968 encontró 8 familias, las cinco de Reinhardt más otras tres (tipos 6, 7 y 8). Richard anunció sus hallazgos en dos artículos (Kershner, 1968, 1969) aunque no dió una prueba de ellos aduciendo que eran muy largas y que ello necesitaría un libro. En dicho trabajo, Kerschner afirma sobre el trabajo de Reinhardt, y sobre el propio, sobre pentágonos (la traducción es mía):

“... hizo un noble comienzo al tratamiento de los pentágonos y estableció la existencia de cinco tipos, a los que llamaré pentágonos de tipos 1, 2, 3, 4 y 5. En este punto la técnica o la fortaleza le fallaron y cierra la tesis afirmando que, en principio, debería ser posible completar la consideración de pentágonos en la línea de sus consideraciones hasta ese punto, pero sería muy tedioso y siempre existiría la posibilidad de que no emergieran más tipos. De hecho, es bastante claro que Reinhardt y todos los demás en el campo de trabajo pensaron que la lista de Reinhardt era probablemente completa. Por razones que me resultaría difícil explicar, he estado intrigado por este problema durante unos 35 años. Cada 5 o 10 años he hecho algún tipo de intento por resolver el problema. Hace unos dos años atrás finalmente descubrí un método de clasificación de las posibilidades de los pentágonos, de una manera más conveniente que la de Reinhardt, para producir un enfoque que era humanamente posible llevar a cabo (aunque apenas). El resultado de esta investigación fue el descubrimiento de que había tres tipos adicionales de pentágonos, los tipos 6, 7 y 8, por sobre los encontrados por Reinhardt, que pueden teselar el plano. Estos teselados son totalmente sorprendentes. El descubrimiento de su existencia es una fuente de considerable gratificación.”

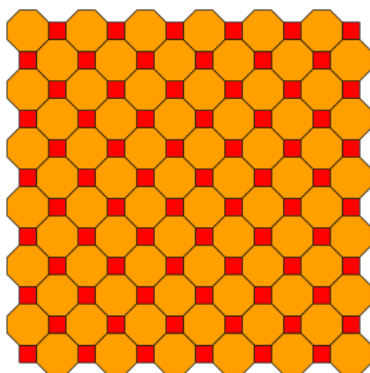
Kerschner también creyó haber encontrado todos los tipos posibles de pentágonos teseladores, pero...

Gardner y aficionados, 1975–1977. Basado en el trabajo mencionado de Kerschner, el famoso matemático y divulgador Martin Gardner publicó en su columna fija *Mathematical Games* de la revista *American Scientific* un artículo (Gardner, 1975)

sobre los teselados pentagonales del plano. Este artículo fue muy importante para el problema en cuestión ya que llamó la atención de numerosos matemáticos, muchos de ellos aficionados. Cinco nuevos tipos de pentágonos teseladores fueron descubiertos gracias al interés suscitado por este artículo por los matemáticos aficionados Richard James III y Marjorie Rice entre los años 1975 y 1977. ¡Esto muestra una vez más la importancia de la divulgación de la ciencia!

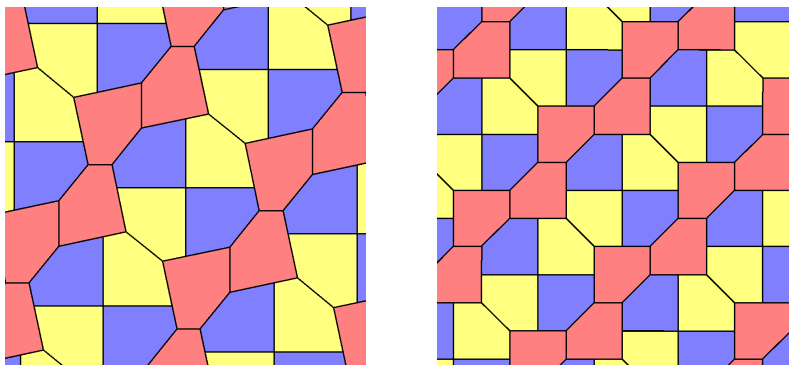
Un nuevo tipo de teselado (hoy catalogado como de tipo 10) fue encontrado por el ingeniero de software Richar James III en 1975. El no quiso ver la lista de Kerschner y trató de buscar teselados por su cuenta. Siendo él muy familiar con el teselado semi-regular de octágonos y cuadrados (ver Figura 11)

FIGURA 11. Teselado semi-regular con octógonos y cuadrados



y dado que un octógono regular se puede partir simétricamente en 4 pentágonos convexos congruentes por dos líneas perpendiculares que pasen por el centro de simetría (pero no por los vértices), Richard intentó adaptar este hecho para obtener un teselado pentagonal. Tuvo éxito con esto y le envió su hallazgo a Martin Gardner. Dos teselados distintos usando pentágonos de James se pueden ver en la Figura 12. Notar que estos teselados no son ni isoedrales ni lado-a-lado, algo que parece ser que Kerschner había asumido implícitamente.

FIGURA 12. Dos teselados con pentágonos de James



Por la misma época, Marjorie Rice (una ama de casa de San Diego sin más preparación en matemática que la del colegio secundario, pero a quien a la luz de los hechos podemos considerar como matemática aficionada de fuste) halló 4 nuevas familias entre 1976 y 1977 (tipos 9, 11, 12 y 13) luego de leer sobre el problema en el artículo de Gardner, desarrollando sus propios métodos y su propia notación. Su primer acercamiento fue considerar las diferentes formas en que los vértices de un pentágono pueden asociarse con otros pentágonos congruentes para producir un teselado. Esto impuso condiciones en los ángulos y lados de los pentágonos. De esta manera combinatoria, Marjorie halló más de 40 teselados, incluyendo uno lado-a-lado que pertenecía a un tipo no hallado por Kerschner. Es decir, Marjorie mostró que Kerschner (ambos habían usado métodos bastante parecidos) había omitido uno de los tipos de teselados pentagonales lado-a-lado. Teniendo en cuenta este resultado y el ya mencionado de James, el mismo Kerschner comentó:

“he cometido al menos dos errores, uno por comisión y otro por omisión”.

En una búsqueda sistemática posterior, Rice consideró 12 clases distintas de teselados pentagonales, cada una de las cuales correspondía a la descripción de qué lados del pentágono eran iguales. Para cada una de las 12 clases Marjorie halló un teselado posible. Una linda nota sobre ella con motivo de su muerte en 2017, *“Marjorie Rice’s Secret Pentagons”*, se puede encontrar en Quanta Magazine <https://www.quantamagazine.org/marjorie-rices-secret-pentagons-20170711/>.

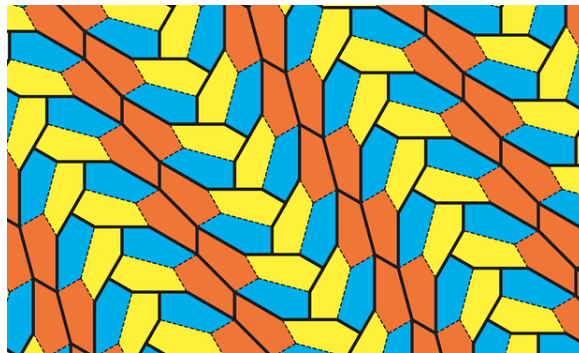
Los últimos hallazgos, 2015–2017. En un excelente artículo de Doris Schattschneider (1978) sobre el tema, la autora repasa la historia de la clasificación de los teselados pentagonales convexos hasta el momento y se pregunta y responde:

“¿Es la lista de 13 teselados completa? Lo dudo”.

Pasaron 10 años del artículo de Gardner hasta que Rolf Stein halló la familia número 14 de pentágonos teseladores del plano (Stein, 1985). La última familia fue descubierta 30 años después por Jennifer McLoud-Mann junto a Casey Mann y el estudiante David Von Derau (Mann, McLoud-Mann, y Von Derau, 2015). Dicho logro lo obtuvieron realizando una búsqueda exhaustiva por computadora de pentágonos que admiten teselados k -isoedrales del plano para $k \leq 3$. El resultado es un único pentágono, no una familia (ver los ángulos y lados en la lista mas abajo). El teselado 3-isoedral que produce se ve en la Figura 13.

Clasificación completa, Rao, 2017. El problema de saber si las 15 tipos conocidos de teselados pentagonales del plano eran todos los tipos posibles seguía abierto hasta que en 2017 Michaël Rao, un matemático de la Escuela Normal Superior de Lyon, ayudado por computadoras, pudo dar una demostración de que estos

FIGURA 13. El último teselado pentagonal encontrado



eran todos los tipos posibles de teselados pentagonales convexos del plano (Rao, 2017). El hecho fundamental es que hay un número finito, exactamente 371, de configuraciones posibles de ángulos. A partir de ahí fue descartando casos hasta obtener que las 15 familias conocidas son todas las posibles. Luego de esto, Thomas Hales, un profesor de matemáticas de la Universidad de Pittsburgh y experto en el uso de la programación para resolver problemas de geometría, ha reproducido independientemente las partes más importantes de la prueba de Rao indicando que no ha encontrado fallas. Sin embargo, el artículo no se encuentra publicado aún. Sobre el la conclusión de la clasificación hecha por Rao hay una muy buena nota en Quanta Magazine <https://www.quantamagazine.org/pentagon-tiling-proof-solves-century-old-math-problem-20170711/>

¡Una historia de intriga y búsqueda del conocimiento que ha durado casi 100 años! Como dijo David Hilbert alguna vez “*Wir müssen wissen, wir werden wissen*”, es decir “*debemos saber, sabremos*”.

Los 15 tipos de teselados pentagonales. A continuación damos la lista de los teselados y la descripción de cada uno de los pentágonos convexos que los definen. Como antes, denotamos por $abcde$ y por $ABCDE$ los lados y ángulos consecutivos respectivamente, donde A es el ángulo formado por a y b , etc.

Lista de los 15 tipos de teselados pentagonales

- **Tipo 1.** $D + E = 180^\circ$.
- **Tipo 2.** $C + E = 180^\circ$ con $a = d$.
- **Tipo 3.** $A = C = D = 120^\circ$ con $a = b$ y $d = c + e$.
- **Tipo 4.** $A = C = 90^\circ$ con $a = b$ y $c = d$.
- **Tipo 5.** $C = 2A = 120^\circ$ con $a = b$ y $c = d$.
- **Tipo 6.** $C + E = 180^\circ$, $A = 2C$ con $a = b = e$ y $c = d$.
- **Tipo 7.** $2B + C = 360^\circ$, $2D + A = 360^\circ$ con $a = b = c = d$.
- **Tipo 8.** $2A + B = 360^\circ$, $2D + C = 360^\circ$ con $a = b = c = d$.
- **Tipo 9.** $2E + B = 360^\circ$, $2D + C = 360^\circ$ con $a = b = c = d$.

- **Tipo 10.** $E = 90^\circ$, $A + D = 180^\circ$, $2B - D = 180^\circ$, $2C + D = 360^\circ$ con $a = e = b + d$.
- **Tipo 11.** $A = 90^\circ$, $C + E = 180^\circ$, $2B + C = 360^\circ$ con $d = e = 2a + c$.
- **Tipo 12.** $A = 90^\circ$, $C + E = 180^\circ$, $2B + C = 360^\circ$ con $2a = c + e = d$.
- **Tipo 13.** $A = C = 90^\circ$, $2B = 2E = 360^\circ - D$ con $c = d$ y $2c = e$.
- **Tipo 14.** $D = 90^\circ$, $2E + A = 360^\circ$, $C + A = 180^\circ$, $B + D + E = 360^\circ$ con $2e = 2c = a$.
- **Tipo 15.** $A = 60^\circ$, $B = 135^\circ$, $C = 105^\circ$, $D = 90^\circ$, $E = 150^\circ$ con $a = 1$, $b = d = e = \frac{1}{2}$ y $c = \frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{3}-1)}}$.

Notar que las familias 14 y 15 son especiales, en el hecho de que no admiten deformaciones, sólo están formadas por un único pentágono (salvo escala) cuyos ángulos están completamente determinados. Quizás por esto hayan sido tan esquivos. El caso del tipo 15 es obvio, aunque el tipo 14 no lo parece. Sin embargo, de las condiciones se puede deducir que los lados cumplen

$$b = a\sqrt{\frac{11\sqrt{57}-25}{8}}$$

y los ángulos satisfacen

$$\sin(B) = \frac{\sqrt{57}-3}{8}, \quad \cos(B) = -\sqrt{\frac{3\sqrt{57}-1}{32}} \quad \text{y} \quad \tan(B) = -\frac{1}{4}\sqrt{3\sqrt{57}-15}.$$

O sea, $A = 90^\circ$, $B \simeq 145,34^\circ$, $C \simeq 69,32^\circ$, $D \simeq 124,66^\circ$ y $E \simeq 110,68^\circ$.

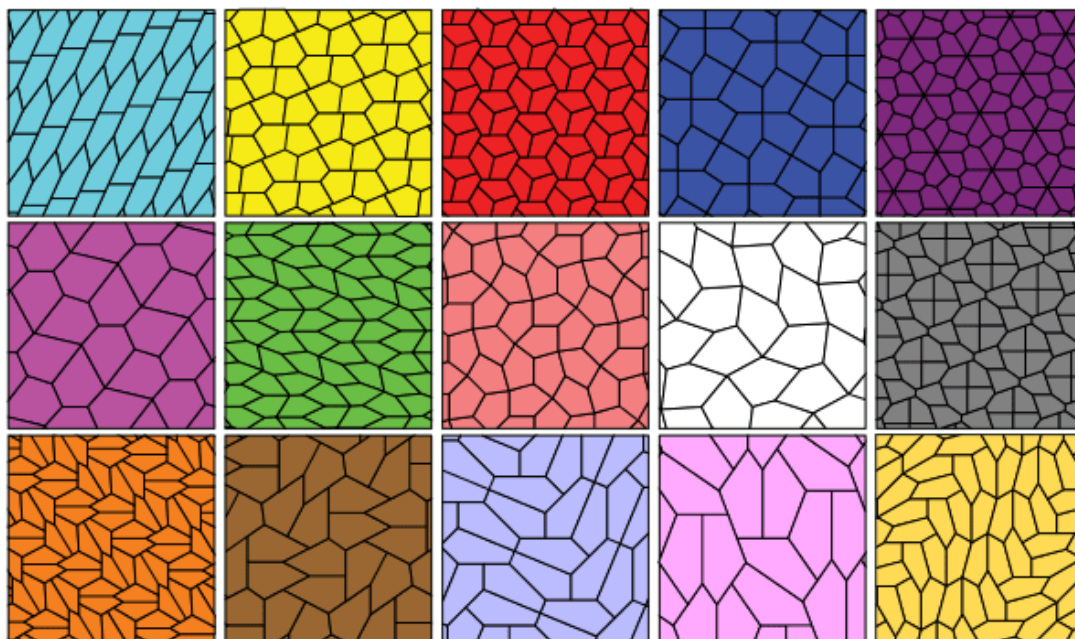
Ejemplos de cada uno de los 15 tipos de pentágonos convexos y teselados correspondientes pueden verse en la Figura 14.

Estudiemos brevemente los teselados encontrados. En su disertación Reinhardt hizo la siguiente clasificación de los tipos de mosaicos, que llamaremos *R*-clases, con respecto a las relaciones de aspecto de sus cinco lados:

- **R1.** Los cinco lados son diferentes.
- **R2.** Entre los cinco lados hay dos iguales; los otros son diferentes de estos y de los demás.
- **R3₁.** Entre los cinco lados, tres son iguales; los otros son diferentes de estos y de los demás.
- **R3₂.** Entre los cinco lados hay dos pares de iguales pero diferentes entre sí; el último es diferente de estos.
- **R4₁.** Entre los cinco lados, cuatro son iguales; el último es diferente de estos.
- **R4₂.** Entre los cinco lados, tres son iguales y, los dos diferentes son iguales entre sí.
- **R5.** Los cinco lados son iguales entre sí.

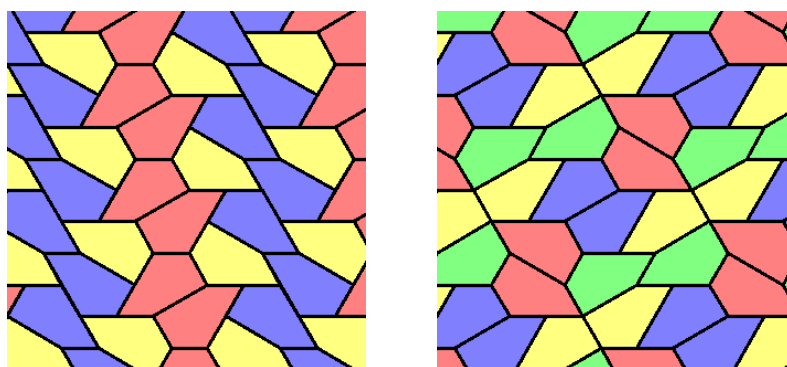
Aquí, cuando Reinhardt dice ‘diferente’ debemos entender ‘posiblemente diferente’.

FIGURA 14. Teselados de cada una de los 15 tipos que teselan el plano (tipos 1 al 15 de izquierda a derecha y de arriba a abajo).



Por otra parte, usando la Figura 14, podemos ver que los teselados 1 al 5 son isoedrales mientras que el resto son 2-isoedrales o 3-isoedrales. Como dice Schattschneider en su artículo, “es natural tener esperanza de que el siguiente teorema sea cierto: Un pentágono tesela el plano sólo si existe un teselado k -isoedral con dicho pentágono para $k \leq 3$.” Sin embargo, Jaap Scherphuis halló un teselado 4-isoedral lado-a-lado del plano con pentágonos de tipo 8. En la Figura 15 se pueden ver dos teselados pentagonales hallados por Scherphuis usando la misma baldosa (un pentágono de tipo 8), donde uno 3-isoedral mientras que el otro 4-isoedral.

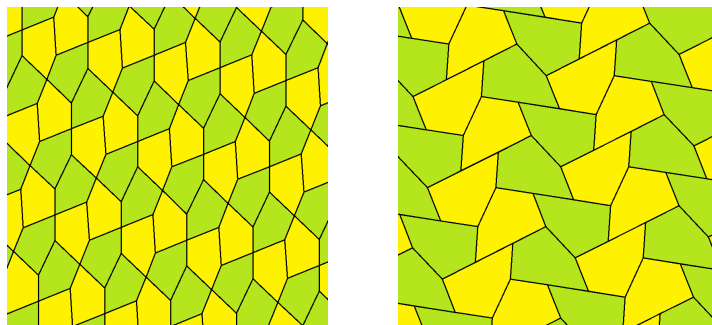
FIGURA 15. Teselados pentagonales 3- y 4-isoedrales de tipo 8.



De la misma Figura 14 se ve que de los pentágonos que representan a cada una de las 15 familias, las de tipos 1, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 son lado-a-lado mientras que las

restantes no. Sin embargo, como son familias paramétricas no podemos deducir que sea siempre así. De hecho las familias de tipos 1 y 2 admiten teselados tanto lado-a-lado como no lado-a-lado. Por ejemplo, en la Figura 16 se observan dos teselados distintos del tipo 2, uno lado-a-lado y el otro no.

FIGURA 16. Dos teselados del tipo 2, uno lado-a-lado y el otro no.



En la Tabla 2 resumimos toda esta información previa. Los grados de libertad se refieren a cuántos lados o ángulos quedan libres. Notar que los 5 primeros tipos hallados por Reinhardt tienen al menos dos grados de libertad, los hallados por Kerschner, Rice y James alrededor de la década del '70 tienen 1 sólo grado de libertad, y los últimos dos tipos hallados por Stein y Mann et al. no tienen ningún grado de libertad, es decir las familias están formadas por un único pentágono con lados y ángulos determinados. Esto explica de algún modo la forma en que se sucedieron los hechos. Finalmente, en la última columna de la tabla, no-convexo se refiere a que en estas familias es posible tener pentágonos que teselan no-convexos.

§8. Más sobre teselados pentagonales

En esta sección final nos ocuparemos de algunas llamativas curiosidades de los teselados pentagonales. Veremos que algunos de ellos se pueden obtener como teselados duales de ciertos teselados arquimedianos, veremos que se pueden clasificar los teselados por pentágonos equiláteros y por último que es posible dar teselados monoedrales no-periódicos, es decir que sólo poseen simetrías rotacionales.

Teselados duales. En geometría, el dual de una figura plana (o de un poliedro en el espacio), es la figura (resp. poliedro) que se obtiene cambiando vértices por caras y caras por vértices. Se toma el centro de las caras como vértice y se unen dichos vértices con segmentos si las caras son adyacentes. Por ejemplo, volviendo a los sólidos platónicos, el cubo y el octaedro son duales, el icosaedro y el dodecaedro son duales y el tetraedro es autodual (esto puede comprobarse fácilmente, con las figuras o con la Tabla 1). Dada esta definición, tiene sentido pensar en el teselado dual de un teselado dado. Por ejemplo, si nos centramos en los teselados regulares

TABLA 2. Resumen de los pentágonos teseladores del plano.

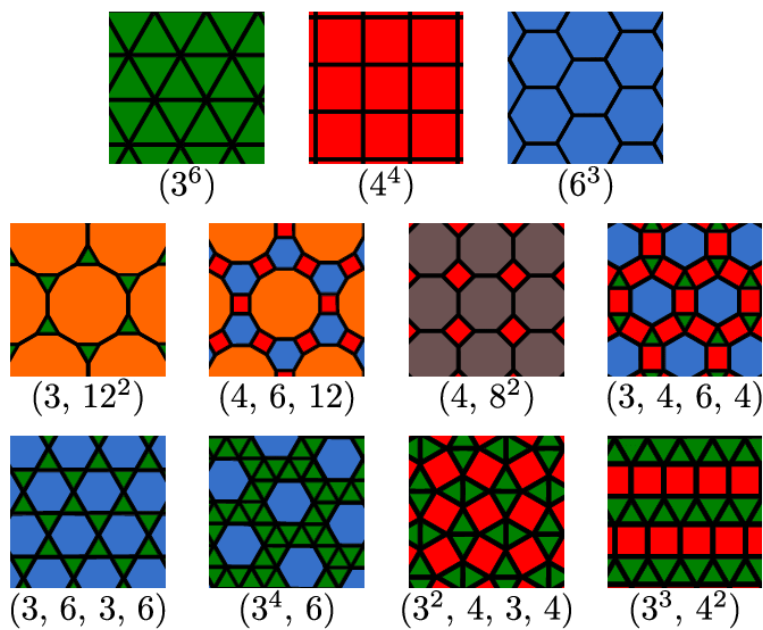
Tipo	Año	Autores	libertad	lado-a-lado	k -isoedral	R-clase	no-convexo
1	1918	Reinhardt	5	ambos	1	1	✓
2	1918	Reinhardt	4	ambos	1	2	✓
3	1918	Reinhardt	1	✗	1	2	✗
4	1918	Reinhardt	2	✓	1	3_2	✓
5	1918	Reinhardt	2	✓	1	3_2	✓
6	1968	Kerschner	1	✓	2	4_2	✓
7	1968	Kerschner	1	✓	2	4_1	✓
8	1968	Kerschner	1	✓	4	4_1	✓
9	1976	Rice	1	✓	2	2	✓
10	1975	James	1	✗	3	4_1	✗
11	1977	Rice	1	✗	2	2	✗
12	1977	Rice	1	✗	2	1	✗
13	1977	Rice	1	✗	2	2	✓
14	1985	Stein	0	✗	3	3_2	✗
15	2015	Mann et al	0	✗	3	3_1	✗

(ver Figura 5), el teselado triangular y el teselado hexagonal son duales entre sí mientras que el teselado por cuadrados resulta autodual.

Resulta que de los 15 tipos de teselados pentagonales, hay 3 que exhiben una simetría mayor, asombrosa. Tanto es así que resultan teselados duales de otros teselados llamados arquimedianos o uniformes. Un teselado es regular si usa polígonos regulares y es *arquimediano* o *uniforme* si es lado-a-lado y los vértices son de un sólo tipo, pero permitimos polígonos regulares de dos o más tipos. Necesariamente, los distintos polígonos regulares tienen que tener sus lados congruentes entre sí. Además de los 3 teselados regulares, que obviamente son arquimedianos, hay 8 teselados uniformes más (ver Figura 17). Los números debajo de los teselados indican en un vértice cualquiera dado, cuántos polígonos de cada tipo son coincidentes en dicho vértice y con qué multiplicidad aparecen (y en qué orden). Los duales de los teselados arquimedianos no-regulares no son arquimedianos ¿Puede el lector encontrar estos duales?

En su artículo de 1975, Martin Gardner llamó la atención sobre la simetría extra que tienen los pentágonos de tipo 3, 4 y 5 (ver Figura 17). En realidad esto es así pues los teselados de tipo 1, 4 y 5 son duales de tres teselados arquimedianos como notó Schattschneider (1978), los tres teselados arquimedianos con vértices de valencia 5. En efecto, usando las notaciones de la Figura 17, el teselado de tipo 3 es dual con el $(3^3, 4^2)$ llamado *prisma*, el de tipo 4 es dual con el $(3^4, 6)$ llamado *El Cairo* y el de tipo 5 es dual con el $(3^2, 4, 3, 4)$ llamado *florete*. El lector puede

FIGURA 17. Los 11 teselados arquimedianos



comprobar esto fácilmente dibujando los duales de los teselados arquimedianos mencionados y comparando los dibujos obtenidos con la Figura 14. En la Figura 18 ilustramos el caso del teselado conocido como El Cairo, que es de tipo 4, y su dual.

Pentágonos equiláteros. Ahora, consideremos brevemente el problema de teselar el plano con pentágonos convexos equiláteros. Recordemos que para polígonos de 4 o más lados ser equilátero y ser equiángulo no es lo mismo (sólo para triángulos equilátero y equiángulo resultan ser conceptos equivalentes). Ejemplos de pentágonos equiláteros que no son equiángulos y de pentágonos equiángulos que no son equiláteros se pueden ver a continuación

FIGURA 19. Pentágonos equiláteros y equiángulos no-regulares

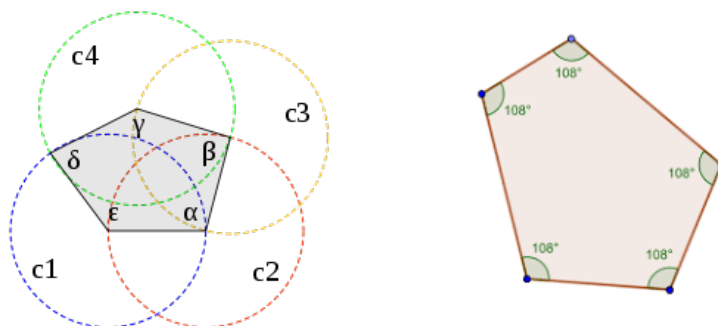
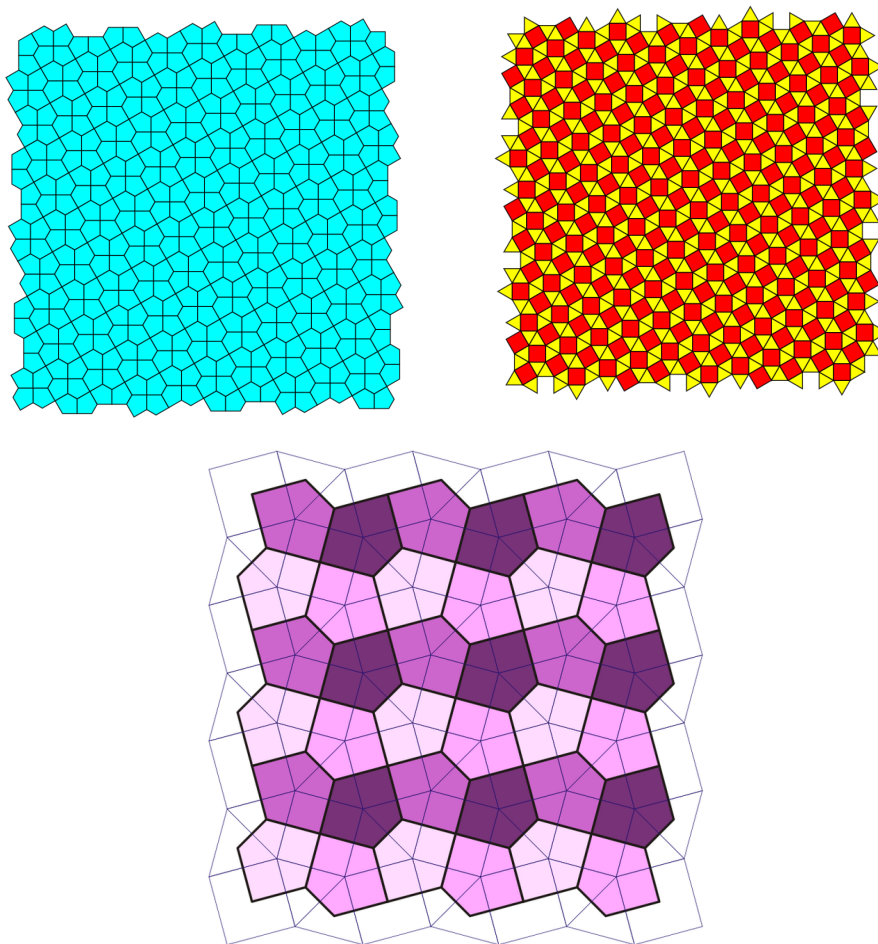


FIGURA 18. Teselado 'El Cairo' de tipo 4 y su dual arquimediano



Sabemos que no se puede teselar el plano con pentágonos regulares, pero ¿qué sucede con pentágonos semi-regulares (equiláteros o equiángulos)? Este tema fue estudiado primeramente por Doris [Schattschneider \(1978\)](#). Dicha autora encontró todos los pentágonos equiláteros convexos que teselan el plano de entre los 13 tipos conocidos en ese momento (tipo 1 al 13). El autor afirma que es inmediato que las familias de tipo 3, 10, 11, 12 y 13 no contienen pentágonos regulares y luego prueba que las de tipo 5, 6 y 9 tampoco. De las restantes, las familias de tipo 1 y 2 dan familias paramétricas de pentágonos equiláteros convexos mientras que en cada una de las familias de tipo 4, 7 y 8 hay un único (salvo escala) pentágono equilátero convexo que tesela el plano. Es muy instructivo consultar los detalles de cómo construir estos pentágonos en ese trabajo. Aquí sólo daremos los parámetros.

- **Tipo 1:** familia con $D + E = \pi$ con $\frac{\pi}{3} < E < \frac{2\pi}{3}$ donde

$$A + E = \frac{4\pi}{3}, \quad B = \frac{\pi}{3}, \quad C - E = \frac{\pi}{3}, \quad D + E = \pi.$$

- **Tipo 2:** familia con $C + E = \pi$ con $\frac{\pi}{3} < E < \frac{2\pi}{3}$ donde

$$A = \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}E - \theta - \gamma, \quad B = \frac{1}{2}E + \theta, \quad C + E = \frac{\pi}{3}, \quad D = \frac{\pi}{2} + \gamma,$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1+4\cos(E)}{4\cos(\frac{E}{2})}\right), \quad \gamma = \arccos\left(\frac{3}{4\sin(E)}\right).$$

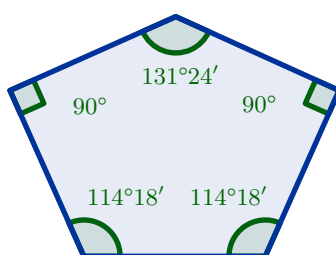
- **Tipo 4:** único pentágono, con

$$B = 2\pi - 2D \sim 131^{\circ}24'$$

y dos pares de ángulos congruentes

$$A = C = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad D = E = \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \sim 114^{\circ}18'.$$

En la figura mostramos un tal pentágono:



- **Tipo 7:** único pentágono, con ángulos

$$A \sim 89^{\circ}16', \quad B \sim 144^{\circ}32'30'', \quad C \sim 70^{\circ}55', \quad D \sim 135^{\circ}22', \quad E \sim 99^{\circ}54'30''.$$

- **Tipo 8:** único pentágono con

$$E = \arccos\left(\frac{\sqrt{13}-3}{4}\right) \sim 81^{\circ}18'$$

y dos pares de ángulos congruentes:

$$A = D = \frac{\pi}{2} + \frac{E}{2} \sim 130^{\circ}39' \quad \text{y} \quad B = C = \pi - E \sim 98^{\circ}42'.$$

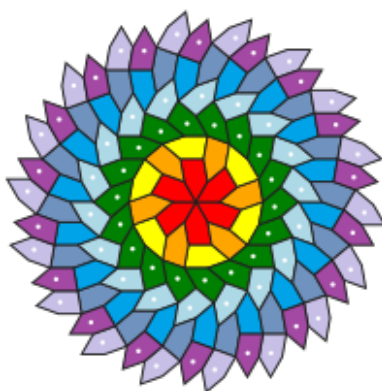
Fueron [Hirschhorn y Hunt \(1985\)](#) quienes más tarde probaron que éstos son efectivamente todos los tipos posibles de pentágonos equiláteros convexos que teselan el plano, mostrando que la lista de Schattschneider era en realidad completa (o sea, no hay pentágonos equiláteros en las familias 14 y 15). Y lo notable de esto es que se pudo hacer aún antes de tener la clasificación completa de los pentágonos convexos que teselan el plano. En efecto, ellos mostraron que un pentágono equilátero convexo tesela el plano si y sólo si tiene dos ángulos que suman π (consecutivos o no) o bien es el único pentágono equilátero convexo cuyos ángulos consecutivos A, B, C, D, E satisfacen el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + 2B = 2\pi, \\ C + 2E = 2\pi, \\ A + C + 2D = 2\pi, \end{cases}$$

donde cualquiera de las ecuaciones es consecuencia de las otras dos. Posteriormente, [Bagina \(2004\)](#) obtuvo el mismo resultado por otras vías.

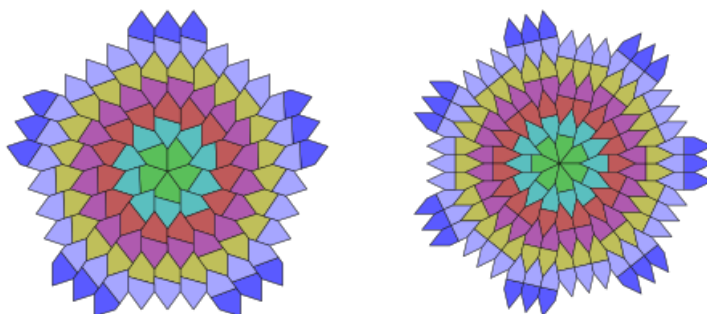
Teselados pentagonales no-periódicos. En 1976, Marjorie Rice e independientemente Szkeres y Hirschhorn (junto a un grupo de alumnos) hallaron un pentágono de tipo 1 con propiedades peculiares. Este tiene ángulos $A = 140^\circ$, $B = 60^\circ$, $C = 160^\circ$, $D = 80^\circ$ y $E = 100^\circ$. Hay 11 formas en que los vértices de este pentágono pueden ser unidos para teselar el plano. Sin embargo, [Hirschhorn \(1976, 1977\)](#) encontró un teselado pentagonal con simetría rotacional solamente.

FIGURA 20. Teselado pentagonal de Hirschhorn con simetría 6-rotacional



Dicho teselado tiene simetría rotacional de orden 6. Sorprendentemente, Bernhard [Klaassen \(2016\)](#) probó que toda simetría rotacional discreta puede ser representada por un teselado pentagonal monoedral de la misma clase de pentágonos. Es decir, generalizó el teselado 6-rotacional de Hirschhorn a teselados n -rotacionales para cualquier $n \geq 3$. Ejemplos de simetrías 5-rotacionales y 7-rotacionales se muestran en la siguiente figura.

FIGURA 21. Teselados pentagonales con simetría 5- y 7-rotacionales

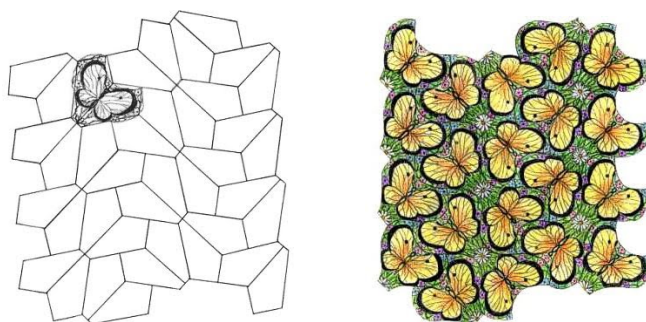


Aquí termina nuestra versión de la historia, pero sin dudas hay muchos temas que quedaron por cubrir y muchos de los que vimos que bien vale la pena profundizar. Espero que el lector se haya interesado por el tema y pueda seguir aprendiendo e investigando por su cuenta.

Comentarios finales.

Las imágenes de este artículo son (casi) todas tomadas de páginas de internet y muchas veces es difícil citar la fuente original. La mayoría son de páginas de Wikipedia, de algunos blogs como Gaussianos o de imágenes de Google. En algunos casos, se puede identificar al autor, como es el caso de Tom Ruen.

Por ser un tema tan bonito existen muchos artículos y libros y una gran cantidad de páginas de internet para consultar sobre el tema. Sin embargo, quiero llamar la atención del lector sobre 4 páginas que tienen muchísima información sobre el tema con datos y figuras, que sin dudas le ayudarán a entender mejor lo tratado en este artículo, además de profundizar y aprender mas sobre el tema. Tres de éstas son páginas de wikipedia: *Euclidean tilings by convex regular polygons* https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_tilings_by_convex_regular_polygons, *Pentagonal tilings* https://en.wikipedia.org/wiki/Pentagonal_tiling y *Uniform tilings* https://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_tiling. Por último la página interactiva de Jaap Scherphuis <https://www.jaapsch.net/tilings/> es muy completa y contiene applets para producir teselados y ver las familias paramétricas de teselados moverse en tiempo real. Además tiene otra página similar de teselados no-convexos con triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos, <https://www.jaapsch.net/tilings/nonconvex.htm>. Finalmente quiero mencionar la página de Marjorie Rice <https://sites.google.com/site/intriguingtessellations/home/tessellations> donde además de los tipos de teselados encontrados por ella hay hermosas ilustraciones basadas en dichos teselados al estilo de las de Escher, como por ejemplo



Por último, quiero agradecer a Leandro Cagliero por comentarios que mejoraron la claridad de algunas partes del trabajo y por su ayuda con gráficos en GeoGebra.

Bibliografía

- Bagina, O. (2004). Tiling the plane with congruent equilateral convex pentagons. *J. Combin. Theory. Ser. A*, 105, 221-232.
- Euler, L. (1758). Elementa doctrinae solidorum. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 109-140.
- Gardner, M. (1975). Mathematical Games. *Scientific American*, 233(1), 112-119.
- Grünbaum, B., y Shephard, G. C. (1977). The eighty-one types of isohedral tilings in the plane. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 82(2), 177-196.
- Hirschhorn, M. (1976). The 1976 Summer Science School. Tessellations with convex equilateral pentagons. *Parabola*, 13, 2-5.
- Hirschhorn, M. (1977). More tessellations with convex equilateral pentagons. *Parabola*, 13, 20-22.
- Hirschhorn, M., y Hunt, D. (1985). Equilateral Convex Pentagons Which Tile the Plane. *J. Combin. Theory Ser. A*, 39, 1-18.
- Kershner, R. B. (1968). On paving the plane. *American Mathematical Monthly*, 75, 839-844.
- Kershner, R. B. (1969). On paving the plane. *APL Technical Digest*, 75(8), 4-10.
- Klaassen, B. (2016). Rotationally symmetric tilings with convex pentagons and hexagons. *Elemente der Mathematik*, 71(4), 137-144.
- Mann, C., McCloud-Mann, J., y Von Derau, D. (2015). Convex pentagons that admit *i*-block transitive tilings. *Geometriae Dedicata*, 194, 141-167.
- Niven, I. (1978). Convex polygons that cannot tile the plane. *Amer. Math. Monthly*, 85(4), 785-792.
- Rao, M. (2017). Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane. *arXiv:1708.00274*.
- Reinhardt, K. (1918). Über die Zerlegung der Ebene in Polygone. *Dissertation, Universität Frankfurt*.
- Schattschneider, D. (1978). Tiling the plane with congruent pentagons. *Mathematics Magazine*, 51, 29-44.
- Stein, R. (1985). A new pentagon tiler. *Mathematics Magazine*, 58, 308.

RICARDO A. PODESTÁ
FaMAF - CIEM (UNC-CONICET)
(✉) podesta@famaf.unc.edu.ar

Recibido: 27 de diciembre de 2021.

Aceptado: 19 de marzo de 2022.

Publicado en línea: 25 de abril de 2022.

DIVERSIDAD DE IDEAS CONSTRUIDAS POR ESTUDIANTES SOBRE LOS NÚMEROS REALES, LOS NÚMEROS IRRACIONALES, EL ORDEN Y LA DENSIDAD

Virginia Montoro y Martha Ferrero

RESUMEN. En este artículo estudiamos las concepciones sobre el número real que han construido estudiantes de secundaria y de universidad. Analizamos las respuestas escritas a cuatro tareas que indagan sobre *qué es un número en general y en particular un número irracional, el orden, la densidad y el supremo de un intervalo, en los números reales*. Participaron 307 estudiantes de tercero, cuarto y quinto año de secundaria y de una etapa inicial o avanzada de carreras universitarias de Matemática, Biología y Educación Física. Categorizamos las respuestas obtenidas en cada tarea y luego, mediante análisis multivariado, identificamos grupos de estudiantes que ofrecen respuestas similares a las cuatro tareas y asociaciones entre estos modos de respuesta y su nivel de estudio. Encontramos un gradiente de profundidad en sus ideas desde (i) una visión *de los enteros como modelo de número, ajenidad e inseguridad frente a las tareas*, en estudiantes con menor estudio de matemática; (ii) una concepción *de los reales identificados con los decimales finitos y una discretitud explícita*, principalmente en estudiantes de secundaria; (iii) una visión *de los reales identificados con los racionales y como infinitos-potencialmente densos*, principalmente en ingresantes a carreras científicas y (iv) *comprensión del orden, la densidad y propiedad del supremo en los reales*, en estudiantes avanzados de Matemática. Sugerimos que para facilitar el pasaje de una matemática escolar a una matemática avanzada en el estudiantado la enseñanza debería prever, para los últimos años de secundaria y primeros de universidad, trabajar en profundidad estas complejas nociones.

Palabras clave: número irracional, concepciones numéricas, número real.

ABSTRACT. This study aims to understand conceptions about real numbers that secondary and university students have developed. We analyse the written answers to four tasks that inquire about *what a number is in general and, in particular, an irrational number, order, density and supremum of an interval, in real numbers*. The participants were 307 students from the third, fourth and fifth year of high school and from an initial or advanced stage

of university degrees in Mathematics, Biology and Physical Education. We categorized the answers obtained in each task and then, through multivariate analysis, we identified groups of students that offer similar answers to the four tasks and associations between response modes and the students' level of study. We found a depth gradient in their ideas from (i) a view of *the integers as a model of number, estrangement and insecurity in the face of tasks*, in students with less study of mathematics; (ii) a conception of *real numbers identified with finite decimals and an explicit discreteness*, mainly in high school students; (iii) a view of *the real numbers identified with the rational ones and as infinite-potentially dense*, mainly in newcomers science majors and (iv) *understanding of the order, density and property of the supreme in the real numbers*, in advanced students of Mathematics. We suggest that to facilitate the transition of students from school mathematics to advanced mathematics, teaching should provide, for the last years of high school and the first years of university, an in-depth work with these complex notions.

Palabras clave: irrational number, numerical conceptions, real number.

§1. Marco referencial

En Argentina, así como en varios países de la región, la currícula de la educación secundaria propone que se profundicen la comprensión y el uso de los números racionales y hacia el final de este nivel, el estudiantado comprenda el concepto de número real (diferenciando número racional e irracional), maneje el sistema de representación decimal de números reales y los pueda ordenar, representar sobre la recta numérica y usar para resolver problemas. De este modo, al ingreso a la universidad, la noción de número real debiera estar disponible para las y los estudiantes como acceso a la matemática avanzada.

Es frecuente ver que en las asignaturas matemáticas universitarias se trabaja con la noción de número real como si fuese un contenido ya naturalizado en la escuela secundaria. Sin embargo, es precisamente en este concepto complejo epistemológica y cognitivamente que se hace patente, en las y los estudiantes la transición entre un pensamiento matemático elemental (escolar) y un pensamiento matemático avanzado (universitario) que requiere una reconstrucción cognitiva que implica, por ejemplo, el paso de describir a definir y de convencer a demostrar y que principalmente requiere de la comprensión de conceptos matemáticos más abstractos, por ejemplo, los que tienen que ver con el infinito (Tall, 1991, 2004).

Nos proponemos estudiar qué nociones han naturalizado (Pozo, 2014) las y los estudiantes que han interactuado con la noción de número real en los últimos años de la secundaria o en sus carreras universitarias, no en un contexto de aula de matemática, sino las ideas que manifiestan al resolver tareas no escolarizadas.

Nuestro objetivo es conocer y describir las concepciones que han naturalizado, sobre el número real, estudiantes de secundaria, ingresantes a la universidad y de los últimos años de la universidad (cursando distintas carreras). En particular, nos propusimos: (i) conocer qué es para estos y estas estudiantes “un número” y si reconocen distintos tipos de números, particularmente si consideran a los

racionales, irracionales y reales como números; (ii) indagar si conocen los números irracionales con sus principales características; (iii) si comprenden el orden y la densidad de los números reales y (iv) si comprenden la densidad de los reales y su relación con el supremo de un intervalo.

Acordamos con las teorías del aprendizaje que enfatizan en las concepciones de las y los estudiantes como uno de los puntos de partida del aprendizaje y sostienen que para que el aprendizaje sea significativo (Ausubel, Novak, y Henesiam, 1978) es necesario partir de las ideas que el estudiantado construye y utiliza en diferentes contextos, interactuando con ellas a fin de enriquecerlas o modificarla (Pozo y Gómez-Crespo, 1998; Vosniadou, 2008; Pozo y Scheuer, 1999).

La investigación en educación matemática, en diversos artículos se ha ocupado de establecer las relaciones entre el conocimiento personal (concepciones) y el conocimiento legitimado y objetivado por una comunidad de especialistas (concepto) (Freudenthal, 1983; Sfard, 2010; Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1983; Vinner y Dreyfus, 1989). Estos trabajos destacan que en las situaciones en que se registran relevantes brechas entre ambos, de no ser conocidas y trabajadas deliberadamente, pueden conducir a cierto fracaso de la enseñanza.

Tras el análisis de la literatura internacional sobre investigaciones en Pensamiento Numérico, Verschaffel, Greer, y Torbeyns (2006) destacan la necesidad de que la investigación en este tema tome conciencia de la naturaleza de la reestructuración conceptual radical presente cuando el significado de “número” se extiende progresivamente. Como así también de la necesidad que la investigación se dirija hacia el desarrollo de aquellos objetos matemáticos a la cual damos el nombre de “número”. En el citado artículo leemos que cuanto más sofisticado es el concepto de número, se encuentra menos investigación y en particular señalan, al igual que Romero y Rico (1999); Lakoff y Núñez (2000), la necesidad de investigar en la comprensión del estudiantado sobre los números reales de modo de producir un avance significativo en la comprensión de los procesos del Pensamiento Numérico Avanzado.

Podríamos asegurar, por razones históricas, que el concepto de número irracional trajo aparejado dificultades en su comprensión relacionadas principalmente con la *incommensurabilidad* de las magnitudes irracionales respecto de la unidad y con la *no-numerabilidad* del conjunto de números reales. Generalizando, podemos decir que un segmento de longitud a es inconmensurable con otro de longitud b , si a/b no se puede escribir como cociente de dos enteros. Encontramos, aquí el germen del número irracional interpretado como la razón entre las longitudes de dos segmentos inconmensurables (Santinelli, 1999). En cuanto a la no-numerabilidad de los irracionales, G. Cantor a fines del Siglo XIX, denominó “numerable” a aquellos conjuntos que pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con el conjunto de los enteros positivos (es decir se pueden poner en una lista). Este

genial Matemático, demostró que los números racionales son “numerables” y que no puede existir ninguna correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números enteros y el conjunto de los números reales. Dado que los racionales son numerables, la no-numerabilidad de los reales viene dada por los irracionales (Montoro, 1999).

Las dificultades de las y los estudiantes en este campo podrían, además, atribuirse a que los números reales (particularmente los irracionales) fueron conceptualizados en la matemática respondiendo a necesidades netamente teóricas (Bergé, 2008; Bergé y Sessa, 2003; Cantor, 1871; Dedekind, 1963). Es, además, destacable la complejidad que conlleva la comprensión de las representaciones externas del número real, dada la carencia intrínseca de una representación que pueda dar cuenta de todas las características de este conjunto numérico (Steiner, 1984; Stevenson, 2000).

Un aspecto notable del concepto de número real es su íntima relación con el concepto de infinito, implicado esencialmente con las dificultades ya mencionadas de la inconmensurabilidad y la no-numerabilidad, pero además presente en aspectos básicos de los números reales, como son el orden, la densidad y la completitud. Notemos, también que la notación decimal de los números reales alude a infinitas cifras, tanto en el caso de los racionales (periódicas y numerables) como en el de los irracionales (no-periódicas y no-numerables). Una comprensión cabal de estas nociones involucra interactuar con la idea de infinito actual y estudios que indagan sobre concepciones del infinito matemático la muestran como contraintuitiva, lábil (Artigue, 1995; Fischbein, Jehiam, y Cohen, 1994, 1995; Juan, Montoro, y Scheuer, 2012; Moreno-Armella y Waldegg, 1995; Monaghan, 2001) y que requiere de contextos educativos que propicien la reflexión a través de intervenciones de enseñanza específicas. (Montoro, 2005; Montoro y Scheuer, 2006; Montoro, Scheuer, y Pérez-Echeverría, 2016; Reina y Wilhelmi, 2017; Sfard, 1994).

Haciendo un breve repaso histórico, tenemos que ya en la Grecia antigua conocieron las magnitudes inconmensurables, por ejemplo la escuela Pitagórica (Siglo V a.C) descubrió que si se traza un cuadrado de lado 1, su diagonal, por la aplicación del teorema de Pitágoras, es tal que el cuadrado de su longitud vale 2, la magnitud de esta diagonal no es conmensurable con el lado del cuadrado, o dicho de otra manera no es posible encontrar una fracción entera que corresponda a un número cuyo cuadrado es 2. Sin embargo, la necesidad de conceptualización de los números no aparece hasta fines del siglo XVII, con Newton y Leibniz. Durante este siglo, comenzó una cadena de construcciones teóricas en el dominio del cálculo diferencial e integral, basadas en un empleo libre de la inducción completa, el infinito y las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes.

A fines del siglo XIX y comienzos del siglo XX tuvo lugar un profundo proceso de reestructuración en la Matemática que involucró las nociones de límite y de

número real, la identificación del conjunto de los números reales con el continuo geométrico y el uso de los métodos infinitesimales, cuestiones todas en las que subyace el concepto de infinito. Como culminación explícita de ese proceso de reestructuración, encontramos la obra de Georg Cantor quien dotó de sentido matemático al concepto de infinito actual. Recién en 1876 a través de los trabajos de fundamentación de la matemática de lógicos y matemáticos de la época (como fueron, entre otros, Méray, Cantor, Dedekind y Weierstrass), se soluciona el problema de la definición de número real y esto fue posible sólo gracias a la explicitación de la existencia de conjuntos actualmente infinitos.

En la actualidad y a partir del movimiento formalista de comienzos del Siglo XX, se considera al número real como un *elemento de un conjunto con estructura algebraica de cuerpo, ordenado y completo*. El orden de los números reales es dado en forma axiomática, mediante la definición de una relación denominada $<$ (menor que), que permite que dos números siempre pueden ser comparados. Dicho orden posee la característica (contraintuitiva) de que un intervalo acotado puede no tener primer elemento, lo que lo diferencia del orden (más conocido por las y los estudiantes) de los números naturales.

La densidad es una propiedad que diferencia a los números reales de los enteros. Esta propiedad afirma que entre dos números reales distintos (supongamos $a < b$) hay al menos un número racional (real) q tal que $a < q < b$. Esto implica que entre dos números reales hay infinitos números reales.

Sin embargo, tanto el orden como la densidad se cumplen también en el subconjunto de los números racionales, la propiedad que caracteriza a los números reales y los diferencia del subconjunto de racionales, es la completitud (o propiedad del supremo) que se enuncia: *dado un subconjunto de números reales acotado superiormente (es decir que existe un número real mayor que todos los elementos de dicho subconjunto) entonces (axiomáticamente) existe un número real que es la menor de esas cotas superiores (supremo)*. La existencia refiere a que es un número real. Por ejemplo, el conjunto de todos los reales que elevados al cuadrado son menores o iguales a 2 está acotado superiormente por 2 (también por 3; 3,5; 4; 5,67 ...) y la menor de esas cotas superiores sería aquel número que elevado al cuadrado me da 2, es decir $\sqrt{2}$, pero se sabe (desde la antigüedad) que ese "número" no es un racional, ... axiomáticamente tendremos que es un número real.

En este artículo no nos centraremos ni en la inconmensurabilidad de los irracionales respecto de la unidad, ni en la no-numerabilidad del conjunto de números reales, sino en aspectos que, si bien son básicos, son también complejos epistemológica y cognitivamente, en particular nos enfocaremos en el conjunto de números reales como un conjunto ordenado, denso y completo.

§2. Las concepciones estudiantiles del número real

En los primeros años de primaria los niños conocen los números naturales (\mathbb{N}), se encuentran con el principio de que 1 es el primer número natural y salvo él mismo, todo número tienen un *siguiente*, de lo que se puede concluir que \mathbb{N} es un conjunto infinito, también conocen que entre dos números naturales consecutivos no hay otro número natural y la comparación entre números naturales mediante la definición del orden en \mathbb{N} (cualquier subconjunto, no vacío, tendrá un primer elemento).

El currículo matemático escolar contempla la enseñanza de las fracciones y los decimales, en algunos casos como conjuntos numéricos distintos. Este hecho puede ocasionar que alumnos y alumnas consideren que diferentes representaciones de un número racional representan diferentes números (Khoury y Zazkis, 1994; O'Connor, 2001) y más aún que los decimales y las fracciones son subconjuntos disjuntos del conjunto de números racionales (Vamvakoussi y Vosniadou, 2010). El concepto de número racional puede permanecer aislado de la clase más amplia de números reales (Moseley, 2005).

Sabemos que la diferenciación de número racional y número irracional es esencial para la construcción del concepto de número real, que se realiza en la escolaridad extendiendo el campo numérico desde el conjunto de números racionales, propios de la matemática escolar, hacia el de números reales ámbito de la matemática avanzada. Sin embargo, encontramos diversos estudios que dan cuenta de que una cantidad importante de estudiantes, terminan sus estudios secundarios sin una comprensión cabal del número real (Artigue, 1995; Sirotic y Zazkis, 2007a, 2007b; Tirosh, Fischbein, Graeber, y Wilson, 1998; Zazkis y Sirotic, 2004, 2010), quizás como dijimos debido a su particular complejidad epistemológica (Artigue, 1995; Bergé, 2008; Cornu, 1983)), cognitiva (Fischbein y cols., 1995; Tall y Schwarzenberger, 1978; Tall y Vinner, 1981; Vamvakoussi y Vosniadou, 2004) y educativa (Rico, Castro, y Romero, 1996; Romero y Rico, 1999; Sirotic y Zazkis, 2007a, 2007b; Tirosh y cols., 1998; Zazkis y Sirotic, 2004, 2010).

Consideramos que una correcta comprensión del número racional es básica para la comprensión de los números reales, sin embargo, algunas investigaciones dan cuenta que las y los estudiantes de primaria y secundaria se encuentran con dificultades y suelen tener ideas contradictorias al aprender y utilizar conceptos relacionados con números racionales (Tirosh y cols., 1998; Merenluoto, 2003; Stafylidou y Vosniadou, 2004; Steinle y Pierce, 2006; Palacios-Amaya, Bianchi, y Montoro, 2018).

Una de las principales dificultades para comprender los números racionales se debe a la transferencia (incorrecta) de las propiedades de los números naturales

a los números racionales (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004, 2007; Yujing y Yong-Di, 2005). Por ejemplo, muchos estudiantes creen que el principio del “número siguiente” se aplica también a los números racionales (Malara, 2001; Merenluoto y Lehtinen, 2002). Entre las dificultades más evidentes se puede observar con frecuencia que las y los estudiantes trasladan a los números racionales el tipo de orden de los números naturales (Behr, Lesh, Post, y Silver, 1983; Palacios-Amaya y cols., 2018) y en ocasiones, las y los estudiantes más jóvenes presentan una visión finitista (Mayberry, 2001) de los números, lo que puede llevarle hacia una concepción no acertada y lábil de los números racionales (Widjaja, Stacey, y Steinle, 2008; Palacios-Amaya y cols., 2018).

Además de la comprensión incompleta de los números racionales, también, como ya dijimos, hay otras dificultades (cognitivas y epistemológicas) principalmente la inconmensurabilidad y la no-numerabilidad que hacen aún más difícil la comprensión de los números irracionales (Herscovics, 1989; Sierpinska, 1987, 1994; Sirotic y Zazkis, 2004, 2007a). Si bien no nos ocuparemos específicamente de estas cuestiones aquí, ambas llevan implícitas la noción de infinito, que como dijimos está también interrelacionada con el orden, la densidad y la notación decimal de los números reales (infinitos decimales periódicos o no- periódicos); de hecho, la comprensión de los números reales se suele mencionar en la literatura que trata de las concepciones de infinito (Artigue, 1995; Tall y Schwarzenberger, 1978; Tall, 2001).

Como dijimos, existe una relación estructural entre el concepto de número real y el de infinito actual, por lo que aquí destacaremos aspectos de las concepciones de infinito reportadas en la bibliografía respecto de las ideas que las y los estudiantes construyen cuando trabajan conceptos que involucran la noción de infinito. Juan y cols. (2012); Montoro (2005); Waldegg (1993) encontraron que las y los estudiantes más jóvenes o con menor estudio de matemática suelen mostrar inseguridad o resistencia frente a la posibilidad de la existencia de colecciones infinitas; en cuanto a las concepciones finitistas (Fischbein, Tirosh, y Hess, 1979) de las y los estudiantes, Juan y cols. (2012); Monaghan (2001); Montoro y cols. (2016); Waldegg (1993), encontraron dos muy arraigadas como son: concebir el infinito como un número muy grande o extender la propiedad de los conjuntos finitos a los conjuntos infinitos. Los resultados de Arrigo y D’Amore (2004); Fischbein y cols. (1979); Monaghan (2001); Montoro y Scheuer (2004), muestran que las y los jóvenes conciben al infinito, principalmente, en forma potencial y una minoría lo concibe como infinito actual (Moreno-Armella y Waldegg, 1995; Montoro, 2005; Juan y Montoro, 2008). Hemos encontrado también que la diferenciación entre infinito y todo, requiere de cierta profundidad en el estudio de matemática (Juan y Montoro, 2015; Montoro, 2005; Montoro y cols., 2016).

Un estudio pionero en cuanto a la comprensión de los números reales fue el de [Arcavi, Bruckheimer, y Ben-Zvi \(1987\)](#), en el que participaron maestros en servicio (con estudios universitarios). Encontraron que las y los participantes tenían problemas para reconocer los números como racionales o irracionales y que existían entre ellas y ellos una creencia generalizada de que la irracionalidad se basa en las representaciones decimales. Años después, [Fischbein y cols. \(1994, 1995\)](#), utilizaron un cuestionario tomado a estudiantes de nivel de estudio similares al de nuestro estudio, en dicho trabajo concluyeron que la inconmensurabilidad de magnitudes y la no-numerabilidad del conjunto de números reales aportada por los irracionales no son de naturaleza intuitiva, sino que implican una cierta madurez intelectual (o nivel de estudio) que los sujetos de este estudio no poseían. Además, las y los participantes de todos los niveles tenían grandes dificultades para diferenciar correctamente los números racionales, irracionales y reales.

Dificultades similares fueron reportadas por [Tirosh y cols. \(1998\)](#), con estudiantes de profesorado de primaria con estudios universitarios, especialmente aquellos que no tenían una especialización en matemáticas. Estas y estos estudiantes basaron sus concepciones de número casi en su totalidad en su experiencia con los números naturales. Estos autores alientan a que se estudie a los números reales en la formación de maestros en profundidad, de modo de que sus concepciones sean más flexibles y correctas. En un estudio de [Peled y HersHKovitz \(1999\)](#), que involucró a estudiantes de profesorado de matemática en su segundo o tercer año de matemáticas universitarias, encontraron que las y los participantes del estudio, a pesar de que conocían las definiciones y características de los números irracionales, fracasaban en tareas que requerían de un uso flexible de diferentes representaciones de estos.

Pareciera que las diferentes representaciones del número real influyen en las respuestas de estudiantes con respecto a la irracionalidad. Al respecto, [Zazkis y Sirotic \(2004\)](#) centraron su análisis en cómo los números irracionales pueden ser representados o no. [Sirotic y Zazkis \(2007b\)](#) consideraron los conocimientos, intuiciones y creencias de las y los participantes de su estudio con respecto a la relación entre los dos conjuntos numéricos: racionales e irracionales. Las explicaciones utilizadas por las y los participantes se basaron principalmente en considerar las representaciones decimales infinitas no-periódicas de los irracionales, que dificulta el acceso a una comprensión más profunda del número irracional. Además, observaron confusión para distinguir entre los números irracionales y su aproximación decimal y una abrumadora dependencia de esta última. También [Zazkis y Sirotic \(2010\)](#) estudiaron las formas en que diferentes representaciones decimales de los números reales influyen fuertemente en las respuestas de las y los estudiantes con respecto a su posible irracionalidad.

Voskoglou y Kosyvas (2012) realizaron un cuestionario y entrevistas a estudiantes de secundaria (13-14 años) pocos meses después de estudiar los números reales y a estudiantes de un instituto tecnológico de pregrado (18-19 años) que utilizan las matemáticas como herramienta para estudiar y comprender mejor la ciencia. Sus resultados mostraron un fracaso casi completo de las y los estudiantes de tecnología en las tareas relacionadas a magnitudes inconmensurables. Sin embargo, sobre el papel de sus representaciones semióticas para la comprensión de los números reales, la superioridad de sus respuestas correctas con respecto a las respuestas de las y los estudiantes de secundaria fue evidente en la mayoría de los casos; lo cual constituye, expresan en su artículo, una fuerte indicación de que la edad y la amplitud del conocimiento matemático del individuo juegan un papel importante para la mejor comprensión de los números reales.

En síntesis, encontramos en la bibliografía que las dificultades de las y los estudiantes de secundaria y de universidad para comprender a los números reales están asociadas a dos niveles; uno de mayor abstracción constituido por la no numerabilidad y la inconmensurabilidad de los números irracionales, de las cuales no nos ocuparemos aquí y otro nivel básico constituido por la comprensión incompleta de los números racionales (orden y densidad), la no diferenciación de números racionales e irracionales, las múltiples representaciones de los números reales y que estos conceptos involucran el de infinito actual (notación, densidad y completitud).

§3. Metodología

3.1. Participantes. En este estudio participaron 307 estudiantes de escuela secundaria (167) y de universidad (140) de instituciones públicas de San Carlos de Bariloche (Argentina). Las y los estudiantes de nivel secundario se distribuyeron en los tres últimos cursos de un mismo centro educativo: tercero, cuarto o quinto (15 -18 años). Las y los estudiantes de nivel universitario se diferenciaron en ingresantes, quienes estaban asistiendo al cursillo de ingreso universitario de un mes de duración (17-20 años), y estudiantes avanzados y avanzadas, quienes cursaban materias del último año de tres carreras distintas (20 -30 años).

Las y los estudiantes de los últimos años de secundaria habían cursado asignaturas de matemática en las que se enseñan los conjuntos numéricos: naturales, enteros, racionales y reales. Durante el tercer año de secundaria se estudian los números reales, basados en los enteros y racionales introducidos en primaria, enfatizando que los números enteros amplían a los naturales y están incluidos en los racionales, y que la unión de números racionales e irracionales conforma los números reales. En cuarto y quinto año de este nivel se estudian distintos temas en el marco del conjunto de los números reales, llegando incluso a un precálculo, donde se interactúa con el concepto de infinito, principalmente como proceso sin fin.

Nivel de Estudios de Matemática		NEM	N	
Secundario	3er año	3ro	59	
	4to año	4to	56	
	5to año	5to	52	
Estudiantes de secundaria			167	
Universitario	Ed. Física Ingresantes	EFI	26	
	Biología Ingresantes	BI	26	
	Matemática Ingresantes	MI	31	
	Universitarios ingresantes			83
	Ed. Física Avanzados/as	EFA	21	
	Biología Avanzados/as	BA	16	
	Matemática Avanzados/as	MA	20	
	Universitarios avanzados/as			57
Estudiantes universitarios			140	

TABLA 1. Distribución según Nivel de Estudios de Matemática (NEM) de los y las participantes.

En las tres carreras universitarias consideradas, Matemática, Biología y Educación Física, los estudios de matemática tienen presencia curricular diversa. La primera se centra en la formación matemática, llegando en los últimos años a estudiar formalmente el concepto de número real e infinito cardinal. La segunda es una carrera de ciencias naturales en la cual se cursan asignaturas de matemática, sin que ésta sea una disciplina central. Los temas habituales son cálculo en una y varias variables y ecuaciones diferenciales, siempre en el campo de los números reales y donde se trabaja implícitamente con el concepto de infinito. En la carrera de Educación Física no se contempla formación matemática.

En lo sucesivo denominaremos NEM, al Nivel de Estudio en Matemática al que pertenecen las y los estudiantes. En la Tabla 1 se informa la distribución de los participantes respecto de su Nivel de Estudio en Matemática (NEM) y la etiqueta utilizada para cada modalidad de NEM.

3.2. Tareas y procedimientos. Se analizaron cuatro tareas que forman parte de un cuestionario escrito, más amplio, que constó de 10 tareas relacionadas con la concepción de número, el orden, la densidad, la representación en la recta, la completitud y el infinito en el contexto de los números reales.

Las tareas abarcan distintos aspectos del número real según diferentes demandas y dimensiones del conocimiento; algunas escolarizadas y otras que generalmente

no se las encuentra en las clases de matemática. Algunas tareas son de respuesta cerrada con una sola opción correcta y otras son abiertas. Considerando que las comprensiones, sobre todo en temas de pensamiento matemático avanzado, no son unívocas, sino que suelen ser lábiles y a menudo incluso contradictorias, hemos pensado las tareas de modo de dar diferentes oportunidades a las y los participantes para ponerlas en juego. Acceder a este repertorio de respuestas nos permitió analizar sus interrelaciones y así obtener un panorama rico de los modos en que las y los estudiantes piensan en este campo de lo numérico.

A continuación, presentamos las cuatro tareas del cuestionario en que se enfoca este artículo. Dos de estas tareas exploran en las y los participantes la concepción de número en general (N1) y de número irracional en particular (N2) y dos de ellas, buscan inferir su comprensión del orden y la densidad de los números reales (D1) y su comprensión de la densidad de los reales en relación con el supremo de un intervalo (D2). Como es de esperar en las últimas dos tareas se involucran también concepciones sobre infinito. Esta descripción responde al aspecto del número real que se pusiera en juego principalmente, ya que en todas ellas se implican más de uno de estos aspectos y esperamos sacar a la luz posible relaciones entre las ideas que hayan construido las y los estudiantes entre estos. Describiremos luego, las tipologías de respuesta que hemos detectado en la población en estudio, para cada una de estas tareas.

3.2.1. *Tarea N1. Concepción de número en general, según una tipología.* Con esta Tarea pretendimos conocer qué es para estos y estas estudiantes “un número” y si reconocen distintos tipos de números, particularmente si nombran a los racionales, irracionales y reales como números.

El Cuadro 1 reproduce la consigna utilizada para esta tarea en el cuestionario, tal como fue presentada a las y los estudiantes.

Por favor menciona los tipos de números que conoces. ¿Podrías darnos un ejemplo de cada uno?

CUADRO 1. La consigna utilizada para la Tarea N1 en el cuestionario.

Dado el nivel de escolarización de estos y estas estudiantes, es esperable que al referirse a *tipo de números* puedan referirse a los conjuntos numéricos convencionales y escolares, (naturales (\mathbb{N}), enteros (\mathbb{Z}), racionales-irracionales (\mathbb{Q} - \mathbb{I}) y reales (\mathbb{R})), ya que, desde un punto de vista del concepto de número, éste será *un elemento de un conjunto numérico definido como tal*. Sin embargo, podrán aparecer las concepciones numéricas más diversas, sobre todo relacionadas con los números

naturales (cantidad de cosas discretas) o los racionales como magnitudes (medidas). Los ejemplos nos servirán para comprobar si el tipo de número que la o el estudiante está nombrando se corresponde con el que está pensando.

3.2.2. *Concepción de número irracional. Ejemplos de irracionales.* El objetivo de esta Tarea fue conocer si las y los estudiantes conocen los números irracionales y si los reconocen como los números que *no se pueden escribir como fracción (cociente) de enteros, con denominador distinto de cero* o como *los que poseen infinitos decimales no-periódicos* y si pueden diferenciarlos de los racionales. Inferir una posible identificación de los reales con los racionales y/o de los irracionales con las raíces o con ciertos números muy especiales.

El Cuadro 2 reproduce la consigna utilizada para esta tarea en el cuestionario, tal como fue presentada a las y los estudiantes.

Posiblemente has escuchado que $\sqrt{2}$ y el número π son números irracionales. ¿Cómo explicarías con tus palabras en qué consiste esa condición de ser irracionales?

¿Conocés los números irracionales? ¿Cuáles?

CUADRO 2. La consigna utilizada para la Tarea N2 en el cuestionario.

En esta tarea se solicita se describa qué se entiende por número irracional y se espera una respuesta que contenga los elementos esenciales que describen a un número irracional. Luego, bajo el supuesto de que la mayoría de estas y estos estudiantes conoce los números irracionales π y $\sqrt{2}$, se les solicita otros ejemplos de números irracionales. En las respuestas tendremos en cuenta si se considera a los irracionales como complemento de los racionales (distintos de las fracciones o cocientes de enteros con denominador distinto de cero) o si se los considera por su notación decimal (como números con infinitos decimales no-periódicos). Fundamentalmente si se los diferencia de los racionales y los ejemplos nos servirán para ilustrar sus respuestas.

3.2.3. *Tarea D1. Comprensión del orden y la densidad en los reales.* El objetivo de esta tarea fue conocer cómo conciben estos y estas estudiantes, el orden de los reales con sus especiales características en relación con la densidad, e inferir concepciones sobre infinito, en correspondencia con la cantidad de números y con la densidad.

El Cuadro 3 reproduce la consigna utilizada para esta tarea en el cuestionario, tal como fue presentada a las y los estudiantes. No se ha especificado en que campo numérico se está trabajando dado que buscamos concepciones naturalizadas sobre el concepto de número.

Cuando decimos “un número entre 0 y 2”, nos referimos a un número mayor que 0 y menor que 2.

¿Podrías nombrar un número entre ...

0 y 2?	<input type="checkbox"/> Sí	¿Cuál?	<input type="checkbox"/> No hay	<input type="checkbox"/> No sé
1/5 y 1/4?	<input type="checkbox"/> Sí	¿Cuál?	<input type="checkbox"/> No hay	<input type="checkbox"/> No sé
3,14 y π ?	<input type="checkbox"/> Sí	¿Cuál?	<input type="checkbox"/> No hay	<input type="checkbox"/> No sé

¿Podrías nombrar un número entre ...

0 y 2?	<input type="checkbox"/> Ninguno	<input type="checkbox"/> Unos pocos	<input type="checkbox"/> Muchísimos	<input type="checkbox"/> Infinitos	<input type="checkbox"/> No sé
1/5 y 1/4?	<input type="checkbox"/> Ninguno	<input type="checkbox"/> Unos pocos	<input type="checkbox"/> Muchísimos	<input type="checkbox"/> Infinitos	<input type="checkbox"/> No sé
3,14 y π ?	<input type="checkbox"/> Ninguno	<input type="checkbox"/> Unos pocos	<input type="checkbox"/> Muchísimos	<input type="checkbox"/> Infinitos	<input type="checkbox"/> No sé

CUADRO 3. La consigna utilizada para la Tarea D1 en el cuestionario.

Es de esperar que, estudiantes que comprendan el orden y la densidad de los números reales, respondan en los tres ítems que *sí hay un número* y den *un ejemplo correcto*. Podría suceder también que, aunque sepan que debiera existir un número entre estos dados, no se sepan cual, porque no conozcan la relación de orden entre fracciones, la equivalencia de una fracción con un decimal o el orden entre decimales. Entre 3,14 y π , puede suceder que no conozcan el orden entre decimales o no sepan el valor de π .

De elegir que *no hay* un número entre 1/5 y 1/4 podríamos pensar en una confusión de los reales con las fracciones y una concepción de estas como discretas. La elección *no hay* un número entre 3,14 y π podría provenir de identificar π con el racional 3,14.

Para la segunda pregunta *¿Cuántos números hay?* entre las mismas parejas de números, la respuesta correcta es *infinitos*, sin embargo, por la forma cerrada de la pregunta, no podríamos distinguir si responden a una concepción de infinito potencial o actual. Al haber infinitos números entre dos reales distintos, las respuestas *unos pocos* y *muchísimos* también son respuestas correctas, sin embargo, es esperable que si está disponible la opción *infinitos* y se elige *unos pocos* o *muchísimos* sea porque se esté pensando en una cantidad finita. Si entre 0 y 2 se elige *unos pocos*, podríamos pensar que se está identificando a los números con los enteros (y sus fracciones), por lo que en este caso podría considerarse que no haya ningún número entre 1/5 y 1/4 ni entre 3,14 y π .

3.2.4. *Tarea D1. Densidad en relación con el supremo de un intervalo.* El objetivo de esta tarea fue conocer cómo estas y estos estudiantes conciben la propiedad del supremo de un intervalo de números reales y su relación con la densidad y el orden, e inferir concepciones sobre infinito, en relación con la cantidad de números, la densidad y la completitud.

El Cuadro 4 reproduce la consigna utilizada para esta tarea en el cuestionario, tal como fue presentada a las y los estudiantes.

En matemática solemos considerar el intervalo $(1, 2)$ como todos los números mayores que 1 y menores que 2. Vemos que ni 1 ni 2 pertenecen al intervalo.

Una profesora de Matemática de la Universidad nos contó que discutió con sus alumnos sobre la posibilidad de identificar dentro del intervalo al número que se encuentra lo más cerca posible de 2.

¿Qué pensás al respecto? ¿Se puede identificar dentro del intervalo al número que se encuentra lo más cerca posible de 2 y que pertenece al intervalo?

¿Cómo le explicarías a alguien que piense lo contrario?

CUADRO 4. La consigna utilizada para la Tarea D2 en el cuestionario.

La tarea comienza con una aclaración sobre el significado de “intervalo abierto” de números y se plantea la posibilidad de identificar un número “más cercano” al supremo del intervalo. A continuación, se plantean dos preguntas abiertas.

La primera pregunta interroga sobre si es posible encontrar el número “más cercano” al supremo y que pertenezca al intervalo (es decir que no sea el mismo supremo). Mientras que en la segunda se invita a justificar la respuesta. Para la primera pregunta se espera las respuestas, *sí es posible*, *no es posible* o *no sé si es posible* y algún tipo de justificación de la respuesta elegida. En la segunda es deseable que se amplíe esta justificación.

Es esperable que estudiantes que comprendan la idea de supremo (completitud de los reales) respondan que *no es posible encontrar tal número debido a la densidad infinita de los reales*. Por su calidad de supremo del intervalo, toda vez que tengamos

un número perteneciente al intervalo, habrá otro mayor que éste que pertenezca al mismo. Sin embargo, puede haber otras razones por las cuales el o la estudiante puede pensar que esto no es posible.

La respuesta *sí es posible*, supone que se consideran los reales como discretos, donde podríamos encontrar un número anterior a uno dado (al estilo de los enteros).

3.3. Procedimientos de análisis. Hemos realizado, en primera instancia, una categorización de las respuestas a cada tarea, con diferentes metodologías de análisis, que se describen en el siguiente apartado, a fin de obtener modos de respuesta que abarcaran todo el espectro de respuestas en una tarea, asociando en una misma clase aquellas que compartieran significado y de modo que las categorías fueran mutuamente excluyentes.

Se determinaron estos modos de respuesta obteniéndose cinco, siete, cinco y ocho modalidades para las tareas N1, N2, D1 y D2, respectivamente. Esta categorización se describe en la sección siguientes (*Resultados*) ya que son resultados interesantes por sí mismos que dan cuenta de las representaciones de las y los estudiantes respecto de los conceptos implicados en cada Tarea.

En una segunda instancia se asoció a cada estudiante su categoría de respuesta para cada Tarea. Cualquiera hubiese sido el método para obtener estas categorías, se aplicó un procedimiento de control inter-juez sobre la totalidad de las respuestas, es decir se volvió a los datos originales. Se solicitó a dos jueces que verificaran una por una, si las respuestas de cada estudiante se correspondían con la caracterización de la categoría que se le había asociado. Las jueces fueron dos docentes universitarias de matemática, y se obtuvo una coincidencia con la categorización realizada por las investigadoras mayor del 98 % en todos los casos, en los pocos casos que no se coincidía se consensuó la categoría que le correspondería a esa respuesta.

En una tercera fase, se definieron sobre el conjunto de estudiantes cinco variables categóricas, cuatro de ellas denominadas *variables de respuestas* (una por cada Tarea) con tantas modalidades como fueron los modos de respuesta determinados para cada Tarea en la categorización descripta y una más denominada NEM, que se corresponde con el Nivel de Estudio de Matemática con las 9 modalidades antes descriptas.

Con el fin de estudiar asociaciones entre los modos de respuesta por una parte y relaciones con las modalidades de NEM y las de respuestas por otra, se optó por la aplicación del método factorial de correspondencias múltiples (AFCM) (Benzécri, J.P., 1973; Crivisqui, 1993; Lebart, Morineau, y Fénelon, 1979) que está especialmente diseñado para describir, visualizar y sintetizar grandes cantidades de datos obtenidos sobre un conjunto de individuos. Este AFCM tomó como variables activas para la formación de los ejes factoriales las modalidades de las

variables de respuesta. Las modalidades de NEM se proyectaron sobre los planos factoriales como variable ilustrativa. Este método permitió observar los principales factores de variabilidad de los modos de respuesta, así como visualizar la relación de éstos con cada modalidad de NEM. De un modo muy sintético, podríamos decir que con este estudio pretendemos evidenciar las asociaciones que existen entre las modalidades de respuesta a las distintas tareas, qué estudiantes responden qué y qué modalidades de NEM se relacionan con cada una de estas asociaciones.

Finalmente, y considerando a los participantes descritos por sus coordenadas en los ejes principales del AFCM (factores de variabilidad de los modos de respuestas encontrados), realizado en el paso anterior, efectuamos una Clasificación Jerárquica Ascendente (CJA) (Ward, 1963). El método de clasificación utilizado comienza con una partición de la población de estudiantes descritos por sus modos de respuesta, de manera que cada uno de ellos sea el único elemento de una clase y en cada iteración se agrupa en una nueva clase aquellas dos más parecidas, en el sentido de que posean casi las mismas asociaciones con los modos de respuesta a las tareas. Se corta el proceso de manera que la conformación de las clases obtenidas tenga sentido en términos de los objetivos de la investigación. Resultando en clases de respuestas a las que se dio una denominación (etiqueta de la clase) según las características emergentes de cada clase (indicadores de categorización), que pueden ser interpretadas en términos de concepciones o comprensiones de determinado aspecto por parte de las y los estudiantes.

3.3.1. Categorización de las respuestas a cada tarea. Para los ítems de las tareas en las que se contaba con respuestas verbales abiertas (Tarea N1, primer ítem de la Tarea N2 y justificación en la Tarea D2), se asoció a cada estudiante las respuestas literales y se aplicó un análisis lexicométrico del corpus de respuestas. De este modo se buscó evidenciar similitudes y diferencias entre las respuestas de las y los estudiantes, mediante la interpretación del léxico utilizado. Se utilizó para ello el Análisis Lexicométrico (AL) (Lebart y cols., 1979; Lebart, Salem, y Bécue Bertaut, 2000). Se realizó un Análisis Factorial de Correspondencias (AFC) (Benzécri, J.P., 1973; Crivisqui, 1993) del corpus de respuestas con el propósito de descubrir ideas diferenciadas presentes, como así también una tipología de respuesta. Se realizó luego una Clasificación Jerárquica Ascendente posterior al AFC, de las y los estudiantes según sean similares las palabras que usan en sus respuestas y se interpretaron las clases resultantes en términos de concepciones. En los ítems en los que se encontraron justificaciones relativamente cortas o ejemplos (ítems 2 de N2 y justificaciones de D2) se realizó una categorización de las respuestas una por una, buscando similitudes de significados según los elementos emergentes, encontrando modalidades de respuestas mutuamente excluyentes.

Para la Tarea D1, se realizó un AFCM de las y los estudiantes descritos por su tipo de respuesta a cada uno de los seis ítems, tomando éstas como variables activas.

Las nueve modalidades de NEM se proyectaron sobre los planos factoriales como variables ilustrativas. Este método nos permite básicamente encontrar asociaciones entre modos de respuesta a los distintos ítems y asociar que estudiantes responden qué. Posterior al AFCM se realizó una clasificación (CJA) de las y los estudiantes según sean globalmente similares sus modalidades de respuesta.

En las Tablas 2, 3, 4 y 5 puede observarse la caracterización de las modalidades de respuesta encontradas para las Tareas N1, N2, D1 y D2 respectivamente. Como así también ejemplos literales de respuesta (especificando el NEM al cual pertenece el o la estudiante que dio dicha respuesta) y porcentaje de la población perteneciente a cada clase de respuesta.

3.3.2. *Asociaciones entre los modos de respuesta a las cuatro tareas.* Como dijimos, finalmente y con el fin de observar asociaciones entre los tipos de números nombrados por las y los participantes, las descripciones que hacen de los irracionales, cómo comprenden el orden, la densidad y el supremo de un intervalo en \mathbb{R} , se aplicó un AFCM de las y los participantes descritos por sus modalidades de respuesta a las cuatro tareas (N1, N2, D1 y D2). Las modalidades del nivel de estudio en Matemática (NEM) se proyectaron sobre los planos factoriales como variables ilustrativas. Luego realizamos una CJA, agrupando a las y los estudiantes cuyos tipos de respuestas sean similares, globalmente en las cuatro tareas, en el sentido de que posean casi las mismas asociaciones entre los modos de respuesta.

§4. Resultados

4.1. Categorización de las respuestas a cada una de las cuatro tareas.

Tabla 2. Clases de respuestas según los tipos de números que se nombran. Ejemplos literales de respuesta (especificando el NEM del o la participante) y porcentaje de la población perteneciente a cada clase.

Caracterización de las respuestas		Respuestas de un o una estudiante de...	Porc.
No nombran reales, ni racionales ni irracionales	N1.1. <i>Números son sólo los enteros.</i> No nombran reales, ni racionales, ni irracionales. Nombran a los naturales, los enteros o algún subconjunto notable de los enteros (ej. positivos, negativos, primos). Asociada a EFA y EFI.	EFI: <i>positivos (8), enteros, negativos (-8).</i>	12%

TABLA 2. (continuación)

Caracterización de las respuestas		Respuestas de un o una estudiante de...	Porc.
Nombran reales, racionales o irracionales	N1.2. <i>Los enteros como modelo.</i> Nombran a los reales, racionales o irracionales y además algún subconjunto notable de los enteros (pares, impares, primos). Asociada a EFl.	5to: <i>números reales</i> $\mathbb{R} = \dots$, <i>números irracionales</i> ($\sqrt{5}$), <i>números enteros</i> (1; -3), <i>números primos</i> (3), <i>números pares</i> (2) y <i>números racionales</i> (1,5)	8%
	N1.3. <i>Identificación del número con su representación.</i> Nombran reales, racionales o irracionales y algún tipo de número por su notación (decimales, fraccionarios, periódicos, negativos, imaginarios, ej. de irracionales, romanos); principalmente decimales y periódicos. Algunas pocas respuestas que dan ejemplos de irracionales y las que dicen romanos. Asociada a EFA.	3ro: <i>Enteros</i> (1; 2; 3), <i>decimales</i> (1,2), <i>racionales</i> (5; 7), <i>fraccionarios</i> (1/2).	35%
	N1.4. <i>Conjuntos numéricos escolares.</i> Además de reales, racionales o irracionales dicen naturales y enteros. No dicen complejos. Asociada a MA y MI.	MI: <i>Reales</i> (1/5) ... <i>abarca todo</i> , <i>naturales</i> , <i>enteros</i> (1; 2; 3; 4), <i>irracionales</i> ($\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$) y <i>racionales</i> (1/2; 1/5; 6/5).	36%
	N1.5. <i>Conjuntos convencionales con estructura.</i> Además de reales, racionales o irracionales dicen naturales, enteros y complejos. La respuesta clásica es sólo estos 6 conjuntos numéricos y en ese orden: naturales, enteros, racionales, reales y complejos muchos nombran también los irracionales. Son todos de MA.	MA: <i>Naturales</i> (1), <i>enteros</i> (-3), <i>racionales</i> (3/4), <i>irracionales</i> ($\sqrt{2}$), <i>reales</i> (5), <i>complejos</i> (3 + 2i)	11%

Tabla 3. Caracterización de las clases de respuestas según la descripción de los números irracionales. Ejemplos literales de respuestas (especificando el NEM del o la participante) y porcentaje de la población perteneciente a cada clase.

Caracterización de las respuestas	Respuestas de un o una estudiante de...	Porc.
N2.1. <i>Ajenidad - Inseguridad. Desconocen los irracionales. No contestan, o expresan que no saben, o algún aspecto irrelevante. No dan ejemplos.</i>	EFI: <i>Lo primero que se me ocurre es decir que (... a los irracionales) no los podemos concebir o razonar. No da ejemplos.</i>	29 %
N2.2. <i>Centrada en la resolución de una operación. No tienen solución/resultado (exacta/o). Consideran que los irracionales son los números que no tienen (al dividir o al calcular una raíz) una solución (exacta) o un resultado (exacto o entero). Asociada a 4to y 5to. No hay MA. Generalmente no dan ejemplos, algunos dan ejemplos complejos (raíces de negativos).</i>	5to: <i>Son imposibles de resolver (no tienen un n° exacto). Ejemplos: $\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{-7}$ $\sqrt{10}$ $\sqrt{-6}$...</i>	17 %
N2.3. <i>Confunden irracionales con racionales. Son los decimales, números con coma. Manifiestan que los irracionales son números decimales o con coma o también que son las fracciones o tienen infinitos decimales periódicos, es decir los confunden con los racionales lo cual se ve reforzado por que brindan como ejemplos números racionales. Hay un subgrupo que considera que son los que sirven para medir con precisión (en el sentido de más o menos decimales). Generalmente dan ejemplos racionales. Asociada a: 3ro, 4to, 5to BI y MI.</i>	4to: <i>Los números irracionales son números que no son enteros, sino que llevan coma. Ejemplos: Las fracciones.</i>	17 %
N2.4. <i>Centrada en la noción de infinito. Infinitos decimales después de la coma. Consideran que los irracionales tienen infinitas cifras decimales o son infinitos. Suelen dar como ejemplos a ejemplares irracionales, pero también ejemplares racionales. Asociada a: BI, MI y BA.</i>	MI: <i>Si es irracionales es que va a tener infinitas cifras. Ejemplos: 0,2; $\sqrt{5}$.</i>	15 %
N2.5. <i>Definición notacional. Infinitos decimales no-periódicos. Manifiestan que son los "decimales no-periódicos". Dan como ejemplo: ejemplares irracionales (raíces de primos-notables) o una generalización correcta centrada en la definición notacional. Asociada a 3ro.</i>	3ro: <i>los irracionales son los decimales no periódicos. Otros irracionales: $\sqrt{6}$, $\sqrt{5}$.</i>	7 %
N2.6. <i>Definición literal no-fracción. No se pueden escribir como fracción. Expresan la frase textual: no se pueden escribir como fracción, sin más detalles; sólo esa frase sin especificar "de enteros" o "con denominador distinto de cero", tampoco nombran que son reales. Da idea de una definición literal sin mucha comprensión. Como ejemplo suelen dar una generalización correcta. Asociada a 3ro.</i>	3ro. <i>Son irracionales... porque no se pueden escribir en fracción. Otros irracionales: $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$; cualquier raíz de un número primo.</i>	9 %

TABLA 3. (continuación)

Caracterización de las respuestas	Respuestas de un o una estudiante de...	Porc.
N2.7. <i>Definición experta. Los reales que no son cociente de enteros. Dan una definición correcta de irracionales, como: los (números reales) que no se pueden expresar como cociente de enteros con denominador distinto de cero. Como ejemplo raíces de números primos positivos o alguna generalización correcta. Asociada a MA.</i>	MA. <i>Los irracionales son los reales que se pueden escribir como cociente de enteros (con denominador distinto de cero). Otros irracionales: $\sqrt{5}$; $\sqrt{3}$; cualquier raíz de un número primo.</i>	5%

TABLA 4. Modalidades de respuesta según concepción de orden y densidad en \mathbb{R} . Ejemplos literales de respuestas (especificando el NEM del o la participante) y porcentaje de la población que presenta cada modalidad.

Caracterización de las respuestas	Respuestas de un o una estudiante de...	Porc.
D1.1. <i>Inseguridad</i> (respecto a la densidad y el orden de \mathbb{R}). Responden sólo cuando se trata de enteros. Consideran que entre 0 y 2 hay algún número, pero no dan ejemplo y para los demás ítems expresan no saber o no contestan.	3ro: Entre 0 y 2: Si - <i>Unos pocos</i> . Entre 1/5 y 1/4: <i>No sé - No sé</i> . Entre 3,14 y π : <i>NC - No sé</i> .	18%
D1.2. <i>Discretitud. Identifican π con su aproximación decimal.</i> Sólo presentan seguridad cuando se trata de enteros; manifestando que hay pocos o muchos números entre 0 y 2. Pero consideran que entre las fracciones con denominador consecutivo no hay ningún o unos pocos números. Identifican a π con el racional 3,14. Asociada a 5to.	5to: Entre 0 y 2: Si. <i>1 - unos pocos</i> . Entre 1/5 y 1/4: <i>no sé - unos pocos</i> . Entre 3,14 y π : <i>No hay (π es el mismo valor) - no contesta</i> .	33%
D1.3. <i>Densidad finitista. No comprenden el orden.</i> Consideran que entre dos números hay pocos (a lo sumo muchos o muchísimos) números, pero no infinitos. No comprenden el orden ya que dan un número errado (o no saben) entre 1/5 y 1/4 y entre 3,14 y π . Asociada a EFA, 4to y BA.	4to: Entre 0 y 2: Si. <i>1; 1,15; 1,7, etc. - Muchísimos</i> . Entre 1/5 y 1/4: Si. <i>0,05 - unos pocos</i> . Entre 3,14 y π : Si. <i>0,005 - unos pocos</i> .	21%
D1.4. <i>Densidad infinitista. No comprenden el orden.</i> Consideran una densidad infinita, sin embargo, no comprenden el orden de \mathbb{Q} , ya que dan un número errado (o no saben) entre 1/5 y 1/4 y entre 3,14 y π . Asociada a BI y BA.	BI: Entre 0 y 2: Si. <i>1 - Infinitos</i> . Entre 1/5 y 1/4: Si. <i>1/44 - Infinitos</i> . Entre 3,14 y π : Si. <i>No sé - Infinitos</i> .	12%
D1.5. <i>Comprensión de la densidad y el orden.</i> Consideran la densidad infinita de los reales. Los ejemplos pueden ser dados en forma de fracción o decimal, pero están bien. Asociada a MA y BA.	MA: Entre 0 y 2: Si. <i>0,5 - Infinitos</i> . Entre 1/5 y 1/4: Si. <i>0,21 - Infinitos</i> . Entre 3,14 y π : Si. <i>3,1413 - Infinitos</i> .	16%

Tabla 5. Modalidades de respuesta según concepción de densidad y supremo de un intervalo. Ejemplos literales de respuestas y porcentaje de la población que representa cada modalidad.

Caracterización de las respuestas	Respuestas de un o una estudiante	Porc.
D2.1: <i>Ajenidad</i> (frente al problema del supremo). No responden o manifiestan no saber o no entender el planteo. Asociada a EFI y 3ro.	3ro: <i>No sé - No lo entiendo.</i>	27 %
D2.2. <i>Discretitud no explicada</i> . Manifiestan que es posible encontrar un número anterior a 2, sin justificar, parafraseando la pregunta o expresando algún aspecto no relevante. Asociada a 4to, 5to y EFA.	EFI: <i>Sí se puede - Es el número más cerca de 2, que no es 2.</i>	15 %
D2.3. <i>Discretitud finitista (redondeo)</i> . Consideran que es posible encontrar un número "anterior" a uno dado y éste es un decimal finito o que se puede estimar, redondear o que depende de la escala.	4to: <i>pienso que, sí se puede identificar, me parece que sería 1,9.</i>	9 %
D2.4. <i>Discretitud mediada por la concepción de infinito potencial</i> . Consideran que es posible encontrar un número "anterior" y este es un número con infinitos decimales. Asociada a BA.	BA: <i>es posible ya que el número 1,999 . . . (infinitos nueves) es menor que 2 y pertenece al intervalo - basándome en el número como un decimal. Todo número menor a 2 por más cercano que sea pertenecerá al intervalo.</i>	15 %
D2.5. <i>Discretitud mediada por la concepción de infinito es todo</i> . Consideran que debe existir tal número porque al ser infinitos deben estar todos los posibles.	BI: <i>Creo que sí, hay uno anterior, porque dentro de estos dos N^o hay infinitos números con coma - Le explicaría que dentro del 1 y el 2 hay infinitos números, como ejemplo le daría el $3/2$ que equivale a 1,5 que es un número y como este hay más, hay infinitos.</i>	8 %
D2.6. <i>Densidad potencialmente infinita</i> . Consideran que no se puede encontrar un número "anterior", porque hay infinitos números y nunca se llegaría o siempre se podría agregar un decimal. Asociada a BI y MI.	MI: <i>Yo creo que no se puede, sería una tarea interminable - Sería como encontrar 1,9 e ir agregando decimales (1,99 . . . etc.)</i>	15 %
D2.7. <i>Densidad no explicada</i> . Consideran que no se puede encontrar un número "anterior", sin explicar su pensamiento.	5to: <i>creo que no se puede – no sé cómo explicarlo.</i>	5 %
D2.8. <i>Densidad infinito-actual de los reales</i> . Consideran que no existe un número "anterior", justificando por la densidad de los reales. Asociada a MA.	MA: <i>No, porque siempre existe uno más cercano a 2 debido a la densidad de \mathbb{Q}, es decir, entre dos reales siempre existe un racional.</i>	6 %

4.2. **Asociaciones entre los modos de respuesta a las cuatro tareas.** A continuación, (Cuadro 5) presentamos el primer plano factorial del AFCM realizado sobre las y los estudiantes descritos por sus modalidades de respuesta a las cuatro tareas.

Factor 2	
D2.5. Discretitud medida por infinito es todo	
N2.3. Contunden fraccionales con racionales	
D1.3. Densidad Finitista. Sin comprensión del orden	
D2.4. Discretitud medida por infinito potencial	N2.4. Infinitos decimales después de la coma
	BA Clase 3: CONJUNTOS NUMERICOS ESCOLARES - DENSIDAD POTENCIALMENTE INFINITA
Clase 2: DECIMALES (FINITOS) - DISCRETITUD	
D2.2. Discretitud no-explicada. M1.4. Conj. escolares	N2.5. Definición Notacional
N2.2. No tienen resultado exacto. D2.7. Densidad no-explicada	
4to	MI
M1.2. Los enteros como modelo de números	BI
M1.3. Números por su notación	5to
D2.3. Discretitud finitista (redondeo)	D1.4. Densidad Infinitista
D1.2. Discretitud	N2.6. Definición Literal
EFA	D2.6. Densidad potencialmente infinita
3to	
Clase 1: SOLO ENTEROS - AJENIDAD.	
EFI	
D1.1. Inseguridad	
D2.1. Ajenidad	
N2.1. Ajenidad - Inseguridad	
M1.2. Solo Enteros	
	D1.5. Comprensión de la densidad y el orden
	M1.5. Conjuntos numéricos convencionales con estructura
	Clase 4: CONJUNTOS NUMERICOS CONVENCIONALES - DEFINICION EXPERTA - DENSIDAD ACTUALMENTE INFINITA
	D2.8. Densidad Infinito-actual de los reales MA
	N2.7. Definición experta

CUADRO 5. Primer plano factorial de AFCM de las y los estudiantes descritos por sus modalidades de respuesta y de NEM.

En el AFCM de las y los estudiantes descritos por sus modalidades de respuesta a las cuatro tareas y su NEM encontramos que el principal factor de variabilidad corresponde a respuestas que expresan que *comprenden el orden y la densidad de los reales (como actualmente infinita)* y dan una definición correcta de los irracionales, asociada a MA oponiéndose a las respuestas que expresan una concepción discreta de los números, asociados a los enteros o a los decimales finitos, asociadas principalmente a 3ro, 4to, 5to, EFI y EFA. En una zona intermedia, las respuestas que muestran una visión de la densidad como potencialmente infinitas asociadas a BI, MI y BA.

El segundo factor discrimina entre las modalidades que expresan *Ajenidad o Inseguridad* frente a estos aspectos asociadas a EFI y EFA y las que proponen una visión de *densidad potencialmente infinita* y los números como los conjuntos numéricos escolares asociada principalmente a BA.

4.3. Clasificación de las respuestas a las cuatro tareas. Presentamos las clases obtenidas en la CJA posterior al AFCM del apartado anterior. Cada clase agrupa estudiantes cuyas respuestas sean similares en el sentido de que posean casi las mismas asociaciones entre los modos de respuesta en las cuatro tareas. Informaremos, para cada clase, la cantidad de estudiantes que la constituyen, porcentaje de la población que representan, modalidades de respuestas y de NEM asociadas especialmente y una caracterización según las ideas relacionadas con los modos de respuesta asociados.

Clase 1 – Sólo Enteros – Ajenidad e Inseguridad. N=86 (28 % de la población). Asociada a EFI.

Modalidades de respuesta asociadas: N2.1. Ajenidad. Inseguridad. Desconocen los irracionales. D2.1: Ajenidad (problema del supremo). N1.2. Los Enteros como modelo de número. N1.3. Identificación del número con su representación. D1.1: Inseguridad con la densidad y el orden de los reales.

Síntesis de ideas presentes: Consideran a los enteros como modelo de número o identifican al número con su representación, no conocen los irracionales. Exhiben inseguridad frente al orden y la densidad de los reales. Son estudiantes de secundaria o de Ed. Física

Clase 2 - Los números son los decimales finitos - Discretitud Explícita. N=117 (38 % de la población). Asociada a 4to (mayormente de compuesta por estudiantes de secundaria).

Modalidades de respuesta asociadas: N2.3. Confunden irracionales con racionales N1.3. Identificación del número con su representación. D1.2. Discretitud. Identifican π con su aproximación decimal. N2.2. No tienen solución/resultado (exacta/o). D2.2: Discretitud - no explicada. D2.3. Discretitud finitista (redondeo). D2.5. Discretitud mediada por la concepción de infinito es todo.

Síntesis de ideas: Identificación del número con su representación. Números son los Enteros y los decimales finitos, corrimiento de los enteros a los décimos o centésimos. Visión discreta explícita de los números.

Clase 3 - Conjuntos numéricos escolares. Densidad potencialmente infinita. N=76 (25 % de la población). No tienen NEM asociado especialmente.

Modalidades de respuesta asociadas: D2.6. Densidad potencialmente infinita. N2.4. Centrada en la noción de infinito. D1.4. Densidad infinitista. D2.4. Discretitud mediada por la concepción de infinito potencial. N1.4. Números son los elementos de los conjuntos numéricos escolares.

Síntesis de ideas: Números son los conjuntos numéricos escolares (Enteros - Decimales - Fracciones - Racionales - Reales). Conciben a los números como un conjunto infinito (potencialmente) denso.

Clase 4 - Conjuntos numéricos con estructura. Densidad actualmente infinita. Definición experta de los irracionales. N=28 (9 % de la población). Asociada a MA.

Modalidades de respuesta asociadas: N1.5. Conjuntos convencionales con estructura.

N2.7. Definición experta. D1.5: Comprensión de la densidad y el orden. D2.8. Comprenden la densidad y completitud de los reales. N2.5. Definición notacional. No hay estudiantes de secundaria en esta clase.

Síntesis de ideas: Número es elemento de un conjunto numérico con estructura. Definición correcta (sea experta o notacional) de los irracionales. Comprenden el orden y la densidad actual de los reales.

§5. Discusión y conclusiones

Encontramos un gradiente en la profundidad de las concepciones de los reales como números que comienzan con las y los estudiantes que (i) **sólo consideran como números a los enteros y presentan ajenidad o inseguridad frente al orden y la densidad de los números reales**. Esta clase representa el 28 % de la población y está compuesta principalmente por estudiantes de secundaria o de Educación Física, que consideramos con menores estudios en matemática.

Es notable cómo las y los estudiantes de Educación Física, que no han estudiado matemática en la universidad, han naturalizado, en la secundaria como *número* sólo a los enteros. Estos resultados coinciden con [Arcavi y cols. \(1987\)](#); [Fischbein y cols. \(1994, 1995\)](#); [Tirosh y cols. \(1998\)](#), quienes encontraron que estudiantes secundarios y futuros maestros de matemática consideran a los enteros como modelo de número o identifican al número con su representación y no conocen los irracionales. Si bien, alguno pareciese conocer a las fracciones y los decimales lo suelen tomar como conjuntos disjuntos tal como habían encontrado en poblaciones

similares Khoury y Zazkis (1994); O'Connor (2001); Moseley (2005). Estas y estos estudiantes exhiben inseguridad frente al orden y la densidad de los reales, lo cual es coherente con pensar sólo en los enteros y enfrentarse a un orden compatible con la densidad que es la propiedad que distingue a los números racionales de los números enteros. Esta ajenedad frente a la densidad es acorde también con los resultados de (entre otros trabajos) Juan y cols. (2012); Montoro (2005); Waldegg (1993), que han observado que las y los estudiantes con menor estudio de matemática suelen mostrar inseguridad o resistencia frente a tareas que de alguna manera impliquen el infinito.

En una zona intermedia y como la idea más difundida en la población (38%), se ubica la concepción de (ii) **identificación de los números con los decimales finitos y una discretitud explícita de los números**, idea que encontramos principalmente entre las y los estudiantes de secundaria, los ingresantes a las carreras científicas e incluso en estudiantes de los últimos años de Biología, podríamos decir que la mayoría de las y los participantes de este estudio, que están estudiando matemática, han naturalizado el concepto de número real identificándolo con el de decimal (finito) y discreto. Pareciera que en su comprensión hay un corrimiento de los enteros a los décimos o centésimos. Vemos aquí como una transferencia incorrecta de las propiedades de los números naturales a los números racionales puede llevar a una comprensión deficiente de los números racionales (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004, 2007; Yujing y Yong-Di, 2005). Puede observarse que las y los estudiantes de esta clase trasladan a los racionales el tipo de orden de los naturales (un racional puede tener un siguiente) y no reconocen los irracionales, lo que concuerda con lo encontrado por Behr y cols. (1983), Malara (2001), Merenluoto y Lehtinen (2002) y Palacios-Amaya y cols. (2018).

Entre estas y estos estudiantes encontramos una concepción de los reales como discretos y manifiestan una visión finitista asociada al redondeo (Palacios-Amaya y cols., 2018; Widjaja y cols., 2008), que extiende la propiedad de los conjuntos finitos a los conjuntos infinitos (Juan y cols., 2012; Monaghan, 2001; Montoro y cols., 2016; Waldegg, 1993). En otros casos una visión asociada a la idea de que *en infinito debe estar todo*, concepción que identificamos en otros trabajos con poblaciones similares, pero con tareas de conteo y que no hemos encontrado en otra bibliografía de las concepciones sobre el número real (Juan y Montoro, 2015; Montoro, 2005).

Vemos, también, en estas y estos estudiantes, de la zona intermedia, que, tal como encontraron Zazkis y Sirotic, las diferentes representaciones del número real influyen en las respuestas de las y los estudiantes con respecto a la irracionalidad y se observó confusión entre los números irracionales y su aproximación decimal (Sirotic y Zazkis, 2007a, 2007b; Zazkis y Sirotic, 2004, 2010). Notamos que esta clase se encuentran las respuestas del tipo *Definición literal no-fracción*, que solo representa el 9% de la población. Estudiantes que en este caso expresan la frase textual: *no*

se pueden escribir como fracción, sin más detalles; sólo esa frase sin especificar que son números reales. Da idea de una definición literal sin mucha comprensión, son principalmente estudiantes de 3ro de secundaria, daría la impresión, por el resto de las respuestas asociadas, que hay incoherencia entre las intuiciones de los participantes y su conocimiento formal (definición) similar a lo encontrado por Sirotic y Zazkis (2007b).

También en una zona intermedia encontramos una concepción de (iii) **densidad infinito potencial de los números**, son estudiantes que parecen identificar los reales con los racionales. Para estas y estos estudiantes los números son los conjuntos numéricos escolares. Conciben a los números como un conjunto infinito (potencialmente) denso. Representa el 25 % de la población, casi todos universitarios, no especializados en Matemática, lo cual coincide con que frecuentemente los jóvenes conciben al infinito en forma (intuitiva) como potencial (Arrigo y D'Amore, 2004; Fischbein y cols., 1979; Monaghan, 2001; Montoro y Scheuer, 2004), a pesar de haber estudiado los racionales y los irracionales, no hacen un uso flexible de diferentes representaciones de estos. Al igual que parte de la población estudiada por Peled y HersHKovitz (1999) se encuentran con la dificultad de mantener una concepción potencial del infinito.

Finalmente, sólo unos pocos estudiantes (9%), todos estudiantes avanzados de Matemática, poseen concepciones de número como elemento de un (iv) **conjunto numérico correctamente diferenciado** brindando una descripción de los irracionales con características necesarias y suficientes, describiéndolos como números reales que no se pueden expresar como *cociente* de enteros y con denominador distinto de cero y/o como aquellos que poseen infinitos decimales no-periódicos y una visión infinito actual de la densidad y del supremo de un intervalo.

Respecto a los números irracionales, mostramos que las dificultades en su comprensión no son sólo de naturaleza intuitiva, sino que implican una cierta profundidad en el estudio, que solo obtienen las y los estudiantes avanzados de matemática. Esta es una fuerte indicación de que la profundidad del conocimiento matemático juegan un papel importante para la mejor comprensión de los números reales, aun en las nociones más básicas, como son la diferenciación de racionales e irracionales, orden y densidad (Voskoglou y Kosyvas, 2012). Esto va de la mano con los estudios que indagan sobre concepciones del infinito matemático y que muestran que la comprensión de esta noción requiere de contextos educativos que propicien la reflexión matemática y un estudio específico (Artigue, 1995; Moreno-Armella y Waldegg, 1995; Fischbein y cols., 1994; Monaghan, 2001; Montoro, 2005; Montoro y Scheuer, 2006; Juan y cols., 2012; Montoro y cols., 2016), dejando en evidencia la relación intrincada y evidente en la historia, de los números reales con el infinito matemático.

Encontramos apropiada la metodología de este trabajo para cumplir con nuestro objetivo de estudiar las concepciones que han naturalizado, sobre el número real, estudiantes de secundaria, ingresantes a la universidad y de los últimos años de la universidad (cursando distintas carreras), sin embargo, al no tener información de cómo estos estudiantes estudiaron estas nociones, poco podemos decir sobre las dificultades derivadas de la enseñanza. Sin embargo, nuestros resultados pueden dar pistas para la enseñanza en varios sentidos ya que ponen de manifiesto que las y los estudiantes no han logrado una comprensión acabada de las propiedades de los números reales aquí abordadas. Al sacar a la luz las nociones que han construido las y los estudiantes, la enseñanza puede prever que éstas se exterioricen y se realice un trabajo específico, aclarando concepciones alternativas y explicitando la complejidad de estas nociones de modo de facilitar una más acabada extensión de los campos numéricos.

Es notable también la diversidad de ideas con las que pueden operar las y los estudiantes de un mismo grupo educativo, aún frente a una misma definición explicitada por el docente. Mostrando que lejos de ajustarse a una expectativa de homogeneidad, en cada grupo educativo (excepto aquel con mayor nivel de estudio específico, MA) conviven un amplio rango de supuestos y nociones. Es decir: la diversidad, lejos de ser una anomalía, es una condición esperable para la enseñanza. Además, hemos mostrado que el supuesto imperante en la enseñanza de la matemática universitaria de que la idea de número real puede resultar 'naturalizada' desde la secundaria o accesible directamente al estudiante universitario, puede convertirse en un serio obstáculo para favorecer la comprensión de este concepto indispensable para incursionar en las asignaturas matemáticas de sus carreras universitarias.

§6. Agradecimientos

A los y las estudiantes e instituciones participantes, a la Dra. Nora Scheuer (IPEHCS - CONICET) por el asesoramiento en todas las etapas de la investigación y sus atentas lecturas y discusiones de estos resultados. A los y las integrantes del Grupo de Pensamiento y Educación Matemática del Departamento de Matemática del CRUB – UNCo por su colaboración en todas las etapas de esta investigación. El trabajo contó con el apoyo de la Universidad Nacional del Comahue, mediante los Proyectos de Investigación: B186 -B221 subvencionados por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la UNCo.

Bibliografía

Arcavi, A., Bruckheimer, M., y Ben-Zvi, R. (1987). History of Mathematics for teachers: the case of Irrational Numbers. *For the Learning of Mathematics*, 7(2), 18–23.

- Arrigo, G., y D'Amore, B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática*, 16(2), 5–19.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios de cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (p. 97-140). Iberoamérica.
- Ausubel, D., Novak, J., y Henesiam, H. (1978). *Educational psychology: A cognitive view*. New York, USA: Holt, Rinehart and Winston.
- Behr, M., Lesh, R., Post, T., y Silver, E. (1983). Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Rational number concepts* (p. 91-25). Academic Press.
- Benzécri, J.P. (1973). *L'analyse des données (Vol 2)*. Dunod.
- Bergé, A. (2008). The completeness property of set of real numbers in the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics*(67), 217–235. doi: 10.1007/s10649-007-9101-5
- Bergé, A., y Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana en Matemática Educativa*, 6(3), 163–197.
- Cantor, G. (1871). Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen*, V, 123–132.
- Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: Conceptions et Obstacles* (Tesis Doctoral no publicada). Grenoble, Francia.
- Crivisqui, E. (1993). *Análisis Factorial de Correspondencias. Un instrumento de investigación en ciencias sociales*. . Asunción, Paraguay: Laboratorio de Informática Social de la Universidad Católica de Asunción.
- Dedekind, J. W. R. (1963). *Essays on the theory of numbers: I. Continuity and irrational numbers. II. The nature and meaning of numbers*. New York, USA: Dover.
- Fischbein, E., Jehiam, R., y Cohen, D. (1994). *The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles* (Vol. 2).
- Fischbein, E., Jehiam, R., y Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*(29), 29–44.
- Fischbein, E., Tirosh, D., y Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*(10), 3–40.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel.
- Herscovics, N. (1989). *Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra*. Budapest, Hungría: National Council of Teachers of Mathematics.
- Juan, M. T., y Montoro, V. (2008). Concepciones de estudiantes de nivel medio sobre aspectos básicos de la noción de infinito en un contexto de conteo. *Revista de*

- Educación Matemática*. Descargado de <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10443>
- Juan, M. T., y Montoro, V. (2015). *Cuando infinito es todo* [Comunicación de Reporte de Investigación]. XXVIII Reunión de Educación Matemática, Unión Matemática Argentina. Santa Fe, Rep. Argentina.
- Juan, M. T., Montoro, V., y Scheuer, N. (2012). Colecciones infinitas. Ideas de estudiantes de escuelas secundarias. *Educación Matemática*, 24(2), 61–90.
- Khoury, H. A., y Zazkis, R. (1994). On fractions and non-standard representations: Pre-service teachers' concepts. *Educational Studies in Mathematics*(27), 191–204.
- Lakoff, G., y Núñez, R. (2000). The Basic Metaphor of Infinity. En *Where Mathematics Comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being* (pp. 155–180). Basic Books.
- Lebart, L., Morineau, A., y Fénelon, J. (1979). *Traitement de Données Statistiques*. Dunod.
- Lebart, L., Salem, A., y Bécue Bertaut, M. (2000). *Análisis estadístico de textos*. Milenio.
- Malara, N. (2001). *From fractions to rational numbers in their structure: Outlines for an innovative didactical strategy and the question of density* (Vol. II). Praga, Rep. Checa.
- Mayberry, J. (2001). The Foundations of Mathematics. En *Theory of Sets*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- Merenluoto, K. (2003). *Abstracting the density of numbers on the number line a quasi-experimental study*. (Vol. 3). Bergen, Noruega.
- Merenluoto, K., y Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. En M. Limon y L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 233–258). Kluwer Academic Publishers.
- Monaghan, J. (2001). Young People's Ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*(48), 239–258.
- Montoro, V. (1999). La teoría de conjuntos. Una mirada histórica y epistemológica. *Cuadernos Universitarios. Centro Regional Bariloche.*, 33(0).
- Montoro, V. (2005). Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios. *Infancia y Aprendizaje*, 28(4), 409–427.
- Montoro, V., y Scheuer, N. (2004). ¿Cómo piensan el infinito matemático estudiantes universitarios de distintas carreras? *Épsilon*, 60(3), 435–447.
- Montoro, V., y Scheuer, N. (2006). *Distintas formas de pensar el infinito* (Vol. 19).
- Montoro, V., Scheuer, N., y Pérez-Echeverría, M. P. (2016). ¿Cuán abundantes son los conjuntos de números? Estudiantes comparando infinitos. *Educación Matemática*(28), 145–174.

- Moreno-Armella, L., y Waldegg, G. (1995). Variación y representación: del número al continuo. *Educación Matemática*, 7(1), 12–28.
- Moseley, B. (2005). Students' Early Mathematical Representation Knowledge: The Effects of Emphasizing Single or Multiple Perspectives of the Rational Number Domain in Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics*(60), 37–69.
- O'Connor, M. C. (2001). "Can any fraction be turned into a decimal?" A case study of a mathematical group discussion. *Educational Studies in Mathematics*(46), 143–185.
- Palacios-Amaya, M., Bianchi, V., y Montoro, V. (2018). Estudiantes de escuela secundaria pensando los números racionales. *Revista de Educación Matemática*, 33(3), 5–26.
- Peled, I., y HersHKovitz, S. (1999). Difficulties in knowledge integration: Revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30(1), 39–46.
- Pozo, J. I. (2014). *Psicología del Aprendizaje Humano: adquisición de conocimiento y cambio personal*. España: Morata.
- Pozo, J. I., y Gómez-Crespo, M. A. (1998). *Aprender y enseñar ciencia. Del conocimiento cotidiano al conocimiento científico*. España: Morata.
- Pozo, J. I., y Scheuer, N. (1999). Las concepciones sobre el aprendizaje como teorías implícitas. En J. Pozo y C. Monereo (Eds.), *El aprendizaje estratégico* (pp. 87–108). Santillana.
- Reina, L., y Wilhelmi, M. R. (2017). *Mimetismo ostensivo de objetos matemático. El caso de los números irracionales*.
- Rico, L., Castro, E., y Romero, I. (1996). *The role of representation systems in the learning of numerical structures* (Vol. 1). Valencia, España.
- Romero, I., y Rico, L. (1999). Construcción social del concepto de número real en alumnos de secundaria: Aspectos cognitivos y actitudinales. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(2), 259–272.
- Santinelli, R. (1999). La teoría de conjuntos. Una mirada histórica y epistemológica. *Cuadernos Universitarios. Centro Regional Bariloche.*, 34(0).
- Sfard, A. (1994). Reification as the Birth of Metaphor. *The Learning of Mathematics*, 14(1), 44–55.
- Sfard, A. (2010). A theory bite on infinity: A companion to folk. *Cognition and Instruction*, 28(2), 210-218. Descargado de <https://doi.org/10.1080/07370001003676637> doi: 10.1080/07370001003676637
- Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*(18), 371–397.
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Brighthon, Inglaterra: Falmer Press.
- Sirotic, N., y Zazkis, R. (2004). *Irrational numbers: dimensions of knowledge*.

- Sirotic, N., y Zazkis, R. (2007a). Irrational Numbers: The Gap Between Formal and Intuitive Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*(65), 49–76.
- Sirotic, N., y Zazkis, R. (2007b). Irrational numbers on the number line: where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(4), 477–488.
- Stafylidou, S., y Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14, 503–518.
- Steiner, R. (1984). Teaching About the Real Numbers. *The American Mathematical Monthly*, 91(3), 202–203. doi: 10.1080/00029890.1984.11971526
- Steinle, V., y Pierce, R. (2006). *Incomplete or incorrect understanding of decimals: an important deficit for student nurses* (Vol. 5). Praga, República Checa.
- Stevenson, W. S. (2000). *Exploring the Real Numbers*. Nueva Jersey, Estados Unidos: Prentice Hall.
- Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (Vol. 11, pp. 3–21). Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*(48), 200–238.
- Tall, D. (2004). *Thinking Through Three Worlds of Mathematics*. Bergen, Noruega.
- Tall, D., y Schwarzenberger, R. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*(82), 44–49.
- Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics. With Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.
- Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A., y Wilson, J. (1998). *Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers*. Descargado de <http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html>
- Vamvakoussi, X., y Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 453–467.
- Vamvakoussi, X., y Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers' interval? Constraints, synthetic models and the effect of the number line. En S. Vosniadou, A. Baltas, y X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 265–282). Elsevier.
- Vamvakoussi, X., y Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction*, 181–209. doi: 10.1080/07370001003676603
- Verschaffel, L., Greer, B., y Torbeys, J. (2006). Numerical thinking. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 51–82). Sense Publishers.

- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293–305.
- Vinner, S., y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356–366.
- Voskoglou, M., y Kosyvas, G. (2012). Analysing students' difficulties in understanding real numbers. *REDIMAT*, 1(3), 301–226.
- Vosniadou, S. (Ed.). (2008). *International handbook of research on conceptual change*. Routledge.
- Waldegg, G. (1993). *La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction* (Vol. 5).
- Ward, J. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal American Statistic Association*(58), 236–244.
- Widjaja, W., Stacey, K., y Steinle, V. (2008). Misconceptions about density of decimals: Insights from pre-service teachers' work. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, 31(2), 117–131.
- Yujing, N., y Yong-Di, Z. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27–52.
- Zazkis, R., y Sirotic, N. (2004). *Making sense of irrational numbers: Focusing on representation* (Vol. 4). Bergen, Noruega.
- Zazkis, R., y Sirotic, N. (2010). Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing the Missing Link. *CBMS Issues in Mathematics Education*(16), 1–27.

VIRGINIA MONTORO

Departamento de Matemática. Centro Regional Universitario Bariloche.

Universidad Nacional del Comahue. (Rep. Argentina). Grupo Vinculado al IPEHCS (Instituto CONICET – UNCo)

(✉) vmontoro@gmail.com

MARTHA FERRERO

Departamento de Matemática. Centro Regional Universitario Bariloche.

Universidad Nacional del Comahue. (Rep. Argentina).

(✉) marthaferrero@gmail.com

Recibido: 15 de marzo de 2021.

Aceptado: 11 de marzo de 2022.

Publicado en línea: 25 de abril de 2022.

la suma de los primeros n cubos es igual al cuadrado de la suma de los primeros n números?

Es decir, en símbolos $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ o, si se quiere, más sucintamente vale la fórmula

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

para todo natural n . Este resultado es conocido como el teorema de Nicómaco.

Por supuesto que esta identidad puede demostrarse por inducción en n , aunque para ello tal vez convenga asumir que conocemos la suma de los primeros n números, es decir, $1+2+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Dejamos esta demostración algebraica como ejercicio para el lector.

Sin embargo, aquí queremos mostrar una prueba geométrica de la identidad (1). La siguiente figura es una prueba gráfica muy sencilla y bonita de este hecho.

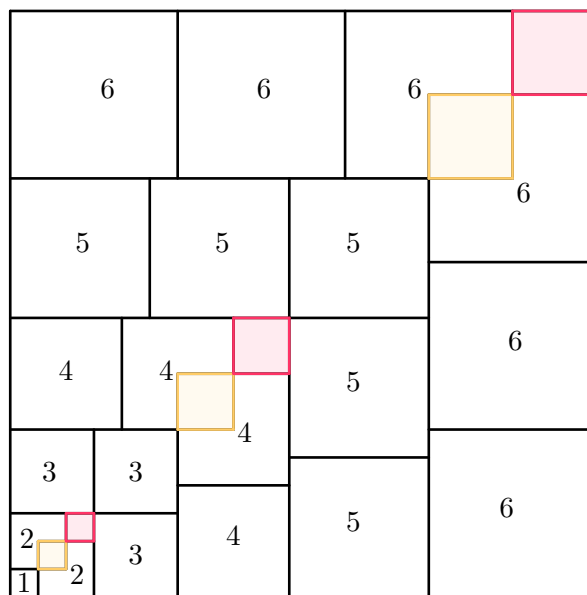


FIGURA 1. Hemos tomado $n = 6$ para concretar, pero el argumento es completamente general.

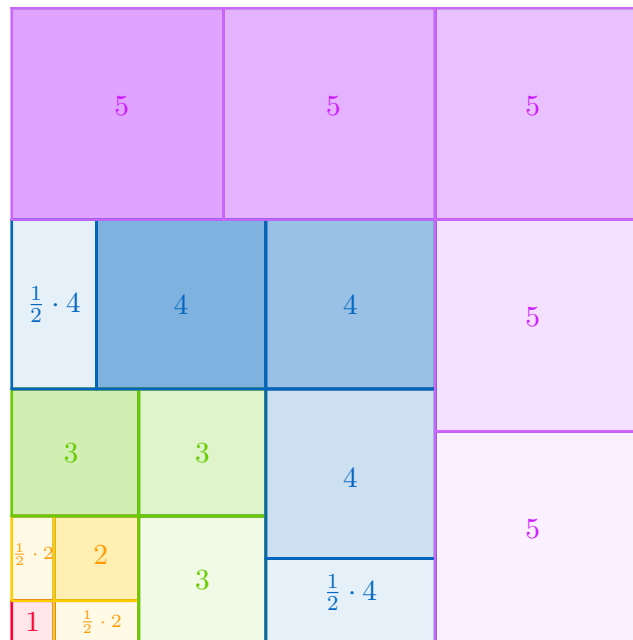
Para entender por qué funciona, lo que haremos es calcular el área del cuadrado de dos formas distintas. Es claro que por un parte, que el lado del cuadrado mide $1+2+3+4+5+6$, por lo tanto el área del cuadrado es $(1+2+3+4+5+6)^2$.

Por otra parte, el área del cuadrado grande es igual a la suma de todos los cuadraditos interiores. Aquí, hay un cuadrado de lado 1, que aporta $1 \cdot 1^2 = 1^3$ al área total, dos cuadrados de lado 2, que aportan $2 \cdot 2^2 = 2^3$ al área total, 3 cuadrados de lado 3 que aportan $3 \cdot 3^2 = 3^3$ al área total, 4 cuadrados de lado 4 que aportan $4 \cdot 4^2 = 4^3$ al área total, 5 cuadrados de lado 5 que aportan $5 \cdot 5^2 = 5^3$ al área total y 6 cuadrados de lado 6 que aportan $6 \cdot 6^2 = 6^3$ al área total. Aquí observamos que los cuadrados de lado par se solapan en los cuadraditos amarillos, por lo que contaríamos dos veces esa área), pero estos tienen la misma área que los cuadraditos rojos que quedan sin cubrir. De esta forma hemos visto que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2.$$

Lo hecho para $n = 6$ vale en realidad para cualquier n .

Otra representación gráfica de la misma demostración pueden verse en las siguiente figura, para $n = 5$ en este caso:



Para los más curiosos, en el libro *Proofs without words* (pruebas sin palabras, se puede bajar gratis de la red) de Roger Nelsen de 1993 hay 7 demostraciones geométricas diferentes de este hecho y en el artículo *Proof without Words: The Sum of Cubes: An Extension of Archimedes' Sum of Squares* en el *Mathematics Magazine*, Vol. 77, No. 4 (2004), pp. 298-299, hay dos pruebas gráficas más dadas por Katherine Kanim.

Nicómaco de Gerasa (Grecia, ca. 60 – ca. 120 dC) fue un importante matemático y teórico de la música, más conocido por sus trabajos *Introducción a la Aritmética* y *Manual de Armonías*. Nació en Gerasa, en la provincia romana de Siria (actualmente Jerash, Jordania). Fue un neopitagórico, que escribió sobre las propiedades (místicas) de los números.

Las matemáticas que unen

Nota editorial por Juan Carlos Pedraza

Las matemáticas unen. Con este lema se ha celebrado el Día Internacional de la Matemática el pasado 14 de marzo (IDM, s.f.). Este día, proclamado por la 40ª Conferencia General de la UNESCO en noviembre de 2019, tiene como objeto destacar el papel fundamental que desempeñan las matemáticas en el logro de los Objetivos de Desarrollo Sostenible de las Naciones Unidas (NU, s.f.). Es pues la tercera edición desde su proclamación, de la que dimos cuenta en el Número 3 del Volumen 34 de 2019 de nuestra revista (Pedraza, 2019).

Las matemáticas unen. Ella, como toda otra actividad cultural o científica tiene este efecto de integrar diversidades, atravesar fronteras, idiomas, modos de vida y formas de entender el mundo. En este sentido la matemática no se distingue del arte, de cualquier otra ciencia o de cualquier otra manifestación cultural.

Las actividades más notables que se vinculan con la matemática también unen. La tarea de investigación conforma “comunidades” de especialistas de lo más diversas, que permiten a sus miembros integrarse a mundos y costumbres desconocidos para otras actividades humanas. La docencia y su capacidad transformadora generan vínculos entrañables que en muchos casos marcan la vida misma de docentes y estudiantes. La difusión y visualización de nuestra ciencia nos une a la comunidad de la que formamos parte de una manera intensa y que nos da nuestra razón de ser como profesionales de esta ciencia. La interdisciplina y la transdisciplina, tan necesarias para la resolución de problemas que aportan a una mejor calidad de vida, también generan vínculos que no reconocen fronteras de ningún tipo. No hay duda de que las matemáticas unen.

Pero hay un aspecto que distingue a la matemática: el lenguaje universal que logra derribar barreras geográficas, económicas, de género, de religión, étnicas y varios etcéteras. Tal vez la música se aproxima a este singular aspecto pero no estoy seguro de que tenga en la música el mismo poder universal que tiene en la matemática. Como es un hábito, recurro a una historia para poder ilustrar esta característica maravillosa de nuestra ciencia.

Carl Sagan (1934 – 1996) ha sido uno de los divulgadores de la ciencia más destacado del siglo pasado. En su única novela, *Contacto* (Sagan, 1986), que resultó ser un best seller y que llegó al cine con el mismo nombre del libro, recrea el sueño de la humanidad de tomar contacto con vida más allá de la Tierra. Por medio de un sofisticado complejo de radiotelescopios se emiten y reciben señales de radio

durante años en la búsqueda de una señal que indique la existencia de vida extraterrestre en algún lugar del universo. Una tarde el curso de la historia humana cambia para siempre. El mensaje llega. La señal que recibe un radiotelescopio no es otra cosa que la melodía caótica de los primeros números primos que se repite una y otra vez. La señal proveniente del espacio exterior no podía ser casualidad. Era seguro que había sido enviada por seres inteligentes. La idea es interesante: Sagan pensaba que si tomáramos contacto con alguna inteligencia extraterrestre habría que comunicarse en algún lenguaje que fuera común a ambos, tengamos el idioma que tuviéramos, y que podamos descifrar. Ese lenguaje, creía Sagan, era el de las matemáticas.

Sagan llevó esta idea más allá de la ficción. Aprovechando la inauguración del telescopio de Arecibo, el 16 de noviembre de 1974, en Puerto Rico, decidió mandar una única señal de radio hacia un cúmulo formado por unas 400 mil estrellas en la constelación de Hércules, distante de la Tierra unos 25000 años luz. La señal tenía información en código binario sobre nosotros y nuestro planeta y fue enviada con la esperanza de que alguna inteligencia extraterrestre lo captara y devolviera el mensaje algún día. El mensaje ([Wikipedia, s.f.](#)) tiene una longitud de 1679 bits. El número 1679 fue elegido porque es el producto de dos números primos: el 23 y el 73. Por lo tanto sólo se puede descomponer en 23 filas y 73 columnas o 23 columnas y 73 filas, de modo que quien lo lea y decida organizar los datos en forma de rectángulo pueda descifrarlo fácilmente.

Hay ocho ($8 = 2^3$) posibles configuraciones combinando tres disposiciones, cada una con dos opciones: 1) de arriba hacia abajo o de abajo hacia arriba, 2) de izquierda a derecha o de derecha a izquierda y 3) un rectángulo de 23 por 73 o uno de 73 por 23. De estas ocho configuraciones solo una genera información coherente. Leído de izquierda a derecha, de arriba hacia abajo en un rectángulo de 73 filas y 23 columnas, presenta los números del uno al diez y los números atómicos de los componentes del

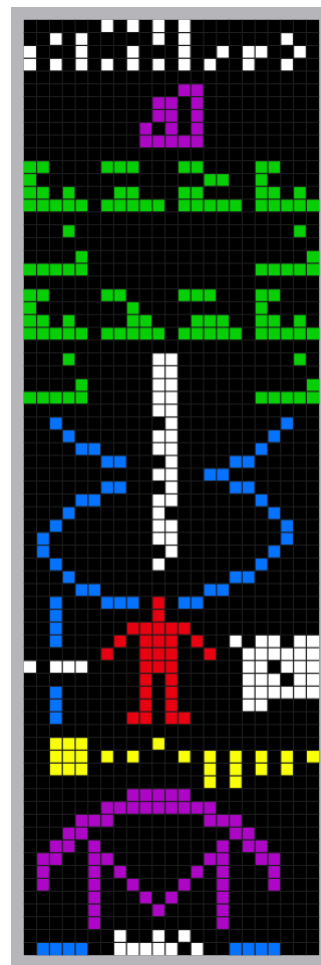


FIGURA 1. Mensaje de Arecibo. Los colores fueron añadidos para destacar las diferentes partes. El mensaje original no posee información sobre colores. Imagen y aclaración extraídas de Wikipedia.

ADN humano. Además da más información sobre el ADN y su estructura helicoidal doble, la figura de un ser humano y su altura, la población de la Tierra en ese entonces, la ubicación del Sistema Solar en el cosmos, y una imagen del radiotelescopio de Arecibo con su diámetro. Debido a que al mensaje tardará unos 25 milenios en llegar a su destino (y una hipotética respuesta otro tanto), el mensaje de Arecibo fue más una demostración de los logros tecnológicos humanos que un intento real de establecer conversación con extraterrestres. Por otro lado, el observatorio de Arecibo, debido a sucesivos desperfectos, colapsó a fines de 2020 y salió de funcionamiento. Sin embargo, la historia ilustra esta capacidad del lenguaje de la matemática de unir incluso más allá de los confines de nuestro planeta.

La pandemia nos ha dificultado celebrar los IDMs como nos hubiese gustado. No obstante, es esencial tomar conciencia de la importancia de la matemática, de lograr un fortalecimiento de la enseñanza de nuestra ciencia frente a los desafíos que plantean el desarrollo sostenible y la mejora de la calidad de vida. Parafraseando a Fito Páez, en tiempos donde nadie escucha a nadie, en tiempos donde todos contra todos, en tiempos egoístas y mezquinos, el lema del IDM de este año nos indica el camino a seguir: la tarea es colectiva y con la solidaridad como guía. Que la matemática contribuya a la unión de los pueblos.

Bibliografía

- IDM. (s.f.). *The international day of mathematics*. Descargado 2022-03-22, de www.idm314.org
- NU. (s.f.). *Objetivos de desarrollo sostenible*. Descargado 2022-03-22, de www.un.org/sustainabledevelopment/es/objetivos-de-desarrollo-sostenible/
- Pedraza, J. C. (2019). Nota Editorial: El día internacional de la matemática y la cuadratura del círculo. *Revista de Educación Matemática*, 34(3), 36-40. Descargado de revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/26958/28613
- Sagan, C. (1986). *Contacto*. EMECE.
- Wikipedia. (s.f.). *Mensaje de arecibo*. Descargado 2022-03-22, de es.wikipedia.org/wiki/Mensaje_de_Arecibo

Sección de Problemas

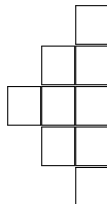
✉ por Juan Pablo Rossetti

En este número, tanto los problemas como las sucesiones, plantean la pregunta de si cierta construcción es posible o no. Están pensados para un público amplio. Las soluciones se encuentran en la página siguiente.



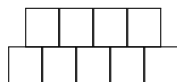
Problema 1. *Cuadrados perfectos con los primeros 9 números.*

¿Es posible ubicar los números del 1 al 9, uno en cada casillero del dibujo, de modo que en cada fila (horizontal) el número que se lea sea un cuadrado perfecto?



Problema 2. *Pirámide con los números del 1 al 9.*

¿Se pueden colocar los nueve números naturales del 1 al 9, uno en cada casillero, de modo que cada número en un casillero de arriba sea igual a la suma de los dos que tiene debajo?



Problema 3. *Cerámicos.* Un fabricante de cerámicos prueba colores hasta dar con el que le gusta. Le encarga a su empleado que haga unos 200 cerámicos como el que le da de muestra. El empleado los hace cuidadosamente iguales a pesar de lo extraño del encargo, puesto que la muestra era un cerámico roto, con forma de cuadrilátero, pero no cuadrado ni rectangular. Cuando el fabricante ve los cerámicos confeccionados, comprende el malentendido (él los quería cuadrados) y cree que no van a servir. Sin embargo, una profesora de matemática que se encontraba en el taller les dice que nos los tiren, que sirven, y ni siquiera habrá que hacerles cortes para embaldosar con un encastre perfecto.

¿Tiene razón la profesora? ¿Es posible embaldosar perfectamente un piso con cerámicos todos iguales con forma de cuadrilátero?

¡Sucesiones al toque!

- $\{a\}$: $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 100$
¿Es posible colocar tres signos más o menos entre los números para que arriba quede una igualdad?
- $\{b_n\}$: $1, 2, \dots$
La sucesión $\{b_n\}$ es estrictamente creciente y crece cada vez más, es decir, $b_{n+1} - b_n > b_n - b_{n-1}$, para todo n .
¿Existe una sucesión así con sus primeros 99 términos menores que 5 mil?
- $\{c_n\}$: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$ la sucesión de Fibonacci. ¿Es posible que haya algún término de la sucesión (aparte de los dos primeros) que sea un cuadrado perfecto?
¿Hay algún término de la sucesión de Fibonacci que corresponda a un año del siglo XXI?
- $\{d_n\}$: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, \dots$
En esta sucesión está faltando un número ¿puedes decir cuál es?

Podés encontrar las soluciones en la página siguiente.



SOLUCIONES

Solución 1. Respuesta: Sí. Hay esencialmente una única forma (salvo permutación entre las filas que tienen uno o dos dígitos, respectivamente):

1		
2	5	
7	8	4
3	6	
9		

Una forma de resolverlo es analizando cuáles son los cuadrados perfectos, primero de un solo dígito: 1, 4 y 9; luego de dos dígitos: 16, 25, 36, 49, 64 y 81; y en estos se ve que no aparece el dígito 7, por lo que debería aparecer en el cuadrado de tres dígitos. Notamos que hay muy poquitos de estos, solo 576, 729 y 784. Un análisis rápido muestra que los dos primeros no son compatibles con las otras posibles filas, mientras que el 784 sí lo es.

Solución 2. Respuesta: Sí, se puede. Por ejemplo, así:

8	9	7	5	
2	6	3	4	1

Se pueden hacer algunas observaciones que simplifican la búsqueda *a mano* de una solución. Por ejemplo, el 1 y el 2 deben estar abajo. El 9 debe estar arriba y también el 8 (esto último requiere descartar el caso donde el 8 está en un extremo inferior, a su lado está el 1 y arriba de ellos el 9). También se pueden plantear algunas ecuaciones: si llamamos a_i , $1 \leq i \leq 5$, a los números de abajo y b_j , $1 \leq j \leq 4$, a los de arriba, entonces se cumple $a_1 + 2(a_2 + a_3 + a_4) + a_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$. Por supuesto valen $b_j = a_j + a_{j+1}$, y por lo tanto $b_{j+1} - b_j = a_{j+1} - a_{j-1}$, etc.

¿Hay otras soluciones?

Solución 3. Respuesta: Sí, es posible, y la manera es pensar en la simetría central con respecto al punto medio de un lado del cuadrilátero. Entonces se ponen dos cerámicos juntos que sean simétricos con respecto a dicho punto y se obtienen así hexágonos cuyos lados opuestos son paralelos y congruentes, que se llaman *hexaparalelogramos* y con ellos se puede embaldosar, usando solo traslaciones, como bien lo muestra el artículo en este mismo número de la Revista sobre el interesante y bello tema de los *tilings* o embaldosamientos del plano.

Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $\{a\}$: Sí, es posible,
con dos signos menos y un signo más puestos así:
 $123 - 45 - 67 + 89 = 100$, que es una igualdad.
- $\{b_n\}$: sí, existe una sucesión así,
por poco margen, pero tomemos la menor posible:
 $1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, \dots$, va creciendo lo mínimo necesario para cumplir con la consigna, es decir que crece 1 del primer al segundo término, luego 2 del segundo al tercero, luego 3, etc. Así, el término n -ésimo c_n resulta ser $c_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$. Si planteamos $c_n < 5000$ vemos que $c_{99} = 4951$, por lo que se cumple.
- $\{c_n\}$: Sí, hay un cuadrado perfecto, el 144,
que es justo el siguiente término de la sucesión. Es el único que se conoce.
Por otra parte, no hay números de Fibonacci entre 2000 y 2100, pues un término es el 1597 y el siguiente es 2584.
- $\{d_n\}$: Falta el 43.
Es el único primo menor que 100 que no aparece.

Viene de la página anterior.