Revista de Educación Matemática

Registro Nacional de la Propiedad Intelectual N° 168024

ISSN 0326-8780 (versión impresa)

ISSN 1852-2890 (en línea)

Página web: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index
Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

Revista de Educación Matemática

Volumen 36, N° 3 – 2021

ÍNDICE

- Editorial 3
- Y entonces llegó Rey Pastor
  Semblanza de Carlos Borches 83

ARTÍCULOS

- EL FUTURO DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA A PARTIR DEL COVID 19: HUMANOS-CON-MEDIOS O HUMANOS-CON-COSAS-NO-VIVIENTES
  Marcelo C. Borba 5
- UN ENIGMA LLAMADO GRIGORI PERELMAN
  Jorge Lauret 29
- DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DEL RECORRIDO DE UN PORTÓN LEVADIZO NO DESBORDANTE
  Marcela P. Álvarez, Flavia E. Buffo, Gabriel A. Carrizo 39
- MATEMÁTICA QUE ENTRA POR LOS OJOS
  Alicia Dickenstein 55
- ¿CÓMO APRENDIERON MATEMÁTICA MAFALDA Y SUS AMIGOS?
  REFLEXIONES EDUCATIVAS A PARTIR DE LA REPRESENTACIÓN DE LA CLASE DE MATEMÁTICA EN LAS TIRAS DE *MAFALDA* (1964-1973)
  José G. Morales y M. Cecilia Gonzalez 73

SECCIONES FIJAS

- ¿Sabías que...?
  por L. Cagliero y R. Podestá 53
- Sección de Problemas
  por J.P. Rossetti 89

También encontrarás al final las *¡Sucesiones al toque!*

Editorial

Cerramos 2021, otro año difícil y complejo, con continuidad de la pandemia por COVID-19 y un avance significativo del proceso de vacunación, con retornos progresivos a la presencialidad en las escuelas de los niveles obligatorios y con la esperanza de un retorno renovado a la presencialidad de las aulas universitarias. Entre el 12 y el 19 de julio de 2020 se realizó en Shangai (China) la 14ª Conferencia International de Educación Matemática (ICME 14) y fue la primera vez que ocurrió en modalidad híbrida. Una experiencia novedosa para la comunidad de educadores matemáticos.

Este número completa el Volumen 3 de la *Revista de Educación Matemática*. El mismo cuenta con seis artículos. El primero de ellos es de autoría de Marcelo Borba, educador matemático brasileño, y fue originalmente publicado en abril de este año en la revista *Educational Studies in Mathematics* que autorizó la traducción que publicamos en este número. Se trata de un ensayo teórico con instigadoras reflexiones en torno al futuro de la educación matemática a partir del COVID-19. Con base en tres tendencias de investigación en educación matemática: el uso de tecnologías digitales, la filosofía de la educación matemática y la educación matemática crítica, describe las flagrantes desigualdades educativas que la pandemia dejó al descubierto y los desafíos que el pasaje a la educación remota ha planteado a las diversas agendas de investigación en educación matemática.

En el segundo artículo de este número, Jorge Lauret relata, con una mirada matemática, varios detalles sobre los acontecimientos sucedidos cuando el mundo se enteró que Grigori Perelman había logrado resolver la Conjetura de Poincaré, el primer Problema del Milenio en ser resuelto. Por otro lado, Marcela Álvarez, Flavia Buffo y Gabriel Carrizo nos proponen un modelo simple para estudiar el movimiento de un portón levadizo el cual nos invita a discutir problemas de optimización y geometría de curvas en un escenario de modelización matemática. Alicia Dickenstein, en un artículo muy colorido tanto en prosa como en imágenes, nos presenta experiencias desarrolladas con los programas Britney (Proyecto Moebius) y Surfer (Imaginary) con los que se puede aprender matemática a través de hermosas figuras geométricas. El artículo de Gustavo Morales y Cecilia

González, con una escritura amena y ocurrente, presenta algunas reflexiones en torno a la enseñanza de la matemática inspiradas en algunas tiras de Mafalda, la genial creación de Quino. Sea esta publicación un pequeño homenaje a este querido humorista gráfico, a un año de su fallecimiento. Cerramos el número con una semblanza de Rey Pastor, en la que Carlos Borches nos relata numerosas anécdotas alrededor del florecimiento de la matemática en Argentina a comienzos del Siglo XX.

Desde siempre, el equipo editorial de la RevEM trabaja revisando y ajustando las políticas editoriales de nuestra revista para adaptarnos a algunos de los estándares establecidos para publicaciones de este estilo. Es por ello que ésta será la última "Editorial" que encabece un número, quedando la posibilidad de que, en caso de ser necesaria, la comunicación entre los editores y lectores se realice a través de las secciones establecidas por la RevEM.

Un año más de trabajo del equipo editorial concluye. Aprovechamos para agradecer la inestimable colaboración de revisoras y revisores que desinteresadamente contribuyen para sostener la calidad de las evaluaciones de cada artículo. Damos la bienvenida y también agradecemos a quienes se incorporaron al equipo editorial recientemente, Gabriel Soto (UN de la Patagonia San Juan Bosco) y Nicolás Gerez Cuevas (UNC).

Como siempre, esperamos que en 2022 nos sigan acompañando como lectores y como autores, con contribuciones que enriquezcan las diferentes secciones que conforman la Revista. También esperamos que 2022 sea un mejor año para todos.

Mónica Villarreal

NOTA: Es muy importante para la RevEM contar con la colaboración de ustedes a través del envío de contribuciones de calidad para publicar. Solicitamos enviar los artículos preferentemente a través del sistema en la página web, pero si tienen inconvenientes pueden hacerlo a la dirección de correo electrónico que figura abajo.

Página web: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index

Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

Revista de Educación Matemática
Volumen 36, N° 3 (2021), páginas 5 – 27
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Investigación en Educación Matemática

EL FUTURO DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA A PARTIR DEL COVID 19: HUMANOS-CON-MEDIOS O HUMANOS-CON-COSAS-NO-VIVIENTES

Marcelo C. Borba[1]

Traducción de Gabriel Soto y Mónica Villarreal

Resumen. La pandemia de COVID-19 ha cambiado la agenda de la educación matemática. Este cambio se analizará examinando tres tendencias en educación matemática: el uso de tecnología digital, la filosofía de la educación matemática y la educación matemática crítica. La tecnología digital se convirtió en una tendencia en la educación matemática en respuesta a la llegada de un artefacto diferente al aula de matemática. Se puso en el punto de mira cuando la pandemia trasladó repentinamente las aulas a la modalidad online en todo el mundo. En este contexto, hay que abordar retos específicos para la educación matemática. El vínculo entre la pandemia de COVID-19 y la tecnología digital en la educación también plantea cuestiones epistemológicas destacadas por la filosofía de la educación matemática y la educación matemática crítica. Utilizando la idea de que la unidad básica de producción de conocimiento a lo largo de la historia es *humanos-con-medios*, discuto cómo los seres humanos están conectados con el virus, cómo se ha puesto al descubierto la desigualdad social y cómo cambiarán las agendas de estas tres tendencias en la educación matemática. Destaco la urgente necesidad de estudiar cómo ocurre la educación matemática online para los niños, situación en la cual el entorno doméstico y las desigualdades en el acceso a las tecnologías digitales asumen papeles tan significativos. Tenemos que entender el papel político de la *agencia*[2] de artefactos tales como el hogar, en colectivos de *humanos-con-medios-cosas*, y por último necesitamos aprender cómo implementar un curriculum que aborde las desigualdades sociales. Este debate se articula con ejemplos.

Palabras clave: COVID-19. SARS-COV-2. Humanos-con-medios. Tecnología digital. Filosofía de la educación matemática. Educación matemática crítica.

[1] Traducido con autorización de Springer Nature: Springer. Educational Studies in Mathematics. The future of mathematics education since COVID-19: humans-with-media or humans-with-non-living-things, Marcelo C. Borba, 2021. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10043-2

[2] Nota de traducción: la palabra agencia puede entenderse en este artículo como “poder de acción”.

Abstract. The COVID-19 pandemic has changed the agenda of mathematics education. This change will be analyzed by looking at three trends in mathematics education: the use of digital technology, philosophy of mathematics education, and critical mathematics education. Digital technology became a trend in mathematics education in response to the arrival of a different kind of artifact to the mathematics classroom. It was thrust into the spotlight as the pandemic suddenly moved classrooms online around the world. Challenges specific to mathematics education in this context must be addressed. The link between the COVID-19 pandemic and digital technology in education also raises epistemological issues highlighted by philosophy of mathematics education and critical mathematics education. Using the notion that the basic unit of knowledge production throughout history is humans-with-media, I discuss how humans are connected to the virus, how it has laid bare social inequality, and how it will change the agendas of these three trends in mathematics education. I highlight the urgent need to study how mathematics education happens online for children when the home environment and inequalities in access to digital technologies assume such significant roles as classes move online. We need to understand the political role of agency of artifacts such as home in collectives of humans-with-media-things, and finally we need to learn how to implement curricula that address social inequalities. This discussion is intertwined with examples.

Keywords: COVID-19. SARS-COV-2. Humans-with-media. Digital technology. Philosophy of mathematics education. Critical mathematics education.

§1. Introducción

No es posible predecir el estado de la crisis por el COVID-19 en el momento en que este artículo llegue al lector. Los efectos de la pandemia, y la respuesta a la misma, han sido impactantes —con encierro, barbijos, respiradores, etc.— y han dejado a la mayoría de la gente desconcertada. Algunos "líderes mundiales" dicen que el virus es "sólo un resfriado", mientras que otros afirman que podemos tardar meses o años en que las cosas "vuelvan a la normalidad". Incluso hay quienes dicen que el COVID-19 es solo un test para una crisis sanitaria mucho más grave que puede estar aún por llegar. Lo que sí es cierto es que en todo el mundo las cosas han cambiado dramática y repentinamente. El virus ha afectado a todas las clases sociales, aunque sin dudas ha golpeado más duro a los pobres. Pero, ¿cuáles son los efectos de la pandemia en la educación matemática? Un efecto casi universal ha sido la tendencia a "estar online": comprar online, reunirse con amigos online y aprender online.

Nos hemos trasladado a la modalidad online porque el COVID-19 es causado por un virus invisible; no tiene cura; y, sin mostrar un patrón claro, puede causar la muerte de una persona en pocos días y no causar casi ningún síntoma en otra. Es más, uno puede estar infectado y transmitir la enfermedad, pero ser asintomático por varios días, y luego empeorar de repente. Aunque no todos los "líderes" han seguido sus consejos, la mayoría de los expertos y la Organización Mundial de la

Salud (OMS) recomiendan el aislamiento social como principal herramienta para controlar, ralentizar y, con suerte, detener la pandemia. De repente, los maestros, profesores y gestores educativos de todos los niveles se vieron presionados para llevar adelante la educación (matemática) online, ya que el virus puede transmitirse por contacto físico – tanto entre humanos como entre humanos y cosas no-vivientes.

Según Menghini, Furinghetti, Giacardi, y Arzarello (2008), desde el comienzo de la historia oficial de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI[3]) en 1908, sólo la guerra ha interrumpido los Congresos Internacionales de Educación Matemática (ICME[4]). Este año[5], la ICMI decidió suspender el ICME 14 por un motivo diferente: el riesgo de propagación del coronavirus, viajar y reunirse en grupo no sería seguro. Algunos dirían que el ICME 14 se suspendió debido a un tipo diferente de guerra: en lugar de generales y soldados en el campo de batalla, listos para matar o morir, la humanidad entera está tratando de luchar contra este ser no-viviente, un virus. Es discutible si la metáfora de la guerra es apropiada o no para esta crisis sanitaria, pero dejando de lado la terminología, la crisis puede llevarnos a una reflexión sobre la educación matemática. En este ensayo se plantearán algunas cuestiones a la comunidad de educación matemática provocadas por esta cosa-no-viviente: el virus SARS-CoV-2 causante del COVID-19.

Engelbrecht, Llinares, y Borba (2020) informaron que tuvieron que cambiar la conclusión de su trabajo de revisión sobre tecnología digital en marzo-abril de este año[6], ya que pensaron que el mismo podría quedar obsoleto inclusive antes que otros trabajos de revisión sobre tecnología digital. En épocas normales, tales trabajos se vuelven obsoletos porque la tecnología digital cambia muy rápido, y rara vez tenemos tiempo de implementar una determinada tecnología en el aula antes de que aparezca una nueva. Sin embargo, en este momento, *todo* puede tornarse obsoleto, porque no podemos predecir la evolución de la crisis por el COVID-19, ni si le seguirá una nueva crisis. Los autores decidieron incluir una discusión sobre COVID-19 en la introducción y la conclusión del artículo. Al final del mismo, escriben:

> La pregunta es: ¿qué tiene esto [COVID-19] que ver con la educación matemática y la tecnología digital? Además de la repercusión en las conferencias y en la transformación del aula de matemática, quizá debamos plantearnos cuestiones más amplias: La tecnología digital ha intensificado los viajes y nuestro modo de vida, por lo que también es responsable, en parte, de la crisis actual.

[3]Nota de traducción: ICMI es la sigla para *International Commission on Mathematical Instruction*.
[4]Nota de traducción: ICME es la sigla para *International Congress on Mathematical Education*.
[5]Nota de traducción: El autor se refiere al 2020, año en que estaba programada la realización del 14º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME 14) en Shanghai (China)
[6]Nota de traducción: se refieren al año 2020.

> ¿Es posible que el uso de la tecnología digital pueda generar una crisis similar en la educación matemática? A la inversa, si la crisis se prolonga en el tiempo, ¿podrían las tecnologías digitales ofrecer formas alternativas de implementar la educación matemática? No hay mucha investigación sobre la educación matemática online para niños pequeños, pero si la crisis dura mucho tiempo, ¿vamos a implementarla sin suficiente investigación? Si la crisis actual termina pronto, ¿vamos a desarrollar investigación en educación matemática para una posible crisis por "COVID-2X"? En este artículo, entre otros, hemos antropomorfizado los medios de comunicación, hablando de agencia. La noción de humanos-con-medios como el colectivo que produce conocimiento, puede sintetizarlo, como discutimos en este artículo. El virus COVID-19 (SARS-CoV-2) es un ser no-viviente: ¿podemos hablar del impacto (agencia) del COVID-19 en la educación matemática y en el mundo? (Engelbrecht, Llinares, y Borba, 2020, p.838)

En este artículo se abordarán las preguntas planteadas en la cita anterior en el siguiente sentido: discutiré cómo pueden surgir o cambiar nuevas tendencias en educación matemática con la crisis en curso y esbozaré respuestas para algunas de estas preguntas. Las tendencias en la educación matemática pueden entenderse como una respuesta para algún problema, como sugieren D'Ambrosio y Borba (2010). Un grupo de trabajo, o una conferencia sobre una determinada tendencia dentro de la educación matemática, surgen como respuesta a nuevas demandas. Utilizaré el constructo teórico de humanos-con-medios para conectar la crisis por COVID-19 con tres tendencias diferentes: uso de tecnología digital, filosofía de la educación matemática y educación matemática crítica. En el contexto de la tendencia del uso de tecnología digital, discutiré las posibilidades e inconvenientes de tener cada vez más educación online, así como nuevas demandas hacia esta tendencia. Al hacerlo, revisitaré la noción de humanos-con-medios y su perspectiva de producción colectiva de conocimiento que involucra a actores humanos y no-humanos, tales como las computadoras y el SARS-CoV-2. Esto planteará nuevas cuestiones en la agenda de la filosofía de la educación matemática, centrándose en la agencia de las "cosas" y la relación de los humanos con este virus-cosa. Por último, haré una breve historia de la tendencia de la educación matemática crítica y plantearé una agenda provocada por el COVID-19 para estas tres tendencias de la educación matemática. Creo que estas discusiones pueden ser importantes para entender el momento que estamos viviendo, más allá de la educación matemática en sí misma. También pueden ayudar a establecer una agenda de investigación y acción en el aula para aquellos interesados en estas tendencias y su conexión con la pandemia.

§2. Tecnología digital y educación matemática

Considerando la noción de tendencias, presentada anteriormente, la tendencia que estudia el vínculo entre la educación matemática con las "nuevas tecnologías" –informática, tecnología de la comunicación y de la información digital y similares– ha estado presente en congresos durante más de treinta años. En las reuniones de las ERME[7] y SBEM[8] (Borba, 2018), en las del ICME (Menghini y cols., 2008) y en las del PME[9], siempre hay grupos de trabajo, grupos de discusión y paneles sobre el tema, porque autores como Kaput (1991, 1992, 1998) han señalado que necesitamos entender cómo usar las computadoras en la educación matemática. Borba y cols. (2016) elaboraron un trabajo de revisión que fue presentado en el ICME-13 en el cual plantearon cuatro fases del uso de la tecnología digital en la educación matemática. Las cuatro fases en sí mismas muestran la fuerza y la duración de este movimiento, que ha involucrado a muchos investigadores, profesores y estudiantes.

Las dos primeras fases, simbolizadas, respectivamente, por Logo y por software de contenido específico (por ejemplo, Cabri-Géomèetre) no son tan importantes para la discusión en este documento, ya que Internet se convirtió en la gran estrella durante la pandemia. La tercera fase del uso de la tecnología digital se caracterizó por la aparición de Internet y los cursos online. Este fenómeno cobró importancia hacia el cambio de siglo, dependiendo del país. Algunos países denominados "desarrollados" vieron cómo Internet se hizo popular a mediados de la década de 1990, y en algunos otros países, como Brasil, a principios de este siglo. Brasil fue uno de los primeros países en iniciar cursos online a nivel de posgrado, en un momento en que otros países se mostraban muy protectores de su educación presencial.

La actual cuarta fase se caracteriza por la llegada de una Internet rápida, que reconfiguró las posibilidades de la educación online. A medida que esta fase se ha desarrollado, Engelbrecht, Llinares, y Borba (2020) han señalado que las diferentes formas de aprendizaje mixto son importantes, en particular para la formación del profesorado. El término "híbrido" ha cobrado importancia para expresar la combinación de educación matemática presencial y educación online:

> Existe una amplia gama de medios y tecnología para crear nuevas formas híbridas de enseñanza. La integración de la tecnología permite a los educadores crear experiencias de aprendizaje que atraen a los estudiantes de manera activa y significativa al contenido del curso. "Esta tecnología puede formar colectivos pensantes (Lévy, 1993) con profesores que pueden romper las paredes

[7]ERME = Sociedad Europea para la investigación en Educación Matemática
[8]SBEM = Sociedad Brasilera de Educación Matemática
[9]PME = Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática

de la habitual aula "cúbica" que se asocia con la enseñanza". (Engelbrecht, Llinares, y Borba, 2020, p.838).

Si consideramos una tendencia como un esfuerzo por encontrar respuestas a un problema determinado, el COVID-19 ha impulsado la agenda de la tendencia de la tecnología digital en la educación matemática. Con la necesidad del aislamiento social, se hizo necesario ofrecer educación a niños, adolescentes y estudiantes universitarios en el hogar. En la mayor parte del mundo, el primer semestre de educación en 2020 se suspendió o continuó en modalidad online. Ahora, muchos están discutiendo diferentes tipos de educación híbrida, ya que las condiciones de salud permiten que los estudiantes y maestros regresen a la escuela y las universidades. Pero, aunque hay muchas investigaciones sobre la implementación de la educación online en la educación de pregrado (Engelbrecht y Harding, 2002, 2004, 2005), este no es el caso de la educación para niños. En los trabajos de revisión mencionados anteriormente, y en los grupos de trabajo de congresos, casi no se ha presentado ninguna investigación sobre educación online para niños. A medida que se desarrolle este tema, la educación (matemática) tendrá que abordar cuestiones estructurales, como la participación de los padres u otras personas responsables en la educación.

En Brasil, los periódicos dicen que los maestros se están "volviendo locos" con las demandas de los estudiantes provenientes de WhatsApp y otras redes sociales, ya que estudiantes y padres en sus hogares no pueden hacer frente a las tareas escolares. La evaluación es otro problema: ¿podemos evaluar online a estudiantes tan jóvenes? ¿Se permite la ayuda de los padres? Este tipo de pregunta aún no se ha investigado. En Brasil, algunos grupos de investigación como GPIMEM[10] están tratando de documentar lo que está sucediendo en algunos sistemas estatales como un primer paso para la investigación y comprensión de la educación online para niños. En el Estado de San Pablo, en menos de 30 días se creó una nueva aplicación, CMSP[11], para que 200 mil docentes y 3,5 millones de estudiantes, de alguna manera, tuvieran acceso a la educación. La aplicación funciona en conjunto con dos canales de televisión preexistentes, uno operado por el estado y otro por un consorcio de universidades (Paz, 2020).

Los profesores y directores pudieron supervisar a los estudiantes a través de la aplicación hasta cierto punto, los estudiantes tenían tres clases al día en lugar de cinco, ya que el estado también está tratando de implementar la educación a través de otras plataformas (Secretaria de Educação do Estado de São Paulo., 2020). Pero este fue un momento muy complejo: los profesores tenían que conectarse online sin

[10]Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática - Sitio web: https://igcse.rc.unesp.br/#!/gpimem

[11]CMSP–Centro de Mídias da Educação de São Paulo. Recuperado de: https://centrodemidiasp.educacao.sp.gov.br/

haber tenido tiempo suficiente para prepararse y, al mismo tiempo, tenían que lidiar con sus problemas habituales: São Paulo es el estado más rico de Brasil, pero paga a sus profesores un salario terriblemente bajo en comparación con otros profesionales, como me señaló en una entrevista online un profesor que prefirió permanecer anónimo. Los profesores, mal pagos, ahora tienen que lidiar con los estudiantes las 24 horas del día, los siete días de la semana, lo que incluye lidiar con los problemas "personales" de los estudiantes, incluidos los problemas asociados con la desigualdad social crónica en Brasil. Es poco probable que profesores con salarios bajos tengan los mejores teléfonos móviles, computadoras portátiles o planes de Internet. Los profesores que imparten hasta cincuenta clases de 50 minutos a la semana, pueden tener que atender a cientos de estudiantes. Es probable que estos problemas también estén ocurriendo en otros países, ya que en todo el mundo existen diferencias entre los que "tienen" y los que "no tienen", y son profundizadas por el COVID-19, tal como lo describe el historiador Walter Scheidel (Canzian, 2020).

La crisis también es una oportunidad de cambio: los profesores que imparten 50 clases por semana no tendrán tiempo para aprender a utilizar la tecnología digital para la enseñanza. Con muchos sistemas educativos de provincias y ciudades obligados a conectarse online debido a la crisis de la pandemia, el argumento para usar la tecnología es muy fuerte. Es probable que tengamos mucha investigación asociada a esta nueva realidad. Para los propósitos de este artículo, no pude recopilar datos de manera sistemática, pero relatos informales de profesores sugieren la necesidad de investigar la realidad de la enseñanza online para adolescentes y niños. Como se mencionó anteriormente, apenas existe investigación sobre educación online asociada a niveles inferiores a los últimos años de la escuela secundaria, lo cual se puede verificar en muchos artículos de revisión relacionados con la temática (Engelbrecht, Llinares, y Borba, 2020). Pero la atención no puede estar solo en los profesores. ¿Cómo experimentan los niños esta versión de educación en el hogar? También hay muchas bromas en las redes sociales sobre padres que pierden el control al convertirse en profesores-en-casa al mismo tiempo que tienen que realizar home-office, por lo que el papel de los padres en la educación matemática online puede ser otra área de investigación. La participación de los padres en la educación matemática ha sido tema de algunas investigaciones, incluida la participación asociada con el uso de la tecnología digital (Wilson, 2013; Ford, 2015). Sin embargo, esto fue en entornos informales o mixtos, tales como festivales de videos digitales (Domingues, 2020). Ahora tenemos nuevos desafíos, que incluyen informar y discutir cómo se realizó (o no) la evaluación online. Invitar a los estudiantes a producir videos matemáticos fue un proyecto de investigación desarrollado antes de la pandemia. Que los estudiantes expresen conocimientos matemáticos con videos, o haciendo investigaciones con videos, no ha sido una tendencia sólida en la literatura. Sin embargo, la producción de videos puede ser una alternativa para la educación durante y después de la pandemia. En lugar de centrarnos en los resultados de pruebas, podemos hacer que los estudiantes produzcan videos online para expresar lo que han aprendido en condiciones tales como la pandemia. Los videos se pueden producir de forma colectiva, con la ayuda de padres, amigos y diferentes medios. Los profesores y los sistemas escolares pueden considerar las diferencias en los recursos empleados, incluido el grado de ayuda recibida de los padres, en un tipo de evaluación "sin rankings"[12].

La producción de videos matemáticos digitales por parte de estudiantes y profesores está creciendo en Brasil (ver Figura 1, por ejemplo) y con el inicio de la pandemia, una "biblioteca" online con más de 600 videos (`https://www.festivalvideomat.com/`) se ha utilizado como recurso para profesores y estudiantes en sus clases y como inspiración para el tipo de tarea que estudiantes y profesor pueden producir. Además, temas que han sido objeto de investigaciones previas pueden cobrar nueva vida: en un trabajo de revisión reciente (Engelbrecht, Llinares, y Borba, 2020), quedó claro que las diferentes tecnologías utilizadas en una clase, desde la pizarra hasta el teléfono móvil más moderno, no necesariamente son solo mediadores, sino también actores. Este es un asunto epistemológico, y es parte de una tendencia que se ha discutido dentro de la psicología de la educación matemática y la filosofía de la educación matemática.

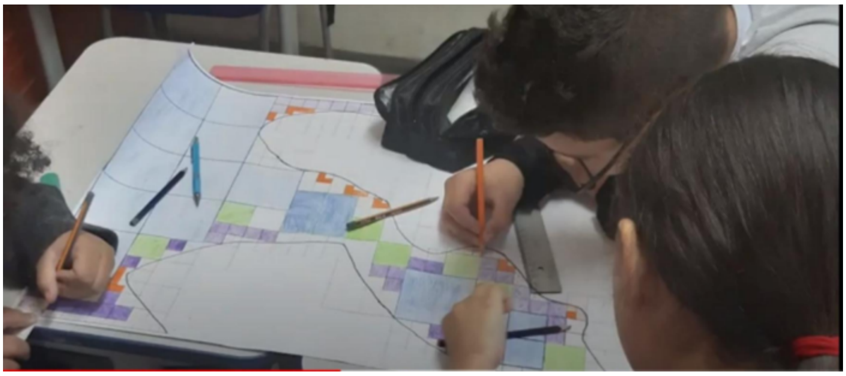


Figura 1. Mar de lodo: Modelización y Educación Matemática.
Fuente: Video.

§3. Filosofía de la educación matemática y agencia en la noción de humanos-con-medios

"¿Por qué tenemos educación? ¿Cuáles son las relaciones entre educación y sociedad? ¿Cómo conocemos? Estas son las cuestiones básicas de la filosofía de la educación. Desde hace más de veinte años existen grupos de trabajo sobre la

[12]Nota de traducción: el autor dice *"non-ranking" type of assesment*.

filosofía de la educación matemática (Bicudo y Garnica, 2001). "¿Cómo aprendemos?" está relacionado con "¿Cómo conocemos?" y, por lo tanto, cuestiones relativas a la epistemología -la teoría del conocimiento- también han sido debatidas en grupos de discusión de psicología de la educación matemática. Ambos dominios de investigación pueden verse como tendencias, ya que buscan los fundamentos de la educación matemática y discuten cómo se articula la educación matemática en el aula, la investigación que se desarrolla al respecto y su "regreso" a escenarios prácticos: escenarios, como el aula, que durante muchos meses han estado paralizados por la pandemia de coronavirus. Varios autores han discutido las aulas y las escuelas, y los artefactos producidos allí. Por ejemplo, Villarreal y Borba (2010) han mostrado cómo las matemáticas son producidas por colectivos de humanos-con-artefactos a lo largo de la historia de las matemáticas.

D'Ambrosio y Borba (2010), además de conceptualizar una "tendencia" como una respuesta a un problema dado, han argumentado que las tendencias se entrelazan, utilizando la metáfora de un tapiz. No es de extrañar, entonces, que la discusión sobre quién es el agente del conocimiento se debata en más de una tendencia: en grupos de trabajo sobre tecnología digital, y en grupos de discusión o congresos sobre filosofía de la educación matemática y psicología de la educación matemática. Diferentes autores de educación matemática (por ejemplo, Faggiano, Ferrara, y Montone (2017)) han afirmado que las computadoras, por ejemplo, tienen agencia. Inspirada en el trabajo de Lévy (1993) y en el enfoque fenomenológico de que los humanos son "siendo-con-otros", la noción de humanos-con-medios se ha desarrollado a lo largo de muchos años. La noción de moldeo recíproco (reciprocal modelling) fue el primer paso (Borba, 1993). Mi trabajo inicial sobre esto, mostró no solo que los diferentes medios moldean a los humanos (una idea compartida por muchos), sino que también brindó evidencia empírica de cómo los humanos moldean a la tecnología, específicamente al trabajar con un software sobre funciones. Al ser parte del equipo de diseño del software y un educador matemático que desarrollaba una investigación, pude ver esta "colaboración" entre, por un lado, un software –impregnado con las ideas de un equipo multidisciplinario, presentado en reuniones de desarrolladores, educadores de matemáticas, profesores, etc.– y, por otro lado, cómo los estudiantes de escuela secundaria interactuarían con el software (y conmigo, un profesor-investigador). Por ejemplo, un estudiante fue influenciado por lo que yo dije y por el diseño del software *Function Probe* (Confrey, 1991), y también moldeó al software de modos no previstos por el equipo multidisciplinario que lo había desarrollado. Este estudiante no usó los comandos que el equipo de diseño había creado, sino que usó el tamaño de la pantalla de la computadora y otros artefactos de medición para coordinar el álgebra y los gráficos. Borba y Villarreal (2005) sintetizaron cómo la noción de humanos-con-medios podría entenderse a partir del trabajo de Lévy (1993); Lave

(1988); Tikhomirov (1981). Esto llevó a la noción de que conocer no era solamente social, en el sentido de que involucra a más de una persona, sino que también involucra cosas.

La noción de humanos-con-medios se propuso para enfatizar que la producción de conocimiento es el resultado de un colectivo de humanos y cosas. De Tikhomirov y Lave provino la idea de que conocer estaba orientado por objetivos y que los valores estaban involucrados. Posteriormente, en Borba (2012), las discusiones sobre valores, emociones y medios involucrados en el conocimiento de la matemática con GeoGebra (o cualquier software disponible) se extendieron a la idea de que los medios y la tecnología en sí cambian las nociones de lo que son los humanos. Los medios, por tanto, son constitutivos no sólo de lo que conocemos, sino también de lo que somos. Kaptelinin y Nardi (2006) también analizaron la idea de extender la agencia a los no-humanos. Estos autores compararon las capacidades para producir efectos, actuar y cumplir intenciones de diferentes agentes: cosas (naturales), cosas (culturales), seres vivos no-humanos (naturales), seres vivos no-humanos (culturales) y seres humanos como entidades sociales.

La agencia, por lo tanto, no debe verse como binaria, ya sea presente o ausente, sino con diferentes niveles. Veo esta noción de agencia como "difusa", como en la matemática difusa (Fuzzy mathematics), en la que podemos tener distintos grados de agencia. En tal matemática, por ejemplo, mis jeans no son una de dos: azules o no azules (cero o uno), sino que son, por ejemplo, 0,6 azules. Kaptelinin y Nardi (2006) sugieren tres dimensiones de agencia: basada en la necesidad (se realizan acciones basadas en razones biológicas y culturales), delegada (cosas o seres vivos actúan según las intenciones percibidas que son delegadas por otros humanos y cosas) y condicional (acciones de cosas o personas que dan lugar a efectos no deseados).

La noción de humanos-con-medios, que es consistente con una visión más compleja de agencia, ha sido desafiada, en muchos casos, por argumentos que quieren preservar el poder de un ser humano como el centro de cualquier acción. En estas visiones, la intencionalidad y la acción provienen de algún lugar que no es social. Gran parte de la educación matemática, cognitivista o no, se basa en este punto de vista de "un solo conocedor". Desde tal perspectiva, el agente del conocimiento es una sola persona, o colectivo de humanos, aunque la mayoría de los investigadores reconocerían la influencia de los artefactos, el entorno y los factores socioculturales.

La noción de que tanto los humanos como los no humanos tienen agencia es parte de un esfuerzo por modelar artefactos – en particular, software, hardware e Internet de las cosas (es decir, cosas que están conectadas a Internet)– como los factores históricos, sociales y culturales en el colectivo que produce el conocimiento. Enfatiza la visión de que el conocimiento es producido (tanto desde una perspectiva filosófica como psicológica) por humanos-con-artefactos. Con una perspectiva en la que las cosas tienen agencia, los artefactos se etiquetan como medios (media), ya que se piensa que comunican. Este argumento se aplicó más fácilmente a las tecnologías de la inteligencia (Lévy, 1993): era más fácil aceptar que humanos-con-calculadoras-gráficas tenían capacidad de agencia a que la tuvieran humanos-con-bibliotecas o humanos-con-aulas.

Independientemente de que los lectores valoren o no la educación matemática online, es posible que en algún momento usen su recuerdo de un aula común para afirmar que la interacción cara a cara es fundamental para cualquier aprendizaje que ocurra en la educación matemática. Alternativamente, se puede utilizar la noción de un "aula distribuida": una oficina para un estudiante, el dormitorio para otro, algún tipo de centro de cómputo para otros. Pero todos reconocerían que las aulas están cambiando. Lo hemos descrito como un aula en movimiento (Borba, Scucuglia, y Gadanidis, 2014).

Lo que constituye la unidad de conocimiento es una discusión filosófica interminable: ¿es una sola persona? ¿Es social porque involucra a más de una persona? ¿Es social porque tiene un objetivo e involucra a actores humanos y no humanos? Es una discusión interminable, como la mayoría de las discusiones filosóficas. Sin embargo, parece que la aparición del SARS-CoV-2 da fuerza a una perspectiva sobre el conocimiento porque, según autores como Racaniello (2004, p.1): "Los virus no son seres vivos. Los virus son complejos conjuntos de moléculas, que incluyen proteínas, ácidos nucleicos, lípidos y carbohidratos, pero por sí solos no pueden hacer nada hasta que ingresan a una célula viva. Sin células, los virus no podrían multiplicarse. Por lo tanto, los virus no son seres vivos". Sin embargo, a pesar de no ser un ser vivo, el virus ha cambiado drásticamente la forma de vida de los seres humanos. Los virus están estrechamente relacionados con nosotros: no pueden existir por mucho tiempo separados de los seres vivos, como los humanos, que tienen células; los síntomas de COVID-19 surgen bajo ciertas condiciones cuando el virus está dentro de las células humanas. Podemos decir que el virus tiene agencia en el sentido de que ha cambiado la forma en que tenemos que hacer las cosas. Esta analogía nos ayuda a comprender cómo es mucho más probable que sucedan ciertas cosas si están presentes ciertos actores. Para usar la metáfora del virus, el software también necesita humanos para "sobrevivir". El software, y más tarde Internet, ha cambiado el ambiente de los entornos educativos, de manera similar a cómo el SARS-CoV-2 ha convertido repentinamente los dormitorios de los niños en aulas.

Latour (2020a, 2020b), otra inspiración para la noción de humanos-con-medios, presenta su preocupación por la crisis del virus de una manera que se relaciona con la discusión que presenta este artículo:

> Pero hay otra razón por la que la figura de la "guerra contra el virus" es tan injustificada: en la crisis de la salud, puede ser cierto que los seres humanos en su conjunto estén "luchando" contra los virus, incluso si no tienen ningún interés en nosotros y van de garganta en garganta matándonos sin proponérselo. La situación se invierte trágicamente en el cambio ecológico: esta vez, el patógeno cuya terrible virulencia ha cambiado las condiciones de vida de todos los habitantes del planeta no es el virus en absoluto, ¡es la humanidad! Pero esto no se aplica a todos los humanos, solo a aquellos que nos hacen la guerra sin declararnos la guerra. Para esta guerra, el estado nacional está tan mal preparado, tan mal calibrado, tan mal diseñado como sea posible porque los frentes de batalla son múltiples y nos atraviesan a cada uno de nosotros. Es en este sentido que la "movilización general" contra el virus no demuestra en modo alguno que estemos preparados para el próximo. No solo los militares van siempre con una guerra de retraso Latour (2020a, 2020b, párrafo 8).

Sin decirlo explícitamente, Latour pone en primer plano la agencia de este virus: el SARS-CoV-2 se propaga a través de los humanos para sobrevivir y reproducirse, y esta acción provoca una reacción –agencia– por parte de los humanos. Por supuesto, toda comparación o metáfora tiene sus límites. Pero el coronavirus ha transformado nuestras vidas – todavía no sabemos por cuánto tiempo– de una manera dramática. Las computadoras –ahora representadas por teléfonos móviles, que son computadoras mucho más potentes que las utilizadas a fines del siglo pasado por la minoría de estudiantes que tenían acceso a ellas– han cambiado la forma en que podemos experimentar la matemática, en particular la forma en que puede "experimentar" con la matemática. Internet se ha convertido en una comunidad, un agente y un artefacto. Los videos que son producidos y compartidos por estudiantes con tecnología digital pronto pasan a formar parte de nuevos colectivos de humanos y medios que están involucrados en la producción de conocimiento. Souto y Borba (2016, 2018) han discutido cómo la noción de humanos-con-medios, que tuvo sus orígenes en la teoría de la actividad (Tikhomirov, 1981), está a punto de cambiar la tercera generación de la teoría de la actividad, rompiendo la rigidez de los triángulos propugnados por Engeström (2002); Sannino y Engeström (2018) (Figura 2).

Esta versión del constructo humanos-con-medios se ha denominado sistema-de-humanos-con-medios (Souto y Borba, 2018) para enfatizar aún más la noción de que el colectivo de humanos y no humanos está orientado por objetivos e integrado en una comunidad que tiene reglas (Figura 2). Considerar los medios como agentes ha hecho posible pensar en los triángulos rígidos de la tercera generación de la

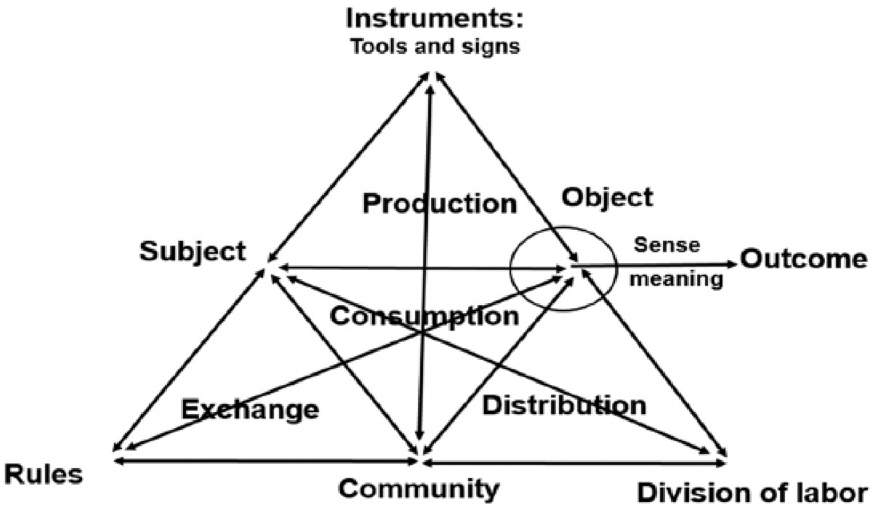


FIGURA 2. La estructura de un sistema de actividad.
Fuente: Sannino y Engestrom (2018)

teoría de la actividad como triángulos danzantes, o como un GIF, en el que Internet, por ejemplo, podría estar saltando del vértice instrumento al vértice sujeto y/o al vértice comunidad. Esta animación se puede encontrar en el sitio web del GPIMEM, para superar los límites del texto impreso (ir al sitio).

Es difícil saber, como ya se ha dicho, adónde nos llevará la evolución de la actual crisis sanitaria, pero parece que pensar en la agencia de cosas no-vivientes, tal como se discutió en esta sección, será parte de ella. El cuestionamiento de la definición de "seres vivos" puede ser otra consecuencia, que, por supuesto, va más allá de la psicología de la educación matemática o de la filosofía de la educación matemática. Pero será relevante para algunas preguntas que quizás se dejaron de lado o nunca antes se formularon, preguntas tales como: ¿Cuáles son los roles específicos de los espacios/artefactos como el aula, de los entornos cara a cara hechos para el uso intenso de Internet en la educación y el "aula online"? Si la pandemia dura aún más, ¿qué queremos decir realmente con "cara a cara"? ¿Qué significa hablar del afecto en la educación matemática sin contacto físico (por ejemplo, dar la mano, abrazar, besar la mejilla), tan importante en muchas partes del mundo? Toda la discusión sobre humanos-con-medios puede adquirir una nueva dimensión, como se sugiere en esta sección, relacionada con algunas de las cuestiones básicas de la filosofía de la educación (matemática). La pandemia pone en primer plano el papel del hogar y el papel de los diferentes padres y las diferentes condiciones sociales en los colectivos que construyen el conocimiento, en sistemas de actividad que producen conocimiento. La idea de ver una agencia difusa en los no-humanos debería desarrollarse más para incluir no solo un buen acceso a Internet, sino también a la vivienda, que es un ámbito de desigualdad brutal en Brasil y en otros lugares. Esta famosa foto (Figura 3) ilustra la magnitud de la desigualdad en Brasil,

Figura 3. Desigualdad social.
Fuente: "Com 1 % do país concentrando 28 % da renda, Brasil não tem como dar certo..." L. Sakamoto, 2020. Recuperado de este sitio.

que, desde el punto de vista educativo, sugiere que diferentes viviendas pueden tener una agencia diferente en la construcción del conocimiento, en particular en situaciones como la que vivimos durante la pandemia. La vivienda importa en la construcción del conocimiento. Intentar resolver un problema de matemática en una casa abarrotada de un barrio marginal es muy diferente a hacerlo en un apartamento espacioso y lujoso con terraza.

En este sentido, el SARS-CoV-2 ha colocado a las viviendas en el centro de un colectivo que produce conocimiento. Una vez más nos hacemos todas las preguntas básicas de la filosofía de la educación matemática y la psicología de la educación matemática. ¿Cuál es el papel de la educación matemática? ¿Cuál es el papel de la educación de los padres en la educación matemática? ¿Cuál es el papel de las cosas no-vivientes, tales como virus, software y hogares, en la forma en que conocemos y aprendemos matemática? Una pregunta que puede ser más crítica es: ¿cuál es el papel de la educación matemática para resistir la desigualdad en el mundo?

§4. Educación matemática crítica y coronavirus

La tendencia de la educación matemática crítica (EMC) responde al principal problema de la desigualdad en la educación (matemática) y luchas contra la visión de que las matemáticas son una rama de la ciencia que está separada de cuestiones sociales, culturales y políticas. El papel de EMC en la comunidad de educación matemática es recordarnos a todos sobre la desigualdad social y otros tipos de desigualdades. Se puede decir que la EMC nació oficialmente en 1990, en una reunión en la Universidad de Cornell en Estados Unidos (Powell, 2012; Torisu, 2017). Allí se fundó el Grupo de Educadores Matemáticos Críticos, con varios miembros[13], centrándose en la frase clave "justicia social." Powell (2012) relata cómo en ICME 6, en Budapest, Hungría, hubo una reunión de investigadores y cómo después de la reunión de Cornell, el grupo comenzó a reunirse regularmente, a partir del ICME 7, en Quebec, Canadá.

En la reunión de Quebec estuvo presente Skovsmose (1994), quien también escribió sobre el desarrollo de la educación matemática crítica en Europa. Skovsmose muestra la conexión de esta rama de la EMC en Europa con la Escuela de Educación Crítica de Frankfurt, con Adorno como uno de sus principales representantes, cuyo principal problema era la búsqueda de una educación que impidiera la repetición del nazismo. Hoy, la educación matemática crítica es más que importante, en un momento en el que países como Estados Unidos, Brasil, e Italia tienen líderes fascistas o de extrema derecha, que han elogiado a algunos de los líderes fascistas del siglo veinte.

En la reunión de Cornell, fueron presentadas cuestiones referidas a la desigualdad social, el papel de las matemáticas en la sociedad, la ideología de la certeza y metodologías de investigación apropiadas para la EMC (Borba, 1991; Borba y Skovsmose, 1996; Skovsmose y Borba, 2004). Desde la década de 1990, en África, autores como Paulus Gerdes, de Mozambique, desarrollaron planes de estudio e investigaciones sobre tradiciones africanas en matemáticas y cómo incorporarlas en la educación matemática (Gerdes, 2010; Torisu, 2017).

El desarrollo de planes de estudio y perspectivas pedagógicas que visibilicen la desigualdad social, la inequidad racial y de género, y la ideología de la certeza fue el foco inicial de la EMC. Más recientemente, las cuestiones medioambientales y problemas abordadas en otras tendencias (por ejemplo, educación matemática para sordos o ciegos), se incluyeron en la agenda de la EMC. En suma, la EMC es una tendencia que muestra que la educación no es neutral: puede promover igualdad o desigualdad. Ya hay indicadores de Forbes de que la desigualdad social está creciendo durante esta pandemia: los multimillonarios se están volviendo aún más ricos (Gavioli, 2020). ¡Los propietarios de Facebook y Amazon están entre ellos! No es necesario ser matemático para entender que esta concentración de riqueza hacia arriba significa que el resto de la gente tiene menos. Los propietarios de compañías tecnológicas aumentarán sus ganancias a medida que la gente se conecta cada vez más a Internet: sus empresas gestionan las redes sociales online,

[13]Alan Bishop, Arthur Powell, Claudia Zaslavsky, David Henderson, Dorothy Buerk, Europe Sign, George Gheverghese Joseph, Kelly Gaddis, Marcelo Borba, Marilyn Frankenstein, Marty Hoffman, Munir Fasheh, Paul Ernest, and Sam Anderson

los servicios de compras online y almacenan datos digitales en sistemas online en todo el mundo.

Como ya he ilustrado, la desigualdad social también está creciendo en las escuelas. Como la mayoría de las escuelas y las universidades suspenden las clases presenciales y se conectan online de una forma u otra, la cuestión del acceso ha sido una barrera para algunos y un trampolín para una desigualdad social aún mayor. Algunas universidades de Brasil incluso han optado por no reanudar la educación online debido a la desigualdad de acceso; pero, por supuesto, dado que la universidad no es la única fuente de conocimiento, la educación online también puede haber causado más desigualdad social. He aquí un ejemplo de la educación (matemática) en Brasil de una escuela católica ubicada en las afueras de una ciudad del centro del estado de São Paulo: la escuela no cobra matrícula a los estudiantes, ya que los padres no obtienen ingresos suficientes para alimentar sus familias; la violencia también forma parte de las vivencias diarias de estos niños. A los profesores se les paga por encima del promedio (considerando los estándares brasileños), y a partir de entrevistas con ellos, es fácil ver su compromiso en la lucha contra la desigualdad social. Las clases se suspendieron por primera vez a mediados de marzo de 2020 y se reanudaron online posteriormente, en diferentes momentos de abril, dependiendo de la escuela. Dos profesores, Luiz Felipe Trovão (profesor de matemática) y Karla Cristina Stropa Goulart (profesora de ciencias), a quienes se les pidió que respondieran una pregunta abierta sobre su experiencia de enseñanza durante la pandemia, coincidieron en lo difícil que era comunicarse con los estudiantes. La mayoría de los estudiantes no tenían acceso a Internet. Cuando tenían acceso, no disponían de dinero para comprar créditos para conectarse a Internet[14]. La escuela trató de superar este problema proporcionando paquetes de acceso a Internet o enviando material didáctico impreso a los niños. Pero con menos interacción con los profesores y sin un entorno para estudiar en hogares pobres, sin culpa de los profesores o de la escuela, se produjo muy poca educación matemática o educación científica. Trovão dijo que es casi imposible enseñar geometría online sin la interacción adecuada: hogares, acceso a Internet, etc.

Los multimillonarios se están volviendo aún más ricos; los pobres tienen aún más dificultades para acceder a la educación matemática: esto puede poner en primer plano la necesidad que tendrán los niños, después de la pandemia, de entender lo que ha pasado. Los educadores de matemáticas pueden tener que explorar algunos temas difíciles: funciones exponenciales para explicar la propagación del coronavirus y cómo los más ricos se hicieron aún más ricos. La matemática no será suficiente, pero se generará una nueva agenda. El trabajo de Freire (1968) sobre la pedagogía del oprimido será incluso más importante. Al componer la

[14]En Brasil, la mayoría de las personas no tienen acceso ilimitado a Internet en sus celulares. Especialmente si una persona es pobre, lo usual es que compre créditos para Internet y pague a medida que lo necesita.

agenda de las tres tendencias, hay que considerar, por ejemplo, el papel que tiene el hogar, como una "cosa" física y emocional, en la escuela pandémica. Tenemos colectivos de hogar-padres-internet-estudiante-profesor como unidad mínima del agente colectivo que produce conocimiento. Hogar y padres, cosas y humanos, han contribuido más a la desigualdad social y a las discusiones sobre cómo utilizar la tecnología digital en la educación matemática.

Humanos-con-medios, visto como un sistema de actividad, proporciona una visión epistemológica dinámica que podemos utilizar para comprender los diferentes aspectos sociales (en los niveles micro y macro) de la investigación de la tecnología digital. Simultáneamente, al reconocer agencia en una amplia variedad de cosas, no solo en las computadoras, será posible mostrar estructuralmente la desigualdad social: los hogares equipados de forma diferente no se pueden evaluar de la misma manera. Los niños sufrirán aún más injusticias de las que sufren en la escuela, si las diferencias en el acceso a Internet, la comodidad del hogar, etc., no se tiene en cuesta en la evaluación y la enseñanza. Investigar en este marco, en tecnología digital, educación matemática crítica, evaluación, etnomatemática y otras tendencias, puede ayudar a esclarecer un debate más epistemológico que no esté exento de valores.

§5. Las tres tendencias en interacción

Durante la pandemia, las transmisiones "en vivo" se han convertido en una moda en Brasil: presentaciones de artistas, educadores y otros transmitidas por Internet. Primero, los artistas empezaron a realizar transmisiones en vivo para incentivar a la gente a quedarse en casa. Poco después, otros tipos de trabajadores, como los educadores matemáticos, empezamos a realizar nuestras propias presentaciones en vivo. Durante esta pandemia he realizado muchas presentaciones en vivo producidas por colectivos constituidos por GeoGebra, Internet, mi casa y varios softaware de transmisión. Las discusiones sobre la matemática de la pandemia y la curva sigmoidea y su derivada se utilizaron en posiblemente treinta presentaciones. La Figura 4 es una captura de pantalla de un breve vídeo que muestra esta curva de forma dinámica.

La derivada de la sigmoidea se utilizó para explicar por qué era posible e importante "aplanar la curva". Diferentes curvas, con crecimiento más rápido o más lento, fueron asociadas a los roles de prevención, al estatus social y a los distintos tipos de hogares. Ejemplos de este tipo de "clase virtual", fuera del contexto escolar o universitario, ilustran hasta qué punto las tres tendencias analizadas en este artículo pueden estar poderosamente entrelazadas. Esto convoca a investigar para comprender qué tipo de educación matemática están experimentando quienes vieron las presentaciones en vivo de forma sincrónica o asincrónica.

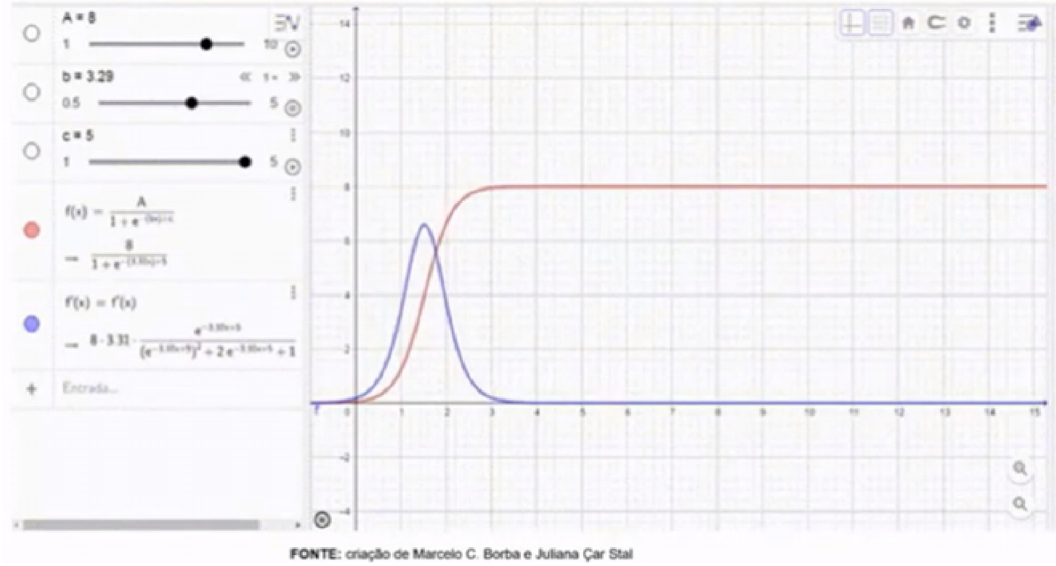


FIGURA 4. Aplanar la curva del COVID-19.
Fuente: captura de pantalla del video de la conferencia titulada "A formação docente para produção de vídeos: pandemia, desigualdade social e educação matemática" disponible en este sitio.

§6. Discusión y conclusión

La mayor parte de la investigación en educación matemática se apoya en trabajos empíricos. En los años 70, la mayor parte de la investigación era cuantitativa, y los datos se utilizaban para "demostrar" que un determinado método de enseñanza era mejor que otro. Los datos empíricos tenían el mismo papel que desempeñan hasta hoy en buena parte de lo que se considera ciencia: había grupos control y grupos experimentales, y la metodología se basaba en (o se reducía a) el tratamiento estadístico y las conclusiones. A finales del siglo pasado y principios de éste, la investigación cualitativa ha hecho oscilar el péndulo en otra dirección. La investigación cualitativa considera los datos como una voz, como un complemento que debe añadirse a otras evidencias para argumentar sobre ("probar") una cuestión (Borba, Almeida, y Gracias, 2018). Se asumía que la verdad era explícitamente contingente y sujeta a cambios mucho antes de que la pandemia del COVID-19 trajera tantas inestabilidades a nuestras creencias. A medida que los argumentos crecían al margen de los datos, emergió un amplio conjunto de reacciones, incluidas algunas de poderosas agencias de financiación. Por ejemplo, hubo organismos de financiación que exigían datos cuantitativos en un proyecto. Ahora prevalece la noción de métodos mixtos, aunque no está claro cuál es el papel de los datos o la visión de la "verdad" en muchas de las investigaciones publicadas.

Ensayos como el presente artículo tienen el propósito de discutir ideas y presentar bases para trabajos de investigación, de manera que podamos conocer (en las distintas direcciones brevemente presentadas antes) acerca de la educación matemática, en las diferentes posiciones epistemológicas que caracterizan a nuestra comunidad. En este sentido, este artículo es el resultado de una reflexión sobre cómo tres tendencias podrían tener sus agendas transformadas por el SARS-CoV-2. Por supuesto, otras tendencias, como la etnomatemática o la educación matemática en los primeros grados de escolaridad, también se verán afectadas. Las cuestiones planteadas a lo largo de este artículo deberían ser transformadas por los lectores y convertirse ellos mismos en objeto de investigación. En este artículo, elijo tratar la tecnología digital, la filosofía de la educación matemática y la educación matemática crítica porque la pandemia parece haber jugado un papel importante en los cambios de las agendas de estas tres tendencias. Parece importante plantear nuevas cuestiones en el marco de estas tendencias.

La tecnología digital es ahora un tema de preocupación (o de investigación) para todos (Engelbrecht, Borba, Llinares, y Kaiser, 2020; Engelbrecht, Llinares, y Borba, 2020). La amplificación de la crudeza de la desigualdad en el marco de la pandemia no puede ser ignorada (excepto por aquellos que creen que la tierra es plana y que la hidroxicloroquina es una cura milagrosa para el COVID-19), y el auge del home office, asociado con la educación en el hogar, el confinamiento y la cuarentena, pueden ayudar a muchos a reflexionar sobre cuestiones filosóficas relativas al papel del "lugar" en el conocimiento/aprendizaje y en nociones como la de humanos-con-medios.

En los párrafos anteriores he señalado mis elecciones a la hora de identificar tendencias importantes. ¿Por qué he dicho "yo" en lugar de "nosotros", que se referiría a un colectivo de humanos-con-medios? Es una buena pregunta, y una respuesta tentativa, en otro ámbito de discusión (la investigación cualitativa y su influencia en el aula) se dio en Borba (2018). La autoría de un artículo o de un libro puede ser individual, pero es el resultado de un esfuerzo colectivo, de un "sinfín" de humanos-con-medios. Este artículo[15] tiene un autor, pero contó con la participación activa de una estudiante de doctorado (Juliana Çar Stal), tres profesores que me prestaron su discurso (Karla Cristina Stropa Gourlart, Luiz Felipe Trovão y uno que quiso permanecer en el anonimato), los revisores, los editores de este número especial, los miembros del grupo de investigación al que pertenezco, los más de 100 miembros del programa de posgrado en educación matemática de la UNESP[16], Río Claro, los amigos, la computadora, el procesador de textos, la casa, la oficina y, por supuesto, la pandemia por COVID-19. Esperamos que podamos hablar de esto en el próximo ICME, ¡y que tenga lugar en 2021!

[15]El contenido de este artículo está parcialmente financiado por subsidios de investigación del CNPq, 400590-2016-6 y 303326-2015.
[16]Universidade Estadual Paulista.

Bibliografía

Bicudo, M. A. V., y Garnica, A. V. M. (2001). *Filosofia da Educação Matemática.* [*Philosophy of Mathematics Education*] (*1st ed.*). Autêntica.

Borba, M. C. (1991). The ideology of certainty in mathematics. *MIAMI, USA*.

Borba, M. C. (1993). *Students understanding of transformations of functions using multi representational software* (*Doctoral Dissertation*) *Cornell University*. Cornell.

Borba, M. C. (2012). Humans-with-media and continuing education for mathematics teachers in online environments. *ZDM-Mathematics Education*, *44*(6), 802-814.

Borba, M. C. (2018). ERME as a group: Questions to mould its identity. En T. Dreyfus, T. Artigue, M. Portari, D. S. Prediger, y K. R. (Org.). (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education: Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe.* (*1.Ed.*). (p. 1-290). Routledge, 1.

Borba, M. C., Almeida, H. R. F. L., y Gracias, T. A. S. (2018). *Pesquisa em ensino e sala de aula: Diferentes vozes em uma investigação.* [*Research in education and the classroom: Different voices in research*] (*1st ed.*). Autêntica.

Borba, M. C., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinare, y Aguilar, M. (2016). Blended learning, elearning and mobile learning in mathematics education. *ZDM-Mathematics Education*, *48*, 589-610.

Borba, M. C., Scucuglia, R. R. S., y Gadanidis, G. (2014). *Fases das tecnologias digitais em educação matemática: Sala de aula e internet em movimento* [*Phases of digital technologies in mathematics education: The classroom and the Internet in motion*] (*1st ed.*). Autêntica.

Borba, M. C., y Skovsmose, O. (1996). The Ideology of Certainty. *PRE PRINT-SERIES*, *3*, 1-18.

Borba, M. C., y Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. Springer.

Canzian, F. (2020). COVID-19 aumentará desigualdade em hora muito infeliz para Brasil, diz historiador. [COVID-19 will increase inequality in an unfortunate moment for Brazil, says historian]. Folha de São Paulo. Descargado de https://www1.folha.uol.com.br/mundo/2020/05/covid-19-aumentara-desigualdade-em-hora-muito-infeliz-para-brasil-diz-historiador.shtml

Confrey, J. (1991). *Function Probe* [*computer program*]. Intellimation Library for the Macintosh.

D'Ambrosio, U., y Borba, M. C. (2010). Dynamics of change of mathematics education in Brazil and a scenario of current research. *ZDM-Mathematics Education*, *42*, 271-279.

Domingues, N. S. (2020). *Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática: Uma complexa rede de sistemas seres humanos -com -mídias* [*Digital videos festival and mathematics education: A complex network of systems of humans-with-media*] (*Doctoral Dissertation in Mathematics Education*). Rio Claro SP: Universidade Estadual Paulista (UNESP).

Engelbrecht, J., Borba, M. C., Llinares, S., y Kaiser, G. (2020). Will 2020 be remembered as the year in which education was changed? *ZDM-Mathematics Education*, *52*(2), 821-824.

Engelbrecht, J., y Harding, A. (2002). A qualitative investigation on the impact of web-based undergraduate mathematics teaching on developing academic maturity. *Technical Report UPWT, 13*.

Engelbrecht, J., y Harding, A. (2004). Combining online and paper assessment in a web-based course in undergraduate mathematics. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *23*(3), 217-231.

Engelbrecht, J., y Harding, A. (2005). Teaching undergraduate mathematics on the Internet. *Educational Studies in Mathematics*, *58*, 253-276.

Engelbrecht, J., Llinares, S., y Borba, M. C. (2020). Transformation of the mathematics classroom with the internet. *ZDM-Mathematics Education*, *52*, 825-841.

Engeström, Y. (2002). *Non scolae sed vitae discimus: Como superar a encapsulação da aprendizagem escolar.* (H. Daniels (Org.)., Ed.). Loyola, São Paulo.

Faggiano, E., Ferrara, F., y Montone, A. (2017). *Innovation and technology enhancing mathematics education: Perspectives in the Digital Era*. Springer.

Ford, P. (2015). Flipping a math content course for pre-service elementary school teachers. *Primus*, *25*(4), 369-380. Descargado de https://doi.org/10.1080/10511970.2014.981902

Freire, P. (1968). *Pedagogia do oprimido.* (*1 Ed.*) [*Pedagogy of the Oppressed*]. Paz e Terra.

Gavioli, A. (2020). *Bilionários americanos ficaram US$434 bilhões mais ricos desde o início da pandemia aponta relatório.* [*American billionaires became US$434 billions richer since the beginning of the pandemic*]. Descargado de https://www.infomoney.com.br/negocios/bilionarios-americanos-ficaram-us-434-bilhoes-mais-ricos-desde-o-inicio-da-pandemia-aponta-relatorio/

Gerdes, P. (2010). *Da etnomatemática a arte-design e matrizes cíclicas.* [*From ethnomathematics to art-design and cyclic matrix*]. Autêntica Editora.

Kaptelinin, V., y Nardi, B. (2006). *Acting with technology: Activity theory and interaction design*. The MIT Press.

Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Constructivism and mathematics education* (pp. 53–74). Kluwer.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En D. En A. Grouws (Ed.), *Research on mathematics teaching and learning* (p. 515-556). Macmillan.

Kaput, J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 265-281.

Latour, B. (2020a). *Imaginar gestos que barrem o retorno da produção pré-crise.* [*Imagine gestures that stop the prepandemic production*] (*Danowski D, & Castro, E. V. Trad.* Descargado de https://n-1edicoes.org/008-1

Latour, B. (2020b). *Is this a dress rehearsal?* Descargado de https://critinq.wordpress.com/2020/03/26/is-this-a-dress-rehearsal/

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice*. Cambridge University Press.

Lévy, P. (1993). *As tecnologias da Inteligência: O futuro do pensamento na era da informática.* [*The Intelligence technologies: The future of thinking in the information era*] (*1st ed.*). Editora 34.

Menghini, F., Furinghetti, L., Giacardi, F., y Arzarello, M. (2008). *The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008) Reflecting and Shaping the World of Mathematics Education.* Istituto Della Enciclopedia Italiana.

Paz, I. (2020). *Não podemos deixar nenhum aluno para trás diz secretário Estadual da Educação. Estadão.* [*We cannot leave any student behind, says secretary of education of São Paulo*]. Descargado de https://educacao.estadao.com.br/noticias/geral,nao-podemos-deixar-nenhum-aluno-para-tras-diz-secretarioestadual-da-educacao,70003297279

Powell, A. (2012). The historical development of critical mathematics education. En D. W. S. A. A. Wager y J. Kilpatrick (Eds.), *Teaching mathematics for social justice conversations with educators.* (p. 21-34). National Council of teachers of mathematics.

Racaniello, V. (2004). *Are viruses living?* Descargado de https://www.virology.ws/2004/06/09/are-viruses-living/

Sannino, A., y Engeström, Y. (2018). Cultural-historical activity theory: Founding insights and new challenges. *Cultural-Historical Psychology*, *14*(13), 43-56.

Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. (2020). *Documento Orientador de Atividades escolares não presenciais.* [*Guidelines for face-to-face school activities*]. Governo do estado de São Paulo: São Paulo. Descargado de http://www.escoladeformacao.sp.gov.br/portais/Portals/84/docs/pdf/documento-orientador-atividades-escolares-nao-presenciais.pdf

Skovsmose, O. (1994). Towards a critical mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 37-57.

Skovsmose, O., y Borba, M. C. (2004). Research methodology and critical mathematics education. En P. Valero y R. Zevenbergen. (Org.). (Ed.), *Researching* *the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology* (p. 207-226). Kluwer.

Souto, D. L. P., y Borba, M. C. (2016). Seres humanos-com-internet ou internet-com-seres humanos: Uma troca de papéis? [Humans-with-internet or Internet-with-humans: A Role Reversal?]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*, 217-242.

Souto, D. L. P., y Borba, M. C. (2018). Humans-with-internet or internet-with-humans: A role reversal? (Reprint). *Revista Internacional De Pesquisa em Educação Matemática (RIPEM)*, *8*(3), 2-23.

Tikhomirov, O. K. (1981). The psychological consequences of computerization. En J. En V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in soviet psychology* (p. 256-278). M. E. Sharpe. Inc.

Torisu, E. M. (2017). A educação matemática crítica na visão de Arthur Powell. [The Critical Mathematics Education in the view of Arthur Powell]. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, *6*(11), 7-17.

Villarreal, M., y Borba, M. C. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education: Notebooks, blackboards. calculators, computers, and notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM-Mathematics Education*, *42*, 49-62.

Wilson, S. G. (2013). The flipped class. A method to address the challenges of an undergraduate statistics course. *Teaching of Psychology*, *40*(3), 193-199. Descargado de https://doi.org/10.1177/0098628313487461

Marcelo C. Borba
Departamento de Matemática Universidade Estadual Paulista (UNESP)
Rio Claro/São Paulo/Brasil
(✉) *marcelo.c.borba@unesp.br*

Recibido: *31 de agosto de 2021.*
Aceptado: *14 de noviembre de 2021.*
Publicado en línea: *14 de diciembre de 2021.*

Revista de Educación Matemática
Volumen 36, N° 3 (2021), páginas 29 – 38
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículo de Matemática

UN ENIGMA LLAMADO GRIGORI PERELMAN

Jorge Lauret

Resumen. La famosa Conjetura de Poincaré (1904), de enunciado puramente topológico, fue probada por el matemático ruso Grigori Perelman en el 2002 usando geometría y ecuaciones diferenciales. Este artículo trata sobre la matemática, los/as matemáticos/as, los premios, los millones de dólares y todo el drama alrededor de dicha prueba.

Palabras clave: Perelman, Conjetura de Poincaré, topología.

Abstract. The famous Poincaré Conjecture (1904), purely topological, was proved by the Russian mathematician Grigori Perelman in 2002 using geometry and differential equations. This paper is about the mathematics, the mathematicians, the prizes, the millions of dollars and all the drama surrounding such a proof.

Keywords: Perelman, Poincaré conjecture, topology.

§1. Madrid, agosto de 2006

En el acto inaugural del Congreso Internacional de Matemáticos/as se anuncia que el ruso Grigori Perelman es uno de los cuatro ganadores de la Medalla Fields, el premio más prestigioso en Matemática, considerado como equivalente al Nobel, aunque sólo se entrega a menores de 40 años y la parte monetaria es irrelevante. Hay bullicio y emoción. Expectativa. El Rey de España está presente en la sala para presidir la ceremonia. Perelman, no. El Presidente de la Unión Matemática Internacional (IMU), John Ball, toma la palabra para contarle al auditorio que el hombre que había resuelto uno de los siete enigmas matemáticos del milenio, la Conjetura de Poincaré, no había aceptado el reconocimiento. Que había pasado dos días en San Petesburgo intentando convencerlo de que recibiera el premio, ofreciéndole distintas opciones digamos logísticas, pero Perelman aseguró en una entrevista posterior que nunca tuvo dudas sobre aceptar o no, que a él lo único que le interesaba era que su prueba de la Conjetura de Poincaré fuese correcta. Se escucha un tibio aplauso. Raro, incómodo, como inconsciente, pero cargado de un gran simbolismo.

Fue el primer matemático/a en rechazar el premio en la historia de la Fields, que se entrega desde 1936. Simplemente no le interesó recibirlo, para perplejidad de la gran mayoría de la comunidad matemática.

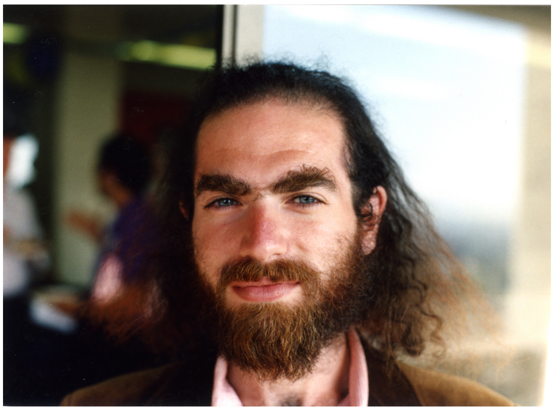


FIGURA 1. Grigori Perelman, 1993 (Autor de la foto: George M. Bergman, Berkeley. Cortesía de Archives of the Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach).

La Conjetura de Poincaré es uno de los llamados Problemas del Milenio, que son siete y fueron elegidos en 2000 por algunos/as de los/as mejores matemáticos/as del mundo a pedido del Instituto Clay de Matemática, una fundación sin fines de lucro financiada por el millonario Landon Clay. Esta entidad, además de estar dedicada a apoyar financieramente la investigación en Matemática de múltiples maneras, ofreció un millón de dólares como premio para cada uno de los siete problemas. Más allá del aspecto monetario de la iniciativa, la real importancia de esta lista de problemas reside en su rol de guía para la Matemática, en actuar como una especie de "norte" para la disciplina por un largo tiempo, siendo su predecesora la lista de 23 problemas presentados por el famoso matemático David Hilbert durante el primer Congreso Internacional de Matemáticos/as en el año 1900 en París.

§2. La carrera de Perelman

Diez años antes, en 1996, a Perelman le habían concedido el EMS Prize, un premio que otorga cada cuatro años la Sociedad Matemática Europea a los/as diez mejores matemáticos/as europeos/as menores de 35 años. Y también lo había rechazado, ése fue su primer acto público de comportamiento inusual y el comienzo de la parte excéntrica de su carrera.

Grigori Perelman nació el 13 de junio de 1966 en Leningrado, URSS (actualmente San Petersburgo, Rusia). Hasta 1995, su carrera transitó por los carriles usuales, parecida en su estructura y cronología a la de cualquier matemático/a profesional. Se doctoró bastante joven a finales de los '80, escribió artículos que envió a publicar y fueron aceptados en revistas de reconocido prestigio. También dictó conferencias en diferentes congresos sobre sus ideas y resultados, incluyendo una en el Congreso Internacional de Matemáticos/as de 1994 en Zúrich, ocupó cargos en el Instituto Steklov (San Petersburgo) y en algunas universidades de los Estados Unidos, obtuvo la Beca Miller (Berkeley) e incluso recibió un premio de la

Sociedad Matemática de San Petersburgo en 1991. Lo que estuvo lejos de lo usual fue la sobresaliente calidad científica de su trabajo, donde quedó en evidencia su gran capacidad y originalidad. Antes de 1995, ya había resuelto varios problemas de Geometría Diferencial que habían permanecido abiertos por décadas. Perelman era considerado por sus colegas un matemático brillante ya en esa época.

A mediados de 1995 se da el quiebre en su carrera. Algo lo decidió a rechazar todas las excelentes ofertas de trabajo estable que recibió de varias de las mejores universidades de Estados Unidos, incluyendo Princeton y Stanford, y regresar a su antigua posición de salario nada generoso en el Instituto Steklov, y a vivir con su madre. En ese momento comenzó su reclusión académica, la cual se extendería por casi siete años. Ahora sabemos que el deseo de Perelman era concentrarse en la Conjetura de Poincaré, lo cual, parece haber decidido, era mucho más fácil de lograr en un departamento en las afueras de San Petersburgo que en Estados Unidos como Profesor de alguna famosa universidad.

§3. Sobre la profesión de matemático/a

La habilidad de una persona de permanecer concentrada en la resolución de un problema durante largo tiempo es invaluable, incluso si es un problema común de la vida cotidiana. Sin embargo, pareciera ser una habilidad poco cultivada y no demasiado valorada, desafortunadamente. Lo cierto es que a la mente del ser humano parece agradarle la concentración, la predispone a abrir puertas de habitaciones desconocidas, encantada de recibir al único visitante permitido, que al fin encontró el tiempo para concentrarse. Que pensar cuesta e incluso a veces duele es también cierto, pero el placer de entender, cada vez un poco más, hace que valga la pena. Perelman logró concentrarse durante siete años en la Conjetura de Poincaré, hasta resolverla en 2002 y comenzar una de las historias más dramáticas de la Matemática. No es difícil imaginarse los momentos de desazón y de duda que habrá tenido que superar, los días, semanas o quizá meses sin obtener avance alguno, al menos de forma aparente o consciente.

Winston Churchill definió al éxito, en una de sus numerosas citas, como ir de fracaso en fracaso sin perder el entusiasmo. La investigación en Matemática no está muy lejos de poder describirse de esta manera. En algún momento, luego de meses o años de investigación, un/a matemático/a decide que los resultados que obtuvo sobre algún problema o tema constituyen un aporte original digno de ser anunciado y explicado. Es una decisión difícil, pues lo más probable es que hayan quedado algunas, o muchas, preguntas naturales y centrales sin respuesta. La forma final que tomará su trabajo será la de un artículo publicado en una revista especializada, luego de un proceso riguroso de revisión, corrección y aceptación que puede llevar fácilmente de seis meses a un año, e incluso mucho más en algunos casos.

Pero la vertiginosidad de las últimas décadas no perdonó ni siquiera a esta disciplina milenaria llamada Matemática. El tiempo a veces excesivo que transcurre entre la conclusión de un artículo y su publicación dio lugar en los '90 a la popularización de arXiv, un archivo en internet de preprints de Matemática y Física, donde los/as científicos/as colocan sus trabajos usualmente antes o en el mismo momento en que los envían a publicar a alguna revista. Al carecer de revisión alguna, el valor de un preprint en arXiv como publicación científica es prácticamente nulo.

§4. Conmoción matemática

Luego de siete años de confinamiento, el 11 de noviembre de 2002, Perelman se conectó a Internet, entró justamente a ese sitio, arXiv, y luego de llenar algunos campos obligatorios se decidió a dar el último clic para subir un preprint conteniendo algunos de sus resultados (ver G. Perelman (2002)). Sólo una pequeñísima parte de la comunidad matemática se percató ese día de lo que podían llegar a significar esas 39 páginas. La conmoción que causó quedó plasmada en la desmesurada cantidad de preprints sobre el mismo tema que fueron subidos por distintos autores durante las dos semanas siguientes, para dejar constancia de hasta dónde habían llegado. En marzo de 2003, Perelman sube un segundo preprint de 22 páginas (ver G. Perelman (2003a)) y acepta algunas de las muchas invitaciones que venía recibiendo para dictar conferencias en algunos de las mejores centros de Matemática del mundo en los Estados Unidos, como Princeton, MIT y Stony Brook, durante el mes de abril. Ya de regreso en San Petesburgo, en julio de 2003, sube su tercer y último preprint (ver G. Perelman (2003b)), para luego simplemente desaparecer, de nuevo. Con esto Perelman completaba la solución de la Conjetura de Poincaré, problema que sobrevivió los embates de grandes matemáticos durante todo el siglo veinte.

Los tres preprints de Perelman nunca fueron publicados formalmente. Sin embargo, por ser ni más ni menos la Conjetura de Poincaré lo que estaba en juego, tuvieron revisiones de lujo en la forma de dos artículos largos, uno de 268 páginas de Kleiner-Lott (ver B. Kleiner and J. Lott (2008)) y el otro de Cao-Zhu de 327 páginas (ver H-D Cao and X-P Zhu (2006)), además de un libro de Morgan-Tian (ver J. Morgan and G. Tian (2007)). Todos estos son trabajos de gran calidad y precisión escritos por matemáticos/as expertos/as en el área, lo cual dejó confirmado científicamente que los resultados de Perelman son correctos y presentan una prueba de la Conjetura de Poincaré. Uno de estos artículos generó una controversia llevada a la fama en un artículo publicado en la revista The New Yorker, con repercusiones en la justicia incluidas, que no es objeto de mayor interés en este artículo.

A pesar de que el enunciado de la Conjetura de Poincaré es puramente topológico, la demostración dada por Perelman se enmarca en otras dos áreas de la Matemática. Una es el Análisis Geométrico, una mezcla de ecuaciones diferenciales y geometría que fue en efecto revolucionada por Hamilton y Yau, entre muchos otros, en pos de resolver la conjetura. La otra es la Geometría Riemanniana, que es curiosamente, o no, la misma área de la Matemática usada por Albert Einstein para desarrollar su Teoría de la Relatividad General. Así es, también en Matemática, todo tiene que ver con todo.

§5. El juego del millón

En diciembre de 2005 Perelman le lleva una manuscrita y escueta carta de renuncia a la secretaria del Instituto Steklov, la cual, consternada, le ofrece dejarla en un cajón por un tiempo por si se arrepentía. Luego le preguntó, "Grisha, ¿sabe tu mamá?". Perelman nunca volvió por la carta y quedó desempleado, como era su deseo.

Recién en marzo de 2010 el Instituto Clay decidió ofrecerle el premio de un millón de dólares a Perelman por su resolución de la Conjetura de Poincaré. Se tomaron su tiempo, casi el mismo que le llevó a Perelman resolverla. Perelman lo rechazó, como lo había hecho con la Medalla Fields, pero esta vez también para perplejidad y asombro del público en general. El rechazo del millón lo hizo famoso, muy a su pesar. Lo expuso públicamente, comenzó a ser filmado sin permiso en el supermercado y en el subte. Se publicaron incontables artículos en diarios y revistas alrededor del mundo sobre su vida, con el agregado de todo lo que puede aportar Internet. Hay incluso algunas teorías acerca de cuáles podrían ser los síndromes que padece (entre ellos, el Asperger).

En la actualidad, nada nuevo se sabe de Grigori Perelman. Sólo algún que otro rumor circula de vez en cuando por alguna cena en algún congreso. ¿Por qué nos asombra, o incluso incomoda, que no haya querido jugar ninguno de nuestros juegos? Ni el de las publicaciones en las revistas más prestigiosas, ni el de las posiciones en las universidades más conocidas, ni el de los más famosos premios, ni siquiera el juego del millón. ¿Por qué nos cuesta entender que el único juego que le interesa a Grigori Perelman es la Matemática? Cuál será nuestro síndrome.

§6. La Conjetura de Poincaré

Corría el año 1904 cuando el famoso matemático francés Henri Poincaré se hizo una pregunta muy natural que se convertiría en la llamada Conjetura de Poincaré, mal llamada así pues Poincaré en realidad nunca conjeturó que la respuesta sería afirmativa. La pregunta se encuadra dentro de la Topología, un área relativamente nueva de la Matemática de la cual Poincaré es considerado uno de sus creadores, o descubridores, según se prefiera. Como otra curiosa nota interdisciplinar, cabe mencionar que la Topología fue usada por Lacan para intentar formalizar lo inconsciente.

El enunciado técnico de la conjetura es el siguiente:

FIGURA 2. Primer Congreso Solvay, Bruselas, 1911. Mientras, muy concentrados, Marie Curie y Henri Poincaré charlan y Jean Perrin lee un libro, el resto posa para la foto, entre los cuales se encuentran Max Planck, Hendrick Lorentz y el segundo más joven de todos/as los/as presentes, Albert Einstein.

Conjetura de Poincaré. Toda 3-variedad compacta y simplemente conexa es homeomorfa a la 3-esfera.

Entender el significado preciso de esta corta sentencia lleva años de estudios avanzados. En cuanto a la demostración presentada por Perelman, ya estaríamos hablando de al menos un año de estudio para la gran mayoría de los/as matemáticos/as profesionales. A continuación, se dará una definición matemáticamente rigurosa de cada una de las palabras en la conjetura, incluyendo esa parte igualmente importante de la Matemática que es la intuición. Con suerte, esto nos dará una idea más clara acerca de qué es eso que le pareció interesante preguntar a Henri Poincaré.

6.1. Espacios topológicos. Sea X un conjunto cualquiera. Una *topología* en X es una colección de subconjuntos de X llamados *abiertos* tal que el vacío y X son abiertos, la unión arbitraria de abiertos es abierta y la intersección finita de abiertos es abierta. X adquiere el rango de *espacio topológico* cuando se lo provee de una topología. Es una definición un tanto cruda, el nivel de abstracción es abrumante, notemos que X podría ser desde un subconjunto de $\mathbb{R}^k$ al espacio de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, desde el conjunto de todos los estados del sistema solar a un conjunto de pájaros. Quizá una manera más natural de ver a una topología es definiendo la convergencia de sucesiones, donde los abiertos reemplazan al bien conocido $\epsilon > 0$ que usamos en $\mathbb{R}^k$: una sucesión $x_n \in X$ *converge* a $x \in X$ si para todo abierto U que contiene a x existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. Notar que si por ejemplo el semi-intervalo $(-1, 0]$ es abierto, entonces la sucesión $\frac{1}{n}$ no converge a 0 en esa topología de $\mathbb{R}$.

Observación 6.1. *Cuando la topología satisface una propiedad llamada N_1 (i.e., todo punto admite una base numerable de entornos), la cual asumiremos de ahora en más, vale la recíproca: tener una noción de convergencia de sucesiones es equivalente a tener una topología. Las variedades y los espacios métricos son N_1.*

Los abiertos también pueden usarse para reemplazar el famosísimo $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0$ en la definición de continuidad de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, y obtener así uno de los conceptos más importantes de la Matemática: una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos es *continua* en $x \in X$ si para todo abierto V que contiene a $f(x)$ existe un abierto U que contiene a x tal que $f(U) \subset V$. No es difícil ver que f es continua en x si y sólo si respeta la convergencia de sucesiones, i.e., $f(x_n) \to f(x)$ para toda $x_n \to x$, y que f es continua en todo punto si y sólo si la preimagen de abiertos es siempre abierta.

6.2. Homeomorfismo. Ya estamos en condiciones de definir una de las palabras que aparecen en la Conjetura de Poincaré. Dos espacios topológicos X e Y se dicen *homeomorfos* (o topológicamente equivalentes) si existe una función biyectiva y continua $f : X \to Y$ cuya inversa es también continua. Dos espacios homeomorfos pueden ser muy diferentes, pueden provenir de distantes áreas de la Matemática o la Matemática aplicada, pero son indistinguibles desde el punto de vista de la Topología. Una posible visualización de un homeomorfismo es como una deformación continua, como si los espacios fueran de plastilina, es así como una pelota de fútbol es homeomorfa a una guinda de rugby, y una dona (o cámara de auto o salvavidas) es homeomorfa a una taza.

6.3. 3-variedad. Es un espacio topológico X en el cual un/a observador/a, situado/a en cualquier punto de X, cree que está en $\mathbb{R}^3$, es decir, el espacio luce localmente como un abierto usual de $\mathbb{R}^3$. Más precisamente, para todo $x \in X$ existe un abierto que contiene a x y es homeomorfo a un abierto usual de $\mathbb{R}^3$. El concepto de k-variedad se define análogamente considerando $\mathbb{R}^k$. Es así como una curva es una 1-variedad, una superficie es una 2-variedad, pero imaginarse una 3-variedad que no sea simplemente un abierto usual de $\mathbb{R}^3$ no parece tan fácil.

6.4. Compacidad. Un espacio topológico X se dice *compacto* si para todo cubrimiento de X por abiertos existe una cantidad finita de dichos abiertos que siguen cubriendo a X. Una consecuencia más intuitiva y fácil de demostrar de la compacidad es que toda sucesión admite una subsucesión convergente, i.e., se acumula en al menos un punto. La recíproca vale para espacios métricos, lo cual ya requiere de una prueba más elaborada. Según el Teorema de Heine-Borel, los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^k$ son precisamente los cerrados y acotados.

Menos precisamente, la compacidad sugiere que es un espacio finito en algún sentido, que se cierra. Si por ejemplo el universo en el que vivimos, que es una 3-variedad (al menos aparentemente), fuese compacto, cosa que parece tener chances de ser cierta según la Relatividad General, sería factible despegar en un cohete desde la Tierra y siguiendo siempre en línea recta durante la suficiente cantidad de tiempo arribar de regreso a nuestro planeta. No quedan dudas de que intentar visualizar una 3-variedad compacta, es decir los objetos en cuestión de la conjetura, genera algo de vértigo, es todo un desafío lograr hacerlo desde $\mathbb{R}^3$. Pero sigamos, que no falta mucho.

6.5. 3-esfera. Como definición formal podemos tomar, simplemente,

$$S^3 := \left\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^4,$$

y dotarla, naturalmente, de la topología determinada por todas las intersecciones de abiertos usuales de $\mathbb{R}^4$ con S^3. Visualizar la 3-esfera es otro cantar. Intentemos. ¿Cómo le explicamos a alguien que vivió toda su vida en un plano, qué es una pelota de fútbol, es decir, una 2-esfera? Una manera ingeniosa sería pedirle que dibuje un disco en su plano y que imagine que todo el borde del disco es un único punto. De forma análoga, un ser que vive en $\mathbb{R}^4$, donde es posible sacar un pájaro de una jaula cerrada sin tocar la jaula, nos puede ayudar a visualizar la 3-esfera. Nos indica que tomemos una bola de billar e imaginemos que toda su cáscara exterior está reducida y pegada en un único punto, que si caminamos dentro de la bola y llegamos a alguno de los puntos del borde, entonces tenemos la libertad de aparecer en cualquier otro punto del borde, y seguir.

La 3-esfera es claramente un ejemplo de 3-variedad. Además, se puede probar fácilmente que la 3-esfera es además compacta, aunque usando que el intervalo $[0,1]$ es compacto, lo cual lleva algo de trabajo demostrar.

6.6. Simple conexidad. Un espacio topológico es llamado *simplemente conexo* si es *conexo* (i.e., no es la unión de dos abiertos disjuntos no vacíos, o en el caso de variedades, todo par de puntos puede unirse con una curva continua) y toda curva cerrada puede deformarse continuamente en un punto. Más rigurosamente, para toda curva continua $\alpha : [0,1] \to X$ con $\alpha(0) = \alpha(1) = x \in X$, existe una función continua $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que cada una de las curvas $\alpha_t(s) := F(s,t)$ va de x en x y se satisface que $\alpha_0 = \alpha$ y $\alpha_1(s) \equiv x$, i.e., α_t es en definitiva una *curva continua de curvas continuas* uniendo α con la curva constante x. Es fácil convencerse de que la 2-esfera y la 3-esfera son simplemente conexas.

Una 3-variedad compacta distinta de la 3-esfera es el 3-toro $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$, que se puede visualizar imaginando una habitación cúbica donde cada punto en alguna de las caras está identificado con el punto en idéntica posición en la cara opuesta, cual pantalla tridimensional de Pac-Man. En otras palabras, es el análogo tridimensional del 2-toro $T^2 = S^1 \times S^1$ (i.e., un círculo de círculos!). La diferencia topológica del 3-toro con la 3-esfera es que el 3-toro no es simplemente conexo, es decir, que contiene curvas cerradas que no pueden ser deformadas continuamente en un punto, que se traban cuando queremos colapsarlas. Es la misma diferencia que hay entre una dona y una pelota de fútbol.

Otra 3-variedad compacta distinta de la 3-esfera, y del 3-toro, es $X = S^1 \times S^2$. Una forma muy divertida de visualizarla es como el espacio entre dos esferas concéntricas, identificando cada punto de una de las esferas con el proyectado sobre la otra usando el radio (i.e., un círculo de esferas!). Ese mismo segmento uniendo tales puntos, que es en realidad un círculo, es una curva continuamente indeformable a un punto, i.e., esta 3-variedad tampoco es simplemente conexa.

6.7. Conclusión. Ya tenemos una idea, bastante rigurosa, de qué significa cada palabra en el enunciado de la Conjetura de Poincaré, vale la pena ahora leerla varias veces más. En resumen, y a grandes rasgos, lo que predecía la conjetura y ahora asegura el Teorema del gran Grigori Perelman, es que la 3-esfera es el único objeto compacto 3-dimensional donde toda curva cerrada puede deformarse en un punto sin cortarse. ¿Será nuestro universo una 3-esfera?

Agradecimientos. Estoy muy agradecido con las siguientes personas por sus invaluables comentarios y sugerencias sobre una primera versión de este artículo: Leandro Cagliero, Marco Farinati, Ramiro Lafuente, Emilio Lauret, Camilla Molina, Juan Pablo Rossetti, David Webb y Cynthia Will.

Bibliografía

B. Kleiner and J. Lott. (2008). Notes on Perelman's papers. *Geom. Topol.*, *12*, 2587–2855.

G. Perelman. (2002). The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. Descargado de `arXiv:math.DG/0211159`

G. Perelman. (2003a). Ricci flow with surgery on three-manifolds. Descargado de `arXiv:math.DG/0303109`

G. Perelman. (2003b). Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three manifolds. Descargado de arXiv:math.DG/0307245

H-D Cao and X-P Zhu. (2006). A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures - Application of the Hamilton-Perelman Theory of the Ricci Flow. *Asian J. Math.*, *10*, 165-492.

J. Morgan and G. Tian. (2007). Ricci flow and the Poincaré conjecture. *Clay Math. Monographs 3, Amer. Math. Soc.*.

Jorge Lauret
FaMAF, UNC / CIEM, CONICET
(✉) *jorgelauret@unc.edu.ar*

Recibido: *7 de agosto de 2021*.
Aceptado: *15 de octubre de 2021*.
Publicado en línea: *14 de diciembre de 2021*.

Revista de Educación Matemática
Volumen 36, N° 3 (2021), páginas 39 – 52
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículo de Matemática

DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DEL RECORRIDO DE UN PORTÓN LEVADIZO NO DESBORDANTE

Marcela P. Álvarez, Flavia E. Buffo y Gabriel A. Carrizo

Resumen. En este trabajo se presenta el modelo matemático y la resolución de un problema real y cotidiano para estudiantes de la carrera de Ingeniería que cursan materias básicas. Se propone un modelo simple para estudiar el movimiento de ascenso y descenso de un portón levadizo no desbordante, que se desliza sobre dos rieles horizontales y otros dos verticales. La resolución del modelo matemático atraviesa diferentes contenidos, geometría de curvas, cálculo y análisis diferencial, topología, optimización. Se describe matemáticamente la curva que representa el recorrido del portón en su movimiento de apertura, se presentan los resultados técnicos del problema y se analiza su importancia como propuesta metodológica, en el contexto del aprendizaje basado en problemas y la educación basada en competencias.

Palabras clave: Aprendizaje basado en problemas, Cálculo diferencial, Modelado matemático.

Abstract. This work presents the mathematical model and the resolution of a real and everyday problem for students of the Engineering career who take basic subjects. A simple model is proposed to study the upward and downward movement of a non-overflowing liftgate, which slides on two horizontal rails and two vertical rails. The resolution of the mathematical model goes through different contents, geometry of curves, calculation and differential analysis, topology, optimization. The curve that represents the path of the gate in its opening movement is mathematically described, the technical results of the problem are presented and its importance as a methodological proposal is analyzed, in the context of problem-based learning and competence-based education.

Keywords: Problem-based learning, Differential calculus, Mathematical modelling.

§1. Introducción

Desde hace tiempo, en las carreras de ingeniería se vienen observando serios problemas en la interpretación, desarrollo y resolución de problemas matemáticos a partir de la observación de problemas reales. En el transcurso de su formación, el estudiante debe adquirir conocimientos básicos generales que constituyen la base en la que se apoyan los desarrollos científicos. Asimismo, deben ser capaces de identificar, formular y resolver problemas de ingeniería, comunicar y defender sus ideas y coordinar el trabajo con sus pares. La tarea de los docentes de matemática tiene dos componentes: la organización matemática como herramienta fundamental para modelizar cualquier actividad matemática y la organización didáctica desarrollando tareas que faciliten el aprendizaje de nuevos contenidos y movilización de saberes previos. El docente debe ser capaz de proponer estrategias didácticas que promuevan el aprendizaje activo de los estudiantes y el desarrollo de capacidades técnicas propias de la formación. Existen diferentes metodologías de aprendizaje activo, por ejemplo el aprendizaje basado en problemas (ABP) (Nieto Said, 2004; Escribano y del Valle, 2008). Para trabajar en el aula con los estudiantes, los docentes deben elegir y/o diseñar problemas que los involucren en escenarios relevantes, faciliten la conexión entre la teoría y su aplicación razonada, los desafíen a buscar soluciones interesantes, fomenten el trabajo en grupos y requieran, no sólo conocimientos, sino discernimiento respecto a las diferentes maneras de abordar el problema. En la Sección 2 se propone un problema real y cotidiano: estudiar el movimiento de ascenso y descenso de un portón levadizo no desbordante, como un buen ejemplo para implementar la estrategia didáctica (ABP). En la Sección 3 se presentan los conceptos teóricos a los que el estudiante debe recurrir para modelar y resolver el problema desde diferentes perspectivas y grados de dificultad. En las Secciones 4 y 5 se describe el modelo matemático y se analizan los resultados obtenidos respectivamente. Finalmente, en la Sección 6 se presentan las conclusiones.

§2. El problema

El problema consiste en estudiar el movimiento de ascenso y descenso de un portón levadizo no desbordante, que se desliza sobre dos rieles horizontales. Para describir matemáticamente el recorrido del portón en su movimiento de apertura utilizando un modelo simple, se emplean diferentes conceptos y resultados de geometría de curvas, cálculo y análisis diferencial (Ardenghi, Buffo, y Álvarez, 2019), topología y optimización. Para los estudiantes el problema se enuncia como sigue: *Al entrar un automóvil a un garaje, en el que ya hay otro vehículo estacionado, e intentar cerrar el portón levadizo no desbordante como se muestra en la Figura 1, una parte del portón impacta al segundo automóvil. Se desea analizar por qué ocurrió el impacto, de qué forma podría evitarse cualquiera sea el tamaño del vehículo y cómo se expresa matemáticamente el recorrido del portón en su movimiento de ascenso o descenso.* Ardenghi y cols. (2019) presenta el problema descripto como un recurso para la implementación práctica del aprendizaje enfocado en competencias para las asignaturas Análisis Matemático I.

FIGURA 1. Sistema portón, garaje, auto.

§3. Conceptos teóricos

A continuación se presentan algunos conceptos fundamentales para resolver el problema matemático (Bartle, 1980; Courant y Fritz, 1965; Rey Pastor, Pi Calleja, y Trejo, 1968; Spinadel, 2004).

3.1. Problemas de optimización. Se considera el problema de optimización con restricciones de igualdad

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & f(x) \\ & c(x) = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la función objetivo de clase C^2, $c : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua y diferenciable, que representa la restricción del problema y define el conjunto o región de factibilidad. En particular, si $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R})$ y no hay restricciones de igualdad, entonces las *condiciones necesarias y suficientes* para que $x_\star$ sea un minimizador local de f son

$$f'(x_\star) = 0, \quad f''(x_\star) > 0. \tag{3.2}$$

Para el problema (3.1) sea

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda c(x)$$

la función de Lagrange asociada al problema, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es el multiplicador de Lagrange de la restricción $c(x)$. Entonces las *condiciones necesarias y suficientes* para que $x_\star$ sea un minimizador local de f, sujeto a la restricción $c(x) = 0$, es que exista $\lambda_\star \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} & \nabla_x \mathcal{L}(x_\star, \lambda_\star) = 0, \\ & c(x_\star) = 0, \\ & z^T \nabla^2 \mathcal{L}(x_\star, \lambda_\star) z > 0, \quad \forall\ z \text{ tal que } \nabla c(x_\star)^T z = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

siempre que $\nabla c(x_\star) \neq 0$. La condición de primer orden en (3.3) se llama condición de optimalidad, se expresa

$$\nabla f(x_\star) = -\lambda \nabla c(x_\star),$$

y garantiza que el gradiente de f en $x_\star$ sea combinación lineal del gradiente de c en $x_\star$, la segunda ecuación en (3.3) verifica que $x_\star$ sea un punto factible y la condición de segundo orden establece que la matriz Hessiana $\mathcal{L}(x_\star, \lambda_\star)$ sea definida positiva, siempre que el vector z pertenezca al espacio tangente de las restricciones, esto es, que sea normal al gradiente de la restricción c, $\nabla c(x_\star)$ cualquiera sea z.

3.2. Envolvente de curvas planas. Sea $\{C_t\}$ un haz o familia uniparamétrica de curvas planas de ecuación

$$f(x, y, t) = 0 \tag{3.4}$$

dependientes de un parámetro t, donde f es una función escalar con derivadas parciales primeras continuas. Una curva E que en cada uno de sus puntos es tangente a alguna de las curvas de la familia $\{C_t\}$ se llama *envolvente* de la familia de curvas, y cada una de las curvas C_t se denomina *involuta*. Supongamos que existe la envolvente E de la familia de curvas $f(x, y, t) = 0$ dada. Entonces en el punto de contacto de la curva $f(x, y, t) = 0$ con la envolvente se verifica que $f_t(x, y, t) = 0$. Si pueden determinarse x e y como funciones de t por medio de estas dos ecuaciones, se obtiene la representación paramétrica de una curva con parámetro t, y esta curva es la envolvente que puede representarse por medio de dos funciones continuamente diferenciables $x(t)$, $y(t)$:

$$E : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \tag{3.5}$$

donde

$$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0.$$

Aplicando la regla de la cadena, la derivada de la función f respecto de t es

$$f_x x'(t) + f_y y'(t) + f_t = 0. \tag{3.6}$$

Ahora bien, si para el haz de curvas $\{C_t\}$ la envolvente E existe, entonces por la condición de tangencia los vectores (f_x, f_y) y $(x'(t), y'(t))$ son ortogonales, esto es

$$f_x x'(t) + f_y y'(t) = 0.$$

Luego la expresión (3.6) se convierte en $f_t = 0$. Por lo tanto, las ecuaciones

$$\begin{cases} f(x(t), y(t), t) = 0, \\ f_t(x(t), y(t), t) = 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

son una *condición necesaria* para la envolvente E. Si existen $x(t)$ e $y(t)$ que satisfacen el sistema (3.7) y además $f_x^2 + f_y^2 \neq 0$, $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$, entonces se tiene una *condición suficiente* de existencia de E.

3.3. Sucesiones de funciones. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; se dice que $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el límite puntual de la sucesión $\{f_n\}$ si para cada $x \in D$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

Se dice que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge a una función f en D si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ y para cada x en D hay un número $n_0(\epsilon, x) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0(\epsilon, x)$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Esta convergencia es una propiedad local de la sucesión en el punto x. Se dice que la función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el límite uniforme de la sucesión $\{f_n\}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un natural $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ para todo $x \in D$ y para todo $n \geq n_0(\epsilon)$. Se sabe que dada $\{f_n\}$ una sucesión de funciones $f_n : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente a la función f sobre el intervalo $[a, b]$, si cada f_n es continua en $[a, b]$, entonces f es continua en $[a, b]$.

Teorema 1. (*Dini*) *Sea* (E, d) *un espacio métrico compacto,* $f : E \to \mathbb{R}$ *una función continua y* $\{f_n\}$*,* $f_n : E \to \mathbb{R}$ *una sucesión de funciones continuas. Si* $\{f_n\}$ *converge puntualmente a* f *en E y es mótona decreciente,* $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ *para todo* $x \in E$ *y para todo* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $\{f_n\}$ *converge uniformemente a* f *en* E*.*

Un conjunto $K \in \mathbb{R}^p$ se dice convexo si para cada par de puntos de K, el segmento que los une está totalmente incluido en K, es decir, si $x,\ y \in K$ y $t \in [0, 1]$, entonces $(1-t)x+ty = x+t(y-x) \in K$. La intersección de cualquier colección de conjuntos convexos en $\mathbb{R}^p$ es convexa.

§4. Modelo matemático del problema

Para estudiar el movimiento de ascenso y descenso de un portón levadizo no desbordante que se desliza sobre dos rieles horizontales y dos verticales, se propone un modelo simple. Se considera una sección plana longitudinal del garaje y se asocia un sistema de ejes coordenados con origen en O como se muestra en la Figura 2; el portón, de altura L, se representa con el segmento $\overline{AB}$ y los rieles horizontal y vertical, de igual tamaño, con los segmentos con $\overline{OD}$ y $\overline{OE}$, respectivamente. Si el portón está cerrado $\overline{AB} \equiv \overline{OE}$ y está contenido en la recta perpendicular a eje x de ecuación $x = 0$. A medida que el portón asciende (o desciende) los puntos A y B se «desplazan» sobre los ejes x e y; el segmento $\overline{AB}$ pertenece a la recta, que interseca a los ejes coordenados en los puntos $A = (x_0, 0)$ y $B = (0, y_0)$, de ecuación

$$y = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0), \qquad 0 < x_0 \leq L, \qquad -L \leq y_0 \leq 0.$$

Como el triángulo $\overset{\triangle}{AOB}$ es rectángulo en O, x_0 e y_0 satisfacen la relación Pitagórica:

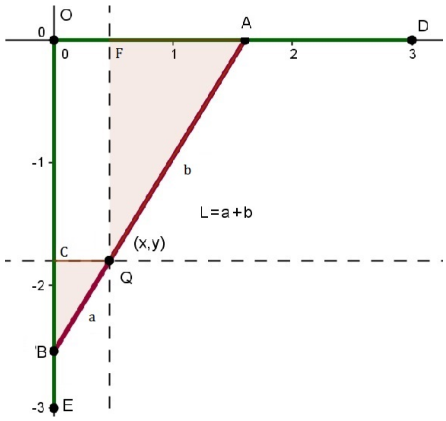


Figura 2. Esquema simple para el modelo del movimiento del portón.

$$x_0^2 + y_0^2 = L^2.$$

Cuando el portón está completamente abierto $\overline{AB} \equiv \overline{OD}$, $x_0 = L$ y la recta r es horizontal. En resumen, la posición del portón de altura L, parametrizada en x_0, se expresa como:

$$\begin{cases} \text{Portón cerrado} & x_0 = 0, \quad -L \leq y \leq 0, \quad si \quad x = 0, \\ \text{Portón abriendo} & 0 < x_0 \leq L, \quad y = \frac{\sqrt{L^2 - x_0^2}}{x_0}(x - x_0), \quad si \quad 0 \leq x \leq x_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Sea $Q(x, y)$ el punto fijo sobre el portón que se muestra en la Figura 2, si la medida del segmento $\overline{AQ}$ es b y la medida del segmento $\overline{BQ}$ es $a = L - b$, entonces los triángulos rectángulos sombreados en la figura son semejantes. Luego

$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b}.$$

Elevando al cuadrado cada miembro de la ecuación anterior se obtiene que x e y satisfacen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

por lo tanto el punto Q durante el movimiento de apertura del portón describe una trayectoria elíptica como se muestra en la Figura 3.

§5. Análisis de los resultados

5.1. Resolución del problema de optimización en una variable. Con el modelo simple propuesto en la sección 4, se plantea el siguiente problema (Ardenghi y cols., 2019): *Calcular cuál es la mejor distancia a la que puede ser colocado un automóvil dentro del garaje sin que, durante su recorrido, el portón levadizo lo impacte.* Para un

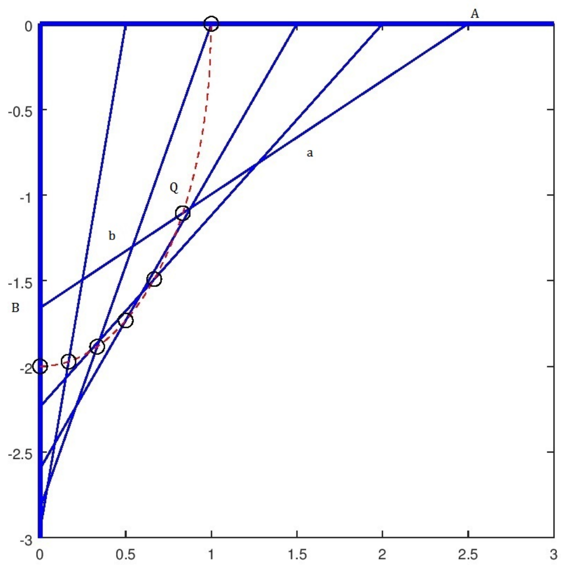


FIGURA 3. Trayectoria elíptica (línea punteada) de un punto fijo Q sobre el portón (o), en su movimiento de apertura. Posición del portón (línea llena).

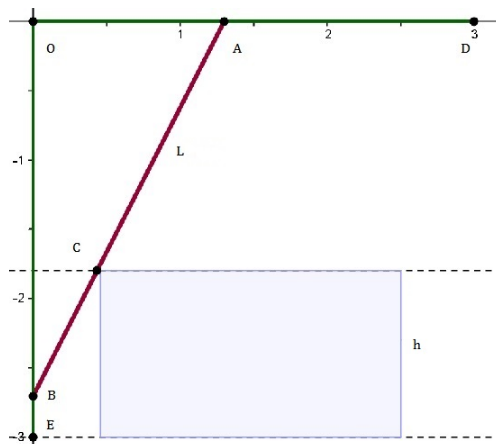


FIGURA 4. Ejemplo del modelo con $L = 3\ m$, $h = 1.2\ m$ y $C \cong (0.65, -1.8)$.

portón de altura L y un auto de altura h, el valor de la abscisa del punto de impacto $C = (x, h - L)$ mostrado en la Figura 4 es

$$x = \frac{(h - L)x_0}{\sqrt{L^2 - x_0^2}} + x_0.$$

Para encontrar la abscisa del punto C, que cumple con el objetivo de ser la mejor distancia para que el portón no impacte al auto, se plantea el problema de optimización

$$\max_{0<x_0<L} f(x_0) = \frac{(h-L)x_0}{\sqrt{L^2-x_0^2}} + x_0. \tag{5.1}$$

Se tiene en cuenta que resolver (5.1) es equivalente a resolver el problema de minimizar la función $-f(x)$. La expresión de la derivada primera es:

$$f'(x_0) = 1 + \frac{(h-L)L^2}{(L^2-x_0^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Al aplicar la condición de optimalidad de primer orden (3.2) y resolver la ecuación se obtiene

$$x_0^\star = \sqrt{L^2 - \sqrt[3]{(h-L)^2L^4}}.$$

Se verifica la condición de optimalidad de segundo orden

$$f''(x_0^\star) = \frac{3(h-L)L^2x_0^\star}{\left(L^2-(x_0^\star)^2\right)^{\frac{5}{2}}} < 0,$$

y se concluye que $x_0^\star$ es un maximizador local de la función f y el máximo local $f(x_0^\star)$ es el valor de la abscisa del punto C. Para verificar que se trata de un máximo global en $D=(0,L)$ se calculan los límites en la frontera

$$\lim_{x_0\to 0^+} f(x_0) = 0, \qquad \lim_{x\to L^-} f(x_0) = -\infty.$$

En la tabla se resumen los resultados obtenidos para dos casos de estudio:

Caso	L	h	$x_0^\star$	$y_0^\star$	$x = f(x_0^*)$	$y = h - L$
I	3	1.2	1.61	-2.53	0.46	-1.8
II	3	1.5	1.82	-2.38	0.68	-1.5

En la Figura 5 se representan los puntos $C(x, h-L)$ para diferentes alturas de auto h, y el segmento $\overline{AB}$ que modela la posición del portón.

5.2. Resolución del problema de optimización en dos variables con restricciones de igualdad. El problema de la sección anterior puede reformularse como sigue

$$\begin{aligned} \max_{s.a} \quad & f(x_0,y_0) = \tfrac{(L-h)x_0}{y_0} + x_0 \\ & x_0^2 + y_0^2 - L^2 = 0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

y resolverse usando el método de los multiplicadores de Lagrange,

$$\mathcal{L}(x_0,y_0,\lambda) = \frac{(L-h)x_0}{y_0} + x_0 + \lambda(x_0^2+y_0^2-L^2).$$

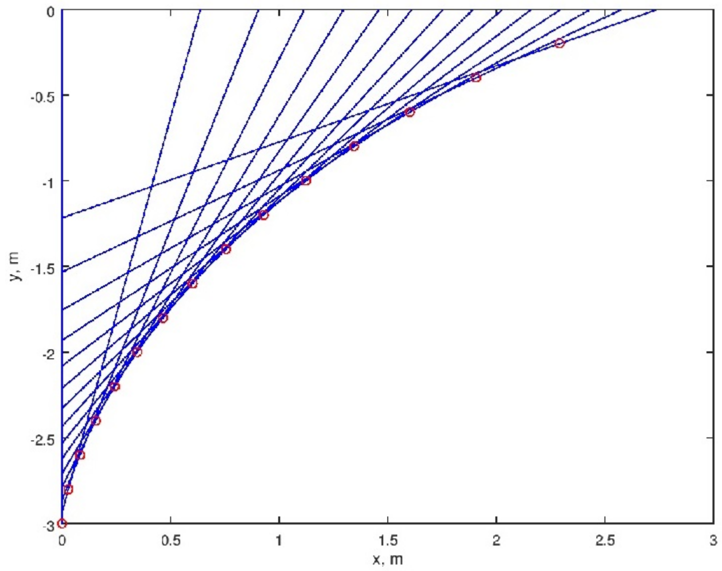


FIGURA 5. Gráfico del punto C para diferentes valores $0 < h < 3$ y de la posición del portón (segmento $\overline{AB}$ en línea llena) .

Se aplican la condiciones de optimalidad y factibilidad

$$\nabla_x \mathcal{L} = \begin{bmatrix} \frac{L-h}{y_0} + 1 + 2x_0\lambda \\ -\frac{(L-h)x_0}{y_0^2} + 2y_0\lambda \end{bmatrix} = 0, \qquad x_0^2 + y_0^2 - L^2 = 0, \tag{5.3}$$

se resuelve el sistema (5.2) y se obtiene

$$x_0^\star = \sqrt{L^2 - \sqrt[3]{(h-L)^2 L^4}}, \quad y_0^\star = -\sqrt[3]{(L-h)L^2}.$$

En la tabla se presentan los valores resultados para dos casos de estudio:

Caso	L	h	$x_0^\star$	$y_0^\star$	$x = f(x_0^\star)$	$y = h - L$	λ
I	3	1.2	1.6117	−2.5303	0.46517	−1.8	−0.089539
II	3	1.5	1.8249	−2.3811	0.67529	−1.5	−0.101385

5.3. Análisis topológico del problema. Para cada posición x_0 del portón, se define un conjunto dado por el techo, el piso, el fondo y el portón del garaje. Este conjunto es convexo ya que se expresa mediante el sistema de inecuaciones lineales

$$U(x_0) = \begin{cases} 0 \leq x \leq P, \\ -L \leq y \leq 0, \\ y - \frac{\sqrt{L^2 - x_0^2}}{x_0} x \leq -\sqrt{L^2 - x_0^2}. \end{cases}$$

El conjunto G de todos los puntos del garaje que no son alcanzados por el portón en ningún momento, es decir el "conjunto útil del garaje", se obtiene como intersección

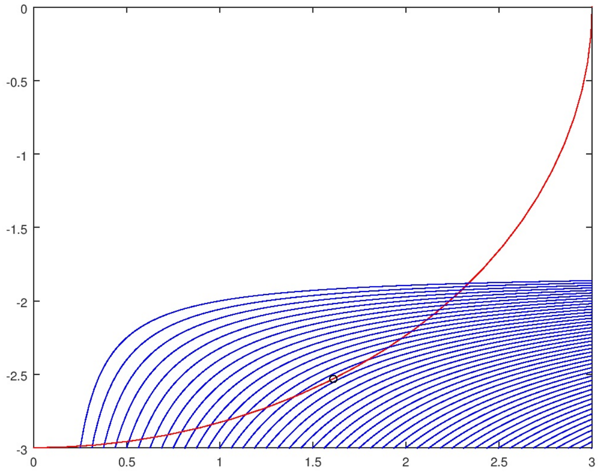


FIGURA 6. Solución gráfica del problema de optimización en dos variables para el caso $h = 1.2$.

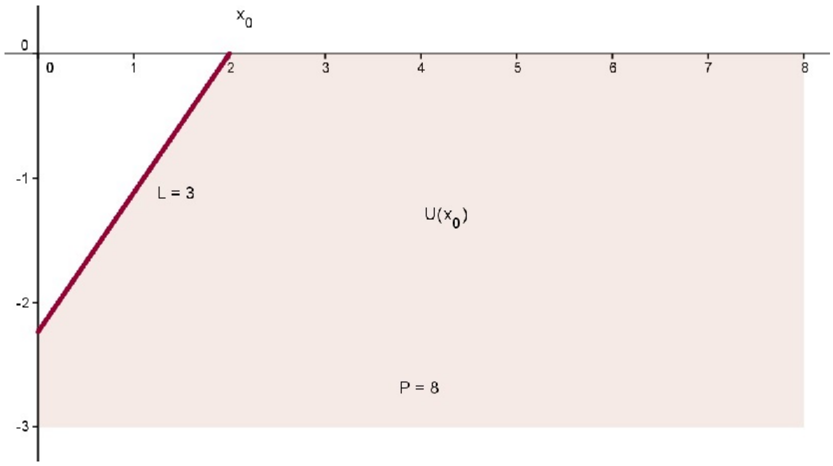


FIGURA 7. Conjunto $U(x_0)$.

de todos los $U(x_0)$ con $x_0 \in (0, L)$ convexos, luego G es un conjunto convexo. Al partir de la Figura 5 puede suponerse que la parte "curva" de la frontera de G es una función continua g. Para demostrarlo se construye una sucesión de funciones poligonales. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera un conjunto de $2^n - 1$ rectas que representen $2^n - 1$ posiciones del portón. Si $n = 1$ se tiene una recta; si se considera la posición del portón cuando el extremo inferior se halla a la mitad del recorrido la recta es

$$y_1^1(x) = \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}} x - \frac{L}{2} \tag{5.4}$$

Si $n = 2$ se tienen 3 rectas, en particular se consideran:

$$(5.5)\qquad \begin{aligned} y_1^2(x) &= \frac{\frac{L}{4}}{\sqrt{L^2-\left(\frac{L}{4}\right)^2}}x - \frac{L}{4},\\ y_2^2(x) &= \frac{\frac{2L}{4}}{\sqrt{L^2-\left(\frac{2L}{4}\right)^2}}x - \frac{2L}{4},\\ y_3^2(x) &= \frac{\frac{3L}{4}}{\sqrt{L^2-\left(\frac{3L}{4}\right)^2}}x - \frac{3L}{4}.\end{aligned}$$

Si $n = 3$ resultan ser 7 rectas:

$$(5.6)\qquad \begin{aligned} y_1^3(x) &= \frac{\frac{L}{8}}{\sqrt{L^2-\left(\frac{L}{8}\right)^2}}x - \frac{L}{8},\\ y_2^3(x) &= \frac{\frac{2L}{8}}{\sqrt{L^2-\left(\frac{2L}{8}\right)^2}}x - \frac{2L}{8},\\ y_3^3(x) &= \frac{\frac{3L}{8}}{\sqrt{L^2-\left(\frac{3L}{8}\right)^2}}x - \frac{3L}{8},\\ y_4^3(x) &= \frac{\frac{4L}{8}}{\sqrt{L^2-\left(\frac{4L}{8}\right)^2}}x - \frac{4L}{8},\\ y_5^3(x) &= \frac{\frac{5L}{8}}{\sqrt{L^2-\left(\frac{5L}{8}\right)^2}}x - \frac{5L}{8},\\ y_6^3(x) &= \frac{\frac{6L}{8}}{\sqrt{L^2-\left(\frac{6L}{8}\right)^2}}x - \frac{6L}{8},\\ y_7^3(x) &= \frac{\frac{7L}{8}}{\sqrt{L^2-\left(\frac{7L}{8}\right)^2}}x - \frac{7L}{8}.\end{aligned}$$

Analizando las expresiones (5.4), (5.5) y (5.6) se observa que $y_2^2(x) = y_1^1(x)$, por lo tanto al pasar de $n = 1$ a $n = 2$ se agregan dos rectas a (5.4). Análogamente como $y_2^3(x) = y_1^2(x)$ e $y_6^3(x) = y_3^2(x)$ al pasar de $n = 2$ a $n = 3$ se agregan otras cuatro rectas a (5.5). En general, para un n arbitrario definimos $2^n - 1$ rectas

$$y_i^n(x) = \frac{i}{\sqrt{4^n - i^2}}x - \frac{iL}{2^n}, \qquad i = 1, \ldots, 2^n - 1.$$

Sea V_n el conjunto de rectas definidas de este modo para cada n, es claro que $V_n \subset V_{n+1}$. A partir de estos conjuntos de rectas definimos una sucesión de poligonales $p_n : [0, L] \to \mathbb{R}$

$$p_n(x) = \text{mín}\,\{y_k^n(x), 0\}$$

Cada una de estas funciones p_n es uniformemente continua ya que *el mínimo de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua*. En la Figura 8 se muestran las poligonales p_1, p_2, p_3 obtenidas a partir de las rectas definidas en (5.4), (5.5) y (5.6) respectivamente. Si se define $g : [0, L] \to \mathbb{R}$

$$(5.7)\qquad g(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(x)$$

intuitivamente el gráfico de g es la curva que delimita la región útil del garaje; se debe verificar que g este bien definida, es decir que para cada $x \in [0, L]$ el límite (5.7) existe. Para un valor $\overline{x} \in [0, L]$ se considera la sucesión numérica $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, siendo $y_n = p_n(\overline{x})$, como esta sucesión es *monótona decreciente y acotada*

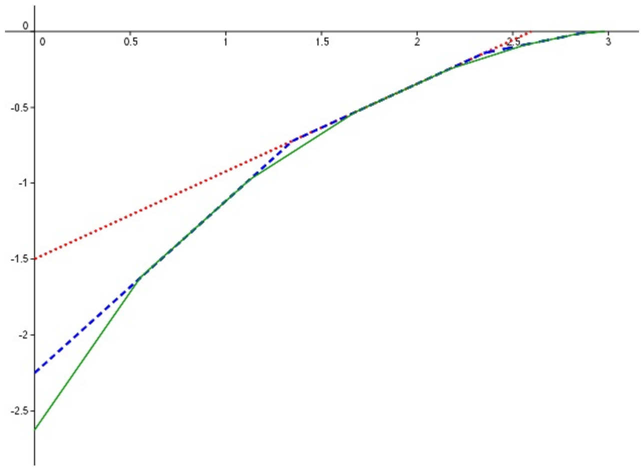


FIGURA 8. Gráfico de las poligonales p_1 (línea de puntos), p_2, (línea a trazos) y p_3 (línea sólida).

inferiormente, entonces *converge* y g está bien definida. Además, como $[0, L]$ es un conjunto compacto, $p_n(x) \geq p_{n+1}(x)$, y p_n converge puntualmente a g, entonces *por el teorema de Dini* $p_n \to g$ uniformemente y g es continua $[0, L]$.

5.4. Cálculo del recorrido del portón. Para obtener el recorido del portón es necesario obtener la expresión de la función continua g. En la Figura 5 se observa que la familia o haz de rectas que generan las diferentes posiciones del portón levadizo, se expresan con la ecuación

$$f(x, y, x_0) = x_0 y - \sqrt{L^2 - x_0^2}(x - x_0) = 0,$$

con x_0 como parámetro. Para obtener la expresión de la envolvente g del haz de rectas se aplican las condiciones (3.7):

$$\begin{cases} x_0 y - \sqrt{L^2 - x_0^2}(x - x_0) = 0, \\ y + \frac{x_0}{\sqrt{L^2 - x_0^2}(x - x_0)} + \sqrt{L^2 - x_0^2} = 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Multiplicando la segunda ecuación en (5.8) por x_0 y restándola a la primera resulta:

$$-\sqrt{L^2 - x_0^2}(x - x_0) - \frac{x_0^2(x - x_0)}{\sqrt{L^2 - x_0^2}} - x_0\sqrt{L^2 - x_0^2} = 0.$$

Con algo de trabajo algebraico se despeja x y se obtiene:

$$x = X(x_0) = \frac{x_0^3}{L^2},$$

luego, reemplazando $x = X(x_0)$ en la segunda ecuación de (5.8) se obtiene:

$$y = Y(x_0) = -\frac{(L^2 - x_0^2)^{\frac{3}{2}}}{L^2}.$$

En resumen, la envolvente g que describe el recorrido del portón se expresa

$$g: \begin{cases} x = \frac{x_0^3}{L^2}, \\ y = -\frac{\left(L^2 - x_0^2\right)^{\frac{3}{2}}}{L^2}, \end{cases}, \qquad x_0 \in [0, L]. \tag{5.9}$$

En la Figura 9 se grafica el recorrido del portón g y algunos puntos $C\,(x, h-L)$

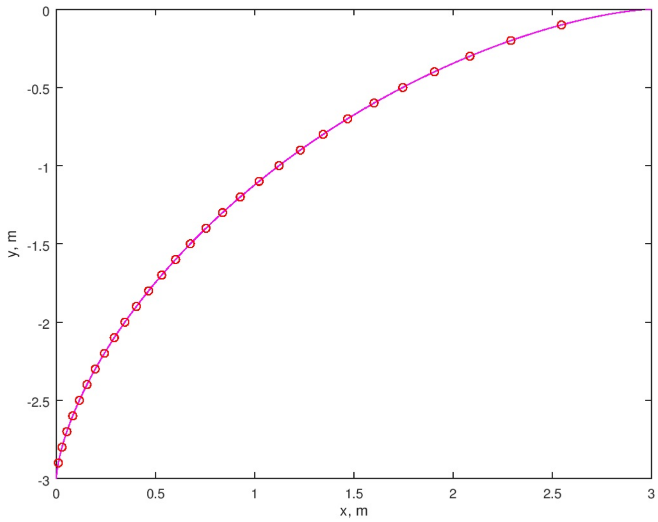


FIGURA 9. Gráfico de la envolvente g y de algunos puntos de tangencia C.

cuya abscisa es la mejor distancia desde la entrada del garaje para que el portón no impacte a un auto de altura h, obtenidos resolviendo el problema de optimización (5.1) para algunos valores de h.

§6. Conclusiones

Para resolver problemas en contextos reales se requiere una visión sistémica, conocimiento formal, experiencia, creatividad, práctica y juicio. Es decir, un alto nivel de desempeño en la competencia profesional. Con este problema los docentes pretenden que los estudiantes se involucren en escenarios reales que faciliten la conexión entre la teoría y su aplicación razonada, desafiarlos a buscar soluciones creativas, que trabajen colaborativamente en su solución y que sean capaces de exponer sus ideas de manera escrita y oral.

Bibliografía

Ardenghi, J. I., Buffo, F. E., y Álvarez, M. P. (2019). Aprendizaje por competencias en Ciencias Básicas: Recorrido de un portón levadizo no desbordante. En *El enfoque por competencias en Ciencias Básicas: casos y ejemplos en educación en*

Ingeniería.. M. U. Cukierman y G. Calocai (Comp.). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: edUTecNe (Ed.), (p. 148-160).

Bartle, R. E. (1980). *Introducción al Análisis Matemático*. México D.C.: Editorial Limusa.

Courant, R., y Fritz, J. (1965). *Introduction to Calculus and Analysis* (Vol. 1.). New York: Wiley International Edition.

Escribano, A., y del Valle, A. (2008). *El Aprendizaje Basado en Problemas. Una propuesta metodológica en Educación Superior*. Narcea, S. A. Ediciones.

Nieto Said, J. H. (2004). *Resolución de problemas matemáticos*. *Talleres de Formación Matemática*, Maracaibo, Brasil.

Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., y Trejo, C. A. (1968). *Análisis Matemático* (Vol. 2). Buenos Aires: Editorial Kapeluz.

Spinadel, V. W. (2004). *Cálculo 2*. Buenos Aires: Nueva Librería.

Marcela P. Álvarez
Universidad Nacional del Sur
(✉) *palvarez@criba.edu.ar*

Flavia E. Buffo
Universidad Nacional del Sur
(✉) *fbuffo@uns.edu.ar*

Gabriel A. Carrizo
Universidad Nacional del Sur
(✉) *gabriel.carrizo@uns.edu.ar*

Recibido: *16 de marzo de 2020*.
Aceptado: *19 de mayo de 2021*.
Publicado en línea: *14 de diciembre de 2021*.

¿Sabías que...

por Leandro Cagliero y Ricardo Podestá

existe una fórmula para saber el día de la semana correspondiente a una fecha dada?

Existe una curiosa fórmula (aunque no es curioso que la fórmula exista) para saber, dada una fecha, de qué día de la semana se trata. Toda fecha, como el 1 de enero de 2001, define 4 números naturales

$$n, m, a, b$$

como sigue. Sea n el número que corresponde al día del mes ($n = 1$ en nuestro ejemplo). Sea m el número del mes contando desde marzo. O sea, $m = 1$ para marzo, $m = 2$ para abril, ..., $m = 10$ para diciembre, $m = 11$ para enero y $m = 12$ para febrero. Esto peculiar elección se debe a que en los años bisiestos un día extra es añadido a febrero. Representemos a los años por ac donde c son las centenas (últimas dos cifras) y a el resto ($a = 20$ y $c = 01$ en nuestro ejemplo). Por último, sea d el día de la semana, con $d = 0$ para domingo, $d = 1$ para lunes, y así hasta $d = 6$ para el sábado (regla pnemotécnica: d0mingo).

Día de la semana a partir de la fecha: En las notaciones previas, para cualquier fecha $n/m/ac$, a partir del 15 de octubre de 1582 dC, el día de la semana que le corresponde es

$$d = n + [2.6m - 0.2] + c + [\tfrac{c}{4}] + [\tfrac{a}{4}] - 2a - (1+b)[\tfrac{m}{11}] \pmod 7$$

donde $[\cdot]$ denota la función parte entera y ponemos $b = 1$ si el año es bisiesto y $b = 0$ si no. Además, recordemos un entero a es congruente a un entero b módulo un natural n, denotado $a \equiv b \pmod n$, si y sólo si $p \mid a - b$, es decir $a = b + kn$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo: Calculemos que día cayó el 'barrilete cósmico', es decir el día de los goles de Diego Maradona a los ingleses. Todos sabemos (o deberíamos) que ese día fue el 22 de junio de 1986. Luego, tenemos $n = 22$, $m = 4$, $a = 19$ y $c = 86$. Además $b = 0$. Por la fórmula tenemos

$$\begin{aligned} d &= 22 + [2.6 \cdot 4 - 0,2] + 86 + [\tfrac{86}{4}] + [\tfrac{19}{4}] - 2 \cdot 19 - (1+0)[\tfrac{4}{11}] \\ &= 22 + 10 + 86 + 21 + 4 - 38 = 105 = 7 \cdot 15 \equiv 0 \pmod 7 \end{aligned}$$

Luego $d = 0$, es decir la fórmula dice que ¡fue un domingo! y todos sabemos que es correcto.

¿Por qué funciona? La prueba de la fórmula es una aplicación del principio de inducción. Es decir, veremos que la fórmula es correcta viendo que: (i) es correcta para el 15 de octubre de 1582, y (ii) si es correcta para una fecha, entonces también es correcta para la fecha del día siguiente.

El punto (i) lo dejamos de ejercicio para el lector (similar al ejemplo ya hecho). Veamos el punto (ii), para lo cual haremos un estudio caso por caso. En todos los casos debemos ver que al cambiar los valores de n, m, a, c y b de la fecha por n', m', a', c' y b' de la fecha del día siguiente, cambia el valor de $d \pmod 7$ por el de $d+1 \pmod 7$.

Los meses de 31 días son enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre (que corresponden a 11, 1, 3, 5, 6 y 8), los de 30 días son abril, junio, setiembre y noviembre (2, 4, 7 y 9), y febrero tiene 28 (recordar el versito de la primaria: *"treinta días trae noviembre / con abril, julio y septiembre / de veintiocho sólo hay uno / y los demás, de treinta y uno"*).

Casos:

(a) Cambio de día, pero no de mes ni de año (e.g. 9 de julio de 1816). En este caso es claro que sólo cambia n por $n+1$ y por lo tanto d por $d+1$ módulo 7.

(b) Cambio de mes, de 31 días, sin cambio de año (e.g. 31 de enero de 2000). Tenemos $n = 31$, $n' = 1$, $m \in \{1, 3, 5, 6, 8, 11\}$, $m' = m + 1$, $a = a'$ y $c' = c$.

(c) Cambio de mes, de 30 días, sin cambio de año (e.g. 30 de abril de 2000). Tenemos $n = 30$, $n' = 1$, $m \in \{2, 4, 7, 9\}$, $m' = m + 1$, $a = a'$ y $c' = c$.

(d) Cambio de mes, de 29 días (29 de febrero de cualquier año bisiesto). Tenemos $n = 29$ con $b = 1$, $n' = 1$ $m = 12$, $m' = 1$, $a = a'$ y $c' = c + 1$.

(e) Cambio de mes, de 28 días (28 de febrero de un año no bisiesto). Tenemos $n = 28$ con $b = 0$, $n' = 1$ $m = 12$, $m' = 1$, $a = a'$ y $c' = c + 1$.

(f) Cambio de año sin cambio de siglo (e.g. 31 de diciembre de 2013) Tenemos $n = 31$, $n' = 1$ $m = 10$, $m' = 11$, $a = a'$ y $c' = c + 1$.

(g) Cambio de año con cambio de siglo (e.g. 31 de diciembre de 1999) Tenemos $n = 31$, $n' = 1$ $m = 10$, $m' = 11$, $a' = a + 1$ y $c = 99$ y $c' = 0$.

¡Listo! Hermosa aplicación de congruencias y principio de inducción. Sin embargo, esta fórmula no es la única. El famoso matemático inglés John H. W. Conway (26/12/1937–11/4/2020) obtuvo una fórmula parecida usando anchor days (días anclas) y doomsdays (días del juicio final). Pero esta es otra historia...

La fórmula vale a partir del 15 de octubre de 1582, que es cuando se adoptó el calendario gregoriano actualmente en uso. Recordar que los años bisiestos son aquellos que son divisibles por 4, salvo los que son divisibles por 100, que entonces son bisiestos si además son divisibles por 400. Por ejemplo, 1984 y 2000 son bisiestos, pero 1900 y 2100 no lo son.

Revista de Educación Matemática
Volumen 36, N° 3 (2021), páginas 55 – 71
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículo de Matemática

MATEMÁTICA QUE ENTRA POR LOS OJOS

Alicia Dickenstein

Resumen. En este artículo reportamos experiencias y propuestas realizadas desde 2012 en el marco del proyecto "Moebius – Imaginación a las Aulas", realizado en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, en el que proponemos un acercamiento a la belleza de la matemática a través de experiencias interactivas con una fuerte componente estética.

Palabras clave: Matemática y belleza, superficies algebraicas, programa computacional, fractales iterativos.

Abstract. In this article we report experiences and proposals made since 2012 within the framework of the project "Moebius - Imagination to the Classrooms", carried out at the School of Exact and Natural Sciences of the University of Buenos Aires, in which we propose an approach to the beauty of mathematics through interactive experiences with a strong aesthetic component.

Keywords: Mathematics and beauty, Algebraic surfaces, software, iterative fractals.

§1. De qué se trata este artículo

El objetivo de este artículo es compartir algunas experiencias que desarrollamos desde 2012 en el marco del proyecto *Moebius – Imaginación a las Aulas* (Proyecto Moebius, 2012–2021d), realizado en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires y que fue impulsado por la obtención de un subsidio de la UBA para fomentar el uso de nuevas tecnologías en la enseñanza.

Nuestra propuesta es acercar a los alumnos y las alumnas a la belleza de la matemática a través de experiencias interactivas con una fuerte componente estética. La idea es que podemos **crear formas** que se aprecian **bellas** usando **fórmulas matemáticas** que no se suelen considerar **bellas**, mostrando que son caras de una misma moneda, con el plus de una **componente lúdica**.

Utilizamos esencialmente dos programas. Uno es el programa *Britney* creado por Santiago Laplagne, que permite comenzar a dibujar fácilmente fractales interactivos. *Britney* puede descargarse libremente de (Proyecto Moebius, 2012–2021b). Existe también una aplicación para celulares que programó Ariel Lombardi, basta buscar *Britney* Fractales Iterativos -por ejemplo en Google Play- para descargarla gratuitamente. El segundo es el programa *Surfer* que permite visualizar superficies algebraicas, desarrollado en Alemania en relación al Año de la Matemática que se declaró allí en 2008. *Surfer* se puede descargar y utilizar libremente de la página de Imaginary (Imaginary, 2008–2021a, 2008–2021b), una organización sin fines de lucro que pone a disposición otros programas muy atractivos que presentan conceptos matemáticos con una alta componente estética. También puede descargarse de la página web de *Moebius* (Proyecto Moebius, 2012–2021d). Para más información pueden ver (Carla Cederbaum, Alicia Dickenstein, Gert-Martin Greuel, David Grünberg, Hyungju Park and Cédric Villani, 2014) y el material disponible en (Proyecto Moebius, 2012–2021c, 2012–2021b).

Trabajamos con estos programas yendo a escuelas secundarias públicas, en actividades de popularización de matemática en nuestra facultad dirigidas a escuelas medias (tanto con grupos de alumnos y alumnas como con grupos de docentes) y también en festivales de matemática en el Centro Cultural de la Ciencia y en el Centro Cultural Kirchner. Somos conscientes de que no estamos abordando temas de los planes de estudio, pero creemos que son temas y abordajes motivadores. Esta matemática interesante que entra por los ojos mediante imágenes que uno mismo puede crear en la computadora, que son a la vez objetos matemáticos y obras de arte, les permite a los y las estudiantes conectarse fácilmente y desarrollar habilidades matemáticas.

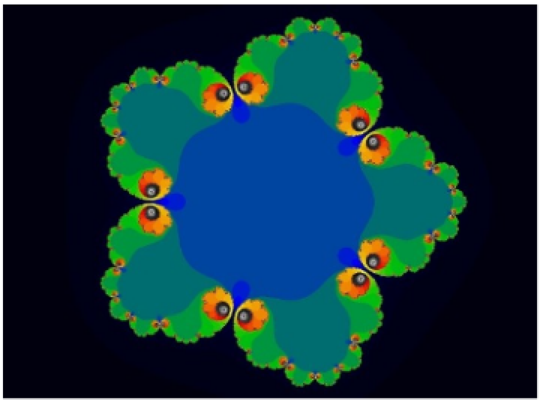
Este no es un artículo de investigación sobre la enseñanza de la matemática. Tampoco es un artículo de investigación sobre la relación entre la matemática y las bellas artes, ni sobre la enseñanza de la matemática a través del juego, ni un artículo matemático sobre fractales y superficies algebraicas. Por eso no incluimos bibliografía sobre estos temas. ¡Lo escribo esperando que lo que les cuento les resulte útil y que se diviertan jugando y pensando con bellos objetos matemáticos tanto como nosotros!

Los invitamos a que miren el video de la charla que di en el marco de las actividades de divulgación organizadas durante la Reunión Anual 2021 de la Unión Matemática Argentina (VirtUMA2021) (A. Dickenstein, 2021), donde algunos de los detalles de este artículo están explicados "a viva voz".

FIGURA 1. Brócoli romanesco en una verdulería en Italia.

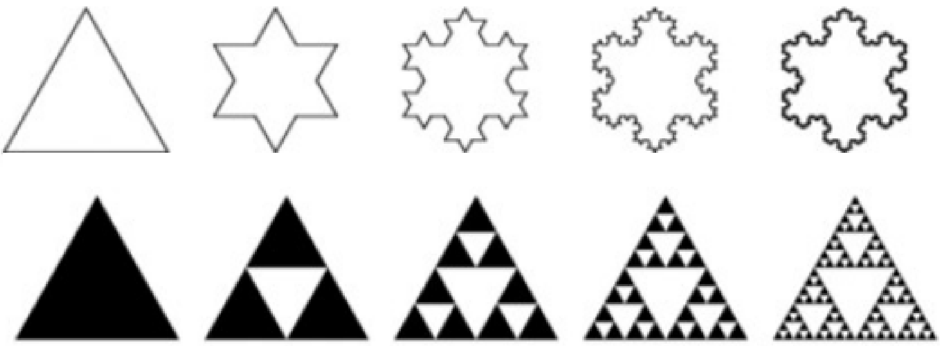
§2. Britney y los fractales iterativos

Tal vez oyeron hablar de *fractales*. Por ejemplo, de *fractales en la naturaleza* como el brócoli romanesco de la Figura 1 que encontré en una verdulería en Italia. O tal vez hayan visto imágenes generadas matemáticamente como las que siguen, extraídas de Wikimedia (Josep M. Batlle, 2011; Josep M. Batlle i Ferrer, 2012):

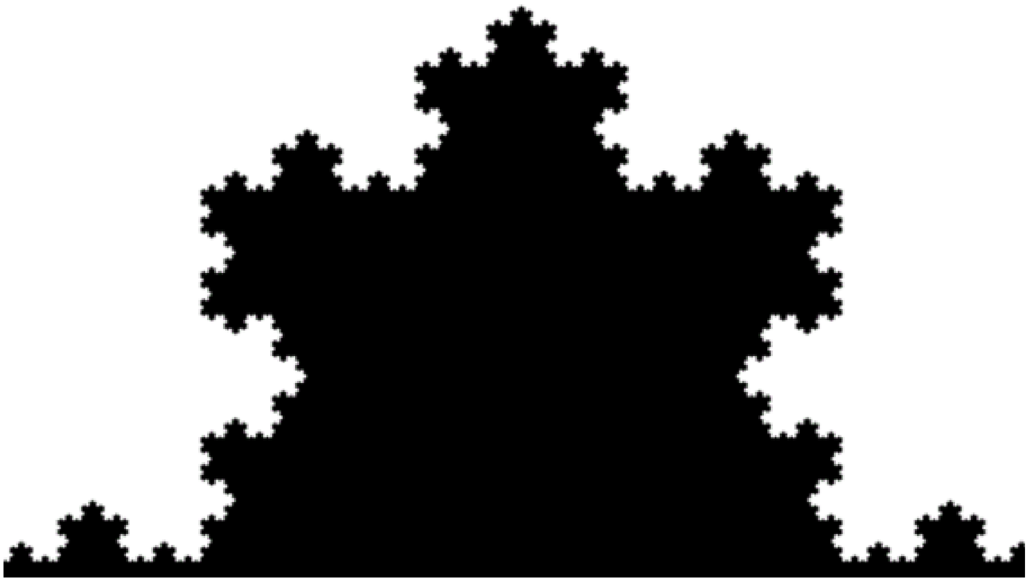


No vamos a definir aquí qué es un fractal, pero pueden encontrar mucha información matemática y de divulgación en las redes. El que les dio este nombre fue el matemático Benoît Mandelbrot, interesado por los patrones por los que se rigen la rugosidad y las fracturas en la naturaleza. Para los que sepan más matemática y entiendan inglés, les recomiendo el video (3Blue1Brown, 2017) donde podrán encontrar la definición de qué es un fractal y su dimensión. Los *fractales en la naturaleza* se pueden representar con muy buena aproximación mediante *fractales matemáticos*.

Los *fractales autosimilares* tienen la propiedad de que se ven del mismo modo a cualquier escala. Aquí les mostramos cómo comienzan a generarse dos de estos fractales:



La primera fila corresponde a los primeros pasos del *Copo de Nieve de Koch* y la segunda a los del *Triángulo de Sierpinski*. Se van formando figuras cada vez más *quebradas* **iterando un proceso que los invitamos a deducir de las imágenes**. Los fractales asociados son los conjuntos del plano que se van aproximando más y más a lo largo de … *infinitas* iteraciones de estas construcciones. Podrán encontrar muchos videos en línea, por ejemplo el video (Leofun01, 2015) en que se muestra una simulación de un Copo de Nieve de Koch con zooms sucesivos, de donde extraje esta imagen:



En este artículo vamos a ocuparnos de cómo jugar y hacer matemática con el programa *Britney*, que produce los primeros pasos en la construcción de algunos *fractales autosimilares* (también llamados *iterativos*). *Britney* se distribuye bajo licencia pública general GPL 3, que permite redistribuirlo y/o modificarlo libremente respetando las condiciones de la licencia.

2.1. Primeros pasos. Les sugiero que descarguen *Britney* en una computadora o en sus celulares y comiencen a experimentar. Vamos a explicar lo básico para que puedan hacerlo. Esta es la manera con la que trabajamos con estudiantes: les proponemos explorar el programa y generar distintas imágenes durante bastante tiempo, antes de dar cualquier precisión teórica. Con el mouse (o el dedo en una pantalla táctil) comenzamos en el paso 1 marcando dos puntos, que definirán los extremos del segmento base que por defecto *Britney* pinta de rojo. El paso más importante para el resultado final es el paso 2: marcamos algunos otros segmentos (hasta 5) indicando sus extremos con el mouse, que *Britney* coloreará de naranja. En la Figura 2 les mostramos un ejemplo de un segundo paso.

Es posible ahora correr la barrita de Niveles para que *Britney* construya los pasos sucesivos desde el 3 hasta el 10. Es posible también cambiar el ancho del trazo, transformar los segmentos en circunferencias o en círculos o cambiar el color de fondo y los que aparecen en cada nivel. Por ejemplo, pueden ver el resultado del paso 3 (los nuevos segmentos están en amarillo), el del paso 4 (los nuevos

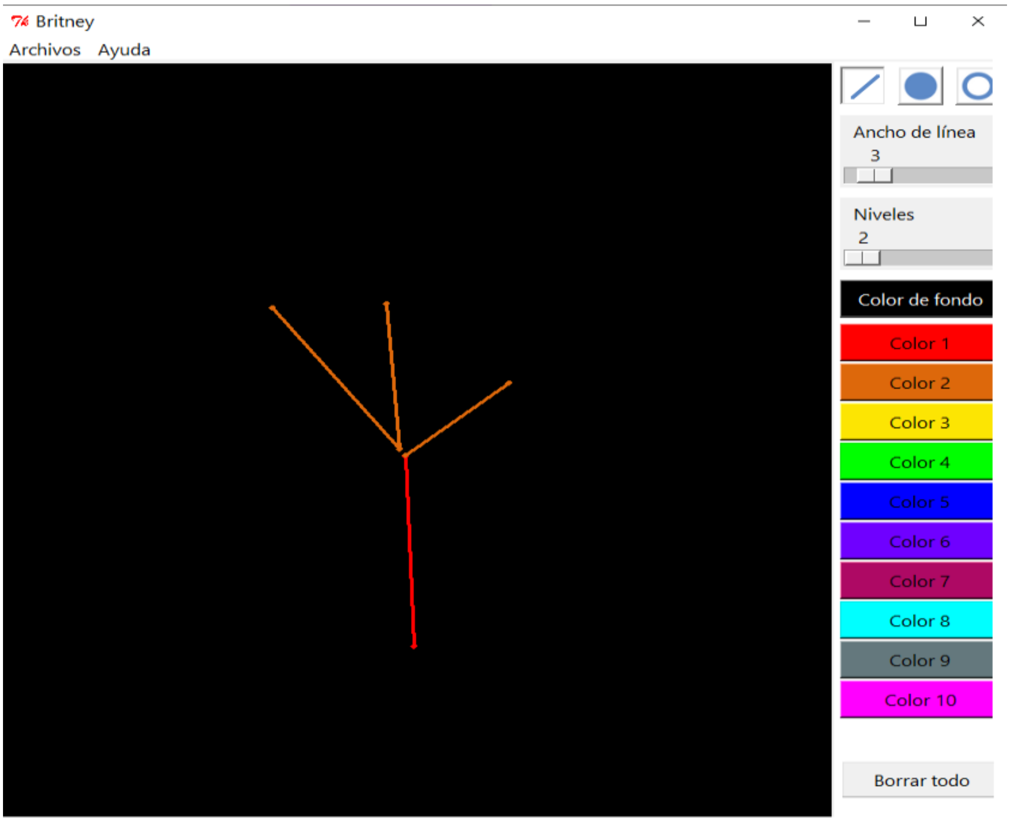
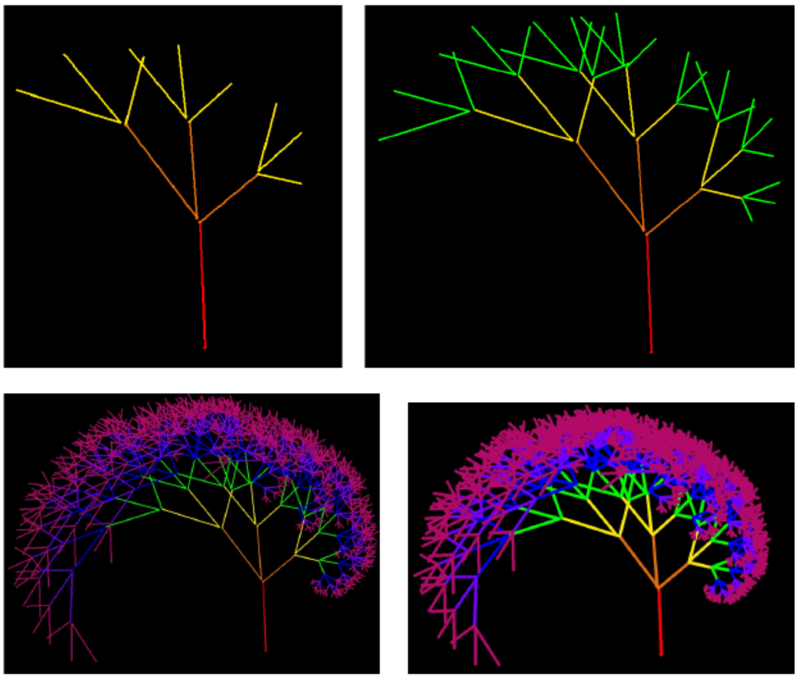


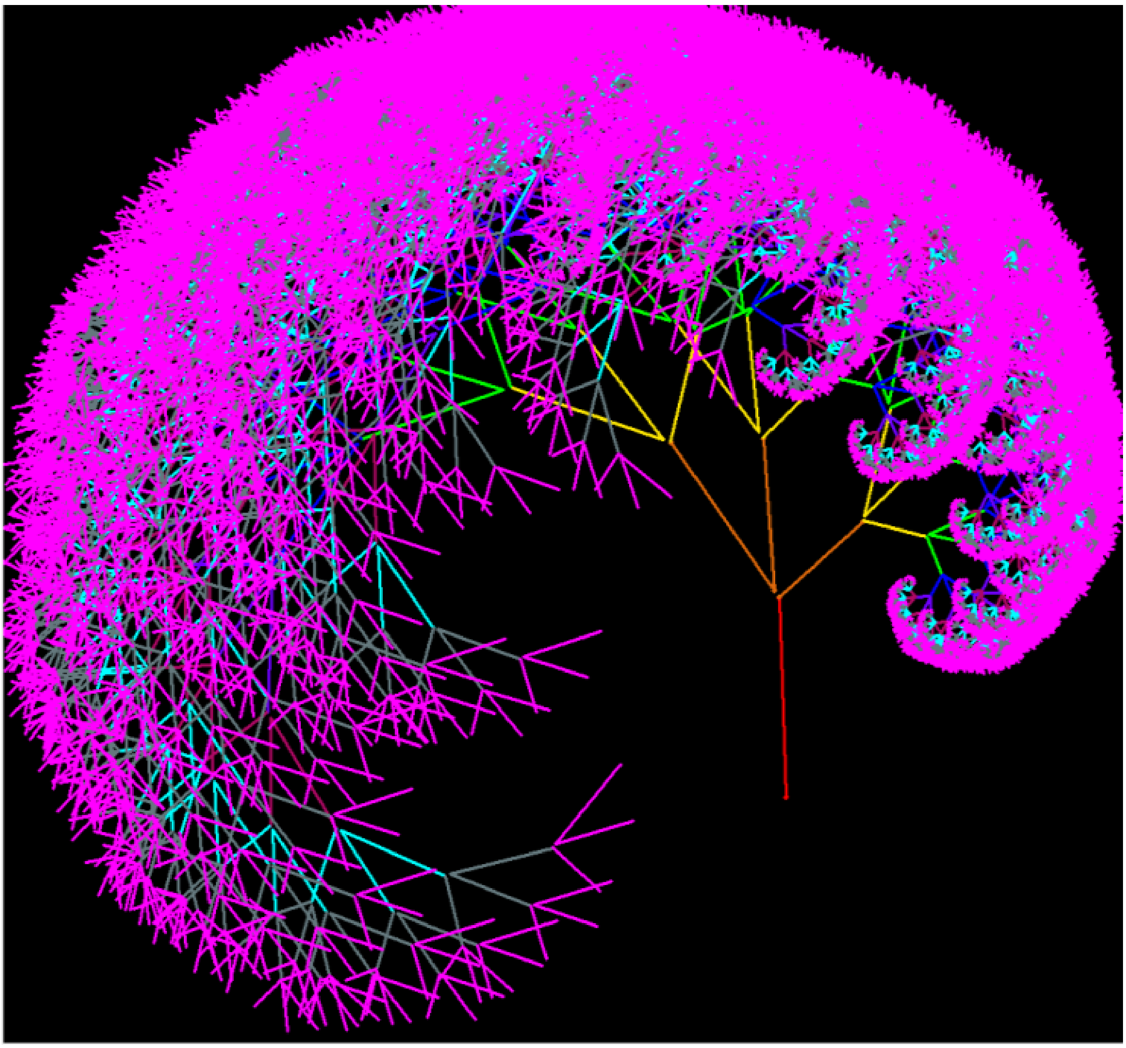
FIGURA 2. Dos pasos completos.

segmentos están en verde) y el del paso 7, con el mismo trazo y con trazo más gordo:



En (Proyecto Moebius, 2012–2021b) pueden encontrar la explicación de qué es lo que dibuja *Britney* en cada iteración, pero es mucho más interesante tratar de comprenderlo luego de jugar un rato con varios ejemplos distintos. **Los invito a que lo piensen antes de seguir leyendo este párrafo...** pero acá va la explicación muy breve. Para dibujar el paso 3, *Britney* reproduce sobre cada uno de los palitos naranjas el mismo dibujo que el original pero a *escala*: con los *mismos ángulos* pero las *longitudes se modifican proporcionalmente*. Esto quiere decir por ejemplo que si un segmento naranja mide la mitad del rojo, cada segmento verde correspondiente mide la mitad del naranja. Y así siguiendo en los próximos pasos.

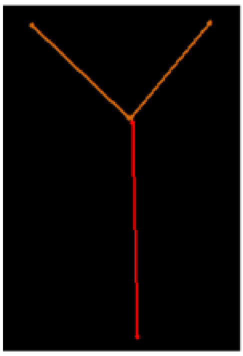
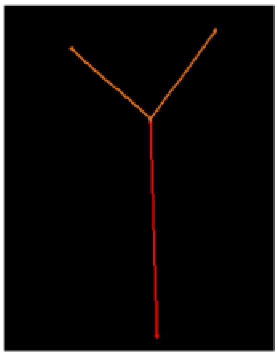
2.2. Algunos ejemplos, preguntas y pequeñas explicaciones. Comprueben si entendieron cómo se generan los distintos pasos antes de seguir leyendo, mirando el paso 2, 3 y 4 anteriores. Y aquí vienen otras preguntas matemáticas: **¿cuántos segmentos hay en el paso 2? ¿Y en el 3? ¿Y en el 4? ¿Y en el 6? ¿Cuántos habrá en el paso 10 que pueden ver acá?:**



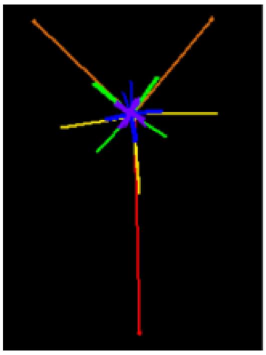
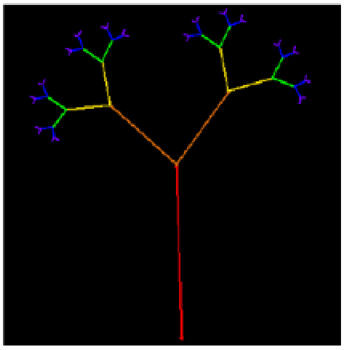
La respuesta a esta última pregunta es 29.523, pero asegúrense de entender por qué.

Entonces, **si en el paso 2 dibujáramos 5 segmentos, ¿cuántos habría en el paso 10?** Otra vez, les doy la respuesta, pero asegúrense de entender cómo contarlos: 2.441.406. **¿Y si comenzáramos por 6 segmentos, cuántos habría en el paso 10?** ¡La respuesta es mayor de 12 millones! Por eso es que el programa solo permite dibujar hasta 5 segmentos en el paso 2, por eso tarda en dibujar los últimos pasos y por eso solo pueden dibujarse 10 pasos.

Aquí tienen el paso 2 de dos configuraciones que se ven muy similares:

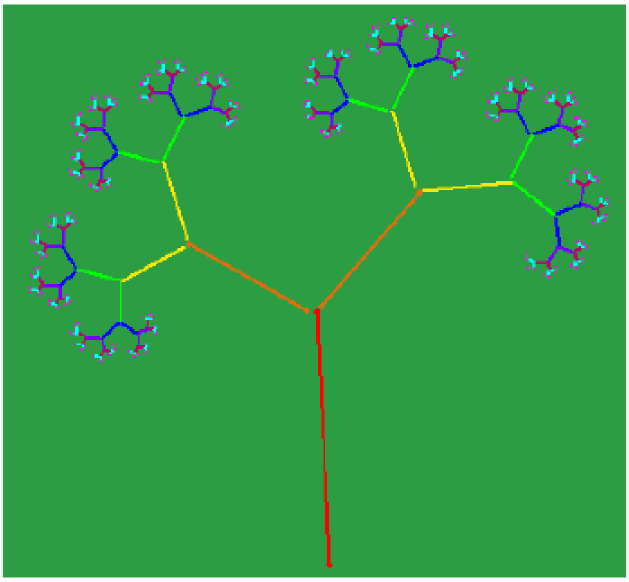
Sin embargo, en el paso 6 estas son las figuras que se obtienen en ambos casos:

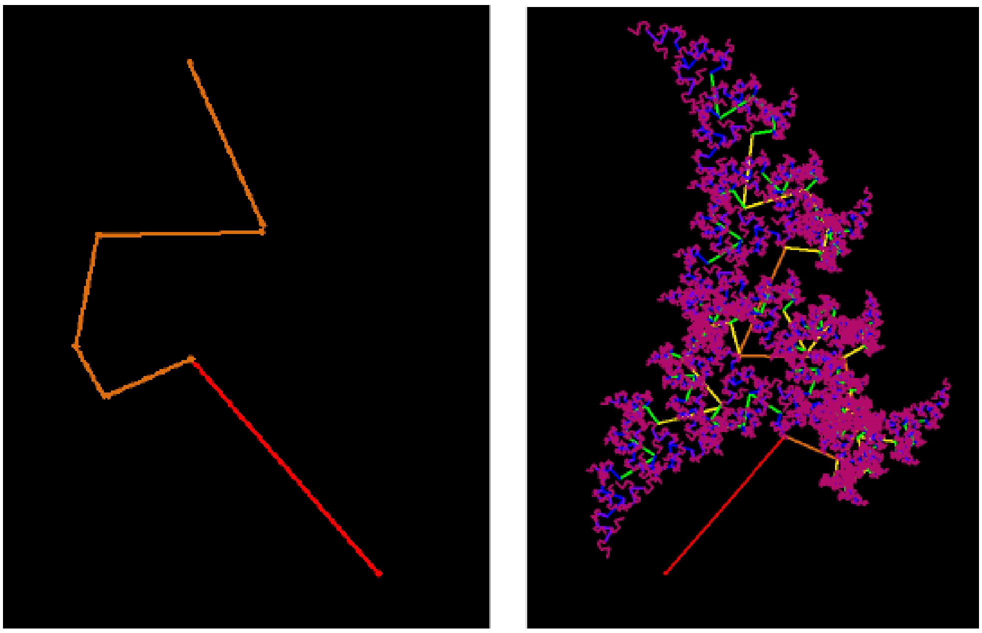
¿Cuál les parece que puede ser la explicación? Los invitamos a que NO lean la respuesta antes de mirar un rato largo estas dos últimas figuras y de experimentar todo lo que necesiten con el programa para deducir lo que diferencia a ambos casos. Pero aquí va la explicación: obviamente, han cambiado los ángulos. Habrán notado que un segmento está determinado al marcar sus extremos, pero de manera ordenada (el primer vértice y luego el segundo), lo que le da una *orientación*. En ambos casos, el segmento rojo fue dibujado comenzando con el vértice de abajo. Pero luego los segmentos en el paso 2 fueron dibujados formando distintos ángulos con el segmento rojo. En uno de los dos casos, fueron dibujados comenzando por el extremo que está en la punta del segmento rojo y en el otro comenzando por el extremo que está más alejado del segmento rojo. Pregunta: **¿cuál de los dos**

casos corresponde a la imagen de la izquierda y cuál a la de la derecha? Si no lo pueden predecir, intenten ver qué pasa usando *Britney* hasta que les quede claro.

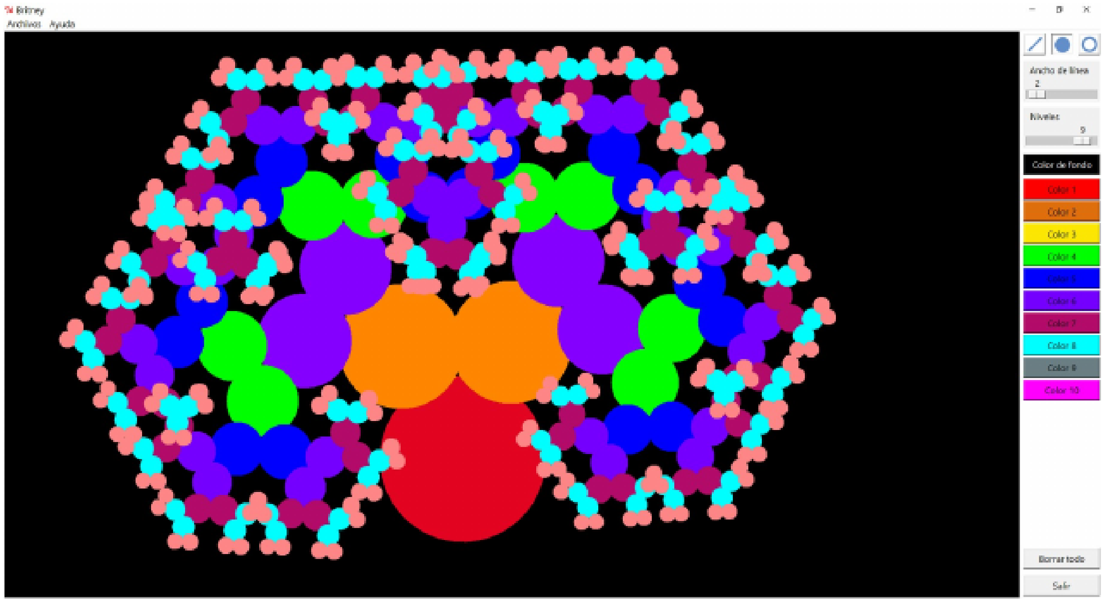
Aquí va el paso 10 de la imagen de la derecha con fondo verde:



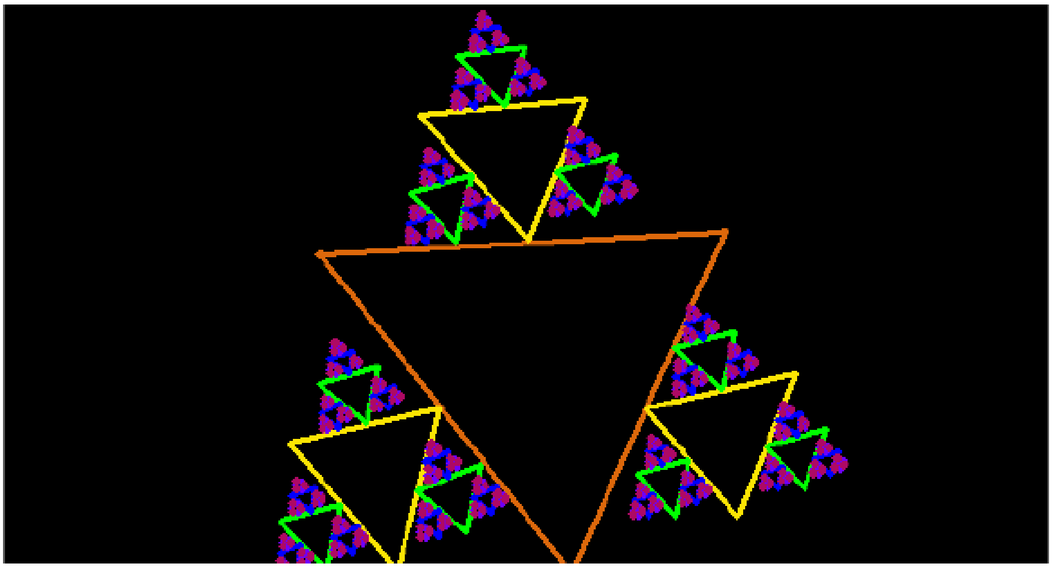
Otras imágenes que pueden generarse de manera simple con *Britney* son por ejemplo este "helecho", del que mostramos el paso 2 y el 8:



O esta figura hecha con círculos en vez de segmentos (también podría hacerse con solo las circunferencias):

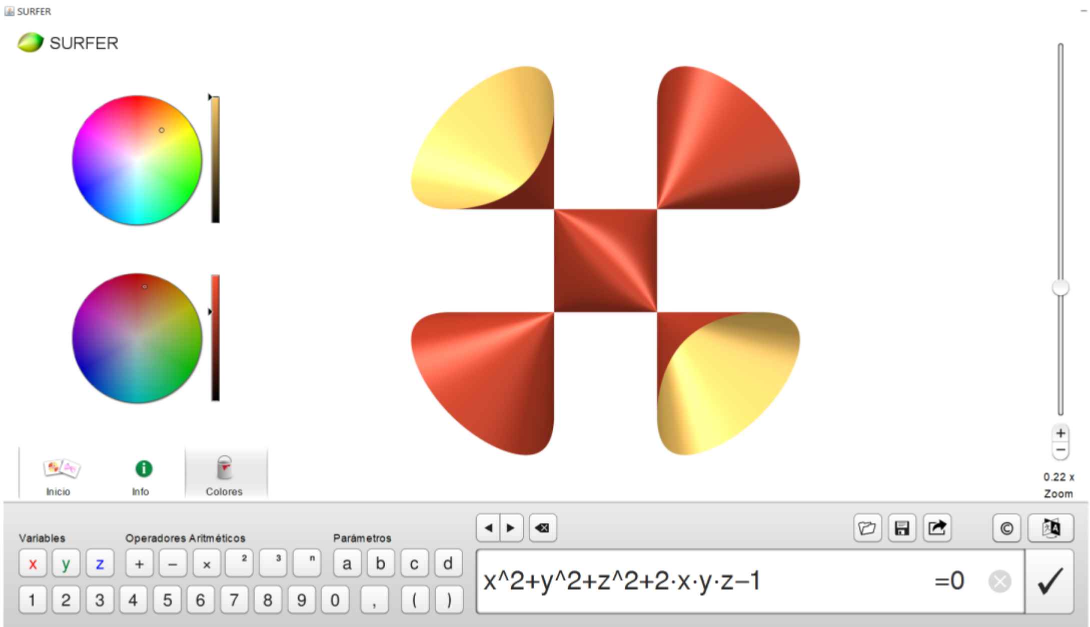


Aquí les muestro mi intento de reproducir con *Britney* el comienzo de la construcción del Triángulo de Sierpinski y **los invito a que traten de hacerlo ustedes** (¡no es tan fácil!):



§3. Surfer

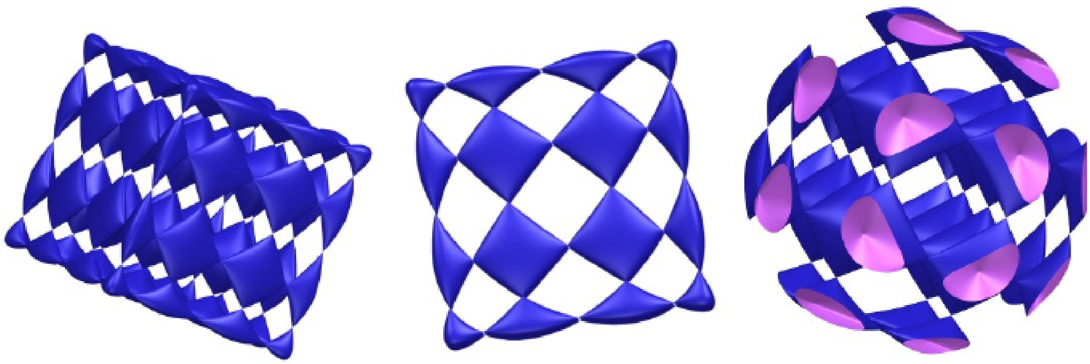
Lo ideal sería que pudieran comenzar jugando con *Surfer* antes de darles detalles matemáticos. Del mismo modo que con *Britney*, trabajamos así con estudiantes. Los invitamos a jugar con el programa y generar distintas imágenes, antes de darles cualquier precisión teórica. Esto es lo que verán al abrirlo:



La figura en la parte central de la pantalla es realmente una visión en el plano de una superficie en el espacio. Les proponemos que traten de cambiar los colores ("de adentro" y "de afuera"), de rotar la figura con el mouse, de mover la escala del zoom que se encuentra a la derecha, de intentar cambiar lo que está tipeado y ver el efecto en la imagen, de modificar el idioma si lo desean, etc. Si tocan en donde dice "Inicio", les aparecerán las siguientes sugerencias:

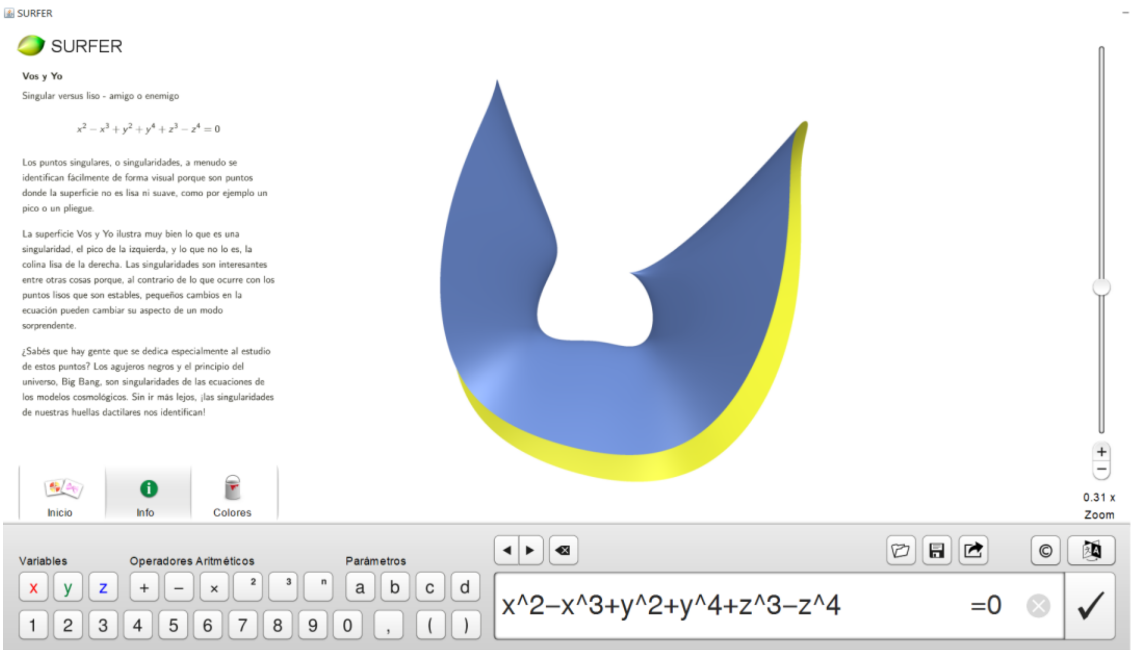
Cliqueando en cualquiera de estas imágenes, *Surfer* los llevará a otra pantalla donde podrán elegir muchas otras imágenes hermosas para seguir experimentando. Si cliquean donde dice "Primeros pasos" encontrarán un tutorial breve y varias pistas al cliquear en las distintas imágenes. Pueden luego encontrar más detalles de las capacidades de *Surfer* y de propuestas para trabajar en el aula en los materiales disponibles en (Proyecto Moebius, 2012–2021c). Pueden ver en (Proyecto Moebius, 2012–2021a) algunas de las producciones de los alumnos y las alumnas, realizadas en talleres de solo 45 minutos de duración en total.

3.1. Algunos ejemplos, preguntas y pequeñas explicaciones. En la galería de *Surfer* podrán encontrar cómo dibujar un corazón en la computadora. Otra de las Superficies de Fantasía que propone *Surfer* es la óctica de Chmutov. Aquí hay tres "visiones" de esta superficie, rotándola y cambiando el nivel de zoom:

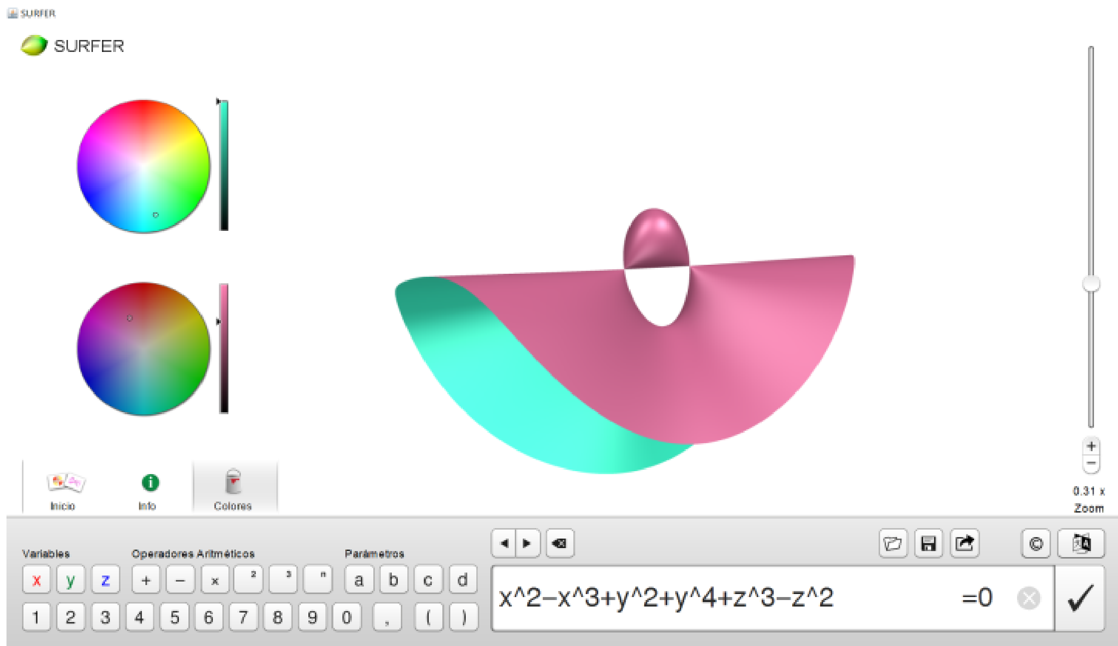


¿Pueden imaginar qué es lo que hace el zoom y por qué se "cortan" las figuras cómo en esta última, en la que comienza a verse la cara interior que está pintada de otro color?

La superficie llamada "Vos y Yo" que propone *Surfer* tiene abajo los siguientes símbolos: $x\hat{~}2 - x\hat{~}3 + y\hat{~}2 + y\hat{~}4 + z\hat{~}3 - z\hat{~}4 = 0$.

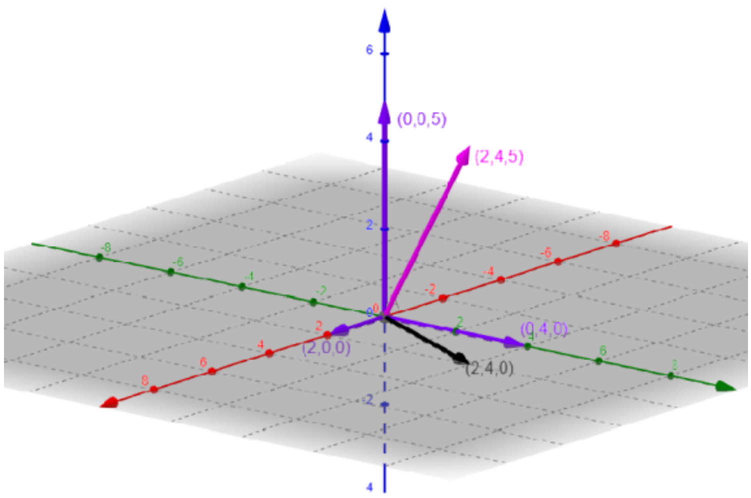


Si, por ejemplo cambiamos z^4 por z^2 y los colores, nos queda esta otra superficie:



Después de que hayan jugado un rato, es el momento de preguntarnos cuál es la relación entre la agradable figura que se ve y los símbolos matemáticos que se muestran abajo.

Así como podemos representar los puntos del plano con dos coordenadas cartesianas (x, y), podemos representar los puntos del espacio con tres coordenadas (x, y, z), como en la imagen de la derecha.



La figura que representa *Surfer* a partir de una ecuación algebraica como

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

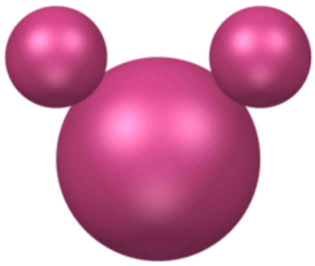
(que *Surfer* escribe como x^2 $+ y$^2 $+ z$^2 $- 1 = 0$), son todos los puntos del espacio con coordenadas (x, y, z) que verifican esta igualdad. En este caso, lo que obtenemos es la cáscara (la superficie) de una esfera de radio 1 y decimos que la ecuación *define* la superficie.

Podemos hacernos muchas preguntas, como las siguientes:

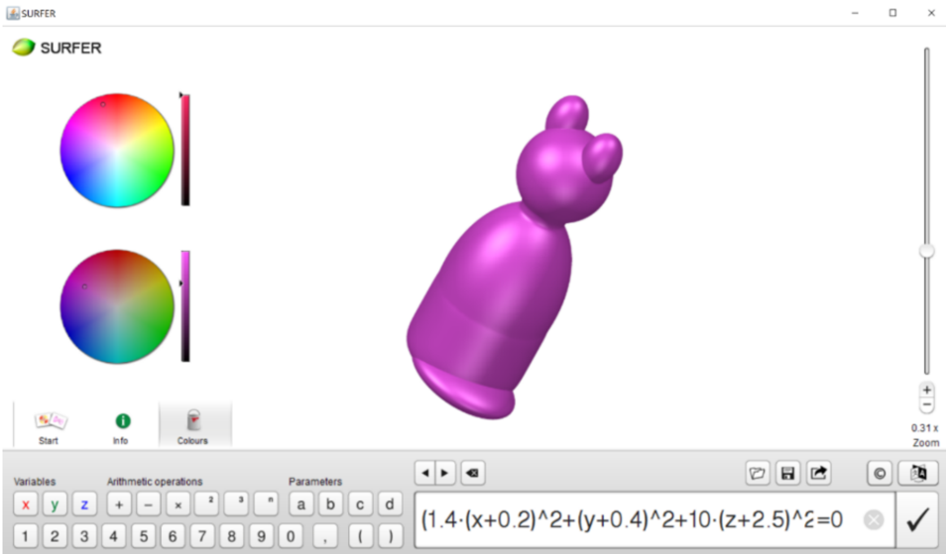
(1) ¿Cómo cambiar la ecuación de la superficie de la esfera de radio 1 para que tenga radio más grande o más chico?

(2) ¿Cómo cambiar la ecuación de la superficie de la esfera (u otra superficie cualquiera) para ponerla en otra posición (más arriba o más a la izquierda por ejemplo)?

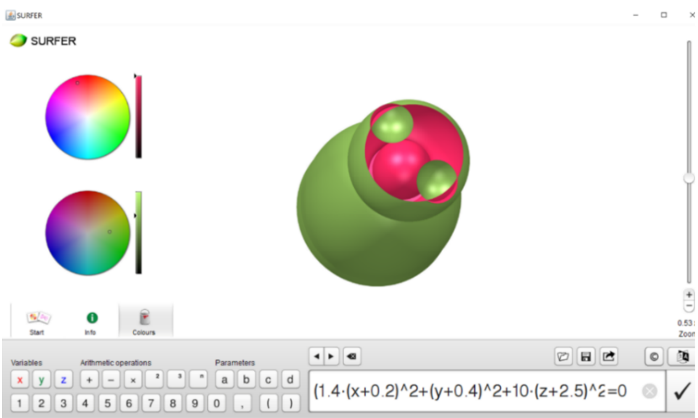
(3) ¿Cómo pedirle a *Surfer* que dibuje estas tres esferas juntas para comenzar a dibujar la cabeza de un animalito?



Usando las respuestas a estas preguntas (que pueden encontrar en (Proyecto Moebius, 2012–2021c)) y jugando un poco con las ecuaciones, Jazmín Schmunis hizo este gatito, uniendo varias figuras:



Rotando, cambiando los colores y el nivel de zoom, se puede ver así:



Como ayuda para para responder las tres preguntas anteriores, les proponemos que dibujen en *Surfer* la ecuación

$$x\hat{}2 + y\hat{}2 + z\hat{}2 - 9 = 0$$

y luego la modifiquen poniendo

$$(x-5)\hat{}2 + y\hat{}2 + z\hat{}2 - 9 = 0 \quad \text{y} \quad (x+5)\hat{}2 + y\hat{}2 + z\hat{}2 - 9 = 0.$$

Y va otra ayuda: ¿saben cuándo es 0 el producto de dos números? Exactamente cuando (al menos) uno de esos números es igual a 0. Entonces ¿qué figura obtendremos al igualar a 0 la multiplicación de dos ecuaciones? Por ejemplo, indicando la multiplicación con un asterisco *, **¿qué figura aparecerá si introducimos en *Surfer* la ecuación**

$$(x\hat{}2 + y\hat{}2 + z\hat{}2 - 1) * ((x-2)\hat{}2 + y\hat{}2 + z\hat{}2 - 1) = 0 \textbf{ ?}$$

Esta es la ecuación con la que se dibuja el gatito (debería ir todo junto en un renglón, pero no nos entra):

$$\begin{aligned}
&(x\hat{}2 + y\hat{}2 + 0{,}4 * (z+1)\hat{}2 - 1)*\\
&\quad(x\hat{}2 + y\hat{}2 + 1{,}2 * (z+1{,}8)\hat{}6 - 1)*\\
&\qquad(x\hat{}2 + y\hat{}2 + (z-1{,}3)\hat{}2 - 0{,}6)*\\
&\qquad\quad(x\hat{}2 + (y)\hat{}2 + 0{,}5 * (z-0{,}7)\hat{}2 - 0{,}15)*\\
&\qquad\qquad(x\hat{}2 + (y+0{,}5)\hat{}2 + 0{,}5 * (z-2)\hat{}2 - 0{,}1)*\\
&\qquad\qquad\quad(x\hat{}2 + (y-0{,}5)\hat{}2 + 0{,}5 * (z-2)\hat{}2 - 0{,}1) - 0{,}1)*\\
&\qquad\qquad\qquad(1{,}4 * (x+0{,}2)\hat{}2 + (y+0{,}4)\hat{}2 + 10 * (z+2{,}5)\hat{}2 - 1) = 0
\end{aligned}$$

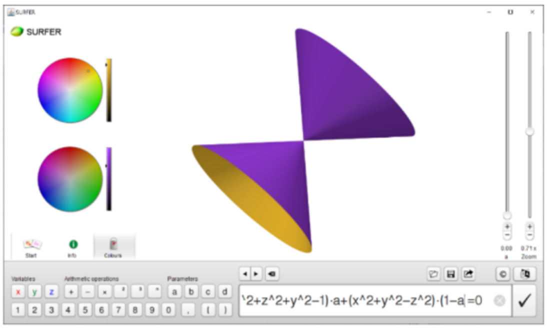
¡Pueden ver que hay varias figuras dibujadas juntas! **¿Cuántas?**

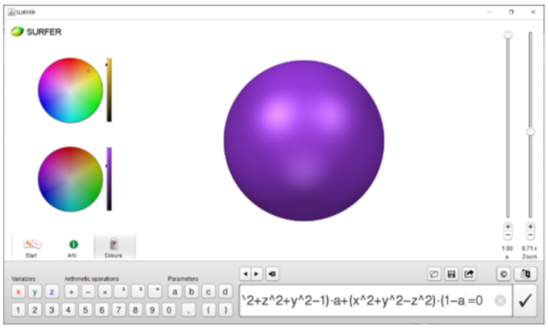
Habrán notado que abajo a la izquierda, además de los números y algunos símbolos y de las letras x, y, z que usamos para las coordenadas de los puntos, aparecen las letras **a**, **b**, **c** y **d**. Cada vez que ponemos alguna de estas letras en una ecuación algebraica, por ejemplo en $x\hat{}2+y\hat{}2+z\hat{}2-\mathbf{a}=0$, *Surfer* automáticamente pone una escala vertical en la que nos permite variar los valores de **a** entre 0 y 1 y nos va mostrando las distintas superficies que aparecen (… que en este caso van a ser las cáscaras de esferas con distintos radios). El programa hace lo mismo con cualquier ocurrencia de **a**, **b**, **c** y **d** (decimos que son *parámetros*). Pueden probar y jugar un poco.

Nos planteamos otra pregunta: **¿Cómo se puede deformar una figura en otra?** (o sea, hacer lo que se suele llamar *Morphing*). Podemos pensar que tenemos un parámetro que es el tiempo y que en tiempo 0 queremos ver una de las figuras y en tiempo 1, la otra. Una manera usual de hacerlo en matemática es la siguiente: si llamamos al parámetro con la letra **a**, cuando **a** es igual a 0, entonces $1-\mathbf{a}$ vale 1 y cuando **a** es igual a 1, entonces $1-\mathbf{a}$ es igual a 0. Si **a** se mueve entre 0 y 1, el valor de $1 - \mathbf{a}$ se mueve al mismo tiempo en sentido opuesto entre 1 y 0. Si tenemos dos expresiones algebraicas f y g en las coordenadas (x, y, z) y tomamos la expresión

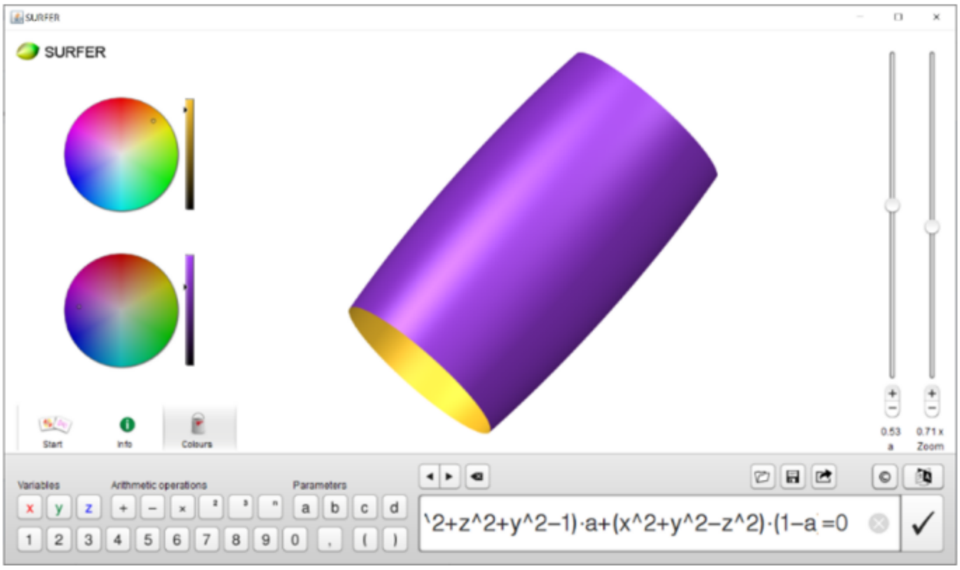
$$(1 - \mathbf{a}) \cdot f + \mathbf{a} \cdot g,$$

al mover **a** de 0 a 1 estaremos pasando de f a g. Los invitamos a que prueben con las ecuaciones $f = 0$ y $g = 0$ que prefieran. Por ejemplo, podemos deformar (la superficie de) un cono definido por la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ en (la superficie de) la esfera de radio 1:

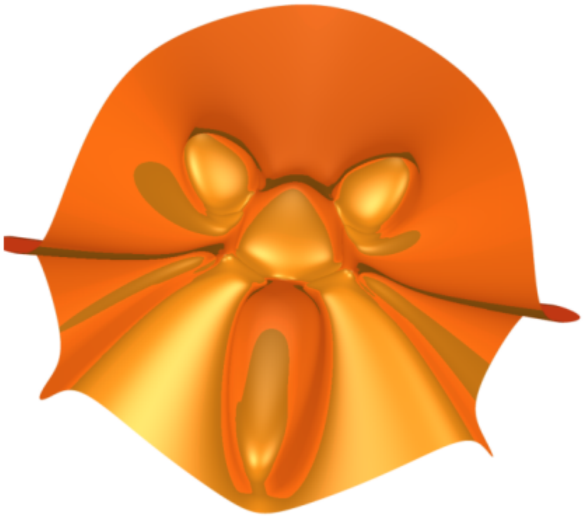




Una de las figuras intermedias es por ejemplo, que corresponde al valor de **a** $= 0{,}53$:



3.2. Superficies algebraicas Hay muchas otras preguntas matemáticas que surgen y que distintos matemáticos han estudiado. Una primera pregunta se responde en un curso de cálculo en varias variables: ¿Cómo detectar a partir de la ecuación si la superficie tendrá un punto *singular*, donde la superficie no se ve lisa o cambiando suavemente? Hay muchas preguntas más difíciles e interesantes en la llamada *teoría de singularidades* de superficies algebraicas como las que dibujamos. Las superficies algebraicas se llaman así porque están definidas por las expresiones algebraicas que aparecen al pie de la pantalla, que son *polinomios en tres variables*. Pero el objeto de esta actividad no es adentrarnos en estas cuestiones ni en desarrollar ninguna cuestión teórica, sino en manipular superficies bellas y coloridas y comprender que están definidas por fórmulas algebraicas… ¡que le permiten a la computadora dibujarlas y modificarlas! Si luego de jugar queremos producir una imagen en especial, ahí tenemos que ponernos a pensar… y a hacer matemática. En el año 2021 y como parte de las actividades conmemorativas por el Día Internacional de la Matemática 2021, el Departamento de Matemática, el Instituto de Cálculo y el Instituto de Investigaciones Matemáticas "Luis A. Santaló" de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires convocaron a participar en el concurso "Arte matemático" para estudiantes de los distintos niveles de enseñanza. Los invito a mirar las imágenes premiadas en la página de la Convocatoria Aquí reproducimos la obra ganadora de la Categoría Educación Primaria hecha por Mila Salas Parada, llamada "El Batman Matemático" y la de la Categoría de Educación Media hecha por Ludmila Abril Cesio, llamada "Cara de miedo".



§4. A modo de conclusión.

- Podemos **crear formas** que todos consideramos **bellas** usando **fórmulas matemáticas** que no todos consideramos **bellas**.
- Podemos **jugar** y esto es **espectacular**… y también podemos también sentarnos a **pensar** cómo lograr una imagen que imaginamos… esto también es **espectacular ¡y es hacer matemática!**
- *Surfer* y *Britney* son programas muy **fáciles de usar** y fueron **creados con esta intención**. Por eso pensamos son muy apropiados para estimular el interés hacia la matemática, aunque utilizan herramientas más allá de los planes de estudio de las instituciones secundarias.

Por supuesto, hay muchas otras propuestas y herramientas disponibles (por ejemplo, basadas en los recursos que ofrece GeoGebra.

Bibliografía

3Blue1Brown. (2017). *Fractals are typically not self-similar*. https://www.youtube.com/watch?v=gB9n2gHsHN4. 3Blue1Brown youtube channel.

A. Dickenstein. (2021). *Creando objetos matemáticos que son obras de arte*. https://www.youtube.com/watch?v=qSQyOF5TKWk. Canal de youtube de la VirtUMA 2021.

Carla Cederbaum, Alicia Dickenstein, Gert-Martin Greuel, David Grünberg, Hyungju Park and Cédric Villani. (2014). IMAGINARY PANEL: Math communication for the future - A Vision Slam. En *Proceedings of the icm seoul* (pp. 775–791). http://www.icm2014.org/download/Proceedings_Volume_I.pdf.

Imaginary. (2008–2021a). *En español*. https://www.imaginary.org/es/.

Imaginary. (2008–2021b). *Surfer*. https://www.imaginary.org/es/program/surfer.

Josep M. Batlle. (2011). *Julia Set* $f(z) = z^5 + 0{,}544$. https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17819305.

Josep M. Batlle i Ferrer. (2012). *Mètode de Júlia* $Z_{n+1} = Exp(Z_n^3)$. https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=23083278.

Leofun01. (2015). *Koch snowflake*. https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=37863894.

Proyecto Moebius. (2012–2021a). *Galería de Imágenes*. http://moebius.dm.uba.ar/index.php/our-gallery.

Proyecto Moebius. (2012–2021b). *Material sobre Britney*. http://moebius.dm.uba.ar/index.php/programas/britney/material.

Proyecto Moebius. (2012–2021c). *Material sobre Surfer*. http://moebius.dm.uba.ar/index.php/programas/surfer/material.

Proyecto Moebius. (2012–2021d). *Proyecto Moebius - Imaginación a las aulas*. http://moebius.dm.uba.ar/.

Alicia Dickenstein
Departamento de Matemática, FCEN, UBA e IMAS (UBA-CONICET)
(✉) *alidick@dm.uba.ar*

Recibido: *27 de septiembre de 2021.*
Aceptado: *19 de octubre de 2021.*
Publicado en línea: *14 de diciembre de 2021.*

Revista de Educación Matemática
Volumen 36, N° 3 (2021), páginas 73 – 82
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Aportes para la Enseñanza de la Matemática

¿CÓMO APRENDIERON MATEMÁTICA MAFALDA Y SUS AMIGOS? REFLEXIONES EDUCATIVAS A PARTIR DE LA REPRESENTACIÓN DE LA CLASE DE MATEMÁTICA EN LAS TIRAS DE *MAFALDA* (1964-1973)

José G. Morales y M. Cecilia Gonzalez

Resumen. Los problemas son el combustible gracias al cual la matemática crece de forma sostenida. La resolución de un problema supone el ejercicio de un abigarrado conjunto de competencias tales como explorar, conjeturar, identificar patrones, argumentar y validar. La educación matemática, desde la etapa de escolarización temprana, procura los medios necesarios para lograr que los estudiantes —provenientes de diversos ambientes culturales— sean capaces de recrear el proceso de resolución de problemas para lo cual, en muchos casos, se requiere tener un dominio elemental de técnicas matemáticas. Sin embargo, la escuela tradicionalmente ha priorizado la enseñanza de técnicas matemáticas, las cuales se concebían como una suerte de propedéutica al estudio de la matemática propiamente dicha. En este artículo identificamos este modelo tradicional de la educación matemática en la historieta de *Mafalda*. A partir de una selección de viñetas, recuperamos algunas escenas de la escuela de la década de 1960 en Argentina y aprovechamos este marco para reflexionar sobre las prácticas, las representaciones de la enseñanza y los cambios que se han sostenido desde la planificación educativa en Argentina en búsqueda de un aprendizaje más integral y significativo de la matemática.

Palabras clave: resolución de problemas, razonamiento matemático, Mafalda, educación matemática, contexto cultural.

Abstract. Problems are the fuel thanks to which mathematics grows steadily. Solving a problem involves exercising a motley set of competencies such as exploring, guessing, identifying patterns, arguing, and validating. Mathematics education, from the early schooling stage, seeks the necessary means to ensure that students - coming from different cultural backgrounds - are capable of recreating the problem-solving process for which, in many cases, elementary of mathematical techniques are required. In this essay we recover from *Mafalda*'s comic strip some school scenes from the 1960s in Argentina, paying attention to the realities of its main characters. The selection of vignettes helps us to reflect on mathematical practices and understand the changes that have been progressively sustained since teacher training and educational planning in search of a more comprehensive and meaningful learning of mathematics.
Keywords: problem-solving, mathematical reasoning, Mafalda, mathematics education, cultural context.

§1. Introducción

La matemática, como parte del saber sabio que se considera importante transmitir, llega a las personas en forma de conocimiento articulado a través de la escuela. Las experiencias educativas relacionadas con este saber en Argentina han dejado fuertes imágenes respecto de lo que significa hacer y ser competente en matemática, y muchas de estas imágenes se relacionan con la habilidad o no para resolver problemas.

El proceso de resolución de problemas, tanto en la investigación matemática como en el ámbito de la escuela, no es de ninguna manera un proceso lineal. Se debe identificar e interpretar la situación adecuadamente, anticipar caminos y acciones para abordarla y diseñar posibles estrategias para aproximar una solución; dichas estrategias nos pueden llevar al "paraíso de la respuesta correcta" o a tener que borrar todo y empezar de nuevo. Por lo general, a lo largo de este proceso no avanzamos en completa soledad sino en intercambio permanente con nuestros pares frente a los cuáles será necesario argumentar la validez y pertinencia de la solución hallada.

Para hacer efectiva la estrategia elegida, se requiere del empleo de herramientas formales y materiales, e. g., definiciones, reglas y algoritmos lógico-matemáticos, instrumentos para la construcción de figuras, etc. En esta etapa del proceso de resolución es importante la utilización de técnicas matemáticas específicas que permitan resolver la tarea; pero el dominio de las técnicas matemáticas de ningún modo agota las competencias requeridas para abordar una situación problemática. Como afirman Kurzrok y Comparatore (2013), "enseñar matemática es comprometer a los alumnos a seguir un proceso de producción matemática" (p. 2), para lo cual es preciso atender a todo el proceso de resolución de problemas en la enseñanza.

Ahora bien, la escuela tradicionalmente ha priorizado justamente la enseñanza de técnicas matemáticas, las cuales se concebían como una suerte de propedéutica al estudio de la matemática propiamente dicha. Esta visión de la enseñanza de la matemática está magistralmente reflejada en el universo de Mafalda, el inefable personaje de Joaquín S. Lavado —más conocido como Quino— compuesto en la década de 1960. Como mostraremos en el presente artículo valiéndonos de una selección de simpáticas viñetas, los personajes de *Mafalda* se resisten a la clase de matemática, una clase que revela los trazos de una cultura de la enseñanza de la matemática de la que quizás aún hoy no nos podemos despegar del todo.

§2. ¿Por qué *Mafalda*?

Quino nació el 17 de agosto de 1932 en Guaymallén (Mendoza, Argentina). En 1954 publica su primera página de chistes en la revista *Esto es*, y a partir de ahí, de manera intercalada, en diversas revistas de la época. En 1962 se realizó la primera exposición de sus trabajos artísticos en una galería de arte de la ciudad de Buenos Aires. Al año siguiente publicó *Mundo Quino*, su primer libro de humor. *Mafalda* nació en 1964, cuando el periodista Julián Delgado propuso incorporar a la revista *Primera Plana* —un semanario de actualidad del que Delgado era jefe de redacción— una historieta que Quino originalmente había elaborado, sin que llegara a publicarse, para una agencia de publicidad. Un año más tarde *Mafalda* se empezó a publicar en el diario *El mundo* hasta su cierre en 1967. A partir de 1968 y hasta 1973, año en el que Quino decidió no continuar con la escritura de más tiras, la historieta se publicó en el *Semanario Siete* días ilustrados.

Esta historieta es una representación de las realidades cotidianas de una familia argentina tipo de clase media a través del lente de una pequeña llamada Mafalda y sus amigos, un grupo de niños que están atravesando los primeros años de escolarización en una escuela pública. En cada una de las viñetas quedaron reflejados con suspicacia e ironía los ideales y valores de la sociedad argentina y las circunstancias políticas y económicas —tanto locales como internacionales— que ésta iba transitando a lo largo de la segunda mitad de la década de 1960 y principios de la década de 1970.

Mafalda es un ícono de la cultura argentina. Sus tiras se editaron en decenas de países y sus dichos fueron traducidos en diferentes lenguas: francés, italiano, inglés, japonés, griego, entre otros. Ha sido fuertemente reconocida en América Latina, Estados Unidos y en toda Europa. También se realizaron cortometrajes basados en la historieta que fueron emitidos en diversas latitudes.

Como afirma Suarez (2011), a través de la historieta de *Mafalda* "se puede vislumbrar la realidad política-social y los avatares coyunturales propios de los '60" (p. 9). Pero además, el análisis de las situaciones y personajes creados por Quino constituye un documento de época con el que podemos desembozar la representación social de la educación que encarnan Mafalda y sus amigos así como "la mirada que cierto sector de la sociedad tenía en esa época respecto a esta temática" (p. 10).

A través de *Mafalda* proponemos entonces asomarnos a las situaciones escolares de su tiempo y reflexionar sobre diversos aspectos de las prácticas matemáticas que han quedado plasmados en muchas de sus viñetas[1]. Si bien el recorrido no es exhaustivo, consideramos que puede servir para que el lector se adentre en el universo de Mafalda y ulteriormente explore la riqueza de la tira completa.

§3. La escuela de Mafalda y la enseñanza de la matemática

La escuela que quedó retratada en la historieta *Mafalda* responde en gran medida a una representación de la propia experiencia de escolarización de su autor. En la entrevista realizada por Leila Guerriero (Guerriero, 1999), tras ser consultado sobre la escuela, Quino comenta: "El colegio para mí era una tortura, como para Felipe. He tirado el cuaderno en la acequia y he vuelto a casa diciendo: ´Se me cayó el cuaderno al agua, no puedo ir al colegio'" (Revista La Nación, párrafo 28).

En ese momento histórico, en las prácticas escolares y decisiones educativas estaban fuertemente arraigados los ideales de una época y la forma que se consideraba la más adecuada para la transmisión de conocimientos. Entre docentes y estudiantes se planteaba una relación asimétrica y estática. En algunas tiras de la historieta, esto se ve reflejado en la disposición en el aula del espacio y la distribución de roles que éste supone. En varias ocasiones se observa a la maestra sentada al frente en un escritorio apoyado sobre una tarima sobre elevada respecto del nivel en el que se encuentran los estudiantes. Estos, por su parte, están orientados, uno detrás del otro, en dirección a la maestra[2].

En cuanto a la enseñanza de la matemática, se buscaba ante todo que los estudiantes logren un dominio fluido del conjunto de reglas, propiedades, y algoritmos necesarios para operar con números y figuras. Se asumía que éste era el camino necesario para lograr *a posteriori* que los estudiantes resolvieran problemas. Por este motivo, la clase de matemática representaba muchas veces un espacio hostil donde se exigía el empleo de determinados algoritmos como única forma de cálculo, conocer propiedades de las figuras como datos externos a memorizar y fijar los conocimientos a través de las prácticas de ejercicios rutinarios. Luego de haber desarrollado los *músculos* propios de la disciplina, aparecían los problemas y el mensaje era: ¡ahora tienen que pensar! No resulta extraño en este contexto ver desahogarse a Mafalda durante una instancia evaluativa empleando un lenguaje muy poco elegante: "¡La ###&&# al tonelero que pasó los 218 litros de una barrica de vino a no me sale cuántas botellas de 75 centilitros cada una!". (Cf. Toda Mafalda, 1997, viñeta n° 1303 (Lavado, J.S.(Quino), 1997)).

[1]Invitamos al lector a visitar la obra de Quino para complementar la lectura del presente artículo. Por razones de copyright, solamente estamos autorizados a publicar unas pocas viñetas.
[2]A modo de ejemplo el lector puede analizar viñetas, como la número 524, en Toda Mafalda (Lavado, J.S.(Quino), 1997)

Notemos que la articulación de los saberes que se expresan a través de las prácticas en gran medida determinan las imágenes que nos formamos sobre el objeto de estudio. Como afirman Itzcovich, Resia de Moreno, Novembre, y Becerril (2011) en relación con la educación matemática en la escuela primaria:

> Una primera cuestión que podemos afirmar es que la Matemática para los alumnos quedará en parte definida y caracterizada por el conjunto de experiencias que les hagamos vivir en relación con los conceptos que se traten. Es decir, el trabajo matemático quedará evidenciado ante los ojos de los alumnos a partir de las propuestas que las instituciones educativas les hagan experimentar a lo largo de la escolaridad. Podemos sospechar, entonces, que la Matemática que se decide enseñar, así como su tratamiento, impactan de una manera determinante en lo que los alumnos van a considerar como 'cultura matemática'. (p. 10)

Haciéndonos eco de estas palabras, si reducimos la actividad matemática a la adquisición *a priori* de las herramientas que nos permitirán en una etapa ulterior la resolución de los problemas matemáticos, corremos el riesgo de instaurar la idea de una disciplina rígida, tediosa y prefabricada en la que las posibilidades creativas y el pensamiento propio no tendrán mucho lugar.

Por ello, las imágenes que vemos reflejadas con agudo sentido del humor en la tira de Quino, distan significativamente de la forma en que se construye el conocimiento matemático. La práctica matemática, lejos de estar reducida a la aplicación de técnicas preconcebidas, supone ante todo explorar, conjeturar, planificar, identificar patrones, argumentar, validar, y encontrar problemas, una ardua labor que nos obliga a formular nuevas preguntas, a pensar más allá de lo evidente, a ser creativos y a sumergirnos en un espacio combinatorio complejo y desafiante. Como afirma Charlot (1986):

> Hacer matemática es un trabajo del pensamiento, que construye los conceptos para resolver problemas, que plantea nuevos problemas a partir de conceptos así construidos, que rectifica los conceptos para resolver problemas nuevos, que generaliza y unifica poco a poco los conceptos de universos matemáticos que se articulan entre ellos, se estructuran, se desestructuran y reestructuran sin cesar. Democratizar la enseñanza de la matemática supone en principio que se rompa con la concepción elitista de un mundo abstracto que existiría por sí mismo y sólo sería accesible a algunos y que se piense, en cambio, la actividad matemática como un trabajo cuyo dominio sea accesible a todos. (p. 3)

En pocas palabras, podría afirmarse que la visión de la clase de matemática que se expresa en la historieta *Mafalda* concibe el conocimiento matemático como un cuerpo cerrado y aproblemático de proposiciones, y al estudiante como un receptor pasivo de dicho conjunto de proposiciones sin tener en cuenta de manera más integral otros aspectos del aprendizaje de la disciplina.

§4. Mafalda, sus amigos y las prácticas matemáticas

Volvamos la mirada hacia los amigos de Mafalda: Felipe, Susanita, Manolito, Miguelito y Libertad —a Guille lo sumamos en unos años, cuando empiece a cursar el primer grado. Por lo visto, en la clase de matemática de esta mañana la maestra decidió repasar las tablas. Miguelito al frente. Para su desdicha, le tocó una tabla que no había repasado, la del ocho. Por suerte, su inconmensurable ego le permite fácilmente retrucar a la maestra (Figura 1).

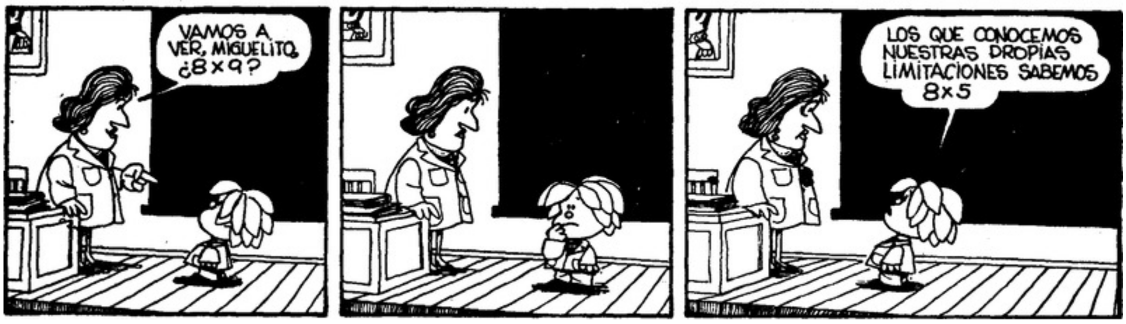


FIGURA 1. "Miguelito al frente". © Quino. Joaquin S. Lavado. Toda Mafalda, 2000. Viñeta n.º 1163, p. 340.

En esta viñeta entrevemos, gracias a Miguelito, algunas de las prácticas asociadas con la escuela tradicional: la importancia de la memorización y la necesidad de *pasar al frente* para que los estudiantes den cuenta frente a la maestra de que han estudiado —en este caso, las tablas de multiplicar.

En cuanto al aprendizaje de la geometría, en algunas de las tiras se advierte nuevamente la importancia del estudio memorístico de clasificaciones y definiciones de los objetos geométricos. En situaciones que ponen en juego estos saberes, vemos por caso a Libertad, quien a contramano de las expectativas de la maestra interpreta los objetos matemáticos en clave política. Fuertemente influenciada por la mirada de sus padres socialistas, Libertad vislumbra en un triángulo equilátero —que le presenta la maestra durante una lección oral— la representación de una sociedad igualitaria. (Cf. *Toda Mafalda*, 1997, viñeta n.º 1483, (Lavado, J.S.(Quino), 1997))

Como se observa en los casos de Miguelito y Libertad, cada uno de los personajes de *Mafalda* expresa una perspectiva de los fenómenos sociales; cada personaje es un mundo, un mundo en el que Mafalda y sus amigos prefiguran las perspectivas de futuro de determinados estereotipos sociales. En estos personajes se encarnan miradas y objetivos de vida para los cuales la educación tiene un sentido diferente. Esto se exhibe con total nitidez en Manolito, hijo de inmigrantes, cuya única intención e interés pasa por el progreso económico. La escuela adquiere un fin exclusivamente utilitario, a saber, aprender lo necesario para continuar con el almacén de su papá.

Para Manolito, los cálculos algorítmicos no representan un problema. En su caso, la clase de matemática, el trabajo y sus actividades domésticas, se presentan como un continuo... como si de sucursales del Almacén Don Manolo se tratara. Será justamente en virtud del almacén de su padre que Manolito tendrá una de sus pocas alegrías escolares, si no la única, como se aprecia en la viñeta que presentamos en la Figura 2.

FIGURA 2. "Manolito orgulloso". Fuente: © Quino. Joaquin S. Lavado. Toda Mafalda, 1997, viñeta n.º 1124, p. 331.

No obstante, el éxito de Manolito para las matemáticas puede resultar endeble. Si bien cuenta con un piso excepcional para asimilar las tediosas técnicas de cómputo aritmético, asimilación que sin duda se ve favorecida por el ambiente cultural en el que se desarrolla su vida, con el correr de los años —a medida que los contenidos matemáticos se complejizan—, Manolito deberá desarrollar otras capacidades cognitivas para razonar matemáticamente sobre los nuevos problemas que la maestra le plantee. En tal estadio del aprendizaje, el almacén, antes que un trampolín al éxito, puede resultar un obstáculo difícil de sortear para el aprendizaje de nuevos saberes.

Susanita, en cambio, tiene otras expectativas respecto de la escuela. Para ella, la educación es un mal necesario para escalar socialmente. Su sueño es satisfacer el mandato social de formar una familia asumiendo a pie de juntillas el rol asignado a la mujer en la estructura de la familia tradicional. La cúspide de su ambición personal llegará cuando su muchacho obtenga el diploma de médico. Con frecuencia la escucharemos repetir que tendrá un hijo médico que provocará la envidia de todo el barrio. Esto provoca el hartazgo de Mafalda, quien ante los monólogos de Susanita refunfuña para sus adentros "¡Dios mío! Esta y su hijito... ¡No la aguanto!". (Cf. *Toda Mafalda*, 1997, viñeta n.º 130, (Lavado, J.S.(Quino), 1997)).

En cuanto a la relación de Susanita con la matemática —a juzgar por una de las viñetas en la cual se la ve resolviendo un problema de proporcionalidad para calcular el tiempo que tardará un albañil en construir una pared—, esta actividad no le presenta gran dificultad. De todos modos, la exactitud de los resultados obtenidos no la llevan a revisar sus valores de clase media aspiracional, ya que, si bien realiza los cálculos correctamente, la respuesta se mezcla con sus opiniones personales. Así, frente a la pregunta "Si un albañil levanta 2 m. de pared en ½ día, ¿cuántos m. levantaría en 3 días?", Susanita escribe la siguiente solución: "*levantará 6 o 7 metros porque en este país nadie quiere trabajar*". (Cf. *Toda Mafalda*, 1997, viñeta n.º 877, (Lavado, J.S.(Quino), 1997)).

En clara oposición a la visión de Susanita, Mafalda concibe que la finalidad del estudio es entender mejor el mundo en el que vive. Se proyecta continuando sus estudios a nivel universitario. Por supuesto que por el momento confronta con una propuesta curricular cuyos contenidos a su juicio son pueriles; y aunque a veces entabla una relación tortuosa y tensa con tales contenidos, su habilidad para hacerse preguntas y cuestionar lo dado termina favoreciendo la obtención de muy buenos resultados en la clase de geometría… mal que le pese a su hermanito Guille, quien termina acusando a Mafalda de "arruiunahogarez" al verla celebrar con su madre el diez que acaba de obtener en geometría. (Cf. *Toda Mafalda*, 1997, viñeta 1601, (Lavado, J.S.(Quino), 1997)).

En este apartado, hemos aprovechado las divertidas escenas de la historieta para reflexionar sobre las prácticas matemáticas. Como afirma un dicho popular, "una imagen vale más que mil palabras", y cuando de imágenes se trata, Quino ha sido realmente un especialista. Estas imágenes nos permitieron correlacionar determinadas condiciones culturales de base de los personajes de *Mafalda* con sus posibilidades —obstáculos y facilidades— para la asimilación de los contenidos curriculares de la escuela primaria, en particular, en el espacio de la clase de matemática. Bajo una mirada reduccionista, podríamos inclinados a pensar que Manolito nunca será un estudiante destacado a causa de sus condicionamientos culturales; pero esta no es la postura que nos interesa transmitir. Actualmente, si bien no se descarta el impacto de las condiciones y motivaciones personales y familiares respecto del desempeño de los estudiantes, no se considera que éstas sean las únicas causas de los problemas de aprendizaje. Una "democratización de la enseñanza de la matemática", usando nuevamente las palabras de Charlot (1986), implica asumir desde la propia enseñanza de la matemática la responsabilidad de revisar los efectos producidos por la perspectiva epistemológica implícita en las prácticas de enseñanza.

En lo que llamamos *escuela tradicional*, si bien se consideraba importante el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático más allá de los contenidos planificados, se daba por supuesto que estas habilidades se lograrían solas luego de aprender técnicas matemáticas aisladas adquiridas por repetición de ejercicios rutinarios. Esta visión centrada en el contenido se arraigó profundamente en las prácticas de los docentes de matemática. Pero como sabemos, la sociedad cambia, las personas también y emergieron —y lo siguen haciendo— múltiples preguntas que no sólo interpelan a los métodos pedagógicos del pasado sino a la propia matemática. Es por ello que se han desarrollado múltiples alternativas tanto a nivel disciplinar —*didáctica de la matemática*— como a nivel procedimental para el acompañamiento de clases donde la educación permita a los estudiantes hacerse responsables de la validación de sus razonamientos y conjeturas, así como la posibilidad de hacer consciente el desarrollo de las estrategias cognitivas requeridas para enfrentarse a la resolución de situaciones nuevas.

§5. Consideraciones finales

En virtud de las viñetas consideradas es posible observar la relación de los estereotipos sociales que encarnan los personajes de la historieta *Mafalda* con las matemáticas y la representación de este saber que emerge en el contexto escolar. Las ocurrentes situaciones que se representan nos dejan algunos interrogantes para seguir pensando y revisitando la exquisita obra de Quino, la cual por mucho excede a la selección de tiras que hemos analizado.

Las imágenes de la historieta se convierten también en una interesante vidriera que nos permite reflexionar no sólo sobre las situaciones de aprendizaje de esa época sino sobre las prácticas matemáticas en las que se ven involucrados actualmente los estudiantes. Es importante considerar que muchas de las problemáticas que observamos actualmente para la comprensión de los conocimientos matemáticos y la resolución de problemas se relacionan con las propuestas de trabajo que tienen lugar en las aulas —presenciales y/o virtuales—, y ahí es donde la labor docente entra en acción. Sin duda que la escuela debe contemplar las diferencias sociales y culturales de los estudiantes así como las diversas expectativas y motivaciones que éstos presentan; y si bien es cierto que ambas cosas influyen en el proceso de aprendizaje —como de hecho es el caso de los personajes de *Mafalda*—, es importante que las propuestas educativas permitan a los estudiantes progresar en el dominio de habilidades matemáticas independientemente del punto de partida con el que hayan arribado a la institución educativa.

Muchas cosas han cambiado en la escuela desde la época de *Mafalda*, otras quizás no tanto. Dejamos a consideración del lector algunas preguntas que sugiere el presente artículo:

- ¿Cuáles de las situaciones áulicas planteadas por Quino se reproducen en la escuela del siglo XXI?
- ¿Qué lugar ocupa el docente de matemática ahora que la técnica matemática ha sido en gran medida automatizada en programas computacionales que se pueden ejecutar aun desde teléfono celular?

- ¿Cuál sería el rol de la tecnología, como mediadora de la enseñanza, para propiciar en los estudiantes un aprendizaje significativo de la matemática que vaya en línea con el tipo de actividad matemática propuesta en los diseños curriculares actuales?
- Y finalmente, ¿qué problemas matemáticos permiten posicionar a los estudiantes de las más diversas realidades en situación de producción de conocimientos matemáticos?

Bibliografía

Charlot, B. (1986). *La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de la matemática*. Descargado de https://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/cepa/epistemologia_charlot.pdf

Guerriero, L. (1999). Quino, Mafalda, Felipe: todo queda en familia. *Sección lifestyle, diario La Nación.*. Descargado de https://www.lanacion.com.ar/lifestyle/quino-mafalda-felipe-todo-queda-en-familia-nid211585/

Itzcovich, H. c., Resia de Moreno, B., Novembre, A., y Becerril, M. M. (2011). *El abecé de... La matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula.* Buenos Aires, Argentina: Aique grupo editor.

Kurzrok, L., y Comparatore, C. (2013). *División. Capacitación práctica y dinámica para el aula.* Buenos Aires, Argentina: Tinta Fresca Ediciones.

Lavado, J.S.(Quino). (1997). *Toda Mafalda*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones de la Flor.

Suarez, M. (2011). *La representación de la educación en mafalda.* (Tesis Doctoral, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina). http://comunicacion.sociales.uba.ar/wp-content/uploads/sites/16/2013/02/Suarez-ML.pdf.

José G. Morales
Facultad de Filosofía y Humanidades. Universidad Nacional de Córdoba
(✉) *gust.914@gmail.com,*

M. Cecilia González
Facultad de Ciencias Físico, Matemáticas y Naturales. Universidad Nacional de San Luis
(✉) *mcgonzalez@email.unsl.edu.ar*

Recibido: *3 de enero de 2021.*
Aceptado: *4 de noviembre de 2021.*
Publicado en línea: *14 de diciembre de 2021.*

Y entonces llegó Rey Pastor

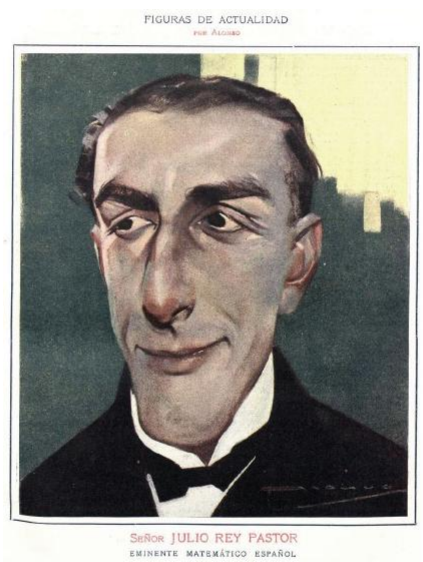
por Carlos Borches

¿Cuándo comenzaron a circular los saberes matemáticos en los territorios que hoy conocemos como Argentina? Seguramente quienes se ocupan de la Etnomatemática, este interesante cruce entre Antropología y Matemática, pueden hablarnos de las evidencias precolombinas relacionadas con el cálculo o en la geometría presente en la alfarería. Algunos hispanistas, como Guillermo Furlong, ponen acento en el ciclo colonial y conmueve ver la inquebrantable fe que Manuel Belgrano puso en la matemática, fe adquirida en su paso por España, en plena Ilustración borbónica.

Estos aportes y otros tantos más a lo largo del siglo XIX fueron indispensables para la formación de nuestros primeros pilotos, artilleros, topógrafos e ingenieros, pero la matemática como objeto de investigación, como disciplina autónoma más allá de las aplicaciones, estuvo ausente hasta la llegada de ese torbellino conocido como Julio Rey Pastor.

Acercándonos a los festejos por el Centenario de la Independencia, Argentina y España cultivaban sólidas relaciones cerrando definitivamente las heridas dejadas por la guerra. Las autoridades nacionales suprimieron la mayor parte de las estrofas del Himno Nacional, escrito un siglo antes para recordarnos que la Revolución tenía “a sus plantas rendido un León”, y los dos países se asociaban en varios proyectos económicos y culturales.

Cabe decir que España también vivía un ciclo optimista que le permitía dejar atrás el desastroso resultado del conflicto con EEUU, cuando perdiera Cuba y Filipinas. En 1906 Santiago Ramón y Cajal recibía el Premio Nobel de Medicina por sus trabajos sobre el sistema nervioso, y poco antes, en 1904, el matemático José Echegaray era galardonado con el Nobel de Literatura.



En ese clima, en 1907 se crea la Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas (JAE), institución que será una pieza clave en el desarrollo de la ciencia española al mismo tiempo que participará de una nueva política hacia los países latinoamericanos promoviendo el intercambio de profesores y estudiantes.

En el Río de la Plata un grupo de españoles aportaban lo suyo creando la Sociedad Cultural Española dirigida por Avelino Gutiérrez. Nacido en Cantabria pero criado en Argentina, Gutiérrez se había graduado en la Facultad de Medicina en la Universidad de Buenos Aires donde tenía a su cargo la Cátedra de Anatomía.

En este escenario aparece la figura de Rey Pastor para revolucionar la matemática en las dos orillas del Atlántico hispánico. Cuando se crea la JAE Rey Pastor tenía 19 años y una reputación matemática ganada en la Universidad de Zaragoza, donde había cursado la Licenciatura en Matemática. El doctorado obtenido en Madrid a los 21 años fue consagratorio y la JAE lo becó para que pasara los siguientes años en Berlín y Gotinga, más algunas escapadas por Francia e Italia, donde tomó contacto con problemas y corrientes matemáticas desconocidas en España.

Al comenzar la Primera Guerra regresó a España para difundir en libros y seminarios lo aprendido en esos años. Toda una revolución para un mundo donde las comunicaciones marchaban a un ritmo tan distinto al actual.

Y llegamos al año 1917 cuando la JAE le encomienda viajar a la Argentina para dar unas charlas en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la UBA, donde los alumnos de ciencias eran franca minoría frente a los de Ingeniería y Arquitectura.

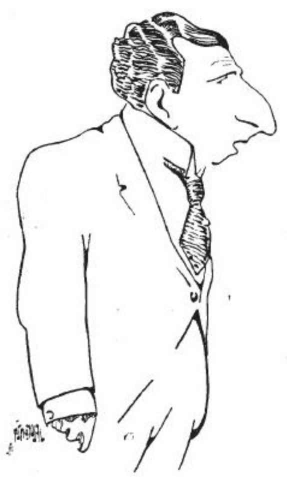
La propuesta no fue para nada del agrado de Rey Pastor, que intentó resistir la misión que tenía más de diplomática que de científica. Varias cartas de aquella época reflejan claramente su sentir: "me convendría ir otro año porque debo ocuparme de la publicación de mi libro de análisis antes de la partida (...) al cabo de ocho años sin vacación alguna, y después del formidable trabajo que me ocasiona la publicación de 5 tomos voluminosos en dos años, me convendría mucho unos meses de descanso". La carta[1] terminaba con un comentario lapidario: "además, parece ser que las ciencias abstractas no interesan en aquel país".

En Buenos Aires existía desde el siglo XIX el doctorado en Ciencias Fisicomatemáticas que no despertaba el entusiasmo del alumnado. Uno de los primeros graduados en Ingeniería, Valentín Balbín, había viajado a Inglaterra durante la década de 1870 descubriendo una matemática fascinante y distinta a la aprendida en las aulas de Ingeniería. A su regreso, en 1885, creó el Seminario de Matemática en la Sociedad Científica y la Revista de Matemáticas Elementales, pero la prematura muerte de Balbín dejó a la actividad matemática sin su entusiasta promotor.

[1]Carta enviada por Rey Pastor al Secretario de la JAE, José Castillejo, 18 de marzo de 1917. Epistolario de José Castillejo, Fondo Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas 1907-1939. CSIC, Madrid, España.

Ya con el siglo XX la enseñanza de las matemáticas superiores recayó en Claro Dassen, quien no sentía el mismo compromiso que Balbín respecto a la difusión de la matemática. "Los genios matemáticos son muy raros: si por excepción apareciese alguno entre nosotros, no faltará quien se aperciba de sus dotes excepcionales y lo sepa orientar a donde convenga", sostenía Dassen[2]. El resultado fue que por más de una década el Seminario de Matemática Superior no contó con alumnos.

Pero algo estaba cambiando y la fama de Rey Pastor precedió su llegada al puerto de Buenos Aires. La prensa comenzó a contar la importante tarea que estaba llevando a cabo Rey Pastor en España subrayando su juventud, 28 años, que contrastaba notablemente con las figuras consagradas que pasaban por el país en aquel entonces.



Caricatura de Rey pastor publicada en la Revista de Estudiantes de Ingeniería, 1917.

Así fue como las charlas brindadas en distintas instituciones se colmaron de un público heterogéneo interesado en ver al joven talento y escuchar qué había de nuevo en la matemática, para muchos una obra perfecta y acabada.

Estas charlas dirigidas a un público amplio, seguidas con entusiasmo por los diarios y el semanario Caras y Caretas, prepararon el terreno para el curso "Introducción a la Matemática Superior. Estado actual, Métodos y problemas" que desde el 2 de julio comenzó a dictarse en la Facultad de Ciencias Exactas de la UBA.

Varios matemáticos cuyos nombres aparecerán en las primeras décadas de la Unión Matemática Argentina estuvieron presentes en aquel curso. "Yo era estudiante de ingeniería de primer año y tuve la dicha de concurrir y quedé deslumbrado por la precisión, sencillez y brillantez de la exposición del grande y joven maestro", recordaba Elías De Césare, años más tarde matemático formado junto a Rey Pastor.

El éxito fue tal que los alumnos organizados en el Centro de Estudiantes de Ingeniería (La Línea Recta) pidieron otro curso y Rey Pastor escribió a las autoridades de la Junta solicitando autorización para quedarse cinco meses más. El curso comenzó en noviembre y atravesó el verano porteño con entusiasmo imperturbable. Por primera vez en nuestro medio se dictaba un curso de Funciones analíticas siguiendo el esquema moderno introducido por Schwarz en Alemania,

[2](2) Claro Dassen en Evolución de las Ciencias en la República Argentina 1872-1922, Sociedad Científica Argentina, 1924.

el mismo que Rey Pastor llevó a España "para superar las presentaciones confusas de las funciones de variable compleja"[3].

En esa oportunidad, otro estudiante de ingeniería, José Babini, tomó prolijos apuntes que una vez corregidos por Rey Pastor terminaron en un popular libro[4] sobre funciones analíticas y representaciones conformes "con aplicaciones a la física y a problemas diversos de la técnica".

Cuando volvió a España, Rey Pastor había cambiado su percepción sobre lo que sucedía en las aulas universitarias argentinas. Continuó la correspondencia con Babini y otros estudiantes y profesores que se mostraron interesados en los problemas propuestos por el matemático riojano y cuando la Universidad de Buenos Aires lo invitó formalmente para hacerse cargo de dos cursos, ya no tuvo reparos.

Volvió en 1921 y fue recibido con el mismo entusiasmo por alumnos y autoridades. Rápidamente el grupo estudiantes de matemática comenzó a crecer y el Consejo Directivo le solicitó un plan de estudios que reflejara las nuevas corrientes en la matemática.

El plan se puso en marcha en 1922 y también comenzó a funcionar el Seminario de Matemática donde por primera vez los alumnos se reunían para empezar a investigar.

En 1928 la matemática como ciencia se había puesto en marcha en la Argentina. Los primeros trabajos de los discípulos de Rey Pastor fueron aceptados en Congresos y publicaciones internacionales. La matemática había iniciado un proceso de institucionalización signado por la creación de la Sociedad Matemática Argentina y su Revista Matemática.

Julio Rey Pastor encontró en el país jóvenes entusiastas dispuestos a seguirlo, y también conoció a Rita Gutiérrez, la hija del presidente de la Sociedad Cultural Española, con quien se casó y tuvo hijos que hicieron inquebrantable el vínculo con el país.

A solo efecto de vislumbrar los años que siguieron después de su llegada y advertir la importancia de su obra, digamos que Rey Pastor fue armando una red de centros matemáticos en el país articulados por la Unión Matemática Argentina. Al complicarse el panorama político internacional esa red permitió acoger a numerosas figuras que pasaron por nuestro país como Luis Santaló, Beppo Levi, Mischa Cotlar, Manuel Balanzat y tantos otros que consolidaron el cultivo de la matemática en nuestro país. También tuvo Rey Pastor la convicción de que el desarrollo de la matemática como disciplina científica comenzaba con el

[3]Gregorio Klimovsky entrevistado por Carlos Borches, 2004.

[4]Rey Pastor, Resumen de la teoría de las funciones analíticas y sus aplicaciones físicas. Editor: Centro Estudiantes de Ingeniería de Buenos Aires, 1918.

cultivo de una matemática estimulante ya en los primeros pasos de la escolarización, convicción que se reflejó también en políticas que dejaron huella. Pero estas ya son otras historias.

Carlos Borches

Programa de Historia de la FCEyN – UBA

Dto. de Matemática del CBC – UBA.

(✉) *borches@de.fcen.uba.ar*

Recibido: *5 de octubre de 2021*.
Aceptado: *15 de noviembre de 2021*.
Publicado en línea: *14 de diciembre de 2021*.

Sección de Problemas

☞ *por Juan Pablo Rossetti*

Los siguientes problemas están pensados para un público amplio. Las soluciones se encuentran en la página 91.

Problema 1. *Obtener 1 litro con dos baldes.*

¿Cómo se puede obtener 1 litro exacto de agua teniendo una provisión inagotable de agua y dos baldes, uno de 5 litros y el otro de 7 litros?

En general, si los baldes en lugar de ser de 5 y 7 litros, fueran de k y m litros, con k y m enteros positivos, ¿cómo deben ser k y m para poder obtener 1 litro exacto?

Problema 2. *Intensidad de los parlantes.*

Se colocan dos grupos de parlantes en una plaza: en una esquina, 2 parlantes juntos, y en la esquina opuesta, 3 parlantes juntos. Todos apuntan hacia el centro de la plaza. Ahora queremos ubicar nuestra silla entre los dos grupos de parlantes, de modo de oír los dos con la misma intensidad. ¿Dónde debe colocarse nuestra silla?

Problema 3. *Pesar todos los pesos.*

En una balanza de dos platillos, queremos ser capaces de pesar en kilogramos la mayor cantidad de pesos enteros a partir de 1 kg. y sin saltear ningún valor entero, es decir, pesar 1 kg, 2kg, 3kg, hasta algún valor entero. Se pueden poner pesas en ambos platillos de la balanza.

Si usamos solo 4 pesas ¿cuántos pesos enteros se pueden lograr y cuánto deben pesar las 4 pesas?

En general, si usamos n pesas, $n \in \mathbb{N}$, ¿cuántos pesos enteros se pueden lograr con n pesas y cuánto deben pesar las n pesas?

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones? ¿Y una fórmula general?

- $\{a_n\}$: 1, 9, 36, 100, 225, 441, 784, 1296, 2025, 3025 , . . .
- $\{b_n\}$: 1, 3, 0, 4, 9, 3, 10, 18, 9, 19, 30, 18, 31, 45, 30, 46, 63, 45, 64, 84 , . . .
- $\{c_n\}$: 2, 4, 6, 9, 12, 15, 20, 25, 30, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 88, 99, 110, 121, 132, 143, 156, 169, 182, 195, 208, 221, 238, 255, 272, 289, 306, 323, 342 , . . .
- $\{d_n\}$: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, , . . .

Podés encontrar las soluciones en la página siguiente.

SOLUCIONES

Solución 1. *Respuesta:* Hay varias formas de resolver este problema clásico de divisibilidad de enteros. Una es llenar el balde de 5, pasar el agua al de 7. Llenar por 2da vez el de 5, pasar 2 litros al de 7 (esto se puede hacer, porque se va pasando el agua con cuidado de modo de frenar justo cuando se llena el balde de 7). Vaciar el de 7. Pasar los 3 litros que quedan en el de 5 al de 7. Llenar por 3ra vez el de 5. Pasar 4 litros del de 5 al de 7, y ahí queda justo 1 litro en el de 5.

Esto funcionó porque $3 \times 5 - 2 \times 7 = 1$. Otra forma podría haber sido usar que $1 = 3 \times 7 - 4 \times 5$ y llenar 3 veces el balde de 7 litros e ir pasando el agua al de 5, que cuando se llena hay que tirar su agua, etc.

Hay una gran variedad de problemas como el planteado donde se pide obtener una cierta cantidad entera de litros, c, con dos baldes con capacidades para k y m litros respectivamente, que tienen solución si y solamente el máximo común divisor entre k y m, (k, m), divide a c (y que c no sea mayor que k y m simultáneamente). Para esto se usa que (k, m) se puede expresar como combinación lineal entera de k y m, es decir, existen enteros s y t tales que $(k, m) = s \times k + t \times m$.

Solución 2. *Respuesta:* La silla se debe poner a $3 - \sqrt{6} \cong 0,55$ del grupo de los 3 parlantes (esta es la proporción con respecto a la distancia entre los dos grupos de parlantes, que tomamos como 1).

Se sabe que la intensidad del sonido en un lugar es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia con respecto a la fuente del sonido. Para tener la misma intensidad, si llamamos x a la proporción de la distancia desde el grupo de los 3 parlantes, planteamos la ecuación $\frac{3}{x^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$, que se resuelve $\iff 3(1-x)^2 = 2x^2$, $\iff x^2 - 6x + 3 = 0$, cuya solución es $x = 3 \pm \sqrt{6}$, y como x debe ser un número entre 0 y 1, queda solo $x = 3 - \sqrt{6}$.

Solución 3. *Respuesta:* Con 4 pesas se pueden pesar todos los pesos desde 1 hasta 40 kg y las 4 pesas deben pesar 1, 3, 9 y 27 kg., respectivamente.

En general, con n pesas, se pueden pesar todos los pesos desde 1 hasta $\frac{3^n-1}{2}$ y las pesas deben ser las potencias del 3, es decir $3^0 = 1$, $3^1 = 1$, $3^2 = 9, \ldots, 3^{n-1}$.

Para ir logrando los pesos se van poniendo las pesas así:

(1er platillo, 2do platillo): (1,0) para 1 kg.; (3,1) para 2 kg.; (3,0) para 3 kg. y (3+1,0) para 4 kg. Así vemos que con solo 2 pesas se pueden obtener los pesos del 1 al 4.

Al agregar una pesa de 9 kg., se ve que al ir restando de 9 los pesos del 4 al 1 se van logrando el 5, 6, 7 y 8, y luego al ir sumando al 9 los pesos del 1 al 4 se obtienen del 10 al 13, por lo que con 3 pesas se logran todos los pesos del 1 al 13. El procedimiento sería poner $(9, 3+1)$ para pesar 5, $(9, 3)$ para pesar 6, $(9+1, 3)$ para el 7, $(9, 1)$ para el 8, luego $(9, 0)$ para el 9, $(9+1, 0)$ para el 10, $(9+3, 1)$ para el 11, $(9+3, 0)$ para el 12 y $(9+3+1, 0)$ para el 13. Notemos que $4 = \frac{3^2-1}{2}$ y $13 = \frac{3^3-1}{2}$. La siguiente pesa es la de 27 kg., que al combinarla con los pesos ya obtenidos con las 3 primeras pesas, nos permite ir restando $27-13 = 14$,$\ldots$, $27-1 = 26$, luego 27, y luego sumar hasta llegar a $27+13 = 40$. Nuevamente $40 = \frac{3^4-1}{2}$.

La elección de las pesas es óptima, puesto que hemos hecho todas las combinaciones posibles de pesas en los dos platillos y han dado siempre pesos distintos, por lo que con 4 pesas y una balanza de dos platillos el máximo número posible de pesos que se pueden lograr es 40, y con n pesas es $\frac{3^n-1}{2}$.

Inductivamente se prueba sin dificultad el caso general.

Nota: Este es un problema clásico, formulado por Bachet de Méziriac en 1612, que lo enunció así: *Determinar el menor número de pesas, y su peso en libras, necesarias para pesar cualquier cantidad de libras entre 1 y 40, ambas incluidas* (*sin admitir fracciones*).

Este enunciado no es exactamente igual al dado, porque no hicimos conocer el número 40 de entrada, sino el de las 4 pesas.

Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $a_{11} = 4356$.
  a_n es la suma de los primeros n cubos; o el n-ésimo número triangular al cuadrado.

- $b_{21} = 63$.
  b_n es la suma parcial de los primeros n naturales, poniendo signo negativo al tercero de cada tres.

- $c_{36} = 361$.
  $c_{n+1} = c_n +$ el mayor factor primo de c_n.

- $d_{101} = 4$.
  $d_n =$ es la raíz cúbica entera de n.

Viene de la página 90.