

Revista de Educación Matemática

Consejo Editorial

Editor Ejecutivo

Leandro Cagliero, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Editores Asociados

Juan Carlos Pedraza, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Mónica Villarreal, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Comité Editorial

Abraham Arcavi, Weizmann Institute of Science, Israel

Carlos D'Andrea, Universitat de Barcelona, España

Cristina Esteley, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

José Nicolás Gerez Cuevas, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

Susana Paula Graça Carreira, Universidade do Algarve, Portugal

Patricio Herbst, Universidad de Michigan, Estados Unidos

Teresa Krick, Universidad de Buenos Aires - CONICET, Argentina

Ricardo Podestá, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Nélia Maria Pontes Amado, Universidade do Algarve, Portugal

Juan Pablo Rossetti, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Gabriel Rubén Soto, Fac. de Ingeniería, U. Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Argentina

Jhony Alexander Villa-Ochoa, Universidad de Antioquia, Colombia

Registro Nacional de la Propiedad Intelectual N° 168024

ISSN 0326-8780 (versión impresa)

ISSN 1852-2890 (en línea)

Página web: <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index>

Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

Revista de Educación Matemática

Volumen 36, N° 2 – 2021

ÍNDICE

- Editorial 3
- En memoria de Ubiratan D'Ambrosio
Semblanza de Marcelo C. Borba y Olenêva Sanches Sousa (traducción de Mónica E. Villarreal) 89

ARTÍCULOS

- UN RECORRIDO POR LAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD
María Laura Nores 7
- LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LA ESCUELA SECUNDARIA: MATE-
RIALES DIDÁCTICOS PARA FAVORECER EL ESTUDIO DE FIGURAS O CUERPOS GEOMÉTRICOS
Alicia Mirta Giarrizzo 47
- RETORNANDO AL HOTEL DE HILBERT
Juan P. Jorge y Hernán L. Vázquez 67

SECCIONES FIJAS

- ¿Sabías que...?
por L. Cagliero y R. Podestá 44
- Sección de Problemas
por J.P. Rossetti 95

También encontrarás al final las *¡Sucesiones al toque!*

Editorial

EN estos días en los que nos debatimos entre poder asumir la vivencia de una catástrofe inédita y trabajar por una pronta reconstrucción o dejarnos ganar por el desánimo y el desaliento, les acercamos un nuevo número de nuestra revista apostando con convicción y humildad a la primera alternativa, sin olvidar a los y las que hemos perdido.

Como adelantamos hace un año en referencia a la docencia, nuevos desafíos se nos fueron presentando ante la obligada virtualidad. Hemos aprendido mucho, hemos perdido hábitos que quisiéramos recuperar y creemos que lo que vendrá será igualmente desafiante, tratando de potenciar lo nuevo con lo bueno de siempre. Tal vez esta idea aplique a otros órdenes de nuestras vidas.

Entre las cosas que se extrañan y que parece difícil incorporar en la virtualidad, es el arte de la digresión en clase. La digresión es el recurso que tiene el docente de poder apartarse de su explicación, para referirse a un hecho, una anécdota o un asunto que no tiene relación directa con lo que se está enseñando. No es que en la virtualidad no esté permitida la digresión, pero la desconfianza fundada en el buen funcionamiento de los dispositivos técnicos, la necesidad a veces autoimpuesta de cumplir con el tema pautado en un tiempo que suele ser más limitado que el que se usa en el aula y fundamentalmente, la escasa retroalimentación o feedback con los y las estudiantes, la hacen difícil de introducir.

Las historias y anécdotas pueden ser adecuadas para presentar algunas ideas. No solo proporcionan un contexto a estas ideas sino que las animan e ilustran o simplemente marcan la pausa y el espacio necesarios para pensar. La digresión debe elegirse con sabiduría y prudencia. Hay un cuento judío que habla de un estudiante que le pregunta al rabino cómo se las arreglaba para ilustrar cada tema con una historia que se adecuaba perfectamente al tema del que estaba hablando. El rabino responde a este requerimiento con una historia ambientada en la Rusia de los zares. Cuenta que un reclutador del ejército del zar llega a una aldea buscando soldados. En la pared de un granero observa un montón de círculos de tiza, todos con un orificio de bala en el centro. El reclutador queda impresionado por tanta precisión y puntería y pregunta al dueño del granero quién era el eximio

tirador pues el zar necesitaba hombres así. El aldeano contesta: “¡Ah, es Shepsel, el hijo del zapatero, un muchacho muy especial. Todos los domingos viene a tirar unos tiros al granero”. El reclutador, entusiasmado le pregunta dónde vive. El aldeano le señala la esquina de la calle pero aclara antes de que el reclutador se vaya: “Vea usted señor, Shepsel primero dispara y después hace los círculos alrededor de los agujeros”. El rabino termina diciéndole al estudiante: “Yo hago lo mismo. No busco historias que cuadren con los temas; me limito a hablar de temas sobre los que ya tengo una historia para contar”. Permítanme pues, para tratar de recuperar el hábito, de hacer una breve digresión para ejemplificar.

EN el número anterior de la revista (ver Pedraza, J. C. (2021), Nota Editorial. *Revista de Educación Matemática*, 36(1)) hablamos de los números primos y de la Hipótesis de Riemann, problema aún hoy sin resolver. Durante el siglo XX Godfrey H. Hardy hizo aportes significativos a este problema. Flemático y ateo practicante, Hardy solo vivía para la matemática y para el cricket. Sus cuatro ambiciones principales, confesadas por él mismo, en orden de importancia lo describen perfectamente: 1) probar la Hipótesis de Riemann; 2) anotar el tanto ganador en una final de cricket; 3) matar a Mussolini y 4) demostrar la inexistencia de Dios (ver Hardy, G. H. (1940), *A Mathematician's Apology*. Cambridge, University Press.).

Solía ir a los partidos de cricket con paraguas para engañar a Dios, porque afirmaba que Dios, su enemigo, no le iba dar el gusto de hacer llover para darle la razón. De vez en vez viajaba a Copenhague a visitar a su amigo Harald Bohr, hermano del físico Niels Bohr que fue Premio Nobel de Física. Harald, además de matemático era un excelente jugador de fútbol. En 1908 integró el equipo danés de fútbol que compitió en los juegos olímpicos y que tiene el record no superado aún de la mayor goleada olímpica. Ese año Dinamarca le ganó a Francia en las semifinales 17 a 1. Su popularidad como futbolista fue tal que cuando defendió su tesis, el aula estaba repleta de aficionados al fútbol mucho más que de matemáticos. Se cuenta que en una de estas visitas de Hardy a Dinamarca, se desató una terrible tormenta cuando estaba regresando a Inglaterra. El regreso era por vía marítima (no había aviones comerciales en aquel entonces) y el tiempo estaba muy malo. Hardy evaluó que había un riesgo de vida mayor que el habitual al cruzar el Canal de la Mancha. Con flema inglesa, lejos de asustarse, antes de embarcar, procedió a escribirle una postal a Bohr con el siguiente mensaje: “he demostrado la Hipótesis de Riemann”.

El razonamiento de Hardy era el siguiente: si el barco se hunde, el mundo creería, con su amigo como vehículo, que había probado el problema más famoso de la matemática. Ahora bien, Dios no podía otorgarle a un ateo militante como él, semejante gloria. Por lo tanto cuidaría mucho de que el barco no zozobrara. Por supuesto Hardy tuvo razón y llegó sano y salvo a su casa en el Trinity College (ver

Leavitt, D. (2011), *Materiales y recursos didácticos en contextos comunitarios*. Anagrama).

Hardy decía que su mayor aporte a la matemática era haber descubierto a Ramanujan, el increíble matemático hindú. No podemos aspirar a tener el talento de Hardy, pero cuando volvamos a clases con nuestras digresiones, podemos como lo hacíamos antes de la pandemia, ir cada día en búsqueda de nuestro Ramanujan. Ese será nuestro mayor aporte.

EN este número podremos ver cómo se originan y deducen algunas distribuciones de probabilidad y cómo se relacionan entre sí. El fascinante mundo de la infinitud de los números naturales y sus subconjuntos, dan lugar a un interesante artículo sobre particiones generadas en forma recurrente. Algunos aspectos de la enseñanza de la geometría, son abordados desde la mirada de la resolución de problemas desafiantes para estudiar cómo se comportan figuras y cuerpos geométricos, conforme varían sus dimensiones. Finalmente, una semblanza del matemático brasileño recientemente fallecido, Ubiratán D'Ambrosio, nos introduce en el mundo de la etnomatemática. Además, las secciones fijas de Problemas y ¿Sabías que...?, siempre entretenidas.

Hasta la próxima.

Juan Carlos Pedraza

NOTA: Es muy importante para la RevEM contar con la colaboración de ustedes a través del envío de contribuciones de calidad para publicar. Solicitamos enviar los artículos preferentemente a través del sistema en la página web, pero si tienen inconvenientes pueden hacerlo a la dirección de correo electrónico que figura abajo.

Página web: <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index>

Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

UN RECORRIDO POR LAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

María Laura Nores

RESUMEN. Las variables aleatorias tienen una distribución de probabilidad que bajo ciertas circunstancias viene dada en términos de una expresión conocida. Muchas veces esta fórmula se deduce fácilmente del contexto en el que surge la variable aleatoria, mientras que en otras ocasiones no resulta tan claro. En este artículo, se busca dar un paso más en la comprensión de las distribuciones de probabilidad más conocidas, intentando profundizar en la motivación que las origina y en la deducción de su expresión, destacando además relaciones existentes entre algunas distribuciones. De esta manera, el trabajo contribuye a brindar elementos para discernir cuándo resulta razonable asumir cierta distribución para una variable aleatoria en consideración.

ABSTRACT. Random variables have a probability distribution that under certain circumstances is given in terms of a known expression. Many times this formula is easily deduced from the context in which the random variable arises, while at other times it is not so clear. In this article, we seek to take a further step in understanding the most well-known probability distributions, trying to get deep into the motivation that gives them origin and in the deduction of their expression, also highlighting existing relationships between some distributions. In this way, the work contributes to provide elements to discern when it is reasonable to assume a certain distribution for a random variable under consideration.

§1. Introducción: Probabilidad y variables aleatorias

Los fenómenos aleatorios corresponden a situaciones en las que no hay certeza sobre cuál de los posibles resultados ocurrirá. Uno de los ejemplos más claros es tirar un dado: sabemos que saldrá algún valor entre 1 y 6, pero no podemos conocer de antemano cuál es el valor concreto que ocurrirá. Podemos pensar en otros ejemplos, como cuál es la altura o el peso de una persona elegida al azar, qué temperatura hará mañana o si un paciente mejorará o no al tomar cierto

Palabras clave: variable aleatoria discreta, variable aleatoria continua, densidad, independencia.
Keywords: discrete random variable, continuous random variable, density, independence.

medicamento. La Probabilidad se dedica al estudio de estos fenómenos aleatorios, intentando cuantificar la incertidumbre.

En principio parecería que no podemos hacer afirmaciones sobre fenómenos aleatorios. Volviendo al ejemplo del dado, no podemos predecir cuál será el valor de una o de unas pocas observaciones. Sin embargo, a medida que tenemos más observaciones, la proporción de veces (frecuencia relativa) que ocurre un resultado particular se va acercando cada vez más a un cierto número que sí esperaríamos: es razonable pensar que el número 6 saldrá $\frac{1}{6}$ de las veces si el número de tiradas del dado es lo suficientemente grande. Así, podemos pensar a la probabilidad de un resultado como la proporción de veces que ese resultado ocurriría si repitiéramos el experimento muchas veces.

Esta interpretación frecuentista de la probabilidad no es aplicable en todas las situaciones, ya que no siempre es posible repetir el experimento. Pensemos en una afirmación del tipo “el sospechoso 1 tiene una probabilidad de 0,8 de haber cometido el crimen contra el Sr. López”. Entonces, la probabilidad puede entenderse también como una medida del “grado de creencia” respecto a que un resultado pueda ocurrir, basado en la información disponible. A esta se la conoce como una visión “personal” o “subjetiva” de la probabilidad, y es la base de la Estadística Bayesiana.

La definición más moderna de la probabilidad se basa en una serie de axiomas, que intentan reflejar las propiedades que esta debería cumplir y que concuerdan con nuestra noción intuitiva de probabilidad, más allá de la interpretación que querramos darle (Ross, 2014). Veamos en qué consiste esta definición. Dado un fenómeno aleatorio, se llama espacio muestral al conjunto de todos los posibles resultados y se denota con Ω . Nosotros querríamos asignar probabilidad a subconjuntos del espacio muestral, denominados eventos, los cuales corresponden a un resultado particular (punto muestral) o a un grupo de posibles resultados. Así, dado un evento A en un espacio muestral Ω , llamaremos $P(A)$ a la probabilidad de que ocurra A , donde la función P satisface los siguientes axiomas:

- (i) $0 \leq P(A)$ para todo evento A .
- (ii) $P(\Omega) = 1$.
- (iii) Si A_1, A_2, \dots es una colección de eventos mutuamente excluyentes o disjuntos ($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Como consecuencia de estas condiciones, resulta que $P(\emptyset) = 0$, (iii) vale para una colección finita de eventos, $P(A^c) = 1 - P(A)$, con A^c el complemento de A , y $P(A) \leq 1$ para todo evento A . Notemos que estos axiomas no nos indican cómo asignar probabilidades a los eventos, solamente nos dicen cuáles son las

propiedades que debería cumplir esa asignación. Si en el ejemplo de tirar un dado asignamos probabilidad de $\frac{1}{6}$ a cada uno de los 6 resultados posibles y para cualquier evento A calculamos $P(A)$ como la suma de las probabilidades de los resultados incluidos en A , cumpliremos con las propiedades requeridas. Pero no *probamos* que cada resultado tenga probabilidad de $\frac{1}{6}$, partimos de una *asignación* de $\frac{1}{6}$ que hicimos en base a nuestra intuición y experiencia (Ash, 2008), que corresponde a pensar que todos los resultados son igualmente probables.

En un espacio muestral con un número finito de puntos, si todos los puntos tienen la misma probabilidad de ocurrencia, la probabilidad de un evento A se calcula como el número de casos favorables (número de puntos en el evento A) sobre número de casos posibles (número de puntos en el espacio muestral). Pero en el caso general esto no es aplicable.

Cuando hablamos de probabilidad, un concepto que no podemos dejar de mencionar es el de *probabilidad condicional*. ¿Qué información adicional nos da saber que ocurrió un evento A ? ¿Cómo afecta esto a la probabilidad de ocurrencia de otro evento, digamos, B ? ¿Siguiendo siendo la misma, es mayor o es menor? Si $P(A) > 0$, definimos la probabilidad condicional de B dado A como

$$P(B | A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

La interpretación de la probabilidad condicional en términos de frecuencias relativas es intuitiva: si repetimos el experimento muchas veces, calculamos la proporción de veces que ocurrió B restringiéndonos a los casos en que ocurrió A . Esto es, número de veces que ocurrió A y B sobre número de veces que ocurrió A , que también puede verse como proporción de veces que ocurrió $B \cap A$ sobre proporción de veces que ocurrió A . Estas proporciones, como vimos recién, tienden a $P(B \cap A)$ y $P(A)$, respectivamente. Así, si sabemos que al arrojar un dado el resultado fue par, la probabilidad condicional de que sea 6 es $\frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$.

Notemos que si la ocurrencia de A no tiene efecto en la ocurrencia de B , esto es $P(B | A) = P(B)$, resulta por definición que $P(B \cap A) = P(B)P(A)$ y la recíproca también es válida. Así, diremos que dos eventos son *independientes* si la probabilidad de la intersección es el producto de las probabilidades. Esto se extiende a n eventos: diremos que los eventos A_1, \dots, A_n son independientes si la probabilidad de la intersección de cualquier subconjunto de estos eventos es el producto de las probabilidades de los eventos involucrados.

Luego de este repaso de las nociones de probabilidad, vamos a introducir el concepto de *variable aleatoria*. En un fenómeno aleatorio, muchas veces no estamos interesados en los resultados en sí mismos sino en una cantidad numérica determinada por el resultado, una función del resultado. Por ejemplo, si tiramos dos dados, quizás no nos interese el valor que toma cada dado sino la suma de ambos

valores. Si elegimos una persona al azar de una población, nos puede interesar su altura, su peso, si tiene o no obra social, etc.

Así, una variable aleatoria es una medición numérica del resultado de un fenómeno aleatorio. Formalmente, es una función

$$Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

que asigna un valor numérico a cada punto del espacio muestral, a cada posible resultado del experimento. En general, se utilizan letras mayúscula de imprenta para denotar a las variables aleatorias (X, Y, Z, \dots) y minúscula para los valores que pueden tomar.

Dado que una variable aleatoria se refiere al resultado de un fenómeno aleatorio, cada valor posible que asume la variable aleatoria tiene una probabilidad específica de ocurrencia. La distribución de probabilidad de una variable aleatoria especifica sus posibles valores y sus correspondientes probabilidades ([Agresti, Franklin, y Klingenberg, 2018](#)).

Para $y \in \mathbb{R}$, se define el evento $\{Y = y\}$ como

$$\{Y = y\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y\},$$

es decir, el conjunto de puntos del espacio muestral que van a parar al valor y por medio de la variable aleatoria Y . Luego, la probabilidad de que Y tome el valor y , $P(Y = y)$, corresponde a la probabilidad de que ocurra ese evento. De manera similar, $P(Y \leq y)$ es la probabilidad del evento formado por los puntos del espacio muestral que, al aplicarles la función Y , toman un valor menor o igual a y . La función F que a cada valor y en \mathbb{R} le asigna esta probabilidad, esto es,

$$F(y) = P(Y \leq y),$$

se denomina función de distribución (o función de distribución acumulada) de Y . Se puede probar que F cumple las siguientes propiedades (ver, por ejemplo, [Hoel, Port, y Stone \(1971\)](#)):

- $0 \leq F(y) \leq 1$ para todo y en \mathbb{R} .
- F es no decreciente (si $x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$).
- $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y) = 0$.
- $\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = 1$.
- F es continua por derecha ($\lim_{y \rightarrow y_0^+} F(y) = F(y_0)$ para todo y_0 en \mathbb{R}).

Cuando se quiere distinguir la función de distribución de una variable aleatoria Y respecto de la de otras variables aleatorias, se suele usar la notación F_Y .

Una de las medidas de tendencia central más utilizadas para describir una variable aleatoria es, sin dudas, la *media*. Desde una interpretación frecuentista,

es el valor que obtendríamos para el promedio de los valores observados de esa variable aleatoria, si repitiéramos el experimento muchas veces. Pensemos en una variable Y que toma un número finito de valores y_1, \dots, y_r con probabilidades p_1, \dots, p_r , respectivamente, y que el experimento se realiza N veces. Luego, el promedio de los valores observados de Y sería

$$\frac{y_1 N_1 + \dots + y_r N_r}{N},$$

donde N_i es la cantidad de veces que ocurre el resultado y_i y $\sum_{i=1}^r N_i = N$. Como $\frac{N_i}{N}$ tiende a p_i , pues es la proporción de veces que ocurre el resultado y_i , el promedio se acerca al valor $y_1 p_1 + \dots + y_r p_r$, que es como se define la media de Y . Así, la media es un promedio ponderado de los valores que asume la variable, donde las ponderaciones son las probabilidades de ocurrencia de esos valores, de manera que los valores que son más probables reciben mayor peso. Es importante recalcar que la media no refleja el valor que obtendríamos en una observación individual, sino lo que esperaríamos para el promedio en una larga cantidad de observaciones (Agresti y cols., 2018). La media de una variable aleatoria Y también recibe el nombre de valor medio, valor esperado o esperanza de Y y se denota $E(Y)$ o con la letra griega μ .

Además de dar una medida de centralidad como es la media, es conveniente conocer el grado de dispersión de la variable. Para cuantificar la variabilidad de Y , podemos pensar en la variable aleatoria que mide las desviaciones respecto a la media, esto es, $Y - E(Y)$. Como estas desviaciones pueden ser positivas o negativas, para evitar el signo elevamos esta variable al cuadrado y luego calculamos su media. Así, obtenemos una medida de dispersión o variabilidad conocida como *varianza*:

$$Var(Y) = E((Y - E(Y))^2).$$

Usualmente se denota con σ^2 . A mayor concentración de los valores de Y en torno a la media μ , menor σ^2 . Tomando la raíz cuadrada de la varianza, obtenemos otra medida de variabilidad conocida como *desvío* o *desviación estándar*, denotada con σ .

Existen distintos tipos de variables aleatorias según los valores que pueden asumir. En las siguientes secciones veremos definiciones un poco más precisas, pero por ahora daremos una idea de la clasificación de variables aleatorias en discretas y continuas.

Una variable aleatoria se dice *discreta* si toma un conjunto de valores que están “separados” entre sí. En muchos casos están asociadas a conteos y los valores posibles son los números naturales o un subconjunto de ellos. Por ejemplo, cantidad de hijos, número de accidentes en una ruta en un año, número de pacientes que responden a una medicación de un total de pacientes que la recibieron, etc. Por otro lado, una variable aleatoria es *continua* si puede tomar valores que forman un intervalo en vez de un conjunto de valores puntuales. Por ejemplo, la altura, el peso,

la distancia recorrida hasta lograr un determinado objetivo, el tiempo en realizar una tarea, etc. Veremos que la distribución de una variable aleatoria continua se especifica por medio de una curva que permite determinar la probabilidad de que la variable aleatoria caiga en un intervalo particular de valores, la cual está dada por el área bajo la curva en ese intervalo.

Si bien la distribución de una variable aleatoria en principio podría estar dada en términos de cualquier expresión, existen distribuciones que han sido ampliamente estudiadas porque se aplican en muchas situaciones con características comunes. Para algunas distribuciones de probabilidad conocidas, en la mayoría de los cursos de Probabilidad se presenta una motivación y a partir de la misma se deduce una expresión para el cálculo de las probabilidades asociadas a la variable aleatoria. Este suele ser el caso de las distribuciones binomial, geométrica, binomial negativa e hipergeométrica. Pero para otras distribuciones como la de Poisson, exponencial, Gamma, se suele presentar una fórmula y solamente se comenta en qué situaciones puede ser conveniente asumir una distribución de ese tipo, sin una justificación clara. En este artículo estudiaremos distribuciones que son familiares para el lector que haya tenido un curso de Probabilidad, con el objetivo de motivar y comprender más a fondo su definición y volver más tangible su uso. También, con el mismo fin, se presentan algunos resultados interesantes que conectan a algunas distribuciones entre sí.

A continuación, emprendemos nuestro recorrido por las distintas distribuciones de probabilidad, comenzando por las variables aleatorias discretas para luego estudiar las continuas.

§2. Variables aleatorias discretas

Formalmente, una variable aleatoria Y se dice discreta si asume una cantidad finita de valores o infinita numerable (es decir, los valores que puede tomar se pueden poner en correspondencia con los números naturales). Se llama función de densidad discreta, función de probabilidad (puntual) o distribución de probabilidad de Y a la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(y) = P(Y = y) \quad \text{para todo } y \text{ en } \mathbb{R}.$$

También se la llama función de frecuencia o función de masa de probabilidad y se suele usar la notación $p(y)$. Así, la función asigna a cada valor real la probabilidad de que la variable Y asuma ese valor.

Como el conjunto de valores que puede tomar Y (rango de Y) es numerable, podemos escribirlo como $\mathcal{R}(Y) = \{y_1, y_2, \dots\}$. Luego, f toma valor 0 para y fuera de ese conjunto, ya que $\{Y = y\} = \emptyset$ en ese caso. Además, $\sum_i f(y_i) = 1$, ya que la unión de todos los eventos $\{Y = y_i\}$ forma el espacio muestral Ω y P cumple los axiomas (ii) y (iii) por ser una función de probabilidad. A los valores que toma la

variable Y con probabilidad diferente de 0 se los suele llamar valores posibles de Y .

El valor esperado de Y se define como

$$E(Y) = \sum_i y_i f(y_i)$$

si $\sum_i |y_i| f(y_i) < \infty$, en cuyo caso decimos que Y tiene esperanza finita.

Si Y^2 tiene esperanza finita, se define la varianza de Y como

$$(2.1) \quad \text{Var}(Y) = E(Y - E(Y))^2.$$

Utilizando propiedades de la esperanza, se puede deducir la siguiente fórmula útil para el cálculo de la varianza:

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2,$$

donde $E(Y^2)$ puede calcularse como $E(Y^2) = \sum_i y_i^2 f(y_i)$.

La función de distribución F tiene un aspecto muy característico en las variables aleatorias discretas: si $y_1 < y_2 < y_3 < \dots$, F tiene forma de escalera, constante en $(y_i, y_{i+1}]$, con un salto en y_i de magnitud $f(y_i) = P(Y = y_i)$. Un ejemplo de esto puede verse en la Figura 1 B), correspondiente a la distribución binomial, que veremos a continuación.

2.1. La distribución binomial. Empezaremos nuestro recorrido por la distribución binomial, una de las más conocidas para variables aleatorias discretas. Surge en el contexto de un experimento binomial, el cual está definido por lo siguiente (Devore, 2005; Wackerly, Mendenhall, y Scheaffer, 2010):

- El experimento consiste en una secuencia de un número fijo n de ensayos independientes (repeticiones de un experimento más pequeño, donde el resultado de cada uno de estos experimentos no tiene influencia en el resultado de los otros).
- Cada ensayo puede dar como resultado uno de dos resultados posibles, generalmente denotados como éxito y fracaso (ejemplos: sí/no, presencia/ausencia, 1/0).
- La probabilidad de éxito es la misma en todos los ensayos y se denota con p .

Uno de los ejemplos más claros consiste en tirar n veces una moneda: en cada tirada se puede obtener cara (éxito) o cruz (fracaso) y el resultado obtenido en cada tirada no influye en el resto de las tiradas. Además, la probabilidad de obtener cara en una tirada cualquiera es siempre p (con $p = 0,5$ si la moneda es "honest").

Cabe mencionar que la denominación "éxito" no tiene que tener necesariamente una connotación positiva; puede referirse a cualquiera de los dos resultados posibles, pero hay que especificar a cuál de ellos ya que p corresponde a la probabilidad de éxito (y por lo tanto $1 - p$, a la probabilidad de fracaso).

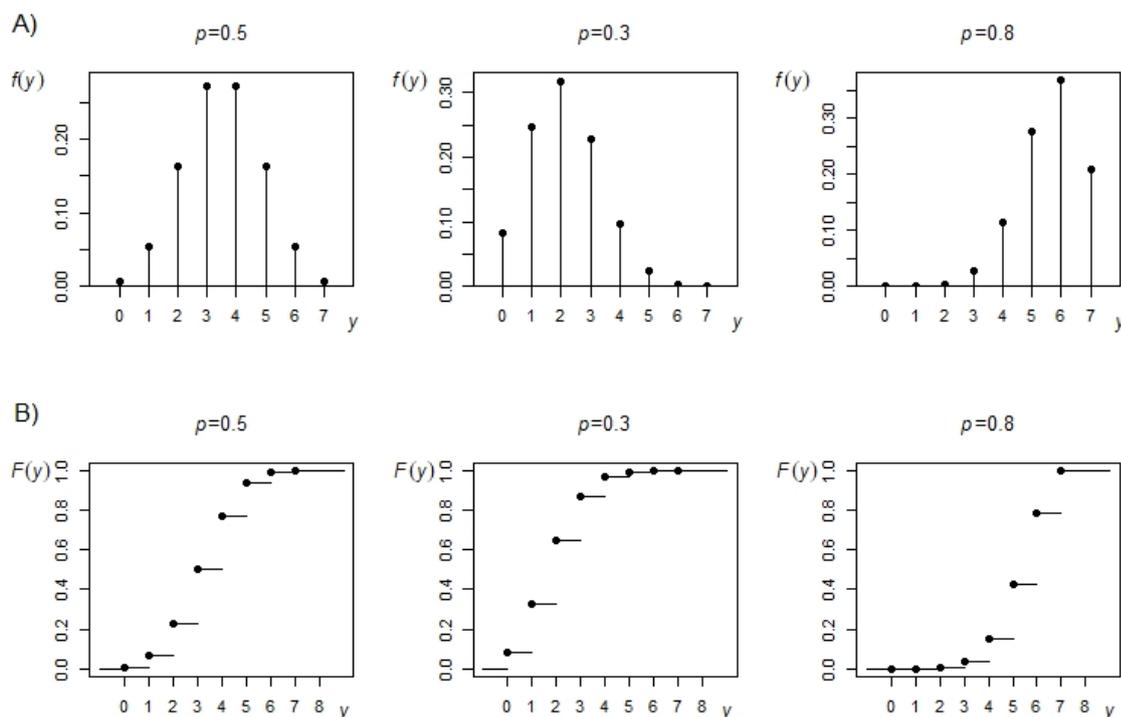


FIGURA 1. Gráficas de la función de masa de probabilidad (A) y la función de distribución (B) de una variable aleatoria con distribución $B(7, p)$ para distintos valores de p .

Para un experimento binomial, un punto ω en el espacio muestral puede representarse por una n -upla donde en la posición i hay un 1 si el ensayo i es un éxito y hay un 0 si es fracaso.

Consideremos ahora la variable aleatoria Y que cuenta el *número de éxitos* entre los n ensayos independientes. ¿Cuál es la distribución de Y ? Claramente Y toma valores en el conjunto $\{0, 1, \dots, n\}$. Tomemos k un número en este conjunto; estamos interesados en calcular $P(Y = k)$. Notemos que un punto ω está en el evento $\{Y = k\}$ si tiene k unos y $n - k$ ceros. Imaginemos, sin pérdida de generalidad, que los unos están en los primeros k lugares. Esto es,

$$\omega = (\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}).$$

Si definimos, para $i = 1, \dots, n$, el evento

$$A_i = \{\text{el ensayo } i \text{ es éxito}\},$$

ω corresponde al evento

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap A_{k+1}^c \cap A_{k+2}^c \cap \dots \cap A_n^c,$$

ya que simultáneamente ocurren los n eventos. Además, como estos eventos son independientes, resulta

$$P(\{\omega\}) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_k)P(A_{k+1}^c)P(A_{k+2}^c) \cdots P(A_n^c).$$

Como en cada ensayo la probabilidad de éxito es p y la probabilidad de fracaso es $1 - p$, resulta que

$$P(\{\omega\}) = p^k(1 - p)^{n-k},$$

y esto es así para todo ω en el evento $\{Y = k\}$. Ahora, ¿cuántos puntos hay en este evento? Tantos como formas hay de elegir k lugares (para poder ubicar los unos) entre n , esto es, el número combinatorio $\binom{n}{k}$. Así,

$$P(Y = k) = \binom{n}{k}p^k(1 - p)^{n-k}.$$

Luego, la función de densidad discreta de Y es

$$f(y) = \begin{cases} \binom{n}{y}p^y(1 - p)^{n-y}, & y = 0, 1, \dots, n, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Se dice que Y tiene distribución binomial con parámetros n y p y se denota por

$$Y \sim B(n, p).$$

Cuando $n = 1$, se dice que Y es una variable aleatoria de Bernoulli y toma valores 1 y 0 con probabilidades p y $1 - p$ respectivamente.

Ejemplo: Si tiramos 7 veces una moneda honesta, el número de caras en las 7 tiradas tiene distribución $B(7, \frac{1}{2})$. Si la moneda no es honesta y la probabilidad de obtener cara es un valor p entre 0 y 1, diferente de $\frac{1}{2}$, entonces el número de caras en las 7 tiradas tendrá distribución $B(7, p)$. La Figura 1 muestra la gráfica de la función de masa de probabilidad (A) y de distribución acumulada (B) de una distribución $B(7, p)$ para distintos valores de p .

Para ejemplificar el cálculo de esperanza y varianza de una variable aleatoria discreta, haremos el desarrollo para la distribución binomial.

Proposición: Sea $Y \sim B(n, p)$. Entonces, $E(Y) = np$ y $Var(Y) = np(1 - p)$.

Demostración: Para calcular $E(Y)$, notemos primero que $y\binom{n}{y} = 0$ para $y = 0$ y para $y = 1, \dots, n$ vale

$$y\frac{n!}{y(y-1)!(n-y)!} = \frac{n(n-1)!}{(y-1)!(n-1-(y-1))!} = n\binom{n-1}{y-1}.$$

Luego,

$$E(Y) = \sum_{y=0}^n y\binom{n}{y}p^y(1-p)^{n-y} = \sum_{y=1}^n n\binom{n-1}{y-1}p^y(1-p)^{n-y}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} E(Y) &= np \sum_{y=1}^n \binom{n-1}{y-1} p^{y-1} (1-p)^{n-1-(y-1)} \\ &= np \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{n-1-i} = np(p + (1-p))^{n-1} = np, \end{aligned}$$

tomando $i = y - 1$. Otra forma de ver que la última sumatoria da 1, es notar que estamos sumando las probabilidades asociadas a una variable binomial con parámetros $n - 1$ y p . Así, el número esperado de éxitos entre n ensayos independientes es np , donde p es la probabilidad de éxito en cada ensayo individual.

Para calcular $E(Y^2)$, utilizaremos el siguiente truco que también sirve para otras distribuciones: escribimos y^2 como

$$y(y - 1 + 1) = y(y - 1) + y.$$

Como el término asociado a $y = 0$ es 0, resulta

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{y=0}^n y^2 \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} \\ &= \sum_{y=1}^n y(y-1) \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} + \sum_{y=1}^n y \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} \end{aligned}$$

y el segundo término es $E(Y) = np$. Ahora, $y(y-1) \binom{n}{y} = 0$ para $y = 1$, y para $y = 2, \dots, n$ vale

$$y(y-1) \frac{n(n-1)(n-2)!}{y(y-1)(y-2)!(n-2-(y-2))!} = n(n-1) \binom{n-2}{y-2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{y=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{y-2} p^y (1-p)^{n-y} + np \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{y=2}^n \binom{n-2}{y-2} p^{y-2} (1-p)^{n-2-(y-2)} + np \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} p^i (1-p)^{n-2-i} + np \\ &= n(n-1)p^2(p + (1-p))^{n-2} + np = n(n-1)p^2 + np, \end{aligned}$$

tomando $i = y - 2$. Aquí también podemos observar que la última sumatoria da 1 por ser suma de las probabilidades asociadas a una variable binomial con parámetros $n - 2$ y p . Finalmente,

$$\text{Var}(Y) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = -np^2 + np = np(1-p),$$

como queríamos demostrar. \square

2.2. La distribución hipergeométrica. Sigamos nuestro recorrido por la distribución hipergeométrica, comenzando por entender en qué situación se origina. Consideremos una población con N objetos, de los cuales M son de tipo I y $N - M$ de tipo II. Se toma al azar una muestra de tamaño n (con $n \leq N$) *sin reposición*. ¿Qué distribución tiene la variable Y que cuenta el número de objetos de tipo I en la muestra? Como la muestra es elegida al azar, todos los posibles subconjuntos de n objetos tendrán la misma probabilidad $\frac{1}{\binom{N}{n}}$ de ser seleccionados. La cantidad de formas de elegir n objetos de los cuales y sean de tipo I y los restantes $n - y$ sean de tipo II es $\binom{M}{y} \binom{N-M}{n-y}$, con lo cual

$$P(Y = y) = \frac{\binom{M}{y} \binom{N-M}{n-y}}{\binom{N}{n}}.$$

Notar que esto tiene sentido en principio para y un entero entre 0 y n , ya que se eligen n objetos en total. Además, debe ser $y \leq M$ (porque no puede haber más objetos de tipo I en la muestra que en toda la población) y también $n - y \leq N - M$ (porque no puede haber más objetos de tipo II en la muestra que en toda la población), con lo cual debe ocurrir $y \geq n - N + M$. Así, se dice que una variable Y tiene distribución hipergeométrica de parámetros n , M y N y se denota

$$Y \sim \mathcal{H}(n, M, N)$$

si la función de densidad discreta está dada por

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\binom{M}{y} \binom{N-M}{n-y}}{\binom{N}{n}}, & \text{máx}\{0, n - N + M\} \leq y \leq \text{mín}\{n, M\}, y \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Ejemplo (Wackerly y cols., 2010): Un producto industrial se envía en lotes de 20 unidades. El proceso de control de calidad requiere que se muestreen 5 artículos de cada lote y el lote completo será rechazado si contiene más de un artículo defectuoso. Si un lote contiene 4 artículos defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que sea rechazado?

Solución: Sea $Y =$ Número de productos defectuosos en la muestra de 5 artículos. Luego, $Y \sim \mathcal{H}(5, 4, 20)$. Así,

$$\begin{aligned} P(\text{rechazar el lote}) &= P(Y \geq 2) \\ &= 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) \\ &= 1 - \frac{\binom{4}{0} \binom{16}{5}}{\binom{20}{5}} - \frac{\binom{4}{1} \binom{16}{4}}{\binom{20}{5}} \\ &= 1 - 0,2817 - 0,4696 = 0,2487. \end{aligned}$$

2.3. Conexión entre las distribuciones binomial e hipergeométrica. Consideremos la siguiente situación, que nos hará reflexionar sobre similitudes y diferencias entre las distribuciones binomial e hipergeométrica:

Ejemplo: Una máquina produce tornillos, de los cuales el 10 % son defectuosos. Encuentre la probabilidad de que una caja de 3 tornillos contenga a lo sumo uno defectuoso.

Solución: ¿Qué distribución tiene la variable aleatoria que cuenta el número de tornillos defectuosos en la caja? ¿Es binomial? ¿Es hipergeométrica? Sería binomial si la muestra se extrajera *con reposición*; es decir, cada vez que saco un tornillo de la producción total, lo vuelvo a poner antes de extraer otro tornillo. Así, cada tornillo extraído sería, independientemente de los otros tornillos, defectuoso o no defectuoso con probabilidades 0,1 y 0,9 respectivamente (las proporciones de tornillos defectuosos y no defectuosos en la producción total de tornillos). Pero aquí el muestreo es *sin reposición*, por lo cual si el primer tornillo es defectuoso, las proporciones de tornillos defectuosos y no defectuosos en el conjunto de los tornillos restantes cambian. Nuestra variable es en esencia hipergeométrica, pero como no contamos con el tamaño N de la población de la cual la muestra de 3 tornillos fue extraída, no podemos realizar el cálculo de las probabilidades. Lo que sí es razonable considerar es que N es grande, ya que la producción de tornillos no va a ser de unos pocos tornillos... Para ilustrar, supongamos que $N = 10000$. Si el 10 % de los tornillos son defectuosos, entonces hay 1000 tornillos defectuosos y 9000 no defectuosos. Luego, la variable Y que cuenta el número de tornillos defectuosos en la muestra de 3 tornillos tiene distribución $\mathcal{H}(3, 1000, 10000)$.

Consideremos los eventos $B_0 = \{\text{ninguno de los tres tornillos es defectuoso}\}$ y $B_1 = \{\text{exactamente uno de los tres tornillos es defectuoso}\}$. Luego, la probabilidad buscada es

$$P(Y \leq 1) = P(B_0 \cup B_1) = P(B_0) + P(B_1),$$

con

$$P(B_0) = P(Y = 0) = \frac{\binom{1000}{0} \binom{9000}{3}}{\binom{10000}{3}} = \frac{9000 \times 8999 \times 8998}{10000 \times 9999 \times 9998} \simeq 0,9^3$$

y

$$P(B_1) = P(Y = 1) = \frac{\binom{1000}{1} \binom{9000}{2}}{\binom{10000}{3}} = 3 \frac{1000 \times 9000 \times 8999}{10000 \times 9999 \times 9998} \simeq 3 \times 0,1 \times 0,9^2.$$

Así,

$$P(Y \leq 1) \simeq 0,9^3 + 3 \times 0,1 \times 0,9^2 = P(X \leq 1)$$

para $X \sim B(3; 0,10)$. Es decir, podemos utilizar la distribución binomial para *aproxi-*
mar la probabilidad deseada, sin necesidad de conocer el tamaño de la población, sino solamente la proporción de éxitos en la población.

Veamos formalmente un resultado que muestra que la distribución hipergeométrica puede aproximarse por la distribución binomial si el tamaño de la muestra es pequeño en relación al tamaño de la población (Blitzstein y Hwang, 2015; Ross, 2014).

Aproximación a la distribución hipergeométrica por la distribución binomial:

Supongamos que $Y \sim \mathcal{H}(n, M, N)$ y que el tamaño de la población N crece de manera tal que la proporción $\frac{M}{N}$ de objetos tipo I se mantiene constante, igual a p . Luego,

$$P(Y = y) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}.$$

Demostración:

$$P(Y = y) = \frac{\binom{M}{y} \binom{N-M}{n-y}}{\binom{N}{n}} = \frac{M!}{y!(M-y)!} \frac{(N-M)!}{(n-y)!(N-M-n+y)!} \frac{n!(N-n)!}{N!}$$

de donde

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} \frac{M(M-1)\cdots(M-y+1)(N-M)(N-M-1)\cdots(N-M-n+y+1)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)}.$$

Notar que el numerador tiene $y + (n-y) = n$ factores, al igual que el denominador. Dividiendo cada factor de numerador y denominador por N y reemplazando $\frac{M}{N}$ por p se obtiene

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} \frac{p(p - \frac{1}{N}) \cdots (p - \frac{y-1}{N})(1-p)(1-p - \frac{1}{N}) \cdots (1-p - \frac{n-y-1}{N})}{(1 - \frac{1}{N})(1 - \frac{2}{N}) \cdots (1 - \frac{n-1}{N})}$$

de donde se deduce que

$$P(Y = y) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y},$$

que es la probabilidad de que una variable aleatoria binomial de parámetros n y p tome el valor y . \square

Luego, para N suficientemente grande en relación al tamaño de la muestra n , podemos aproximar a la distribución $\mathcal{H}(n, M, N)$ por la $B(n, \frac{M}{N})$, donde $p = \frac{M}{N}$ es la proporción de objetos tipo I ("éxitos") en la población. La aproximación es buena si $\frac{n}{N} < 0,05$ y p no está demasiado cerca de 0 ni de 1 (Devore, 2005). Así, a medida que el tamaño de la población N total aumenta mucho en relación al tamaño de la muestra que se extrae, el muestreo con reemplazo (que se corresponde con la distribución binomial) y el muestreo sin reemplazo (distribución hipergeométrica) se vuelven esencialmente equivalentes. Algo importante que volvemos a recalcar es que la aproximación binomial no requiere conocer el tamaño de la población, sino solamente la proporción de objetos de cada tipo.

Tabla 1: $P(X = x)$ para $x = 0, \dots, 5$, cuando $X \sim \mathcal{H}(n, M, N)$ y la correspondiente aproximación mediante la distribución $B(n, \frac{M}{N})$.

Distribución	x					
	0	1	2	3	4	5
$\mathcal{H}(5, 10, 100)$	0,5838	0,3394	0,0702	0,0064	0,0003	0,0000
$B(5; 0,1)$	0,5905	0,3281	0,0729	0,0081	0,0005	0,0000
$\mathcal{H}(10, 40, 200)$	0,1013	0,2683	0,3098	0,2052	0,0863	0,0240
$B(10; 0,2)$	0,1074	0,2684	0,3020	0,2013	0,0881	0,0264
$\mathcal{H}(10, 90, 300)$	0,0264	0,1184	0,2348	0,2714	0,2025	0,1020
$B(10; 0,3)$	0,0282	0,1211	0,2335	0,2668	0,2001	0,1029
$\mathcal{H}(5, 160, 400)$	0,0765	0,2592	0,3478	0,2309	0,0758	0,0099
$B(5; 0,4)$	0,0778	0,2592	0,3456	0,2304	0,0768	0,0102
$\mathcal{H}(7, 250, 500)$	0,0075	0,0537	0,1637	0,2751	0,2751	0,1637
$B(7; 0,5)$	0,0078	0,0547	0,1641	0,2734	0,2734	0,1641

Así, esta aproximación nos permite tratar como binomial al número de individuos en una muestra extraída al azar de una población (sin reposición, relativamente pequeña) que poseen una cierta característica, siendo p la proporción de individuos de la población que la poseen y n el tamaño de la muestra extraída. Por ejemplo, si se toma una muestra al azar de personas de una ciudad, se puede utilizar la distribución binomial para calcular la probabilidad de que haya una cierta cantidad de personas en la muestra que estén a favor de un cierto candidato, que fumen, que usen una determinada tarjeta de crédito, o que posean una cierta característica física (color específico de cabello, ojos, etc.). Además, si p es desconocido, podremos estimarlo a partir de la proporción de éxitos observada en la muestra.

La Tabla 1 ilustra cuán buena es la aproximación para distintos valores de los parámetros. Los cálculos de las probabilidades se realizaron utilizando el software R, versión 3.6.1 (R Core Team, 2019), mediante las funciones `dhyper` y `dbinom`.

2.4. La distribución de Poisson. Esta distribución ya no tiene una interpretación tan directa y generalmente es presentada en términos de la función de densidad discreta o función de masa de probabilidad, dada por

$$(2.2) \quad f(y) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!}, & y = 0, 1, \dots, \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

En este caso, se dice que la variable aleatoria Y tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$ y se denota

$$Y \sim \mathcal{P}(\lambda).$$

Notemos que el rango de Y ya no es finito sino que es infinito numerable. ¿Cómo podemos llegar a la expresión dada en (2.2)? A continuación veremos que la distribución de Poisson se puede utilizar como aproximación de la distribución binomial de parámetros n y p cuando n es, de manera relativa, grande, la probabilidad de éxito p es pequeña y $\lambda = np$ toma un valor moderado (Canavos, 1995). El resultado es el siguiente (Wackerly y cols., 2010; Ross, 2014; Hoel y cols., 1971).

Aproximación a la distribución binomial por la distribución de Poisson: Supongamos $Y \sim B(n, p)$ con $p = \frac{\lambda}{n}$, para algún $\lambda > 0$. Entonces,

$$P(Y = y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!}, \quad y = 0, 1, \dots$$

Demostración:

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} = \frac{n(n-1) \cdots (n-y+1) \lambda^y}{y! n^y} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-y} \\ &= \frac{\lambda^y}{y!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{y-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-y}. \end{aligned}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{i}{n}\right) = 1$ para $i = 1, \dots, y-1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-y} = 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$, resulta que $P(Y = y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!}$, que es la probabilidad de que una variable aleatoria con distribución $\mathcal{P}(\lambda)$ tome el valor y . \square

También puede obtenerse la aproximación de Poisson a la distribución binomial considerando que $n \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow 0$ de manera tal que np tiende a un valor $\lambda > 0$ (Devore, 2005; Grimmett y Stirzaker, 2001). Como regla empírica, esta aproximación se puede aplicar cuando $n \geq 100$, $p \leq 0,01$ y $np \leq 20$ (Devore, 2005).

La Tabla 2 muestra la aproximación para distintos valores de n , p y $\lambda = np$. Las probabilidades se calcularon utilizando las funciones `dbinom` y `dpois` de R.

Tabla 2: $P(X = x)$ para $x = 0, \dots, 5$, cuando $X \sim B(n, p)$ y la correspondiente aproximación mediante la distribución de Poisson con $\lambda = np$.

Distribución	x					
	0	1	2	3	4	5
$B(100; 0,01)$	0,3660	0,3697	0,1849	0,0610	0,0149	0,0029
$\mathcal{P}(1)$	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031
$B(200; 0,01)$	0,1340	0,2707	0,2720	0,1814	0,0902	0,0357
$\mathcal{P}(2)$	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361
$B(500; 0,006)$	0,0493	0,1489	0,2243	0,2247	0,1685	0,1009
$\mathcal{P}(3)$	0,0498	0,1494	0,2240	0,2240	0,1680	0,1008
$B(1000; 0,004)$	0,0182	0,0730	0,1464	0,1956	0,1958	0,1566
$\mathcal{P}(4)$	0,0183	0,0733	0,1465	0,1954	0,1954	0,1563

La distribución de Poisson se utiliza frecuentemente para modelar la distribución de probabilidad del número de sucesos o eventos que ocurren en un determinado tiempo o espacio, como el número de entradas a una página web en un año, el número de personas que ingresan a un banco o a un comercio en un día, el número de árboles de una determinada especie por km^2 , entre otros. ¿Por qué esto es así? Se debe a que, como recién vimos, se puede aproximar a la distribución binomial por medio de la distribución de Poisson. Siguiendo a [Wackerly y cols. \(2010\)](#), pensemos en el número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo de longitud t , digamos $[0, t]$. Dividamos el intervalo $[0, t]$ en n subintervalos, con n suficientemente grande, de manera tal que la longitud de cada subintervalo sea tan pequeña que a lo sumo un evento podría ocurrir en él con probabilidad diferente de cero y consideremos que esta probabilidad es la misma para todos los subintervalos. Esto es:

- $P(\text{ocurre exactamente un evento en un subintervalo}) = p.$
- $P(\text{no ocurren eventos en un subintervalo}) = 1 - p.$
- $P(\text{ocurre más de un evento en un subintervalo}) = 0.$

Si la ocurrencia de eventos puede ser considerada como independiente de un subintervalo a otro, entonces el número de eventos que ocurren en $[0, t]$ coincide con el número de subintervalos en los que ocurre un evento y por lo tanto tiene distribución binomial con parámetros n y p . Si bien no hay una única forma de seleccionar los subintervalos y por lo tanto no conocemos ni n ni p , parece razonable pensar que cuando consideramos un número mayor de subintervalos (aumentamos el n), disminuye la probabilidad p de que ocurra un evento en cada subintervalo. Y por el resultado que vimos antes, surge naturalmente la distribución de Poisson para la variable aleatoria “Número de eventos que ocurren en un intervalo de longitud t ”. El parámetro λ en la distribución de Poisson es el valor esperado (media) de la variable aleatoria, por lo cual sería el número esperado de eventos, o valor promedio de eventos que ocurren en ese período de tiempo.

Con un razonamiento similar, podemos pensar que el número de eventos que ocurren en un determinado espacio (como el número de árboles por km^2) tiene distribución de Poisson. También podemos llegar a la expresión (2.2) relajando un poco los supuestos recién presentados, suponiendo que la probabilidad de que ocurra más de un evento en un subintervalo no es 0 sino que *tiende* a 0 ([Ross, 2014](#)). Este resultado, más realista pero más complejo a la vez, se presenta en el Apéndice.

2.5. La distribución geométrica. La distribución geométrica surge en el contexto de un experimento que comparte algunas de las características de un experimento binomial. Consiste en una secuencia de ensayos independientes, con dos resultados posibles: éxito o fracaso, donde la probabilidad de éxito es igual a p y es la misma

en todos los ensayos. Sin embargo, el número total de ensayos no está fijo sino que el experimento concluye con el primer éxito.

Consideremos la variable aleatoria Y que corresponde al número del ensayo en el que ocurre el primer éxito, o dicho de otra manera, al número total de ensayos hasta que ocurre el primer éxito. Claramente los valores posibles de Y son todos los números naturales, ya que el primer éxito podría ocurrir en el primer ensayo, en el segundo, en el tercero, etc. ¿Cuál será entonces la $P(Y = k)$, con $k \in \mathbb{N}$? Si definimos, como antes, el evento

$$A_i = \{\text{el ensayo } i \text{ es éxito}\},$$

entonces el evento $\{Y = k\}$ equivale a $A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{k-1}^c \cap A_k$, ya que que los primeros $k - 1$ ensayos necesariamente deben ser fracasos para que el primer éxito ocurra en el ensayo k . Además, como los eventos son independientes y en cada ensayo la probabilidad de éxito es p y la de fracaso es $1 - p$, resulta que

$$(2.3) \quad P(Y = k) = P(A_1^c)P(A_2^c) \cdots P(A_{k-1}^c)P(A_k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Se dice que la variable aleatoria Y tiene distribución geométrica de parámetro p y se denota

$$Y \sim \mathcal{G}(p).$$

Así, el número de tiradas de una moneda hasta obtener cara y el número de tiradas de un dado hasta obtener un 6 tienen distribución geométrica de parámetros $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{6}$, respectivamente.

Muchos autores suelen llamar distribución geométrica a la correspondiente a la variable X que cuenta el número de *fracasos* hasta que se produce el primer éxito, en vez del número total de ensayos. En esencia, estamos hablando de la misma variable salvo por un corrimiento en una constante. Esto es, $X = Y - 1$ y

$$P(X = k) = P(Y = k + 1) = (1 - p)^k p$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$. Esta es la definición que utiliza R en sus funciones `dgeom` y `pgeom` para el cálculo de las funciones de probabilidad y de distribución, respectivamente. A los fines de los resultados que se quieren ilustrar en este artículo, adoptaremos la definición correspondiente a (2.3).

Una variable aleatoria con distribución geométrica se caracteriza por cumplir la siguiente propiedad:

Propiedad de falta de memoria de la distribución geométrica: Sea $Y \sim \mathcal{G}(p)$, entonces

$$P(Y > n + m \mid Y > n) = P(Y > m) \quad \text{para todo } n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Esto significa que si hasta el ensayo n no ocurrió un éxito (esto es, $Y > n$), la probabilidad de que no haya un éxito en los siguientes m ensayos (hasta el momento

$n + m$) es la misma que si se iniciara nuevamente la secuencia de ensayos y no ocurriera un éxito en los primeros m ensayos. Esto se ve claro cuando arrojamus una moneda hasta obtener una cara o de un dado hasta obtener el número 6. Las nuevas tiradas no “recuerdan” los resultados en una tanda de tiradas anterior. Por eso decimos que la distribución geométrica “no tiene memoria”.

Demostración: Notemos primero que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se cumple $P(Y > n) = (1 - p)^n$ ya que, para $n = 0$, $P(Y > 0) = 1 = (1 - p)^0$ y, si $n > 0$,

$$\begin{aligned} P(Y > n) &= 1 - P(Y \leq n) = 1 - \sum_{y=1}^n (1 - p)^{y-1} p = 1 - p \sum_{i=0}^{n-1} (1 - p)^i \\ &= 1 - p \frac{(1 - p)^n - 1}{-p} = (1 - p)^n. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} P(Y > n + m \mid Y > n) &= \frac{P(\{Y > n + m\} \cap \{Y > n\})}{P(Y > n)} \\ (2.4) \qquad &= \frac{P(Y > n + m)}{P(Y > n)} \\ &= \frac{(1 - p)^{n+m}}{(1 - p)^n} = (1 - p)^m = P(Y > m), \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. \square

La propiedad de falta de memoria también puede escribirse como

$$P(Y > n + m) = P(Y > n)P(Y > m)$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}_0$, lo cual puede verse de (2.4), despejando $P(Y > n + m)$. Un resultado notable es que la distribución geométrica es la única distribución discreta, con valores posibles el conjunto de los números naturales, que cumple con la propiedad de falta de memoria. Esto es consecuencia del siguiente resultado:

Proposición (Caracterización de la distribución geométrica): Sea Y una variable aleatoria discreta con valores posibles $1, 2, \dots$ tal que

$$P(Y > n + m) = P(Y > n)P(Y > m), \quad \text{para todo } n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Entonces, Y tiene distribución geométrica.

Demostración: La demostración de este resultado se encuentra en el Apéndice. \square

Otro ejemplo de esta situación ocurre cuando una pieza de un equipo es observada durante períodos fijos de tiempo (como horas o días) para ver si ha fallado, registrándose si falla en la primera hora (o día), en la segunda, etc. (Hoel y cols., 1971). Si la pieza no se deteriora ni mejora con el transcurso del tiempo (por ejemplo, un motor que recibe mantenimiento periódico), y puede fallar debido a causas

esporádicas que ocurren homogéneamente en el tiempo, entonces es razonable pensar que el momento en que la pieza falla cumple con la propiedad de falta de memoria y, por lo tanto, tiene distribución geométrica.

2.6. La distribución binomial negativa. Para finalizar nuestro recorrido por las distribuciones de variables aleatorias discretas, estudiaremos la distribución binomial negativa. Surge en el mismo contexto de la distribución geométrica, pero ahora nuestra variable Y cuenta el número total de ensayos que ocurren hasta que se obtienen r éxitos. Así, la distribución geométrica resulta un caso particular de la distribución binomial negativa, para $r = 1$. Notemos que ahora los valores posibles de Y son los naturales mayores o iguales a r , ya que al menos se necesitan r ensayos para alcanzar los r éxitos (que sería el caso en que los primeros r ensayos son todos exitosos), pero el número total de ensayos podría crecer indefinidamente. ¿Cómo calculamos entonces $P(Y = k)$, para $k = r, r + 1, \dots$? Primero notemos que un punto cualquiera en el evento $\{Y = k\}$ contiene r éxitos y $k - r$ fracasos y, por lo tanto, como los ensayos son independientes, tiene probabilidad $p^r(1 - p)^{k-r}$. Pero, ¿cuántos puntos muestrales hay en este evento? Como necesariamente el último de los k ensayos es un éxito (porque al lograr el éxito r se finaliza el experimento), hay tantos puntos como formas de ubicar los restantes $r - 1$ éxitos en los primeros $k - 1$ lugares, esto es, el número combinatorio $\binom{k-1}{r-1}$. También podemos pensar en ubicar los $k - r$ fracasos en los primeros $k - 1$ lugares, lo cual corresponde al número combinatorio $\binom{k-1}{k-r}$, que, por definición, coincide con $\binom{k-1}{r-1}$. Así,

$$P(Y = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1 - p)^{k-r}, \quad \text{para } k = r, r + 1, \dots$$

Se dice que Y tiene distribución binomial negativa de parámetros r y p y se denota

$$Y \sim BN(r, p).$$

Ejemplo: Se sabe por estudios previos que el 30 % de una población está de acuerdo con una nueva medida del gobierno. Si se realiza una encuesta telefónica preguntando al encuestado si acuerda o no con la medida y la selección de los encuestados se realiza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el encuestado en la séptima llamada sea el tercero en estar de acuerdo? ¿Y de que se tengan que realizar a lo sumo 7 llamadas para encontrar a 3 personas que estén de acuerdo?

Solución: Si la población es suficientemente grande, con argumentos similares a los ya utilizados para la distribución binomial, podemos asumir que cada llamada puede resultar en éxito (está de acuerdo) o fracaso (no está de acuerdo) con probabilidad 0,3 o 0,7, respectivamente, independientemente de las demás llamadas. Así, la variable Y que cuenta el número de llamadas que se deben realizar hasta encontrar a 3 personas de acuerdo con la nueva medida tiene distribución binomial negativa con parámetros $r = 3$ y $p = 0,3$. Luego, la probabilidad de que el

encuestado en la séptima llamada sea el tercero en estar de acuerdo corresponde a

$$P(Y = 7) = \binom{6}{2} 0,3^3 \times 0,7^4 = 0,0972.$$

Y la probabilidad de que se tengan que realizar a lo sumo 7 llamadas para encontrar a 3 personas que estén de acuerdo es

$$P(Y \leq 7) = \sum_{k=3}^7 \binom{k-1}{2} 0,3^3 \times 0,7^{k-3} = 0,3529.$$

Como ya se comentó para la distribución geométrica, muchos autores consideran que la distribución binomial negativa corresponde a la variable X que cuenta el número de *fracasos* hasta que ocurren los r éxitos, en lugar del número *total* de ensayos. Ambas variables se relacionan mediante $X = Y - r$, de manera que X toma valores en \mathbb{N}_0 . Así, para $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$P(X = k) = P(Y = k + r) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k.$$

Esta es la definición adoptada por el software R. Así, en el ejemplo de recién, $P(Y = 7) = P(X = 4)$ y puede obtenerse con el comando `dnbinom(4, 3, 0.3)`, mientras que $P(Y \leq 7) = P(X \leq 4)$ y se obtiene mediante `pnbinom(4, 3, 0.3)`.

§3. Variables aleatorias continuas

Dijimos que una variable continua es aquella que puede tomar cualquier valor en un intervalo. Formalmente, una variable aleatoria Y es continua si satisface

$$P(Y = y) = 0$$

para todo y en \mathbb{R} . Esto trae como consecuencia que Y es continua si y sólo si su función de distribución F es continua.

Para la mayoría de las variables aleatorias continuas, F puede escribirse en términos de lo que se conoce como función de densidad f . Esto es,

$$F(y) = \int_{-\infty}^y f(t) dt,$$

donde f satisface $f(y) \geq 0$ para todo y en \mathbb{R} y $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1$. A diferencia del caso discreto, la función de densidad no corresponde a la probabilidad de que la variable aleatoria tome un cierto valor, ya que esa probabilidad siempre es cero, sino que nos permite calcular, por ejemplo, la probabilidad de caer en un intervalo. Así, la probabilidad de que Y tome valores en un intervalo (a, b) puede calcularse como

$$P(a < Y < b) = \int_a^b f(y) dy,$$

que corresponde al área bajo la curva entre los valores a y b . Como la variable toma valores en \mathbb{R} , la probabilidad de caer en $(-\infty, \infty)$ tiene necesariamente probabilidad 1 y es por eso que el área total bajo la curva es siempre 1 ($\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = 1$).

Si conocemos la función de distribución F y esta es tal que F' existe y es continua, excepto quizás en un número finito de puntos, podemos obtener una función de densidad f como

$$(3.1) \quad f(y) = \begin{cases} F'(y), & \text{en los puntos donde } F' \text{ existe y es continua,} \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

En realidad no debemos preocuparnos por la definición de f en un número finito de puntos, ya que el cambio en el valor de la densidad en esos puntos no modifica la función de distribución de la variable aleatoria.

El valor esperado de una variable aleatoria continua Y con función de densidad f se define como

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy$$

si $\int_{-\infty}^{\infty} |y|f(y)dy < \infty$. Al igual que para las variables aleatorias discretas, la varianza de Y se define según (2.1). Para el cálculo, nuevamente es útil la expresión equivalente $Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$, donde

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y)dy.$$

3.1. La distribución uniforme. Para iniciar nuestro recorrido por las distribuciones de variables aleatorias continuas, estudiaremos una de las más simples: la distribución uniforme. Surge, por ejemplo, cuando elegimos un punto al azar en el intervalo (a, b) . No le damos mayor peso a un resultado sobre otro, por lo cual es igualmente probable estar cerca de cualquier punto en (a, b) (Ross, 2014). Así, la densidad es constante en el intervalo (a, b) y vale 0 fuera de ese intervalo, es decir,

$$f(y) = \begin{cases} k, & a < y < b, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

¿Cómo encontramos el valor de k ? Sabemos que el área total bajo la curva debe ser 1 y, como $f(y) = 0$ fuera del intervalo (a, b) , resulta $1 = \int_a^b k dy = k(b - a)$. Luego, $k = \frac{1}{b-a}$. Decimos entonces que una variable Y con función de densidad f dada por

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < y < b, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

tiene distribución uniforme en (a, b) y lo denotamos

$$Y \sim \mathcal{U}(a, b).$$

El intervalo también puede considerarse cerrado en los extremos.

En la distribución uniforme, la probabilidad de caer en un intervalo totalmente contenido en (a, b) no depende de la ubicación de dicho intervalo sino de su *longitud*. Es decir, si (c, d) y (e, f) son dos intervalos contenidos en (a, b) de igual longitud, digamos L (esto es $d - c = L = f - e$), entonces la probabilidad de caer en cualquiera de estos intervalos es la misma y vale

$$\int_c^d \frac{1}{b-a} dy = \int_e^f \frac{1}{b-a} dy = \frac{L}{b-a}.$$

Ejemplo (Canavos, 1995): Si el peso de un individuo se redondea al kilogramo más cercano, entonces la diferencia entre este y el peso verdadero será un valor entre $-0,5$ y $0,5$ kg y podemos pensar que el error de redondeo se distribuye uniformemente en el intervalo $(-0,5; 0,5)$.

Ilustraremos para el caso de una variable uniforme el cálculo de esperanza y varianza de una variable aleatoria continua.

Proposición: Sea $Y \sim \mathcal{U}(a, b)$. Entonces, $E(Y) = \frac{a+b}{2}$ y $Var(Y) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Demostración: Si $Y \sim \mathcal{U}(a, b)$, entonces el valor esperado de Y se obtiene mediante

$$E(Y) = \int_a^b \frac{y}{b-a} dy = \frac{1}{b-a} \frac{y^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{1}{b-a} \frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{a+b}{2},$$

es decir, es el punto medio del intervalo (a, b) .

Para calcular la varianza de Y , notemos primero que

$$E(Y^2) = \int_a^b y^2 \frac{1}{b-a} dy = \frac{1}{b-a} \frac{y^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}.$$

Así,

$$Var(Y) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4b^3 - 4a^3 - 3(a+b)(b^2 - a^2)}{12(b-a)} = \frac{b^3 - a^3 - 3ab^2 + 3ba^2}{12(b-a)} = \frac{(b-a)^3}{12(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12},$$

como queríamos demostrar. \square

La distribución uniforme es especialmente útil para la simulación de valores de una variable aleatoria con una distribución específica (Hoel y cols., 1971; Ross, 1999; Canavos, 1995). Una forma de hacerlo se basa en el siguiente resultado:

Proposición: Sea $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ y sea F una función de distribución continua con inversa F^{-1} . Entonces, la variable aleatoria Y definida como $Y = F^{-1}(U)$ tiene distribución F .

Demostración: Notemos primero que la variable U toma valores en $(0, 1)$ con probabilidad 1. Además, $F^{-1}(U)$ está bien definida pues $F^{-1}(y)$ tiene que estar definida para todo y en $(0, 1)$ por las propiedades que cumple en general una función de distribución ($\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y) = 0$ y $\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = 1$) y por ser en este caso F continua

(teorema del valor intermedio). Además, F es estrictamente creciente, por ser en general no decreciente y por existir F^{-1} (F es inyectiva).

Veamos cuál es la función de distribución de Y . Sea y en \mathbb{R} , entonces

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F^{-1}(U) \leq y) = P(U \leq F(y))$$

por ser F creciente (y por lo tanto $a \leq b$ si y sólo si $F(a) \leq F(b)$) y $F(F^{-1}(U)) = U$. Así, como $F(y)$ está en $(0, 1)$, resulta

$$P(U \leq F(y)) = \int_{-\infty}^{F(y)} f_U(u) du = \int_0^{F(y)} 1 du = F(y).$$

Es decir, Y tiene distribución F , como queríamos demostrar. \square

De esta manera, si podemos generar un número aleatorio entre 0 y 1, podemos generar un valor de una variable aleatoria con distribución F aplicando la inversa de la función al número generado.

3.2. La distribución exponencial. La distribución exponencial se utiliza frecuentemente para modelar tiempos de espera hasta que ocurre un determinado suceso, tiempos de sobrevivencia, duración de artículos. ¿Por qué es razonable esto? Pensemos a modo de ejemplo en la variable aleatoria T que mide el tiempo que transcurre hasta que ocurre la primera llamada en una central telefónica. Si λ es el número medio de llamadas por unidad de tiempo, es razonable asumir que el número de llamadas que ocurre en un intervalo de tiempo de longitud t tiene distribución $\mathcal{P}(\lambda t)$. Busquemos ahora la función de distribución de T . Como T sólo toma valores positivos, es claro que $P(T \leq t) = 0$ si $t \leq 0$. ¿Pero qué ocurre para un tiempo t positivo? Notemos que el tiempo que transcurre hasta que ocurre la primera llamada es mayor a t si y sólo si hasta el tiempo t no se recibió ninguna llamada, es decir, el número de llamadas N_t recibidas en el intervalo $[0, t]$ es 0. En fórmulas,

$$P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(N_t = 0) = 1 - e^{-\lambda t},$$

pues $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$. Así, la función de distribución acumulada F de T es

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Si ahora derivamos F para encontrar la densidad f de T , como en (3.1), llegamos a la siguiente expresión:

$$(3.2) \quad f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Decimos que una variable aleatoria Y tiene distribución exponencial de parámetro λ , con $\lambda > 0$, y se denota

$$Y \sim \text{Exp}(\lambda),$$

si su función de densidad está dada por (3.2). Así, la variable T que mide el tiempo hasta que ocurre la primera llamada en una central telefónica tiene distribución exponencial.

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de que en una central telefónica se reciba la primera llamada después de media hora, si se reciben en promedio 6 llamadas por hora?

Solución: Si consideramos la variable T que mide el tiempo (en horas) hasta que ocurre la primera llamada, entonces $T \sim \text{Exp}(6)$. Notemos que si $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$, podemos deducir que $P(Y > y) = 1 - F(y) = e^{-\lambda y}$, si $y \geq 0$. Así, la probabilidad buscada es $P(T > \frac{1}{2}) = e^{-6 \cdot \frac{1}{2}} = 0,0498$.

La distribución exponencial es la análoga continua a la distribución geométrica, ya que posee también la propiedad de falta de memoria (Wackerly y cols., 2010; Bertsekas y Tsitsiklis, 2008; Hoel y cols., 1971).

Propiedad de falta de memoria de la distribución exponencial: Sea $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$, entonces

$$(3.3) \quad P(Y > a + b \mid Y > a) = P(Y > b) \quad \text{para todo } a, b \geq 0.$$

Demostración: Al ser $a, b \geq 0$, resulta $\{Y > a + b\} \cap \{Y > a\} = \{Y > a + b\}$ y

$$\begin{aligned} P(Y > a + b \mid Y > a) &= \frac{P(\{Y > a + b\} \cap \{Y > a\})}{P(Y > a)} = \frac{P(Y > a + b)}{P(Y > a)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(a+b)}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda b} = P(Y > b) \end{aligned}$$

como se quería ver. □

Esta propiedad también puede escribirse como

$$P(Y > a + b) = P(Y > a)P(Y > b) \quad \text{para todo } a, b \geq 0,$$

lo cual se deduce de los pasos de la demostración.

La interpretación de este resultado es similar a la que dimos para la distribución geométrica: si pensamos por ejemplo en la vida útil de una pieza (como un componente eléctrico), (3.3) nos dice que la probabilidad de una vida útil *adicional* en más de b unidades es la misma que la probabilidad *original* de vida útil en más de b unidades. En este caso, la antigüedad de la pieza no aumenta ni disminuye la probabilidad de falla en un período de tiempo determinado (Hoel y cols., 1971).

La propiedad de falta de memoria es muy importante ya que caracteriza a la distribución exponencial, en el sentido de que una variable continua y positiva que cumple con esa propiedad, necesariamente tiene que tener distribución exponencial. Esto nos lo dice el siguiente resultado:

Proposición (Caracterización de la distribución exponencial): Sea Y una variable aleatoria tal que

$$P(Y > a + b) = P(Y > a)P(Y > b) \quad \text{para todo } a, b \geq 0.$$

Entonces, $P(Y > 0) = 0$ o Y tiene distribución exponencial.

Demostración: La demostración de este resultado se encuentra en el Apéndice. \square

Otra relación interesante entre la distribución exponencial y la geométrica es la siguiente. Consideremos una variable aleatoria T con distribución exponencial de parámetro λ . Como ya vimos, T puede indicar el tiempo que transcurre hasta que falla cierto componente. Pensemos ahora en la “versión discreta” Y de T , subdividiendo el tiempo en intervalos de longitud uno y considerando en cuál de estos intervalos ocurrió el evento. Por ejemplo, si el tiempo se mide en horas, $Y = 1$ significa que la falla ocurrió durante la primera hora y, en general, $Y = k$ significa que la falla ocurrió en la hora k -ésima. La variable aleatoria Y claramente toma solamente valores naturales por lo cual es una variable aleatoria discreta. Veamos que Y tiene distribución geométrica. Para $k = 1, 2, \dots$, la falla ocurre durante la k -ésima hora si el tiempo hasta que ocurre la falla, medido en escala continua, está entre $k - 1$ y k . Así,

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(k - 1 < T \leq k) = F_T(k) - F_T(k - 1) \\ &= 1 - e^{-\lambda k} - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) = e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda}) = (1 - p)^{k-1}p, \end{aligned}$$

para $p = 1 - e^{-\lambda} = P(T \leq 1)$ (que cumple $0 < p < 1$). Por lo tanto, Y tiene distribución geométrica de parámetro $p = 1 - e^{-\lambda}$.

Formalmente, la variable Y es el “techo” de T , y se denota $\lceil T \rceil$, donde el techo de un número x corresponde al menor entero mayor o igual a x . Luego, acabamos de ver la demostración del siguiente resultado:

Proposición: Si T es una variable aleatoria tal que $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, entonces se tiene $\lceil T \rceil \sim \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$.

3.3. La distribución Gamma. Esta es una distribución que sirve para modelar variables aleatorias continuas que asumen valores positivos, generalmente asimétricas. Decimos que una variable aleatoria tiene distribución Gamma con parámetros α y λ , y lo denotamos como

$$Y \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$$

si la función de densidad está dada por

$$(3.4) \quad f(y) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$$

con $\alpha, \lambda > 0$ y $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$. A α se lo conoce como *parámetro de forma*, ya que justamente tiene que ver con la forma de la gráfica de la función de densidad:

cuando y tiende a 0 por derecha, $f(y)$ tiende a λ si $\alpha = 1$, a 0 si $\alpha > 1$ y a ∞ si $\alpha < 1$. Además, la función es decreciente en $(0, \infty)$ para $\alpha \leq 1$, y para $\alpha > 1$ crece desde 0 hasta alcanzar un máximo y luego decrece. El parámetro λ tiene que ver con la escala (siendo $\beta = \frac{1}{\lambda}$ conocido como *parámetro de escala*), ya que la gráfica se comprime o se estira dependiendo de su valor. La Figura 2 presenta distintas gráficas de la densidad Gamma, como así también de la correspondiente función de distribución, variando los valores de α y λ .

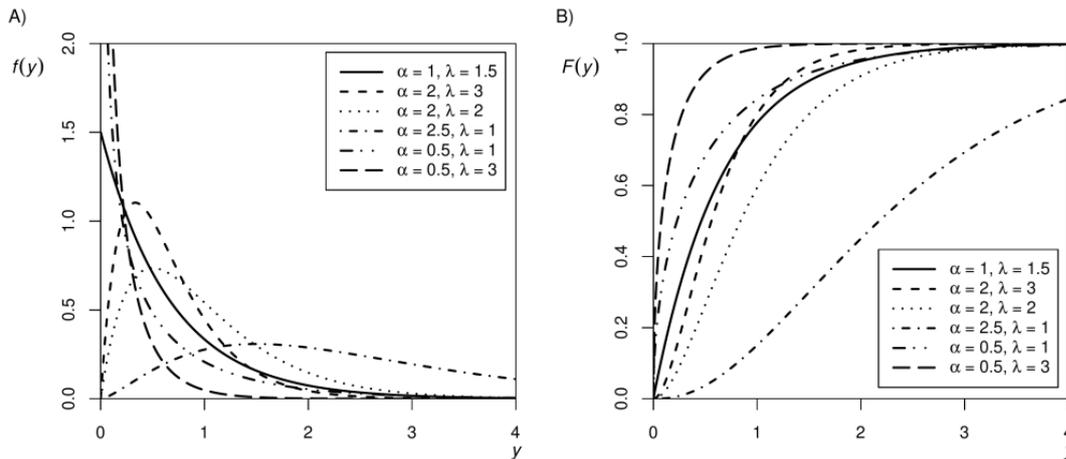


FIGURA 2. Gráficas de la función de densidad (A) y de la función de distribución (B) de una variable aleatoria con distribución Gamma, para distintos valores de los parámetros α y λ . En todos los casos $f(y) = 0 = F(y)$ para $y < 0$.

La distribución exponencial de parámetro λ es un caso particular de la distribución Gamma para $\alpha = 1$. También se asocia la distribución Gamma a tiempos de sobrevivencia, tiempos de espera. Recordando el ejemplo que vimos para introducir a la distribución exponencial, podemos llegar a la expresión (3.4) para $\alpha \in \mathbb{N}$, pensando en el tiempo hasta que ocurren n llamadas (o en general, sucesos de algún tipo, accidentes, etc.). En este caso particular, la distribución Gamma también se conoce como distribución de Erlang. Para ver esto, consideremos las siguientes variables aleatorias:

- N_t = número de sucesos que ocurren en el intervalo $[0, t]$,
- T_n = tiempo de espera hasta que ocurren n sucesos.

Luego, como antes, $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ y $P(T_n \leq t) = 0$ si $t \leq 0$. Para $t > 0$, la clave está en notar lo siguiente: que el tiempo de espera hasta que ocurran n sucesos sea a lo sumo t se corresponde directamente con el hecho de que ocurran por lo menos n sucesos (n o más) en el intervalo $[0, t]$. Menos de n no podrían suceder pues, en ese caso, habría que esperar más tiempo. Pero podrían ocurrir más de n , ya que si ocurrieron n en un tiempo menor estricto a t , es posible que haya ocurrido algún

suceso más hasta el tiempo t . En términos probabilísticos,

$$F_{T_n}(t) = P(T_n \leq t) = P(N_t \geq n) = \sum_{j=n}^{\infty} P(N_t = j) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^j}{j!}.$$

Ahora debemos derivar $F_{T_n}(t)$ respecto de t para obtener la densidad $f_{T_n}(t)$, que vale 0 para $t < 0$ y, para $t > 0$,

$$\begin{aligned} f_{T_n}(t) &= -\lambda e^{-\lambda t} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + e^{-\lambda t} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{j(\lambda t)^{j-1} \lambda}{j!} \\ &= -\lambda e^{-\lambda t} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \lambda e^{-\lambda t} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}. \end{aligned}$$

Separando en la segunda sumatoria el término correspondiente a $j = n$ y tomando $i = j - 1$, resulta

$$\begin{aligned} f_{T_n}(t) &= -\lambda e^{-\lambda t} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda e^{-\lambda t} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

usando el resultado de que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{N}$. Esto es, $T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$. Así, hemos probado la proposición que se enuncia a continuación:

Proposición: Si el número de sucesos que ocurren en el intervalo $[0, t]$ tiene distribución $\mathcal{P}(\lambda t)$ para todo $t > 0$, entonces el tiempo de espera hasta que ocurren n sucesos tiene distribución Gamma con parámetros n y λ .

Para ilustrar este resultado veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Supongamos que, en promedio, el número de personas que entran a un supermercado por minuto es de 5, siguiendo una distribución de Poisson. ¿Cuál es la probabilidad de que en menos de 20 segundos entren dos personas?

Solución: Podemos considerar que el número de personas que entran al supermercado en un intervalo de tiempo (medido en minutos) de longitud t tiene distribución $\mathcal{P}(5t)$. Luego, por el resultado anterior, el tiempo T que hay que esperar hasta que entren dos personas tiene distribución $\Gamma(2, 5)$. Estamos interesados en calcular la probabilidad de que T sea menor a 20 segundos. Como 20 segundos corresponden a $1/3$ de minuto, la probabilidad buscada es

$$P(T < \frac{1}{3}) = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{5^2}{\Gamma(2)} t e^{-5t} dt = 5(-e^{-5t}(t + \frac{1}{5})) \Big|_0^{\frac{1}{3}} = 0,4963.$$

3.4. La distribución normal. Para finalizar nuestro recorrido por las distintas distribuciones de probabilidad, no podemos dejar de mencionar a la distribución

normal, que es la más importante, y es ampliamente utilizada para describir distintos fenómenos que ocurren en la práctica. Conozcamos un poco de su historia (Devore, 2005; Canavos, 1995; Ross, 2014): Esta distribución fue descubierta por el matemático francés Abraham DeMoivre en 1733 como límite de la distribución binomial con $p = \frac{1}{2}$, resultado que fue extendido por Laplace para un p general en 1812. Este es un caso particular de un resultado clave para la inferencia estadística, el *Teorema Central del Límite*, que plantea que, bajo ciertas condiciones, la suma (y el promedio) de un número grande de variables aleatorias tiene una distribución aproximadamente normal. También se la llama distribución gaussiana, o campana de Gauss a la densidad (por su forma acampanada), a partir de que Gauss la mencionó en un artículo en 1809, utilizándola para predecir la ubicación de objetos astronómicos. Entre mediados y fines del siglo XIX, gran parte de los estadísticos comenzaron a creer que la mayoría de los conjuntos de datos tendrían histogramas siguiendo esta forma acampanada y que era “normal” que datos que se comportaran razonablemente siguieran esta curva; de allí se la empezó a llamar “curva normal”.

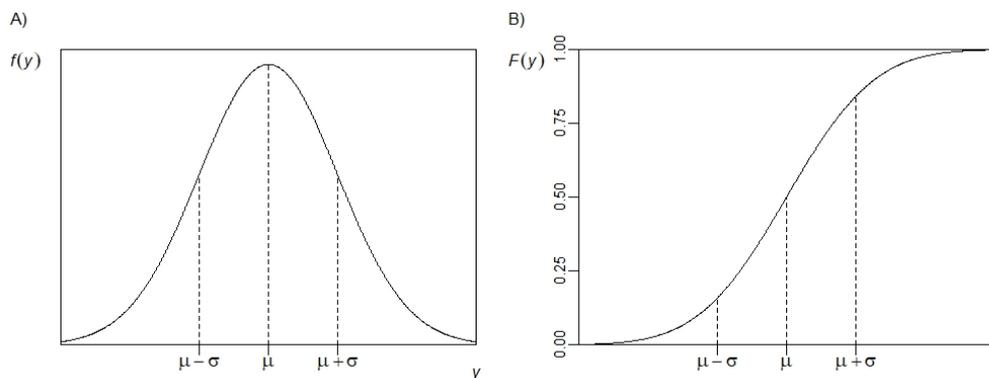


FIGURA 3. Gráficas de la función de densidad (A) y la función de distribución (B) de una variable aleatoria con distribución $N(\mu, \sigma^2)$.

La función de densidad de una variable Y con distribución normal de parámetros μ y σ^2 , con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$, está dada por

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Se denota

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Si bien una deducción de esta expresión está fuera del alcance de este artículo, mencionaremos algunos aspectos importantes de esta distribución.

La densidad normal tiene una forma acampanada como se muestra en la Figura 3 A), tiende a 0 tanto en la dirección positiva como negativa sin alcanzar nunca ese valor, está centrada en μ (es simétrica respecto a μ), siendo mayor la

probabilidad de obtener valores en zonas alejadas de μ a medida que σ aumenta. Puede mostrarse que μ y σ^2 corresponden a la media y la varianza de la distribución, respectivamente (ver, por ejemplo, Hoel y cols. (1971)). En la Figura 3 B) se observa la función de distribución acumulada, que es continua en todo punto por ser Y una variable aleatoria continua.

En la práctica, es razonable intuir que un cierto conjunto de datos podría ser modelado por una distribución normal si al graficar un histograma de frecuencias observamos simetría y podemos trazar una curva suave con la forma acampanada de la densidad normal. Ejemplos de variables que suelen tener distribución aproximadamente normal son el peso, la altura, la temperatura, errores en mediciones experimentales, calificaciones en una prueba, etc.

§4. Comentarios finales

En este artículo hemos emprendido un recorrido por las distribuciones de probabilidad más conocidas, que puede ser de utilidad para quien esté transitando un curso de Probabilidad o para aportar elementos a quien tenga estudios previos, brindando quizás algunas ideas nuevas y contribuyendo a cerrar conceptos. Las Tablas 3 y 4 presentan una síntesis de lo estudiado, incluyendo la expresión de la media y la varianza para cada una de las distribuciones.

El estudio de la Probabilidad resulta de suma importancia ya que los conceptos de probabilidad constituyen la base para poder realizar Inferencia Estadística, es decir, obtener conclusiones sobre características de una población a partir de una muestra extraída de esa población.

En la práctica, contamos con datos, que corresponden al resultado de observaciones efectuadas de una variable Y (característica de interés) en los individuos que conforman la muestra. También podríamos querer explicar una variable de respuesta Y en términos de otras variables X_1, \dots, X_p medidas en la muestra, lo cual es el objetivo de los modelos de regresión. Para el análisis, en general se requiere asumir una distribución para la variable aleatoria Y . En función de la naturaleza de la variable (continua, discreta) y de las condiciones experimentales y características de la medición (si sólo toma valores positivos, si corresponde a tiempos de espera, si es un experimento binomial, etc.) podemos proponer una distribución que resulte razonable para Y . Los parámetros de dicha distribución podrán ser estimados a partir de los valores observados de la variable en la muestra, para lo cual existen métodos de estimación. Por ejemplo, la probabilidad de éxito p de una binomial podrá estimarse a partir de la proporción de individuos en la muestra que posean la característica considerada como éxito.

Este trabajo intenta mejorar la comprensión de las distribuciones de probabilidad más utilizadas. Conocer en mayor profundidad bajo qué condiciones surge cada

una de ellas nos ayudará a tomar mejores decisiones al momento de atribuir una distribución posible a una variable de interés.

Tabla 3: Resumen de las distribuciones de probabilidad estudiadas para variables aleatorias discretas.

Distribución	$f(y)$	Usos y características	Media	Varianza
Binomial $B(n, p)$	$\binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$, $y = 0, 1, \dots, n$	Número de éxitos entre n ensayos independientes con la misma probabilidad p de éxito. Aproxima a la distribución hipergeométrica $\mathcal{H}(n, M, N)$ cuando n es pequeño en relación a N .	np	$np(1-p)$
Hipergeométrica $\mathcal{H}(n, M, N)$	$\frac{\binom{M}{y} \binom{N-M}{n-y}}{\binom{N}{n}}$, máx $\{0, n-N+M\}$ $\leq y \leq \min \{n, M\}$, $y \in \mathbb{Z}$	Número de objetos de tipo I en una muestra de tamaño n extraída sin reposición de una población con N objetos, de los cuales M son de tipo I y el resto de tipo II.	$n \frac{M}{N}$	$n \frac{M}{N} \frac{N-M}{N} \frac{N-n}{N-1}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!}$, $y = 0, 1, \dots$	Número de sucesos que ocurren en un determinado tiempo o espacio. Aproxima a la distribución binomial $B(n, p)$ para n grande, p pequeña y $\lambda = np$ moderado.	λ	λ
Geométrica $\mathcal{G}(p)$	$(1-p)^{y-1} p$, $y = 1, 2, \dots$	Número de ensayos independientes hasta que ocurre el primer éxito, con probabilidad p de éxito en cada ensayo. Cumple con la propiedad de falta de memoria.	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Binomial negativa $BN(r, p)$	$\binom{y-1}{r-1} p^r (1-p)^{y-r}$, $y = r, r+1, \dots$	Número de ensayos independientes hasta que ocurren r éxitos, con probabilidad p de éxito en cada ensayo.	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$

Nota: En todos los casos se indican los valores de y para los cuales $f(y) \neq 0$.

Tabla 4: Resumen de las distribuciones de probabilidad estudiadas para variables aleatorias continuas.

Distribución	$f(y)$	Usos y características	Media	Varianza
Uniforme $\mathcal{U}(a, b)$	$\frac{1}{b-a}$, $a < y < b$	Punto elegido al azar en el intervalo (a, b) . La probabilidad de caer en un intervalo contenido en (a, b) depende sólo de su longitud y no de su ubicación.	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponencial $Exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda y}$, $y > 0$	Tiempo de espera hasta que ocurre un suceso, tiempo de sobrevida, duración de artículos. Cumple con la propiedad de falta de memoria.	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y}$, $y > 0$	Variables positivas, con distribución generalmente asimétrica (tiempo de sobrevida, tiempo de espera).	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$
Normal $N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $y \in \mathbb{R}$	Variables con densidad simétrica, de forma a-campañada (peso, altura, temperatura, errores de medición, calificaciones, etc.).	μ	σ^2

Nota: En todos los casos se indican los valores de y para los cuales $f(y) \neq 0$.

§5. Apéndice

Otra manera de deducir la distribución de Poisson: La distribución de Poisson se utiliza en situaciones donde se quiere estudiar la ocurrencia esporádica de ciertos fenómenos o sucesos a lo largo del tiempo, como por ejemplo, la aparición de terremotos, el ingreso de clientes en un banco, la ocurrencia de accidentes. Bajo ciertas suposiciones, veremos que esta distribución modeliza el número de veces que ocurre el fenómeno bajo estudio en el período de tiempo considerado. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

- (1) La probabilidad de que exactamente un suceso ocurra en un intervalo de tiempo de longitud h es la misma para cualquier intervalo de longitud h y es igual a $\lambda h + o(h)$, donde $\lambda > 0$ y $o(h)$ representa cualquier función $f(h)$ tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.
- (2) La probabilidad de que ocurran dos o más sucesos en un intervalo de longitud h es la misma para cualquier intervalo de longitud h y es igual a $o(h)$.

- (3) Para cualquier colección de intervalos no superpuestos $\{I_i\}_{i=1}^n$, si definimos, para $i = 1, \dots, n$, $E_i = \{\text{ocurren exactamente } j_i \text{ sucesos en } I_i\}$, con $j_i \in \mathbb{N}_0$, entonces los eventos E_1, \dots, E_n son independientes.

Notemos que, por ejemplo, $f(h) = h^2$ es $o(h)$, mientras que $f(h) = h$ no lo es. Así, para valores pequeños de h , la condición 1 nos dice que la probabilidad de que exactamente un suceso ocurra en un intervalo de longitud h es aproximadamente proporcional a la longitud del intervalo, siendo igual a λh más algo que es pequeño comparado con h . La condición 2 establece que la probabilidad de que ocurran dos o más sucesos en un intervalo de longitud h es pequeña comparada con h . La condición 3 indica que lo que ocurre en un intervalo no tiene efecto en lo que ocurre en otro intervalo no superpuesto.

Sea $t > 0$ y $N(t)$ la variable aleatoria que cuenta el número de veces que ocurre el suceso o fenómeno bajo estudio en el intervalo de tiempo $[0, t]$. Bajo las condiciones recién planteadas, veamos que $N(t)$ resulta tener una distribución de Poisson de parámetro λt . Para calcular $P(N(t) = k)$, dividamos el intervalo $[0, t]$ en n subintervalos $\{I_i\}_{i=1}^n$ que no se intersecan, cada uno de longitud $\frac{t}{n}$. Esto es, $I_1 = [0, \frac{t}{n}]$ e $I_i = \left(\frac{(i-1)t}{n}, \frac{it}{n}\right]$, $i = 2, \dots, n$. Entonces,

$$\begin{aligned} P(N(t) = k) &= P(k \text{ subintervalos contienen exactamente 1 suceso y los} \\ &\quad \text{restantes } n - k \text{ contienen 0 sucesos}) \\ &\quad + P(N(t) = k \text{ y al menos un subintervalo contiene dos} \\ &\quad \text{o más sucesos}) \\ &= P(A_n) + P(B_n). \end{aligned}$$

Analicemos $P(B_n)$:

$$\begin{aligned} 0 \leq P(B_n) &\leq P\left(\bigcup_{i=1}^n \{I_i \text{ contiene dos o más sucesos}\}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n P(\{I_i \text{ contiene dos o más sucesos}\}) = no\left(\frac{t}{n}\right) \end{aligned}$$

por la suposición 2. Para cada t fijo, se cumple que $\frac{t}{n} \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$. Luego, por la definición de $o(h)$, se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} o\left(\frac{t}{n}\right) / \left(\frac{t}{n}\right) = 0$ y como $no\left(\frac{t}{n}\right) = t \left[o\left(\frac{t}{n}\right) / \left(\frac{t}{n}\right)\right]$, resulta que $P(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Ahora veamos $P(A_n)$. Dado un intervalo I de longitud h ,

$$1 = P(\text{ningún suceso ocurre en } I) + P(\text{exactamente un suceso ocurre en } I) \\ + P(\text{dos o más sucesos ocurren en } I).$$

De las suposiciones 1 y 2 se cumple que

$$1 = P(\text{ningún suceso ocurre en } I) + [\lambda h + o(h)] + o(h).$$

La suma de funciones $o(h)$ es $o(h)$, pues si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$ y $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0$, entonces $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+g(h)}{h} = 0$. Así,

$$P(\text{ningún suceso ocurre en } I) = 1 - \lambda h - o(h).$$

Aplicando la suposición de independencia dada en la condición 3 a los intervalos I_i definidos arriba, de longitud $\frac{t}{n}$, resulta que

$$P(A_n) = \binom{n}{k} \left[\frac{\lambda t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) \right]^k \left[1 - \frac{\lambda t}{n} - o\left(\frac{t}{n}\right) \right]^{n-k}.$$

Recordando que $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!}$, resulta que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) &= \frac{1}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \left\{ (n-j) \left[\frac{\lambda t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) \right] \right\} \right) \\ &\quad \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{\lambda t}{n} - o\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{\lambda t}{n} - o\left(\frac{t}{n}\right) \right]^{-k}. \end{aligned}$$

Para calcular el primero de los límites del término de la derecha, observemos que, si $0 \leq j \leq k-1$,

$$(n-j) \left[\frac{\lambda t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) \right] = \lambda t + n o\left(\frac{t}{n}\right) - j \left[\frac{\lambda t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda t,$$

pues $o(t/n) = (t/n) \frac{o(t/n)}{(t/n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^{k-1} \left\{ (n-j) \left[\frac{\lambda t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) \right] \right\} = (\lambda t)^k.$$

Para el segundo límite, sea $a_n = \lambda t - n o\left(\frac{t}{n}\right)$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda t$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n} = \infty.$$

Usando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\delta}{n} \right)^n = e^\delta,$$

para $\delta = -1$ resulta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n/a_n} \right)^{n/a_n} = e^{-1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{\lambda t}{n} - o\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a_n}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{\frac{n}{a_n}} \right)^{\frac{n}{a_n}} \right]^{a_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ a_n \log \left[\left(1 - \frac{1}{\frac{n}{a_n}} \right)^{\frac{n}{a_n}} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \log \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\frac{n}{a_n}} \right)^{\frac{n}{a_n}} \right] \right\} \\ &= \exp(-\lambda t). \end{aligned}$$

Por último,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{\lambda t}{n} - o\left(\frac{t}{n}\right) \right]^{-k} = 1,$$

con lo cual

$$P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Así, como $P(N(t) = k) = P(A_n) + P(B_n)$, haciendo tender n a ∞ se obtiene

$$P(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

resultando que $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$. La cantidad λ corresponde al número esperado de eventos por unidad de tiempo. \square

Proposición (Caracterización de la distribución geométrica): Sea Y una variable aleatoria discreta con valores posibles $1, 2, \dots$ tal que

$$P(Y > n + m) = P(Y > n)P(Y > m) \text{ para todo } n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Entonces, Y tiene distribución geométrica.

Demostración (Hoel y cols., 1971): La propiedad

$$P(Y > n + m) = P(Y > n)P(Y > m)$$

vale para todo $n, m \in \mathbb{N}_0$, en particular para $n = m = 0$. Por lo tanto, $P(Y > 0) = P(Y > 0)^2$ y en consecuencia $P(Y > 0)$ vale 0 o 1. Pero como Y toma valores positivos, necesariamente se cumple que $P(Y > 0) = 1$.

Sea $p = P(Y = 1)$ (con $0 < p < 1$, pues $\sum_{i=1}^{\infty} P(Y = i) = 1$ y $P(Y = i) > 0$ para todo i). Tomando $m = 1$, y repitiendo el razonamiento, se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$ que

$$\begin{aligned} P(Y > n) &= P(Y > (n-1) + 1) = P(Y > n-1)P(Y > 1) \\ &= P(Y > n-1)(1-p) = P(Y > n-2)(1-p)^2 \\ &= \dots = P(Y > 0)(1-p)^n = (1-p)^n. \end{aligned}$$

Como $P(Y > n-1) = P(Y \geq n) = P(Y > n) + P(Y = n)$, resulta

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= P(Y > n-1) - P(Y > n) \\ &= (1-p)^{n-1} - (1-p)^n \\ &= (1-p)^{n-1}(1 - (1-p)) = (1-p)^{n-1}p. \end{aligned}$$

Es decir, $Y \sim \mathcal{G}(p)$. \square

Proposición (Caracterización de la distribución exponencial): Sea Y una variable aleatoria tal que

$$(5.1) \quad P(Y > a + b) = P(Y > a)P(Y > b) \text{ para todo } a, b \geq 0.$$

Entonces, $P(Y > 0) = 0$ o Y tiene distribución exponencial.

Demostración (Hoel y cols., 1971): Apliquemos (5.1) a $a = b = 0$. Escribiendo $0 = 0 + 0$, resulta $P(Y > 0) = P(Y > 0 + 0) = P(Y > 0)^2$, con lo cual $P(Y > 0)$ vale 0 o 1.

Si $P(Y > 0) = 0$, siempre se cumple (5.1) ya que si $c \geq 0$, el evento $\{Y > c\}$ está contenido en el evento $\{Y > 0\}$ y por lo tanto $0 \leq P(Y > c) \leq P(Y > 0) = 0$, resultando $P(Y > c) = 0$. Así, todos los términos que intervienen en (5.1) son 0. Pero esta propiedad nos dice poco respecto a Y ya que esencialmente Y no toma valores positivos ($P(Y \leq 0) = 1$).

El caso más interesante ocurre cuando $P(Y > 0) = 1$. Veremos que necesariamente Y , por cumplir (5.1), debe tener distribución exponencial.

Sea $G(y) = P(Y > y) = 1 - F(y)$, con F la función de distribución de Y . Luego, por las propiedades que cumple F , G resulta ser una función continua a derecha, no creciente (si $x < y \Rightarrow G(x) \geq G(y)$) y $\lim_{y \rightarrow \infty} G(y) = 1 - \lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = 0$. Además, $G(0) = P(Y > 0) = 1$ y

$$G(a + b) = P(Y > a + b) = P(Y > a)P(Y > b) = G(a)G(b)$$

para todo $a, b > 0$. De esto se deduce lo siguiente:

(i) Si $n \in \mathbb{N}$ y $c > 0$, entonces

$$G(nc) = G(\underbrace{c + \dots + c}_{n \text{ veces}}) = G(\underbrace{c + \dots + c}_{n-1 \text{ veces}})G(c) = \dots = \underbrace{G(c) \dots G(c)}_{n \text{ veces}} = G(c)^n.$$

(ii) Si $c > 0$ y $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$G(c) = G\left(\frac{c}{m}m\right) = \left(G\left(\frac{c}{m}\right)\right)^m$$

por (i), pues $\frac{c}{m} > 0$ y $m \in \mathbb{N}$.

Notemos que $0 \leq G(y) \leq 1$ por ser una probabilidad. Pero la desigualdad es estricta para $y = 1$ (esto es, $0 < G(1) < 1$), pues

- Si $G(1) = 1$, entonces por (i) tomando $c = 1$ resulta $G(n) = (G(1))^n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto es absurdo pues $\lim_{y \rightarrow \infty} G(y) = 0$.
- Si $G(1) = 0$, entonces, por (ii), tomando $c = 1$ resulta $0 = G(1) = (G(\frac{1}{m}))^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Luego, $G(\frac{1}{m}) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Así, $\{\frac{1}{m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que tiende a 0 por valores mayores a 0 tal que $G(\frac{1}{m})$ tiende a 0. Esto es absurdo pues G es continua por derecha, con lo cual $\lim_{y \rightarrow 0^+} G(y) = G(0) = 1$.

Así, como $0 < G(1) < 1$, podemos escribir $G(1) = e^{-\lambda}$ para algún $\lambda > 0$ (precisamente, $\lambda = -\log(G(1))$). Veamos ahora que $G(y) = e^{-\lambda y}$ para todo $y > 0$. Primero lo veremos para los racionales. Usando ii) para $c = 1$, resulta

$$G\left(\frac{1}{m}\right) = (G(1))^{\frac{1}{m}} = e^{-\lambda \frac{1}{m}}.$$

Además, si $m, n \in \mathbb{N}$, entonces por i) tomando $c = \frac{1}{m}$, resulta

$$G\left(\frac{n}{m}\right) = \left(G\left(\frac{1}{m}\right)\right)^n = \left(e^{-\lambda\frac{1}{m}}\right)^n = e^{-\lambda\frac{n}{m}}.$$

En consecuencia, $G(q) = e^{-\lambda q}$ para todo $q > 0 \in \mathbb{Q}$. Ahora sea $y > 0$. Luego, existe una sucesión $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de racionales positivos mayores a y tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = y$. Entonces, como G es continua por derecha, se cumple

$$G(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} G(q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda q_n} = e^{-\lambda y},$$

ya que $g(x) = e^{-\lambda x}$ es una función continua. Así, $G(y) = e^{-\lambda y}$ para todo $y > 0$. Por otro lado, $G(0) = 1$ y $G(y) = 1$ para todo $y < 0$ pues como G es no creciente, $1 \geq G(y) \geq G(0) = 1$. De esta manera,

$$G(y) = \begin{cases} e^{-\lambda y}, & y > 0, \\ 1, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

Finalmente,

$$F(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y}, & y > 0, \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

con lo cual $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$, como queríamos demostrar. \square

Bibliografía

- Agresti, A., Franklin, C., y Klingenberg, B. (2018). *Statistics: The art and science of learning from data* (4th ed.). Harlow: Pearson.
- Ash, R. B. (2008). *Basic probability theory*. Mineola: Dover Publications.
- Bertsekas, D. P., y Tsitsiklis, J. N. (2008). *Introduction to probability* (2nd ed.). Belmont: Athena Scientific.
- Blitzstein, J. K., y Hwang, J. (2015). *Introduction to probability*. Boca Raton: CRC Press.
- Canavos, G. (1995). *Probabilidad y estadística: Aplicaciones y métodos*. México: Mc Graw Hill.
- Devore, J. L. (2005). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias* (6ta ed.). México: Thomson.
- Grimmett, G., y Stirzaker, D. (2001). *Probability and random processes* (3rd ed.). Oxford: Oxford University Press.
- Hoel, P. G., Port, S. C., y Stone, C. J. (1971). *Introduction to probability theory*. Boston: Houghton Mifflin Company.
- R Core Team. (2019). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Descargado de <https://www.R-project.org/>
- Ross, S. M. (1999). *Simulación* (2da ed.). México: Prentice Hall.
- Ross, S. M. (2014). *A first course in probability* (9th ed.). Boston: Pearson.

Wackerly, D. D., Mendenhall, W., y Scheaffer, R. L. (2010). *Estadística matemática con aplicaciones* (7ma ed.). México: Cengage Learning.

MARÍA LAURA NORES

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, Universidad Nacional de Córdoba.

(✉) mlnores@famaf.unc.edu.ar

Recibido: 17 de octubre de 2020.

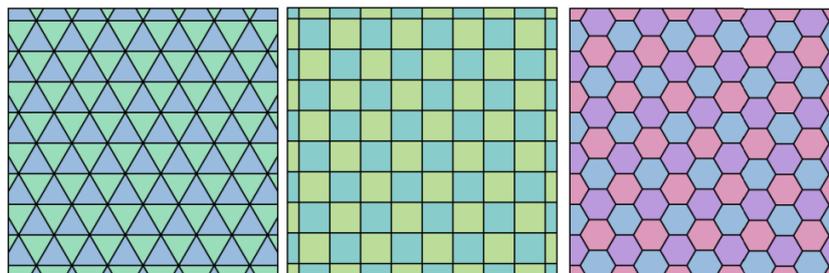
Aceptado: 3 de marzo de 2021.

Publicado en línea: 31 de julio de 2021.

se conocen todas las formas de embaldosar el plano con un único polígono convexo?

Se dice que un polígono P (entendiendo por esto al polígono en sí y a su región interior) embaldosa o tesela al plano si es posible cubrir completamente el plano con imágenes simétricas (traslaciones, rotaciones y reflexiones) de P , y donde las únicas intersecciones posibles entre los polígonos se dan entre vértices o lados (total o parcialmente). Consideraremos sólo polígonos convexos de n lados, ya que si el polígono no es convexo hay infinitas posibilidades, como sabe cualquier admirador del artista holandés M. C. Escher.

Primero recordemos que si los polígonos son regulares, sólo se puede cubrir el plano con triángulos, cuadrados o hexágonos. Este hecho que es conocido por los fabricantes y colocadores de baldosas, ya era conocido por los antiguos griegos. Es claro que triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares teselan el plano (ver figura, sacada de Wikipedia <https://es.wikipedia.org/wiki/Teselado-regular>) y es fácil probar que ningún otro n distinto de 3, 4 ó 6 es posible.



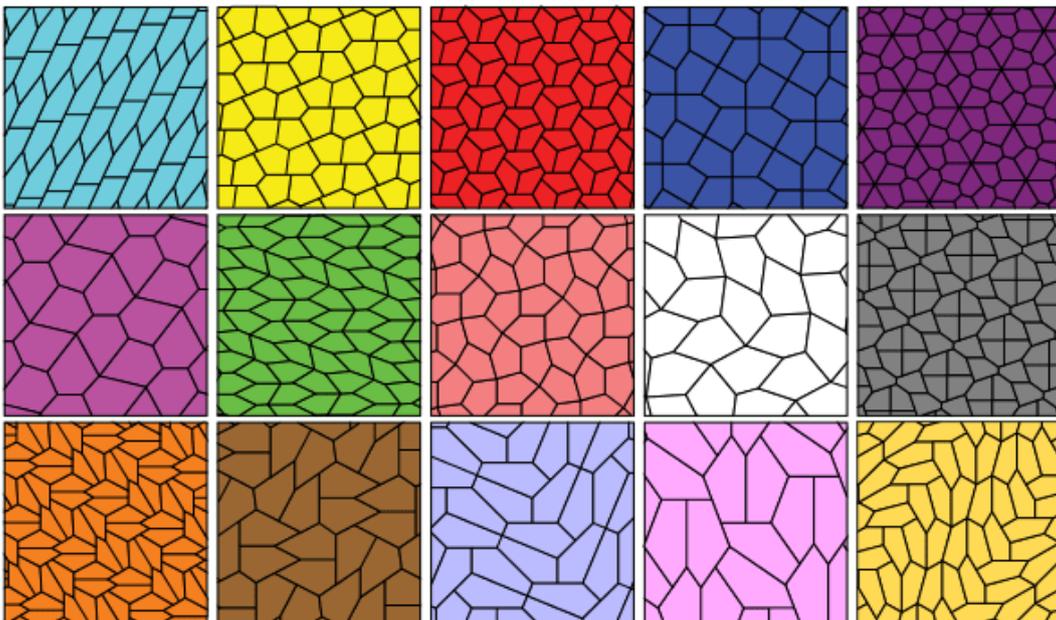
En lo que se refiere a polígonos convexos irregulares, tenemos lo siguiente:

- Todo triángulo tesela el plano.
- Todo cuadrilátero convexo embaldosa el plano.
- Existen 15 familias de pentágonos convexos que teselan el plano.
- Hay 3 familias de hexágonos convexos que embaldosan el plano.
- Ningún polígono de 7 o más lados puede teselar el plano.

La historia de esta clasificación, que involucró el trabajo de mucha gente, es muy interesante y recién se pudo completar en 2017. A principios del siglo XX ya se sabía que no se podía teselar el plano con polígonos convexos de 7 o más lados. También se sabía que se puede embaldosar el plano con cualquier triángulo o cuadrilátero convexo. Por lo que el problema era descubrir qué pentágonos y hexágonos convexos embaldosan el plano.

Karl Reinhardt encontró 5 familias de pentágonos en 1918 y 50 años más tarde R. B. Kerschner (1968) encontró 3 familias más además de las 3 familias de hexágonos. De este manera, sólo quedaba abierto el caso de los pentágonos. En 1975, el conocido divulgador Martin Gardner escribió un artículo sobre el problema, básicamente sobre el trabajo previo de Kerschner, en su columna "Juegos Matemáticos" de la revista *American Scientific* y llamó la atención de mucha gente. Entre ellos estaban Richard James III quien halló una familia más de pentágonos en 1975 y la matemática aficionada Marjorie Rice, quien encontró ¡4 familias más entre 1977 y 1978! La familia 14 apareció en 1985 de la mano de Rolf Stein. Treinta años después, Casey Mann, Jennifer McLoud-Mann y David Von Derau (2015) encontraron la quincuagésima familia, aunque aún no se sabía si podría haber otras familias posibles.

A continuación un ejemplo de teselados del plano con pentágonos convexos (imagen por Ed Pegg Jr, via Wikimedia Commons), uno de cada una de las 15 familias existentes (por orden de izquierda a derecha y de arriba a abajo).



Finalmente, en 2017, Michaël Rao utilizando una mezcla de argumentos matemáticos y búsqueda por computadoras, encontró que sólo estas 15 familias son posibles, cerrando el problema. Los resultados de Rao han sido chequeados por Thomas Hales en 2017.

Algunos de los detalles históricos, bibliográficos y matemáticos sobre esta historia (el ‘¿sabías cómo...?’) aparecerán en un artículo en el próximo número de la Revista.

Michaël Rao es un matemático de 41 años de edad que trabaja en el Centro Nacional de Investigación Científica de Francia (CNRS) y en la Escuela Normal Superior de Lyon (Francia). Thomas Hales es un profesor de Matemáticas de la Universidad de Pittsburgh (Estados Unidos).

LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LA ESCUELA SECUNDARIA MATERIALES DIDÁCTICOS PARA FAVORECER EL ESTUDIO DE FIGURAS O CUERPOS GEOMÉTRICOS

Alicia Mirta Giarrizzo

RESUMEN. Los estudiantes de secundario conocen los conceptos matemáticos de diferentes maneras durante sus trayectorias escolares. Y, si no tienen la posibilidad de enfrentarse a problemas desafiantes a fin de no solo decidir a cuáles de esos conceptos recurrir para resolverlos, sino también remediar los errores que aparecen en sus producciones, es muy probable que puedan tener dificultades para otorgarles sentido. Uno de los errores más frecuentes que se manifiestan en la resolución de problemas geométricos, se vincula con la aplicación de la proporcionalidad directa para calcular perímetros y áreas de figuras geométricas o áreas y volúmenes de cuerpos geométricos cuando varían una o más de sus dimensiones lineales. Considerando lo antes mencionado, con este trabajo se intenta compartir situaciones de enseñanza que fueron propuestas a estudiantes de un tercer año de secundario. Las mismas se basan en la construcción de figuras geométricas y de cuerpos geométricos de diferentes tamaños y formas para favorecer, a partir de su uso como material didáctico, el aprendizaje de contenidos relacionados con la proporcionalidad y la semejanza.

ABSTRACT. High school students knew about the mathematical concepts in different ways during their school trajectory. And, if they do not have the possibility of facing challenging problems in order not only to decide which of those concepts to use to solve them, but also to remedy the mistakes that appear in their productions, it is very likely that they may have difficulty making sense of them. One of the most frequent errors that appear in the resolution of geometric problems is related to the application of direct proportionality to calculate perimeters and areas of geometric figures or areas and volumes of geometric objects when one or more of their linear dimensions vary. Considering the aforementioned, this work tries to share teaching situations that were proposed to high school students. They are based on the construction of geometric figures and geometric shapes of different sizes and forms in order to favor, through their use as didactic material, the learning of contents related to proportionality and similarity.

Palabras clave: Geometría, Proporcionalidad, Semejanza, Material didáctico.

Keywords: Geometry, Proportionality, Similarity, Didactic material.

§1. La enseñanza de contenidos geométricos en la educación secundaria

Para Alsina, Burgués, y Fortuny (1988), en la enseñanza de la geometría no se debería:

... sucumbir a las limitaciones formales, simbólicas y algebraicas de los conocimientos matemáticos: será precisamente en este primer estadio de sensibilidad donde el tacto, la vista, el dibujo y la manipulación permitirán familiarizar al alumno con todo un mundo de formas, figuras y movimientos sobre el cual asentar posteriormente los modelos abstractos. (p. 11).

Sin embargo, la utilización de materiales manipulativos como recursos didácticos para la enseñanza de contenidos geométricos va perdiendo presencia en los diseños curriculares o textos para la educación secundaria. Así los estudiantes dejarían atrás ciertos aprendizajes geométricos y no los visitarían en situaciones problemáticas a fin que reconozcan a la geometría como un medio para describir y modelizar el mundo físico.

Es de esperar que, si durante sus trayectorias escolares se acostumbraron a resolver ejercicios y problemas por medio de la proporcionalidad directa, apliquen sus propiedades para fundamentar las leyes de formación de los perímetros, de las áreas y de los volúmenes de figuras y de cuerpos geométricos —según corresponda— cuando varían una o más de sus dimensiones lineales.

La enseñanza de la geometría debe propiciar entonces avances en el desarrollo de habilidades específicas clasificadas por Bressan, Bogisic, y Crego (2006) en cinco áreas: *visuales, de dibujo y construcción, de comunicación, de pensamiento y de aplicación o transferencia*. Las habilidades visuales y las habilidades de dibujo y construcción contribuyen durante la etapa de trabajo exploratorio a la identificación de conceptos, relaciones y propiedades geométricas de manera intuitiva para luego avanzar paulatinamente a sus demostraciones según los conocimientos disponibles de los estudiantes. Al respecto, de Guzmán (2010) puntualiza que:

Las ideas, conceptos, y métodos de la matemática presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geoméricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo. (p. 15).

El desafío para los docentes es proponer actividades a sus estudiantes que se resuelvan por medio de representaciones en diferentes marcos con recursos didácticos variados y que además puedan sostenerse en el tiempo para ayudarlos a reconstruir significativamente sus conocimientos. En este sentido, Duval (2006) señala que:

... la actividad matemática requiere una coordinación interna, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados; sin esta coordinación dos representaciones diferentes significarán dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos “contextos de representación” diferentes del mismo objeto. (p. 145).

Considerando lo expresado por los autores citados y por otros especialistas que acuerdan con estas concepciones, en este artículo se presentan propuestas didácticas sobre problemas que abordan contenidos relacionados con la semejanza de figuras geométricas y de cuerpos geométricos pretendiendo contribuir a la enseñanza de la noción de proporcionalidad con el propósito de remediar algunos errores persistentes que se observan en los procedimientos, fundamentaciones y/o respuestas de los estudiantes de secundario.

§2. ¿Materiales didácticos o recursos didácticos?

Alsina y cols. (1988) consideran los materiales como todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a describir, entender y consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases de aprendizaje. Para Hernán y Carrillo (1988) y para Area, Parcerisa, y Rodríguez (2010) los recursos incluyen a los materiales didácticos. En cambio, Coriat (1997) diferencia materiales de recursos, entendiendo por recurso didáctico a cualquier material no diseñado específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento que el docente decide incorporar en sus enseñanzas y por material didáctico al que diseña con fines educativos.

González Marí (2010) nombra algunos recursos¹ que los docentes usan en sus clases: pizarrón, tizas, diversos tipos de papeles, calculadoras, tablets, celulares, computadoras, fotografías, medios audiovisuales y de comunicación, instrumentos de geometría e Internet. Y también clasifica los materiales didácticos según diferentes criterios. En este trabajo se hará referencia a aquél que distingue los *materiales manipulables* de los *materiales no manipulables o virtuales* particularmente diseñados para el aprendizaje de la geometría.

Entre los materiales que se encuentran en el primer grupo están los: policubos, poliminós, bloques, cuerpos geométricos, geoplanos, rompecabezas bidimensionales y tridimensionales, mosaicos y las teselaciones. Y en el segundo grupo se encuentran softwares didácticos (Poly Pro, GeoGebra, Stella 4D, Áreas, Geometer's Sketchpad, etc.), videos educativos (en Youtube, en Canal encuentro, en Educ.ar, etc.) y textos on-line (libros, enciclopedias, revistas, etc.).

¹Se han agregado ejemplos actualizados de otros recursos, materiales manipulables y no manipulables o virtuales.

Los docentes tendrán también que realizar una revisión del uso de los materiales confeccionados por ellos considerando el punto de vista disciplinar para, como se indica en Giarrizzo (2016), "... adecuarlos a los propósitos específicos formulados para cada momento de la secuencia de enseñanza atendiendo la diversidad de conocimientos disponibles de cada grupo de alumnos" (p. 25).

Lo importante, independientemente de cada criterio de clasificación, es que la elección de estos soportes sea plural y esté basada en una evaluación adecuada para que efectivamente favorezcan la comprensión de las diferentes nociones geométricas que inter-juegan y problematizan cada situación.

§3. Situaciones de enseñanza

Se presenta a continuación una secuencia de actividades que realizaron estudiantes² de tercer año de una escuela secundaria y que integran contenidos de diferentes campos matemáticos para dar respuestas a situaciones intra matemáticas o extra matemáticas interesantes con el propósito de que se involucraran y reflexionaran sobre lo producido formulando conjeturas, estableciendo nuevas relaciones, comunicando modos de resolver, validando sus producciones, planteando nuevos problemas y/o proponiendo proyectos que requieran de las nociones geométricas como herramientas de resolución.

En la presentación de cada una de las actividades, se incluyen algunas de las producciones de los estudiantes con intervenciones de la docente y comentarios que amplían y explican sus vinculaciones con el uso de los materiales didácticos para favorecer sus aprendizajes.

3.1. Primera situación. En la Figura 1 se detallan las actividades propuestas a los estudiantes a fin de diagnosticar sus conocimientos disponibles. Fueron resueltas en cuatro pequeños grupos³ (1, 2, 3 y 4). La docente decidió no indicar las medidas iniciales de las dimensiones lineales de las figuras y de los cuerpos geométricos en cada actividad para provocar intercambios durante la puesta en común que propiciaran la argumentación de los procedimientos utilizados y algunos intentos de generalización.

¿Es cierto que dos de las siguientes proposiciones son verdaderas? Dibujen las figuras y los cuerpos geométricos. Realicen los cálculos correspondientes y justifiquen sus respuestas.

- a. Si se duplica la longitud de la arista de la base de un prisma y su altura, su volumen también se duplica.

²La edad promedio de los estudiantes es de 15 años. Todos ellos concurren a una institución escolar de la Provincia de Buenos Aires (Argentina).

³Formados por seis integrantes cada uno: A1, A2, A3, . . . , A24.

- b. Al triplicar las longitudes de los lados de un pentágono y las amplitudes de sus ángulos se puede construir otro pentágono semejante.
- c. Para que aumente el perímetro de un trapecio isósceles en 5 cm, basta con que aumente en 5 cm la longitud de su base mayor.
- d. Es suficiente que las longitudes de las generatrices, de las alturas y de los radios de las bases de dos conos se reduzcan a la mitad para que la superficie total se reduzca a su cuarta parte.

FIGURA 1. Actividades de diagnóstico.

Cuando los estudiantes tuvieron que dibujar las figuras y los cuerpos geométricos e iniciar algún procedimiento de resolución formularon preguntas que evidenciaron errores y olvidos: “Profe... ¡se olvidó de poner cuánto miden los lados!”, “¿Cuántos lados tiene un prisma?”; “Siempre me confundo, ¿para el volumen va cm^2 o cm^3 ?”; “¿Cómo se hacía un pentágono?”; “¿Es ésta la generatriz del cono? (señala la altura)”; “La fórmula que encontré en Internet para calcular el área del círculo nombra el radio, ¿cuál es?” ...

Luego de resolver las actividades, los estudiantes expusieron sus producciones grupales y respondieron las repreguntas y las nuevas preguntas formuladas por la docente para que pudieran validar sus justificaciones y comparar los diferentes procedimientos de resolución. Se comparten algunos de los intercambios que sucedieron entre los alumnos y la docente (D) del curso durante la puesta en común.

D: *Vamos ahora a corregir lo que hicieron. Recuerden que lo importante es que expliquen cómo fueron resolviendo las actividades y que no solo compartiremos los procedimientos correctos, sino también los que no terminaron y los que presentan algún tipo de error. Así que espero que todos participen. Comencemos con la actividad a.*

A2: *Es Verdadera, porque si se duplican las medidas, todo se duplica.*

D: *¿Dibujaron los cuerpos geométricos? ¿Alguno de los otros grupos pudo dibujarlos?*

A7 pasa a dibujarlos. La docente lo ayuda con la representación tridimensional de los 8 prismas pequeños que están contenidos en el prisma más grande porque tiene dificultades con el trazado de la perspectiva. Les solicita que los representen también usando el GeoGebra para la clase próxima. A22 pide pasar y lo explica de otro modo:

A22: *Prisma 1: arista de la base = 2 cm y altura = 4 cm.*

El volumen es: $V = 2^2 \cdot 4 = 16$.

Prisma 2: arista de la base = 4 cm y la altura = 8 cm.

El volumen es: $V = 4^2 \cdot 8 = 128$, 8 veces más.

D: Pero, todos eligieron medidas diferentes. ¿Y llegaron también a que el segundo volumen se obtiene multiplicando por 8 el primer volumen? Vamos a intentar demostrar si se cumple para cualquier medida. Voy a nombrar con la letra a la arista de la base y con la letra h la altura: $V_1 = a^2 \cdot h$ y $V_2 = (2 \cdot a)^2 \cdot 2 \cdot h$. ¿Cómo podemos escribir V_2 de una forma equivalente?, ¿quién me va dictando?

A12: Hay que poner: $V_2 = 4a^2 \cdot 2 \cdot h$, que después da: $V_2 = 8a^2 \cdot h$.

D: ¿Entonces?

A3: ¡Ahí está el 8!

A8: Si se duplica la longitud de la arista de la base de un prisma y su altura, su volumen se tiene que multiplicar por 8.

D: ¿Y si se triplican o se reducen a la mitad las medidas? ¿Y si las bases no son cuadradas? Piénsenlo para mañana... Ahora continuamos con la actividad b.

A7: ¡A mí nunca me dan justo los lados del pentágono cuando lo quiero dibujar con el compás!

A21: No dice que es un pentágono regular. Podés dibujar cualquiera.

A1: Pero tenés que medir después los ángulos. Yo lo dibujé regular porque todos miden 72° .

D: ¿Y resultó verdadera o falsa?

A5: Verdadera, porque se mantiene la proporcionalidad.

A1: ¡Falsa! Los ángulos interiores suman en total 1080° . ¿No ves que un ángulo interior es de 108° y por 3 te da 324° ?

A5: ¿Y?

A1: ¿Cuánto suman los 5 ángulos interiores si se triplican?

Varios alumnos lo calculan y obtienen 1620° .

D: Si no es un pentágono regular, ¿puede ser otro polígono regular?

A22: Esperen. Tengo que despejar n de la fórmula de los ángulos interiores. ¡Ya está!. Me da 11 lados.

A10: Yo no hice la cuenta. Traté de dibujarlo... Pero no me dan justo los ángulos interiores.

D: ¿Alguno se acuerda cómo hacerlo?

Como nadie responde la docente les recuerda cómo expresar la amplitud del ángulo interior en grados, minutos y segundos.

[...]

D: *Vamos a corregir lo que hicieron para responder la actividad c.*

A4: *Verdadera, porque si la base menor mide 2 cm, los lados iguales miden 3 cm y la base mayor mide 5 cm, el perímetro es de 13 cm. Y si le sumo 5 cm a la base mayor da 10 cm. Entonces calculamos el perímetro sumando 2 cm + 3 cm + 3 cm + 10 cm y da 18 cm. O sea, 5 cm más.*

A13: *Yo hice varios dibujos y la profe me ayudó a ver qué me faltaba calcular. Y me dio falsa porque el perímetro del segundo trapecio es 21,54 cm y no se obtiene sumándole 5 cm al del primer trapecio.*

D: *Contales a tus compañeros cómo lo pensaste y hacé los dibujos en el pizarrón para que lo puedan entender.*

En la Figura 2 se muestra lo realizado por A13: primero realiza dos dibujos (1) y (2), pero al agregar los 5 cm no obtiene un trapecio isósceles. La docente lo orienta para que trace la altura H y para que dibuje aparte los triángulos rectángulos que tienen en común esa altura. Como no distingue los triángulos le propone que sombree uno de ellos (3) y (4). Finalmente, A13 calcula H y X aplicando el Teorema de Pitágoras.

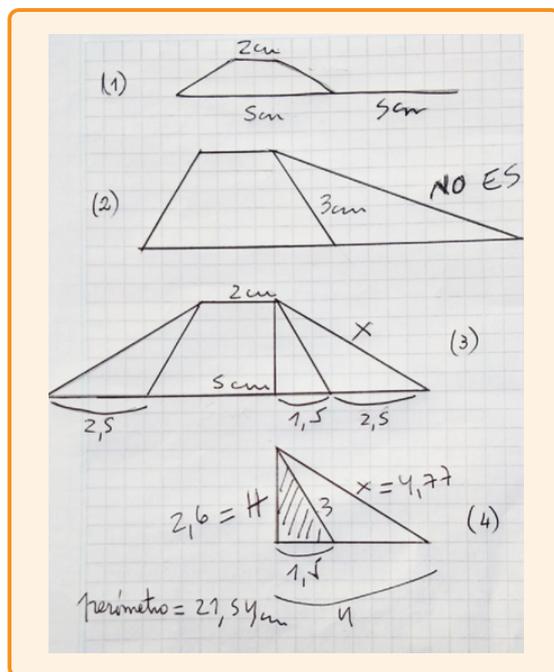


FIGURA 2. Representaciones de A13 para resolver la actividad c de diagnóstico.

D: *¿Alguna pregunta?*

La docente aclara las dudas de algunos alumnos.

[...]

D: *¿Corregimos la actividad d?*

A17: *Falsa, porque se tiene que también reducir a la mitad. Es una regla de tres.*

A24: *A mí me dio verdadera.*

D: *¿Cómo lo justificaste?*

A24: *No los dibujé... Lo pensé con las fórmulas...*

D: *Vamos a ver tu resolución.*

A24 pasa al pizarrón y escribe:

Primer cono:

$$AT = \pi r(r + g) = 3,14 \cdot 3 \cdot (3 + 5) = 75,36;$$

Segundo cono:

$$AT = \pi r(r + g) = 3,14 \cdot 1,5 \cdot (1,5 + 2,5) = 18,9;$$

y $75,36 = 18,9 \cdot 4$.

Si las longitudes de las generatrices, de las alturas y de los radios de las bases de dos conos se reducen a la mitad, la superficie total se reduce a su cuarta parte.

Entre las dificultades transversales y más comunes en las resoluciones de todos los casos planteados se diagnosticó la imposibilidad, por parte de los estudiantes, de procesar imágenes mentales que les permitieran anticipar si las transformaciones geométricas propuestas eran verdaderas o falsas, dibujar cuerpos geométricos en perspectiva, indicar unidades de medida y usar diferentes instrumentos de geometría.

Durante los intercambios producidos en la puesta en común reconocieron sus errores y tomaron apuntes sobre las aclaraciones dadas por la docente y los aportes de sus compañeros. Resultó fundamental la confianza dada por la docente al habilitar la participación de todos los alumnos independientemente de las actividades que lograron resolver.

3.2. Segunda situación. Se mantuvieron los mismos integrantes de los cuatro grupos de trabajo que participaron en la primera situación. La docente decidió no indicar los recursos para darles a los estudiantes la posibilidad de elegirlos.

En actividades anteriores ya habían representado todos los hexaminós⁴ que pueden formarse y, de las 35 posibilidades, reconocieron las 11 que se usan como desarrollos planos para construir un cubo. El resto de los desarrollos planos, que necesitaron para construir los cuerpos geométricos para resolver las actividades de esta situación (Figura 3), los buscaron en diferentes libros y en algunos sitios de Internet⁵.

1. *Construyan un prisma de base hexagonal, una pirámide de base hexagonal, un cubo y un prisma de base cuadrada. Elijan las longitudes de las dimensiones lineales de modo que:*
 - a. *el volumen del prisma de base hexagonal sea el triple del volumen de la pirámide de base hexagonal.*
 - b. *el área total del cubo sea la cuarta parte del área total del prisma de base cuadrada.*
2. *Construyan tres cuerpos geométricos cuyas dimensiones lineales respondan a alguna ley de formación y establezcan relaciones entre sus áreas laterales, sus áreas totales y sus volúmenes. Enuncien conclusiones.*

FIGURA 3. Actividades para relacionar las áreas y los volúmenes de cuerpos geométricos.

Actividad 1.a.

Grupo 1. Sus integrantes buscaron información en Internet y encontraron actividades mediadas por el software GeoGebra. Copiaron las respuestas y concluyeron que la relación era falsa: “el volumen del prisma de base hexagonal no es el triple del volumen de la pirámide de base hexagonal si tienen bases y alturas iguales”.

En las Figuras 4 y 5 se observan los sectores de las actividades que los estudiantes consultaron para calcular los volúmenes del prisma y de la pirámide usando GeoGebra. Al confrontar estas respuestas con las de los otros grupos surgió la necesidad de realizar los cálculos completos para corregirlos:

$$14,24 \cdot 3 = 42,72 \neq 51,96$$

y

$$51,96 : 3 = 17,32 \neq 14,24$$

Reconocieron que las aproximaciones influyeron en los resultados que copiaron. La docente intervino para que calcularan los volúmenes reemplazando la apotema de la base por $\sqrt{3}$ y así pudieron establecer que la relación entre los volúmenes de

⁴Un hexaminó está formado por seis cuadrados unidos por los lados, de tal forma que cada dos de ellos tienen al menos un lado en común.

⁵Luego de intercambiar algunas direcciones acordaron consultar: *Matemáticas visuales. Prismas y sus desarrollos planos* en <http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/planenets/prismas.html>

la pirámide V_1 y del prisma V_2 era verdadera:

$$V_1 = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 5 = 10\sqrt{3}$$

y

$$V_2 = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 5 = 30\sqrt{3}.$$

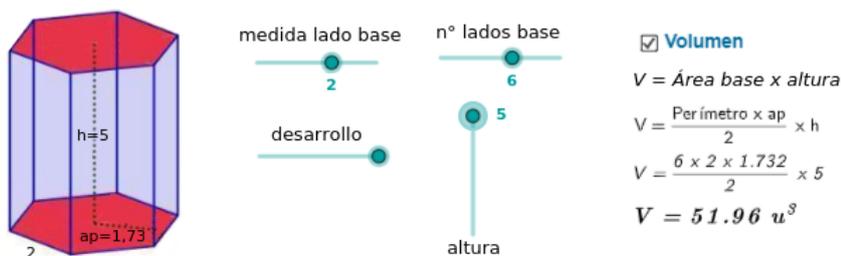


FIGURA 4. Volumen del prisma hexagonal usando GeoGebra⁶.

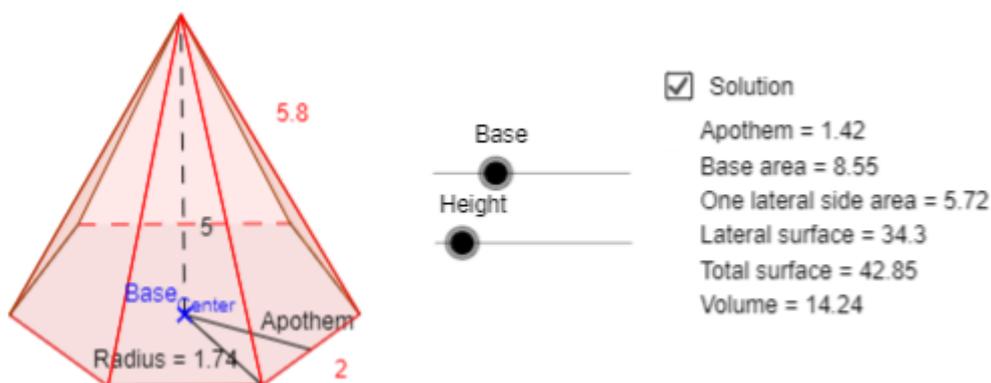


FIGURA 5. Volumen de la pirámide hexagonal usando GeoGebra⁷.

Actividad 1.b.

Grupo 3. Los estudiantes consideraron un cubo de 2 cm de arista y un prisma en el que la arista de la base también era de 2 cm y la altura de 8 cm porque pensaron que tenían que cuadruplicarla para que el área total se cuadruplicara. Obtuvieron que el área total del cubo era de 24 cm² y que el área total del prisma de base cuadrada era de 72 cm². Entonces, con estas medidas llegaron a enunciar que: “el área total del cubo es la tercera parte del área total del prisma de base cuadrada”.

La docente les propuso cuadrricular las bases y las caras laterales de esos cuerpos tomando como unidad 1 cm y que contaran los cuadrados de 1 cm² de área que se

⁶En <https://www.geogebra.org/m/sHJka8JA#material/fReDuvW2> se accede a la actividad completa.

⁷En <https://www.geogebra.org/m/na69S9vm> se accede a la actividad completa.

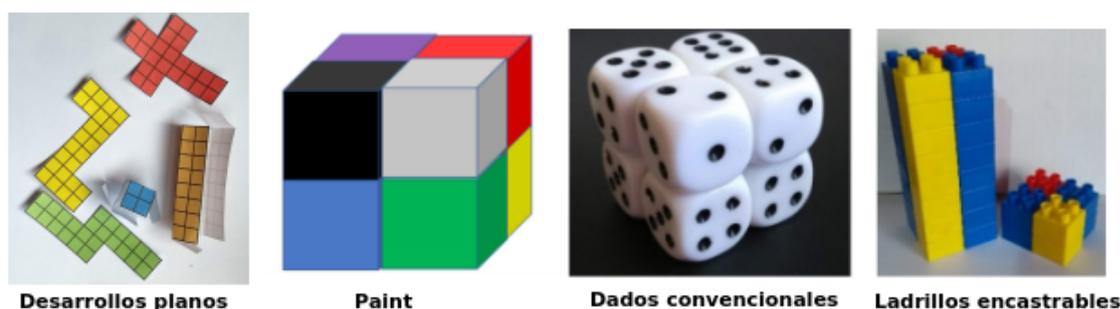


FIGURA 6. Materiales utilizados por los estudiantes para representar diferentes situaciones.

habían formado. Otros grupos eligieron diferentes materiales como soportes para resolver esta actividad (Figura 6).

El siguiente intercambio entre estudiantes da cuenta de cómo el uso de estos materiales favoreció la interpretación de las unidades de longitud, de superficie y de volumen.

A13: *¡En el cubo son 24 cuadraditos y en el prisma son 72!*

A14: *¿Entonces en el otro problema tenemos que pensar que son cubitos de 1 cm de arista? ¡Hay que imaginarse que los llenamos con agua y los vamos poniendo adentro! Y ahí tenemos el volumen...*

A15: *¡Sí! Pero también podemos imaginarnos el cubo mágico que está formado por 27 cubitos de 1 cm de arista. Si cada cubito tiene 1 cm^3 de volumen, contándolos sacamos el volumen del cubo grande.*

A16: *Se ve que en cada cara hay 9 cuadraditos de 1 cm^2 . Y si sumamos todos los cuadraditos de las seis caras hay 54, que es el área total del cubo grande. Por eso se pone "centímetros cuadrados". Porque son cuadrados de 1 cm de lado.*

A14: *En el volumen va "centímetros cúbicos" porque son cubitos de 1 cm de arista.*

A13: *¡Ahora entendí la diferencia!*

Grupo 2. Calcularon el área total de un cubo de 2 cm de arista: 24 cm^2 . La cuadruplicaron y plantearon la siguiente ecuación: $96 = 8 + 8x$. Luego enunciaron: "para que el área total del cubo de 2 cm de arista sea la cuarta parte del área total del prisma de base cuadrada, la base tiene que ser la misma y la altura tiene que medir 11 cm". La docente les propuso que, con el mismo procedimiento, consideraran que la arista de la base aumentara sucesivamente en 1 cm para encontrar, si es posible, una ley de formación.

Grupo 4. Sus integrantes comenzaron calculando las áreas laterales y totales de los prismas de base cuadrada manteniendo la longitud de la arista de la base constante de 3 cm y sus alturas de 3 cm, 6 cm, 9 cm y 12 cm. Como la docente observó que

los cálculos estaban desordenados, les sugirió que tabularan las alturas, las áreas laterales y las áreas totales de los prismas (Tabla 1).

Área de la base	Altura	Área lateral	Área total
9 cm ²	3 cm	36 cm ²	54 cm ²
9 cm ²	6 cm	72 cm ²	90 cm ²
9 cm ²	9 cm	108 cm ²	126 cm ²
9 cm ²	12 cm	144 cm ²	162 cm ²

TABLA 1. Áreas laterales y totales de los prismas (Grupo 4).

Observaron y enunciaron que la ley de formación de las áreas laterales es la misma que la ley de formación de las alturas: “si se multiplica la altura del primer prisma por dos, por tres y por cuatro pasa lo mismo con las áreas laterales”. El siguiente diálogo para hallar la ley de formación entre las áreas totales de los prismas tuvo lugar entre los estudiantes y la docente:

D: Si no se obtienen las áreas totales al multiplicar los 54 cm² por 2, por 3 y por 4, ¿será posible que se obtengan al multiplicarlas por otros números?

A19: Puede ser, pero no me doy cuenta para calcularlo.

A20: Vamos probando hasta que dé.

A21: ¿Y 54 por qué número nos da 90?

D: Ese tipo de pregunta, ¿a qué les recuerda?

A22: ¿Ecuaciones?

A19: (Escribe en su cuaderno.) $54 \cdot x = 90 \implies x = 90 : 54 = 5/3$.
¡Pero es una fracción!

D: ¿No es un número?

A20 resolvió las otras ecuaciones y expresó las áreas totales según se muestra en la Tabla 2.

Área total
$54 \text{ cm}^2 = 54 \text{ cm}^2 \cdot 3/3$
$90 \text{ cm}^2 = 54 \text{ cm}^2 \cdot 5/3$
$126 \text{ cm}^2 = 54 \text{ cm}^2 \cdot 7/3$
$162 \text{ cm}^2 = 54 \text{ cm}^2 \cdot 9/3$

TABLA 2. Relación entre las áreas totales de los prismas según A20.

A partir de las intervenciones realizadas por la docente pudieron generalizar la relación entre las áreas totales de los prismas con la siguiente fórmula:

$$AT_n = 54 \cdot \frac{2n + 1}{3}.$$

Actividad 2.

Grupos 1 y 3. Los integrantes de ambos grupos eligieron tres prismas de base cuadrada siendo la arista de la base de 1 cm y las alturas de 1 cm, 2 cm y 3 cm. Utilizaron diferentes recursos (Figura 7).

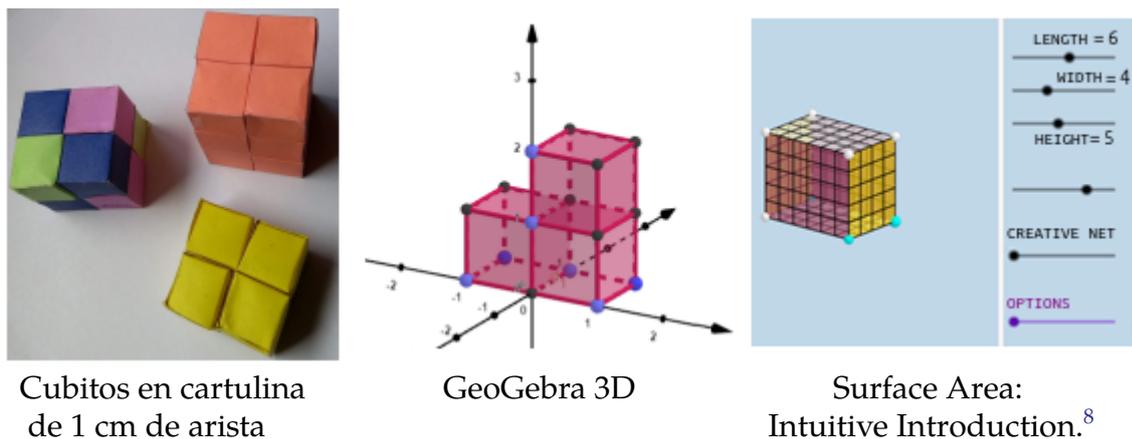


FIGURA 7. Representaciones de prismas de base cuadrada.

Calcularon sus áreas laterales, sus áreas totales y sus volúmenes. Los dos grupos llegaron a las mismas conclusiones: “la ley de formación de las áreas laterales y de los volúmenes es la misma que la ley de formación de las alturas” y “la ley de formación de las áreas totales es: $AT_n = 16 \cdot \frac{n + 2}{2}$ ”. Considerando el trabajo de los estudiantes cabe indicar que:

Para el estudio de las magnitudes espaciales como el perímetro, el área y el volumen no es suficiente con reemplazar los datos en las fórmulas correspondientes para calcular determinadas incógnitas. Las construcciones con diferentes materiales de los objetos considerados será un recurso fundamental para la comprensión y para la integración de los contenidos mediante la visualización de las modificaciones producidas en ellos durante toda la resolución del problema. (Giarrizzo, 2007, p. 66)

⁸GeoGebra Resources. Con los deslizadores se pueden variar las dimensiones lineales de los prismas, la visualización interna de las unidades de área, los desarrollos planos, las caras laterales y las bases.

3.3. Tercera situación. La docente organiza nuevamente los grupos de modo que estén formados por estudiantes que hayan logrado diferentes avances en sus aprendizajes para que compartan sus producciones anteriores con otros compañeros. En la Figura 8 se detallan las actividades correspondientes a esta situación.

En las Tablas 3 y 4 se muestran algunos datos correspondientes a las figuras geométricas y a los cuerpos geométricos que forman series de tres elementos.

- ¿Cuáles son las leyes de formación de cada serie? Si se agregaran tres nuevas figuras geométricas y tres nuevos cuerpos geométricos a cada una de las series anteriores, ¿qué medidas les corresponderían a sus elementos? Expresen verbalmente y simbólicamente, de ser posible, las leyes de formación encontradas.*
- ¿Se cumplirán las mismas leyes de formación para los perímetros y las áreas de las figuras geométricas que forman cada serie? ¿Y para las áreas totales y los volúmenes de los cuerpos geométricos que forman cada serie? ¿Por qué?*
- ¿Encontraron otras relaciones? Exprésenlas verbalmente y simbólicamente, de ser posible.*

FIGURA 8. Actividades para definir las leyes de formación de diferentes series de figuras y de cuerpos geométricos.

	Rombos			Pentágonos regulares		
Diagonal mayor	8cm	16cm	24cm			
Ángulo que determina la diagonal mayor con el lado	30°	45°	60°			
Lado				2cm	4cm	8cm
Perímetro						
Área						

Tabla 3. Datos de las figuras geométricas de las series.

	Pirámides de base hexagonal			Prismas de base cuadrada			Conos		
Arista de la base	4cm	4cm	4cm	4cm	8cm	12cm			
Altura	5cm	10cm	15cm	10cm	20cm	30cm	6cm	10cm	14cm
Radio de la base							5cm	5cm	5cm
Área total									
Volumen									

Tabla 4. Datos de los cuerpos geométricos de las series.

Grupo 1. Encontraron dos leyes de formación para los rombos: “las diagonales mayores de los rombos se forman sumándole 8 cm a la diagonal anterior” y “las diagonales mayores de los rombos se forman duplicando y triplicando la diagonal mayor del primer rombo”.

Después de varios intentos para dibujar los rombos trazando las diagonales mayores y los ángulos que éstas determinaban con el lado solicitaron la ayuda de la docente:

A1: *¿Cómo sabemos dónde terminan los lados?*

D: *Piensen en las propiedades de los cuadriláteros.*

A2: *Las diagonales son perpendiculares y se cortan en su punto medio. ¡Es eso!*

Al dibujar los rombos, reconocieron que con los datos del segundo rombo quedaba dibujado un cuadrado y con los datos del tercer rombo la diagonal mayor ya no lo era. La docente dedicó unos minutos para aclarar sus dudas. Luego midieron con la regla los lados y las diagonales menores para determinar sus longitudes.

D: *Busquen otra forma de calcularlo. ¿Recuerdan el tema anterior que vimos? Resolvieron problemas parecidos.*

A4: *Seno, coseno...*

D: *¿Con cuál o cuáles de esas funciones pueden calcular los lados de los rombos y las diagonales menores?*

A3: *(Busca en su cuaderno.) ¡Listo! Con el seno y la tangente de los ángulos que nos diste en la tabla.*

Grupo 3. Para la serie de las pirámides de base hexagonal aseguraron que como la base era constante y las alturas respondían a múltiplos de 5, cada volumen también aumentaría 5 veces más que el volumen anterior como se evidencia en la siguiente interacción:

D: *Intenten expresar los volúmenes con números irracionales.*

A14: *¿Por qué?*

D: *Porque me parece que se pueden encontrar algunas relaciones...*

A15: *A ver si me acuerdo... (Los volúmenes están registrados en la Tabla 5)*

A13: *Por eso no podíamos encontrar la relación, profe. ¿Conviene siempre dejar las raíces sin calcular?*

D: *Depende de cada situación. En este caso, si se calcula la $\sqrt{3}$, ¿Cómo decidimos cuántos decimales considerar?*

Arista de la base	4 cm	4 cm	4 cm
Altura	5 cm	10 cm	15 cm
Volumen	$40\sqrt{3}$ cm ³	$80\sqrt{3}$ cm ³	$120\sqrt{3}$ cm ³

TABLA 5. Volúmenes de las pirámides de base hexagonal (Grupo 3).

Se dieron cuenta que la ley de formación de los volúmenes era la misma que la ley de formación de las alturas:

$$V_2 = 2V_1, \quad V_3 = 3V_1, \quad h_2 = 2h_1, \quad h_3 = 3h_1.$$

Decidieron comprobar estas relaciones construyendo las pirámides. Se encontraron con el desafío del armado de sus desarrollos planos y propusieron dos procedimientos: calcular las apotemas laterales a partir de la apotema de la base y de las alturas de las pirámides o, calcular los lados congruentes de las caras triangulares de las pirámides a partir del radio de la base y de las alturas de las pirámides.

Grupo 4. Registraron la variación de las áreas totales de los prismas de base cuadrada (Tabla 6).

Arista de la base	4 cm	8 cm	12 cm	16 cm	20 cm	24 cm
Altura	10 cm	20 cm	30 cm	40 cm	50 cm	60 cm
Área total	192 cm ²	768 cm ²	1728 cm ²	3072 cm ²	4800 cm ²	6912 cm ²

TABLA 6. Áreas totales de los prismas de base cuadrada (Grupo 4).

Fundamentaron la no existencia de proporcionalidad directa con los cocientes que obtuvieron entre las áreas totales y las aristas de las bases, expresados en cm: 48, 96, 144, 192, 240 y 288. Pero descubrieron que las diferencias entre esos cocientes eran constantes e iguales a 48 cm. Después pensaron en calcular las diferencias entre las áreas totales. Obtuvieron los siguientes valores expresados en cm²: 576, 960, 1344, 1728, 2112. Y al intentar con la segunda diferencia, encontraron una constante igual a 384 cm². Decidieron representar gráficamente la relación (Figura 9)⁹ y reconocieron que su comportamiento correspondía a una función cuadrática.

Con ayuda de la docente enunciaron: “si la segunda diferencia entre las imágenes de los valores sucesivos del dominio de una función es constante, la función es cuadrática”. Lograron escribir la fórmula de la función que expresa la variación de las áreas totales de los prismas en función de la arista de la base: $AT = 12 \cdot a^2$. Calcularon los volúmenes de los prismas y escribieron la fórmula de la función que expresa la variación de los volúmenes de los prismas en función de la arista de la base: $V = 2,5 \cdot a^3$.

Calcularon los cocientes sucesivos entre las longitudes de las aristas de las bases de los prismas y obtuvieron esta sucesión particular S_1 : 2/1, 3/2, 4/3, 5/4, 6/4.

⁹Se ha trazado la línea que une las coordenadas que representan gráficamente la situación para que los estudiantes visualicen el comportamiento de la función cuadrática que en este caso es discontinua.

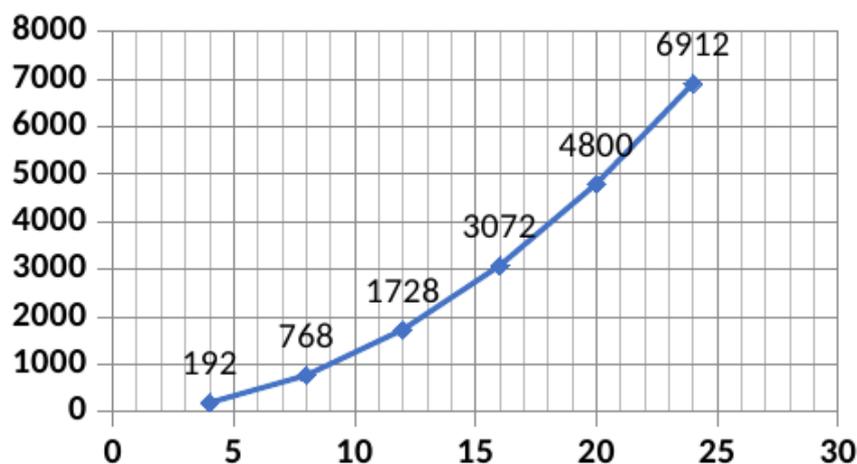


FIGURA 9. Áreas totales de los prismas en función de la arista de la base (Grupo 4).

Continuaron con los cocientes sucesivos entre las áreas totales de los prismas y obtuvieron la sucesión que se forma con los cuadrados de los números de la sucesión anterior, S_2 : $4/1, 9/4, 16/9, 25/16, 36/25$. Finalmente, los cocientes entre los volúmenes de los prismas forman una sucesión cuyos términos son los cubos de los números de la primera sucesión S_3 : $8/1, 27/8, 64/27, 125/64, 216/125$. Escribieron las fórmulas de sus términos generales y estudiaron analíticamente los comportamientos de sus representaciones gráficas.

$$\text{Para } S_1: a_n = \frac{n+1}{2}, \quad \text{Para } S_2: a_n = \frac{(n+1)^2}{2}, \quad \text{Para } S_3: a_n = \frac{(n+1)^3}{2}.$$

Cabe señalar que no siempre los estudiantes indicaron las unidades de medida correspondientes a cada magnitud y en consecuencia enunciaron equivalencias falsas al comparar solamente las medidas entre las áreas y los volúmenes.

§4. Sobre la evaluación y los proyectos. Una forma diferente de evaluar

Por cuestiones de espacio se indican algunas orientaciones sobre la evaluación que fue realizada por los estudiantes en dos momentos. Primero se apeló a una actividad que podían resolver en sus casas de modo individual consultando lo registrado en sus carpetas, otros textos y/o sitios de Internet. Para justificar sus respuestas, los ejemplos o contraejemplos debían ser diferentes a los dados en las actividades grupales. Se realizaron tutorías virtuales y se destinaron además las dos clases siguientes a la corrección de la actividad entregada.

A posteriori se realizó una evaluación en la escuela que fue resuelta en parejas formadas por la docente cuyos integrantes habían alcanzado indicadores de avance similares en sus aprendizajes. En las actividades se les proponía inventar, representar y analizar las leyes de formación de dos nuevas series: una formada

por 5 polígonos regulares semejantes y otra formada por 5 cuerpos geométricos semejantes.

Los proyectos¹⁰ pusieron en juego los saberes y habilidades logrados por los estudiantes durante la resolución de las actividades propuestas por sus docentes¹¹ y se basaron en la construcción de figuras y cuerpos geométricos de diferentes tamaños con igual o diferente forma para que los alumnos de jardines de infantes y escuelas primarias pudieran usarlos como recursos didácticos.

§5. Para finalizar...

La inclusión de la construcción de figuras y de cuerpos geométricos en la planificación de las situaciones propuestas favoreció la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos geométricos a través de su manipulación, observación o lectura ofreciéndoles oportunidades de aprender algo, o bien de intervenir en el desarrollo de alguna función de la enseñanza (Gimeno Sacristán, 2001).

Las producciones de los estudiantes, las intervenciones de la docente, los materiales y recursos didácticos y las orientaciones didácticas que complementaron las actividades seleccionadas pretendieron mostrar otros alcances que las relaciones de la proporcionalidad y semejanza tienen con los contenidos de los distintos campos matemáticos que figuran en los diseños curriculares para la enseñanza de la matemática en la escuela secundaria.

Es importante que los docentes instalen diferentes condiciones didácticas durante la gestión de las clases para que los estudiantes logren avanzar en sus aprendizajes, dándoles la oportunidad de que decidan entre los procedimientos posibles de resolución y los recursos didácticos —provisorios y mejorables— cuál o cuáles son los más adecuados para resolver cada problema geométrico. De este modo se podrán evaluar los procesos de adquisición de los conocimientos con preguntas, repreguntas, comentarios y sugerencias —orales o escritas— para establecer si verdaderamente las resoluciones erróneas o incompletas se producen por no interpretar las consignas, desconocer las nociones involucradas o no poder anticipar determinadas transformaciones geométricas.

Es fundamental que también se valore la devolución de lo producido a los estudiantes, inclusive en las evaluaciones, por medio de diferentes tipos de intercambios —presenciales y/o virtuales— no solo para revisar las propias prácticas y retomar la enseñanza de aquellos aspectos de los contenidos cuyos aprendizajes aún no han sido logrados, sino también para promover que los estudiantes analicen

¹⁰Pueden consultarse proyectos similares en Compiano, B., Giarrizzo, A. y Schell, H. (1999). *Matemática y su enseñanza. Problemáticas integradoras desde el álgebra*, (p. 101-104). Buenos Aires: Edicial y en Giarrizzo (2007).

¹¹Los estudiantes de otros terceros y cuartos años también realizaron proyectos similares y expusieron los materiales didácticos en una muestra institucional abierta a la comunidad.

y transformen sus conocimientos. Para cerrar este trabajo, se recupera una cita de una publicación de [Sadovsky \(2005\)](#) que resulta relevante para lo discutido en el presente artículo:

Hay un asunto de confianza como trasfondo del tipo de vínculo que se entabla entre el alumno y el docente a raíz de los intercambios que sostienen: ¿hasta qué punto el docente confía en las posibilidades del alumno de producir ideas?, ¿hasta qué punto las prestigia como parte de la producción relevante de la clase?, ¿hasta qué punto el alumno confía en que el docente no juzgará de modo negativo las marchas y contramarchas propias de la gestación de conocimiento?(...) que el estudiante produzca conocimiento ubica al profesor en un vínculo de intercambio intelectual en el que todas las ideas del alumno –erróneas, provisionales, imprecisas, pertinentes, brillantes– puedan tener un valor para la producción. (p. 15)

§6. Agradecimientos

A mis exalumnos, docentes y directivos de instituciones educativas de todos los niveles de enseñanza con los que realicé o asesoré la puesta en práctica de experiencias similares. A los colegas y especialistas con los que compartí investigaciones, producciones escritas, eventos educativos y encuentros de capacitación. A los revisores y al Comité Editorial de esta revista por las valiosas orientaciones recibidas durante la producción del artículo.

Bibliografía

- Alsina, C., Burgués, C., y Fortuny, J. M. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Editorial Síntesis S.A.
- Area, M., Parcerisa, A., y Rodríguez, J. C. (2010). *Materiales y recursos didácticos en contextos comunitarios*. Barcelona: Editorial Grao.
- Bressan, A. M., Bogisic, B., y Crego, K. (2006). *Razones para enseñar geometría en la educación básica. Mirar, construir, decir y pensar...* Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.
- Coriat, M. (1997). Materiales, Recursos y Actividades: Un panorama. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (p. 155-178). Barcelona: Horsori.
- de Guzmán, M. (2010). *El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en análisis matemático: elementos básicos del análisis*. Madrid: Ediciones Pirámide.

- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143–168. Descargado de <https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546>
- Giarrizzo, A. (2007). ¿Proporcional o no proporcional? Construcciones geométricas con sentido. *Novedades Educativas*, 18(195), 66-70.
- Giarrizzo, A. (2016). *Relaciones espaciales y cuerpos geométricos. Resolución de problemas matemáticos en el nivel inicial*. (N° 103). Buenos Aires: Novedades Educativas. Colección 0 a 5, la educación en los primeros años.
- Gimeno Sacristán, J. (2001). *Docencia y cultura escolar. Reformas y modelos educativos*. Buenos Aires: Lugar Editorial.
- González Marí, J. L. (2010). *Recursos, Material didáctico y juegos y pasatiempos para Matemáticas en Infantil, Primaria y ESO: consideraciones generales*. Descargado de <https://bit.ly/3ijOnSV>
- Hernán, F., y Carrillo, E. (1988). *Recursos en el aula de matemáticas*, (34). Madrid: Editorial Síntesis. Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje.
- Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

ALICIA MIRTA GIARRIZZO

Docente jubilada. Profesora de Matemática y Cosmografía. Licenciada en Educación con orientación en Enseñanza de la Matemática. Capacitadora en talleres, jornadas y eventos educativos para las editoriales Santillana y Novedades Educativas. Asesora de Instituciones Educativas. Escritora de artículos y libros relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.

(✉) agiarriz@gmail.com

Recibido: 3 de agosto de 2020.

Aceptado: 28 de junio de 2021.

Publicado en línea: 31 de julio de 2021.

RETORNANDO AL HOTEL DE HILBERT

Juan Pablo Jorge y Hernán Vázquez

RESUMEN. Se construyen particiones particulares del conjunto de los naturales a través de procesos recursivos generando, de esta manera, numerables ejemplos de conjuntos numerables y disjuntos cuya unión es un conjunto también numerable. El proceso es constructivo por lo cual no se hace uso del axioma de elección. Se presenta un programa que genera una de estas particiones especiales y se muestra cómo generar infinitas de las mismas. Esta línea de razonamiento puede tener múltiples aplicaciones en la teoría de conjuntos y de modelos. Probamos que la cantidad de formas de realizar estas particiones de los naturales es no numerable, existe mayor cantidad de estas particiones, bautizadas doblemente numerables, que números naturales. Para cada número natural mayor que 1, mostramos un procedimiento efectivo que genera estas particiones.

ABSTRACT. Some partitions of Natural Number set are built through recursive processes generating in this manner countable examples of countable and disjoint sets whose union is a set also countable. This process is constructive, so the Axiom of choice is not used. We provide a PC program that generates one of these special partitions and shows how to generate infinite of them. This line of reasoning can have multiple applications in Set theory and Model theory. We proved that the number of ways to make these partitions of natural numbers is not countable, there are more of these partitions (named doubly countable) than natural numbers. For each natural number greater than 1, we show an effective procedure that generates these partitions.

§1. Introducción

La línea de razonamientos que desarrollaremos está basada en generar particiones de los números naturales (Vinogradov, 1977). Pero no cualquier partición de los mismos, como podría ser, por ejemplo, la que tiene sólo dos clases infinitas correspondientes a los pares e impares. Queremos particiones de los naturales en infinitas clases cada una numerable, además de un método efectivo para lograrlo. Separar a los números naturales en infinitos conjuntos numerables, disjuntos dos a dos, de forma recursiva es nuestra tarea principal. Llamaremos a estas particiones

Palabras clave: Particiones de los naturales; Hotel de Hilbert; Uniones numerables; Matemática aplicada.

Keywords: Partition of natural numbers; Hilbert's Hotel; Countable unions; Applied mathematics.

de los naturales, *particiones doblemente numerables* (PDN), ya que todos sus conjuntos son numerables y tenemos una cantidad numerable de estos. A lo largo de todo el trabajo, entenderemos *numerable* como la cardinalidad de los números naturales.

Pensando en el famoso *Hotel de Hilbert* ([El hotel de Hilbert, 2020](#); [El hotel infinito de Hilbert, 2021](#); [Paenza, 2005](#)), nuestra primera tarea se podría definir de la siguiente manera: si llegaran simultáneamente a la isla donde se encuentra el hotel numerables contingentes de turistas y cada contingente fuese numerable, ¿cómo encontrarle una habitación diferente a cada turista si el hotel se encuentra en su totalidad ya ocupado?

Este problema está muy relacionado con el siguiente (*problema de la unión numerable*): dada una cantidad numerable de conjuntos disjuntos de a pares, tales que cada uno es numerable, ¿cuál es la cardinalidad del conjunto unión? Es sabido que en la axiomática de *Zermelo-Fraenkel* (ZF) ([Ivorra, 2018a, 2018b](#); [Suppes, 1968](#)) es necesario contar con el *Axioma de Elección* (AE) si se quiere asegurar que la cardinalidad de la unión sea numerable para el caso general ([Rubin y Rubin, 1963](#)). Al generar las particiones de los naturales buscadas, nosotros encontraremos infinitos ejemplos de conjuntos numerables y disjuntos cuya unión es el conjunto de los números naturales. Es decir, generaremos con un procedimiento efectivo al menos numerables ejemplos de conjuntos numerables y disjuntos de a pares, tales que su unión es numerable. La diferencia principal es que nosotros estamos interesados en el proceso inverso, en vez de unir numerable conjuntos numerables (y disjuntos), generar particiones doblemente numerables de los naturales. Este proceso nos llevará a una prueba original del *problema de la unión numerable* nombrado.

Nuestros resultados principales están dentro del dominio de la matemática recursiva, lo resolveremos de manera algorítmica y mostraremos un ejemplo de programa posible que realiza una de las infinitas particiones posibles.

§2. Conceptos matemáticos fundamentales

Antes de comenzar a exponer el núcleo de nuestro trabajo, nos detendremos para explicitar algunos conceptos básicos que usaremos. Será esencial dominar los conceptos de equipotencia o coordinabilidad entre conjuntos, cardinalidad, partición y relación de equivalencia. Presentaremos, además, el problema del Hotel de Hilbert en sus versiones clásicas. Quienes tengan presente estos temas pueden pasar a la sección siguiente.

2.1. Biyección, equipotencia y Teorema de Cantor-Bernstein. Uno de los conceptos más importantes a la hora de realizar nuestra tarea es el de *función biyectiva* (ver definición (2.3)). La importancia de las funciones biyectivas radica en que nos permiten *contar* cantidad de elementos de los conjuntos aun cuando los conjuntos

no son finitos. Y uno de nuestros objetivos es generar particiones cuyas clases tengan todas la misma cantidad de elementos. Cualquiera persona que haya entrado alguna vez a una sala en donde todas sus butacas estuviesen ocupadas y ninguna persona quedara parada pudo deducir que existían tantas butacas como personas dentro de la sala (suponiendo que ninguna butaca tiene más de una persona). Esto es importante, ya que podemos saber si hay tantas butacas como personas sin necesidad de saber exactamente cuántas hay, esto es, sin necesidad de contar ni butacas ni personas. En este caso, estamos habilitados para decir que el conjunto de butacas es equipotente con el conjunto de personas dentro de la sala. Puede ser que no sepamos exactamente cuántas personas hay, pero estamos seguros de que existe la misma cantidad de asientos. Lo dicho hasta acá puede ser condensado en las siguientes definiciones:

Definición 2.1. Sean X, Y conjuntos y f una función, tal que $f : X \rightarrow Y$. Decimos que f es *inyectiva* si

$$(\forall x \in X)(\forall y \in X)(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)).$$

Es decir, dados dos elementos cualesquiera distintos del dominio, sus imágenes no pueden coincidir. Si existe una función inyectiva $f : X \rightarrow Y$, estamos en condiciones de asegurar que la cantidad de elementos de X es menor o igual que la cantidad de elementos de Y (ver Figura 1). Si a la cantidad de elementos de un conjunto X la llamamos *cardinalidad* de X , y la denotamos como $|X|$, entonces podemos resumir lo anterior diciendo que si existe una función inyectiva entre X e Y , $|X| \leq |Y|$.

Definimos la *sobreyectividad* de una función f como la propiedad que nos garantiza que todo elemento del conjunto de llegada o codominio (Y) esté relacionado con algún elemento del dominio (X).

Definición 2.2. Sean X, Y conjuntos y f una función, tal que $f : X \rightarrow Y$. Decimos que f es *sobreyectiva* si

$$(\forall y \in Y) (\exists x \in X) \quad \text{tal que} \quad f(x) = y.$$

En el caso de existir una función sobreyectiva como la dada en la definición anterior, podemos asegurar que $|Y| \leq |X|$. Puede observarse en la Figura 2 esta relación necesaria entre la cantidad de elementos de los conjuntos.

Definición 2.3. Bajo las mismas condiciones de las definiciones anteriores, decimos que una función f es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

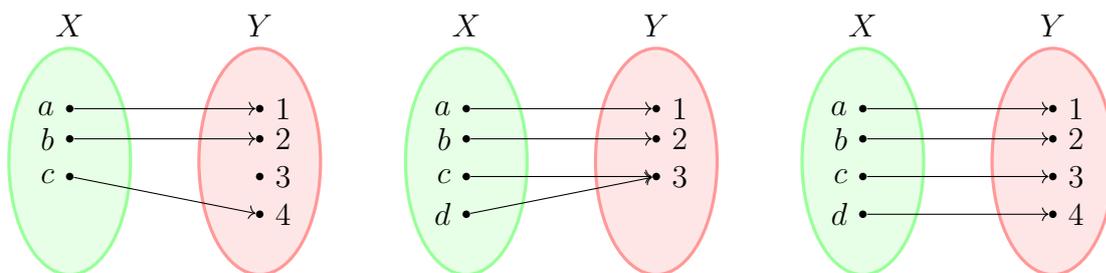


Figura 1: Función inyectiva Figura 2: Función sobreyectiva Figura 3: Función biyectiva

Estamos ahora en condiciones de definir uno de los conceptos centrales para el desarrollo de nuestro artículo, el concepto de equipotencia.

Definición 2.4. Sean X e Y dos conjuntos. Decimos que X es equipotente con Y si existe una función biyectiva f , tal que $f : X \rightarrow Y$.

La equipotencia entre conjuntos implica que los mismos comparten la cardinalidad (Figura 3). Cuando un conjunto X es equipotente con el conjunto de los números naturales, es decir, existe $f : X \rightarrow \mathbb{N}$ biyectiva, decimos que el conjunto X es numerable. Por supuesto, si existe esta función f biyectiva, también existe su función inversa, $f^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow X$. Lo último significa que la relación de ser equipotente es *simétrica*, ya que la inversa de toda función biyectiva es otra función biyectiva. Esto es, si X es equipotente con Y , entonces Y es equipotente con X para cualesquiera X e Y .

Como también sabemos, cada conjunto X tiene al menos una función biyectiva que lo relaciona consigo mismo; la función identidad $\mathbb{I} : X \rightarrow X$, tal que $f(x) = x$ para todo elemento del dominio. Cuando una relación satisface que todo elemento de su dominio está relacionado consigo mismo, decimos que la relación es *reflexiva*. Por lo tanto, como todo conjunto es equipotente consigo mismo, ser equipotente es una relación *reflexiva*.

La última propiedad que destacaremos de la relación de equipotencia es su *transitividad*, es decir, si X es equipotente con Y , y a su vez, Y lo es con Z , entonces X y Z son equipotentes. Esto se debe a que la composición de funciones biyectivas es biyectiva. Si un conjunto X es equipotente con el conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$, decimos que su cardinalidad, la cantidad de elementos del mismo, es n . También decimos que es equipotente con una sección de longitud n de los Naturales. Si X es equipotente con el conjunto vacío, su cardinalidad es 0. Cuando la cardinalidad de un conjunto X es un número natural (o cero), el conjunto es finito. Puede probarse que el único conjunto equipotente con el conjunto vacío es él mismo, es decir, sólo existe un conjunto que no tiene ningún elemento (el conjunto vacío es único).

Nuestro interés en la *equipotencia* radica en su utilidad a la hora de comparar cardinalidades de conjuntos, es decir, comparar la cantidad de elementos que tienen los conjuntos. En la axiomática de conjuntos de ZFC, los números cardinales se definen a partir de otros conjuntos llamados ordinales (Ivorra, 2018a; Suppes, 1968). Para que esa definición sea aplicable a todos los conjuntos, es decir, para que todo conjunto tenga asignado un único cardinal, es necesario contar con el *Axioma de Elección*. Como la intención de este artículo es trabajar fuera del ámbito de este axioma, pero necesitamos comparar cardinales de conjuntos infinitos, presentaremos el Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein (CSB). La

historia detrás de este teorema (y cómo su demostración pudo independizarse del AE) es muy interesante. Para quienes deseen una introducción amena en el tema se recomienda (Basa, 2014).

Teorema 2.5 (Cantor-Schröder-Bernstein (CSB)). *Sean X e Y conjuntos. Si existen funciones inyectivas $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$, entonces existe una función biyectiva h , tal que $h : X \rightarrow Y$.*

El Teorema CSB nos dice que la relación *tener cardinal menor o igual que* es una relación antisimétrica. Este resultado será crucial a la hora de probar el Teorema 5.1.

El objetivo de este artículo es desarrollar particiones particulares de los números naturales. Por lo tanto, debemos decir qué entendemos por una partición. Debido a que este concepto está íntimamente relacionado con el de *relación de equivalencia*, procederemos a dar las últimas tres definiciones de esta sección: relación de equivalencia, partición y Axioma de Elección.

2.2. Particiones y relaciones de equivalencia.

Definición 2.6. *Se dice que una relación es de equivalencia si y sólo si es a la vez*

- reflexiva: *todo elemento del dominio se relaciona consigo mismo:* $\forall x(x\mathcal{R}x)$;
- simétrica: *si x se relaciona con y , entonces y se relaciona con x :* $\forall x \forall y (x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$;
- transitiva: *si x se relaciona con y e y se relaciona con z , entonces x se relaciona con z :* $\forall x \forall y \forall z (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$.

Por lo tanto, la relación de equipotencia entre conjuntos es una relación de equivalencia. Como ejemplo podemos nombrar que tanto los números pares como los impares son equipotentes con el conjunto de los números naturales. Esto se encuentra relacionado con el hecho de que existe una partición de los números naturales formada por los pares y los impares. Por otro lado, como los Naturales y los Enteros son equipotentes, tenemos que los pares o impares tienen la misma cantidad de elementos que los Enteros (usando la transitividad de la relación de equipotencia). Utilizando el concepto de biyección es como Cantor demostró que los números racionales \mathbb{Q} son numerables, esto es, que \mathbb{N} y \mathbb{Q} son equipotentes (para más detalles (Apostol, 1984, 1998; Vinogradov, 1977)).

Cuando X es equipotente con el conjunto de los números naturales (X numerable), se dice que su cardinal es *Aleph subcero* (Aleph se acentúa en la primera sílaba y la Real Academia Española acepta su grafía y fonética como *álef*) y se denota \aleph_0 . Todos los conjuntos numerables tienen el mismo cardinal, \aleph_0 . Cuando se cumpla lo anterior, escribiremos

$$|X| = \aleph_0.$$

Esto es central en nuestro trabajo, ya que las PDN cumplen la ecuación anterior, son todas equipotentes con los Naturales.

Las particiones tienen un vínculo muy estrecho con las relaciones de equivalencia: toda relación de equivalencia definida sobre elementos de un conjunto X genera una única *partición* de este conjunto. ¿Qué queremos decir con una *partición*? Intuitivamente,

una partición de un conjunto X es una forma de generar subconjuntos de X , tales que sean disjuntos, es decir, su intersección sea vacía, y que además su unión sea el conjunto original X (no puede quedarme ningún elemento fuera). Por ejemplo, el conjunto de los números pares y el de los impares forman una partición de los Naturales en dos subconjuntos. Los números positivos y los negativos no forman una partición del conjunto de los números enteros, ya que, a pesar de ser disjuntos, no contienen al cero. Si el 0 es incluido en alguno de los dos conjuntos, entonces tenemos una partición. Podríamos también agregar un conjunto que sólo tenga al 0, en este caso tendríamos una partición de los Enteros, pero ahora de 3 elementos (subconjuntos): positivos, negativos y el nuevo conjunto con el cero. No es necesario que los elementos de la partición tengan la misma cantidad de elementos. Nuestro objetivo es generar particiones de los Naturales donde todos sus elementos (subconjuntos de naturales) sean equipotentes.

Definición 2.7. Sea $\{X_i\}_{i \in \Delta}$ una familia de subconjuntos no vacíos de X , con i perteneciente a un conjunto de subíndices Δ fijo. Decimos que esta familia es una partición de X si

- $X = \bigcup_{i \in \Delta} X_i$.
- $X_i \cap X_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

Por una cuestión de completitud, presentaremos el *Axioma de Elección*. La literatura sobre el mismo es prácticamente inabarcable y sus consecuencias sobre la teoría de conjuntos sigue dando discusión entre los matemáticos. Existen múltiples formas de enunciarlo, nosotros presentaremos una particular (pueden encontrarse definiciones y resultados equivalentes en (Ivorra, 2018b, 2018a; Rubin y Rubin, 1963)).

Definición 2.8 (AE). $\forall X \exists F (F : X \rightarrow \bigcup_{V \in X} V \wedge \forall U \in X (U \neq \emptyset \rightarrow F(U) \in U))$.

La anterior definición puede expresarse de la siguiente manera: sea X una familia arbitraria de conjuntos no vacíos de cualquier cardinalidad, esto es, cada elemento de X es a su vez un conjunto y no hay restricción sobre la cantidad de elementos de ninguno de los conjuntos. Entonces, para esa familia genérica de conjuntos X , existe una *función de elección* F con dominio X , tal que para cada conjunto V perteneciente a esta familia, la función de elección elige un elemento de este conjunto. Este axioma es crucial para la demostración de muchos resultados importantes, como la existencia de bases en espacios vectoriales, la existencia de clausura algebraica, el teorema de Tychonoff sobre la compacidad de un producto de espacios topológicos, el teorema de Hann-Banach sobre extensión de funcionales lineales, etc. Su 'virtud' es poder dar cuenta de conjuntos que no pueden ser mostrados o construidos explícitamente debido a limitaciones del lenguaje formal de la teoría de conjuntos ZF. Existen otras teorías de conjuntos (Nuevos Fundamentos de Quine) donde AE no es válido (ver (Ivorra, 2018b)).

2.3. El Hotel de Hilbert. El Hotel de Hilbert es una abstracción matemática que pone de manifiesto algunas curiosidades que tiene el concepto de infinito. Se cuenta que David Hilbert, padre del formalismo matemático, utilizaba la idea de un hotel infinito para conversar sobre temas de infinitud con alumnos y colegas. Existen muchas variantes de

problemas relacionadas con el hotel, pero nosotros contaremos las más clásicas. Uno de los objetivos de este artículo es proponer soluciones alternativas para uno de sus casos.

Se cuenta que dos socios (uno podría ser Hilbert) tenían como objetivo crear el hotel más grande del mundo y se debatían cuántas habitaciones debía tener el mismo. Primero pensaron que 10.000 habitaciones sería un número más que pertinente, pero pronto se dieron cuenta de que tan rápido como la población mundial superara un cierto número de habitantes, su hotel correría riesgo de quedar pequeño. Querían garantizarse que ningún otro hotel pudiese tener más habitaciones que el suyo. Pronto la solución apareció en sus cabezas: el número de habitaciones no podía ser finito, es decir, el hotel debía contar con infinitas habitaciones.

Observación: En todo nuestro trabajo estamos tomando la propiedad de ser *infinito* como equivalente a la de *no ser finito*. Esto es, decimos que un conjunto es *infinito* si y sólo si no es equipotente con ninguna sección de los Naturales $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ (sin importar qué número natural n se tome). No nos detendremos aquí, pero existen muchas definiciones de *infinito* y no siempre son equivalentes (para adentrarse en el tema puede verse (Ortiz, 1994)).

Pronto el hotel se hizo muy famoso y turistas de todas las regiones del planeta colmaban sus salas. A pesar de la infinitud del conjunto de habitaciones, el hotel tenía la siguiente regla: la administración del hotel podía disponer cambiar de habitación a cualquiera de sus huéspedes. Un día pasó algo inesperado; llegó un nuevo turista para hospedarse en el Hotel de Hilbert y el recepcionista tuvo que informarle que todas las habitaciones estaban ocupadas. Antes de que el hombre tuviese tiempo de decepcionarse, Hilbert se comunicó simultáneamente con todas las habitaciones pidiendo que cada uno de los turistas pase a la pieza siguiente, es decir, quien se encontrara en la pieza número n , pase a la $n + 1$. De esta manera, cada uno de los turistas pasó a la pieza contigua y la pieza número 1 quedó vacía para que ingresara el nuevo viajero. Esto deja en evidencia que si tenemos un conjunto infinito y le sumamos 1, seguimos teniendo un conjunto igualmente infinito. Si lo relacionamos con las biyecciones anteriormente presentadas, diríamos que el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, n, n + 1, \dots\}$ es equipotente con el conjunto $Y = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots, n + 1, n + 2, \dots\}$. La función biyectiva que los relaciona es $f : X \rightarrow Y$, tal que $f(x) = x + 1$.

A partir de ese momento, si llegaban m nuevos viajeros al hotel, lo único que se hacía era comunicarle a cada huésped que sumara m al número de su pieza, y luego pasara a esa nueva habitación. La biyección en este caso sería

$$f(x) = x + m.$$

Moraleja: el conjunto de los números naturales a partir del m (para cualquier m natural) es equipotente con el conjunto de todos los números naturales.

Pero un nuevo desafío azotó los lindes del hotel cuando por primera vez llegó un contingente infinito de turistas mientras el hotel aún estaba ocupado en su totalidad. ¿No podemos sumarle infinito a cada número de habitación! Sus habitantes pasarían sus vidas caminando los pasillos del Hotel sin llegar nunca a ningún lugar. ¿Cómo haría Hilbert y sus administradores para resolver el problema? ¡Fácil!, Hilbert ordenó a cada persona

de su hotel que multiplique el número de su pieza por 2 y pase a ubicarse en la nueva numeración. Como la cantidad de pares es igual a la cantidad de números naturales, luego de multiplicar por 2, todos los personajes pasarían a ocupar una pieza con número par quedando todas las impares desocupadas para el ingreso del nuevo contingente. La biyección involucrada: $f : X \rightarrow Y$, tal que $f(x) = 2x$.

El último desafío hotelero consiste en albergar infinitos de estos contingentes, cada uno infinito, cuando el hotel se encuentra al ciento por ciento de ocupación. La solución estándar ([El hotel infinito de Hilbert, 2021](#)) consiste en: "El recepcionista permaneció inmutable, por lo cual tomó tranquilamente el micrófono y se comunicó solamente con las habitaciones cuyo número fuera primo o alguna potencia de estos (p^n), les pidió que elevaran el número 2 al número de la habitación en la que se encontraban (2^{p^n}) y se cambiaran a esa habitación. Entonces asignó a cada una de las excursiones un número primo (distinto de 2), a cada uno de los turistas de cada una de las excursiones un número par o impar (t), de manera que la habitación de cada uno de los turistas, se calculaba tomando el número primo de su excursión (p) y elevarlo al número que les tocó dentro de su excursión (t) lo que da p^t ". Existiendo un número infinito de números primos y un número infinito de números (pares e impares), fácilmente se logró hospedar a un número infinito de infinitos huéspedes dentro de un hotel que sólo tiene un número infinito de habitaciones.

Lo anterior muestra que sumarle infinitas veces algo infinito *puede* no aumentar la infinitud de un conjunto. Explicitar la biyección es en este último caso un poco más complejo. Nosotros tenemos como uno de los objetivos del trabajo proponer varias soluciones alternativas a este último problema del Hotel de Hilbert.

§3. Particiones de los Naturales

Como nombramos anteriormente, toda partición de un dominio define una relación de equivalencia sobre el mismo y viceversa ([Apostol, 1984](#); [Vinogradov, 1977](#)). Nosotros generaremos las particiones y obtendremos, por lo tanto, las relaciones de equivalencia asociadas. Para comenzar, mostraremos cómo generar una de las *al menos* numerables PDN. Para que una partición de los Naturales pueda ser llamada *doblemente numerable*, es necesario y suficiente que cada uno de los numerables subconjuntos que componen la partición del dominio (no puede ser una partición finita) sea numerable, es decir, equipotente con \mathbb{N} , que sean disjuntos dos a dos (su intersección sea el conjunto vacío) y que al unirlos recobremos todos los Naturales.

Consideremos los números naturales con su orden habitual comenzando por el 1, pero el razonamiento no cambia si tomamos el 0 como natural. También podríamos extender este proceso a los números enteros.

Comencemos con la serie natural:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 ...

Con los colores simplemente explicitamos el conjunto al que haremos pertenecer cada natural, es decir, nuestra proceso comienza generando conjuntos sucesivos de longitud

doble que la anterior comenzando por una longitud inicial 2:

$$C_1 = \{1, 2\}, \quad C_2 = \{3, 4, 5, 6\}, \quad C_3 = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}, \\ C_4 = \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\},$$

etcétera. Está claro que

$$\mathbb{N} = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} C_{\ell}, \quad C_{\ell} \cap C_{\ell'} = \emptyset, \quad \ell \neq \ell'.$$

Observación: Notemos que los C_{ℓ} forman una partición de los Naturales, pero tal partición no es doblemente numerable. Esto se debe a que, a pesar de existen tantos C_{ℓ} como números naturales (y son disjuntos), los mismos no son numerables (son todos finitos).

El siguiente paso consiste en elegir el primer elemento de cada uno de los conjuntos C_{ℓ} para formar el conjunto A_1 . Esto se puede hacer de manera algorítmica gracias a que los Naturales están *bien ordenados*. Tenemos entonces:

$$A_1 = \{1, 3, 7, 15, 31, \dots\}.$$

Donde los elementos de A_1 mantienen la siguiente recursión:

$$a_{1,i+1} = 2a_{1,i} + 1, \quad a_{1,1} = 1.$$

Cada elemento de este conjunto es igual al sucesor del doble de su anterior. Además, es claro que es un conjunto infinito numerable, ya que existen infinitos C_{ℓ} y cada uno tiene un primer elemento.

Ahora construimos el siguiente conjunto, A_2 , tomando el segundo elemento de cada C_{ℓ} . Esto es equivalente a sacar de los conjuntos originales el primer elemento ya utilizados en A_1 y volver a tomarle el primer elemento. Esto es algo que puede realizarse sin inconveniente de forma recursiva.

$$A_2 = \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}.$$

Donde sus elementos mantienen la siguiente relación:

$$a_{2,i+1} = 2a_{2,i}, \quad a_{2,1} = 2.$$

Obtenemos un nuevo conjunto numerable donde cada elemento es el doble de su anterior.

Al formar el tercer conjunto, debemos tomar el tercer elemento de cada uno de los C_{ℓ} . Observamos directamente que C_1 no tiene tercer elemento, con lo cual comenzamos por el conjunto siguiente, C_2 , que es el primer conjunto que tiene tercer elemento.

$$A_3 = \{5, 9, 17, 33, \dots\}$$

$$a_{3,i+1} = 2a_{3,i} - 1, \quad a_{3,1} = 5.$$

En este caso, cada elemento se genera a partir del anterior duplicándolo y restando 1.

Siguiendo de esta manera:

$$A_4 = \{6, 10, 18, 34, \dots\}$$

$$a_{4,i+1} = 2a_{4,i} - 2, \quad a_{4,1} = 6.$$

Para el caso siguiente, hay que notar que los dos primeros C_ℓ no cuentan con quinto elemento por lo que el primer elemento de A_5 pertenecerá a C_3 , el primero de estos conjuntos que tiene un quinto elemento, el 11.

$$A_5 = \{11, 19, 35, 67, \dots\}$$

$$a_{5,i+1} = 2a_{5,i} - 3, \quad a_{5,1} = 11.$$

Queda claro de qué forma continuar nuestra construcción y, además, que la misma se puede hacer tomando como base cualquier número mayor que 1, en vez de base 2 como hemos elegido para mostrar el proceso de construcción. Más adelante, nos centraremos en analizar la cantidad de formas diferentes de realizar esta tarea. Por construcción, se cumple que:

$$(3.1) \quad \mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \cap A_{n'} = \emptyset, \quad n \neq n' \quad \text{y} \quad \forall n |A_n| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$$

Es fácil probar que cada número natural pertenece sólo a uno de los A_n . Esto se debe a que cada natural pertenece a un único C_ℓ (son disjuntos) y que dentro de ese conjunto puede ocupar una sola ubicación, la n -ésima. Cuando mostremos el caso general, se verá que debido a cómo se calcula el n asociado con cada número natural, tener el mismo n genera una relación que es reflexiva, transitiva y simétrica, es decir, genera una relación de *equivalencia*.

Por lo tanto, tenemos a los números naturales separados en una cantidad numerable de conjuntos disjuntos cada uno equipotente con \mathbb{N} . Esta partición de los naturales es un ejemplo de lo que llamamos *partición doblemente numerable* (PDN) y tendrá su correspondiente relación de equivalencia asociada.

Volvamos al *Hotel de Hilbert*. Si llegaran simultáneamente numerables contingentes cada uno numerable (como en el último caso brindado en la sección 2), tenemos de qué manera asignar una pieza a cada persona. Esta manera, no sólo es una alternativa diferente a la solución clásica mostrada, sino que genera infinitas alternativas equivalentes más. Indexamos con n al contingente en cuestión, asignémosle la clase A_n junto con un índice i que denote su posición dentro del A_n . Como existirá un único natural asociado a cada par (n, i) , cada individuo contará con su propia pieza. Cada persona pertenece a un único contingente, lo que determina unívocamente el n , y tiene un orden dado (i) dentro del mismo, que también es único. Por lo tanto, cada persona tiene un único par (n, i) . Si el hotel ya estuviese ocupado en su totalidad cuando llegan los infinitos contingentes de turistas, entonces dejamos libre todas las piezas impares (con el ardid clásico del problema) y realizamos la partición mostrada sobre los impares.

Antes de pasar a explicitar el formalismo recursivo que fundamenta esta partición, ya podemos notar que nos hemos creado un ejemplo particular de numerables conjuntos disjuntos de a pares, cada uno numerable, cuya unión es numerable (ya que su unión es el conjunto \mathbb{N}). Tenemos a mano un ejemplo concreto para mostrar cuando estemos comenzando a explicar temas sobre cardinalidad transfinita. Con el ejemplo clásico del hotel de Hilbert, quedaba a la vista que la unión de dos conjuntos numerables era otro conjunto de la misma cardinalidad, pero ahora podemos mostrar un ejemplo que se compromete

con una cantidad numerables de los mismos. Por supuesto, que esto es sólo un ejemplo en particular, pero explicita una propiedad interesante de los conjuntos numerables.

§4. Formalización del problema

Vamos a mostrar la función recursiva que asigna de forma biunívoca un n y un i a cada número natural x . El n determinará a qué clase (A_n) pertenece y el i designará su posición dentro de la misma. Esto es, dado $x \in \mathbb{N}$, asignaremos una única clase A_n y dentro de esta clase numerable, la posición i -ésima. Esta será una forma posibles, entre muchas, de asignar biyectivamente un par (n, i) a cada x natural, lo que muestra la relación que guarda el problema de generar particiones doblemente numerables (y unir numerables conjuntos disjuntos) con el de biyectar \mathbb{N} con $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Todo número natural x mayor que 2 se puede acotar de la siguiente manera (el caso $x = 1$ y $x = 2$ no generan inconveniente, ya que sabemos cómo ubicarlos):

$$(4.1) \quad \sum_{j=1}^m 2^j < x \leq \sum_{j=1}^{m+1} 2^j.$$

La condición anterior puede expresarse equivalentemente como

$$2^{m+1} - 2 < x \leq 2^{m+2} - 2.$$

Utilizamos más la primera forma al hacer los cálculos siguientes porque evidencia mejor el razonamiento secuencial y constructivo que utilizamos.

Según la ecuación (4.1), cada natural define de manera unívoca un m . Puede verse que $\ell = m + 1$, donde ℓ es el subíndice de los conjuntos C_ℓ del principio. Definimos el número n de la clase A_n asociada con x de la siguiente manera:

$$(4.2) \quad n = x - \sum_{j=1}^m 2^j = x - (2^{m+1} - 2) = x - 2^{m+1} + 2,$$

donde m está determinado por la ecuación (4.1).

Veamos un ejemplo: si $x = 17$, entonces

$$2 + 4 + 8 < 17 \leq 2 + 4 + 8 + 16.$$

Usando (4.1) tenemos que $m = 3$ y $\ell = 4$. Con (4.2) calculamos que $n = 17 - 2^4 + 2 = 3$. Por lo tanto, $17 \in A_3$, resultado que concuerda con nuestra definición de A_3 . Falta ahora que determinemos qué ubicación ocupa dentro de esta clase. La ubicación i -ésima dentro de A_n viene dada por:

$$(4.3) \quad i = \log_2 \left(\frac{x - n + 2}{a_{n,1} - n + 2} \right) + 1.$$

Donde $a_{n,1}$ es el primer elemento del conjunto A_n y viene dado por:

$$(4.4) \quad a_{n,1} = n + \sum_{j=1}^k 2^j = 2^{k+1} + n - 2.$$

Donde k debe satisfacer:

$$(4.5) \quad 2^k < n \leq 2^{k+1}.$$

El número k puede ser nulo o negativo (-1). Si $n = 1$, entonces $k = -1$:

$$k \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Esto no genera problema en la ecuación (4.4) (al calcular el primer elemento de ese conjunto) si tomamos la convención de que el resultado de la sumatoria es nulo cada vez que el índice superior es menor que el inferior. Veamos ahora el funcionamiento completo de este procedimiento algorítmico. Supongamos tener $x = 131$ y veamos qué ubicación le corresponde dentro de su clase A_n correspondiente. Primero debemos obtener el n con las ecuaciones (4.1) y (4.2):

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 < 131 \leq 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$$

entonces

$$m = 6 \quad \text{y} \quad n = 131 - 126 = 5.$$

Es decir, $131 \in A_5$. Usando las ecuaciones (4.3), (4.4) y (4.5) calculamos el i asociado. Por (4.5) tenemos:

$$2^2 < 5 \leq 2^3.$$

Concluyendo que $k = 2$. Usando este k en (4.4):

$$a_{5,1} = 5 + \sum_{j=1}^2 2^j = 11.$$

Con lo que obtenemos el primer elemento de esta clase de equivalencia. Finalmente, por (4) llegamos a:

$$i = \log_2 \left(\frac{131 - 5 + 2}{11 - 5 + 2} \right) + 1 = 5$$

Por lo tanto, 131 es el quinto elemento de A_5 . En relación al hotel, nuestro resultado dice que al quinto turista del contingente número 5 debemos asignarle la pieza número 131. Aunque de esta manera lo que hicimos fue asignar una habitación a un turista, podemos hacer el procedimiento inverso como mostraremos a continuación. Si quisiésemos, por ejemplo, ver qué pieza asignar al sexto turista del contingente 3, lo que tenemos que hacer es ver qué número natural ocupa la posición 6 en A_3 . Debemos calcular el primer elemento de esta clase y luego recursivamente los demás elementos a través de la recursión que caracteriza a A_3 , en este caso, al doble del elemento anterior tomarle sucesor. La relación general de recursión que se encuentra detrás de todos los A_n es la siguiente:

$$(4.6) \quad a_{n,i+1} = 2^i a_{n,1} - (n-2)(2^i - 1).$$

Donde tanto n como i se toman a partir de 1 y cada $a_{n,1}$ se calcula según (4.4). Esta función es la inversa de la que a cada x le asigna un par (n, i) . Veamos que esto se condice con los primeros A_n que mostramos al comienzo. Si $n = 1$, entonces

$$a_{1,i+1} = 2^i a_{1,1} + (2^i - 1).$$

Que genera la sucesión 1, 3, 7, 15, ... a partir de su primer elemento, $a_{1,1} = 1$. Si $n = 2$,

$$a_{2,i+1} = 2^i a_{2,1}.$$

Para $n = 3$,

$$a_{3,i+1} = 2^i a_{3,1} - (2^i - 1).$$

Y de esta manera puede corroborarse para el resto de los números.

Volviendo al hotel, estábamos interesados en ver qué habitación darle al sexto integrante del contingente 3. Calculemos primero $a_{3,1}$. Según la ecuación (4.5),

$$2^1 < 3 \leq 2^2$$

implica que $k = 1$. Entonces, por (5):

$$a_{3,1} = 3 + \sum_{j=1}^1 2^j = 5.$$

Y finalmente obtenemos (por (4.6)):

$$a_{3,6} = 2^5 \cdot 5 - (2^5 - 1) = 129.$$

Por lo tanto, le otorgaremos la habitación 129 al viajero en cuestión. Llegado este punto, queda a la vista que el razonamiento que hemos hecho puede realizarse usando otro número como base, es decir, podríamos realizar un procedimiento análogo tomando desde el principio los C_ℓ con longitudes que sean potencias de 3 (no deben ser necesariamente potencias). Cualquier número natural mayor que 1 cumple el objetivo. También puede probarse que podríamos usar como base números racionales, como por ejemplo el $\frac{3}{2}$. Estas alternativas las analizaremos más adelante. Aunque estamos relacionando las PDN con el *Hotel de Hilbert*, tenemos también como objetivo generar tantos ejemplos como podamos (de forma recursiva) de colecciones numerables de conjuntos numerables y disjuntos cuya unión sea numerable. Los A_n cumplen este objetivo para cualquier base que sea mayor que 1 (no decimos que esto no pueda realizarse con números menores, sólo que nuestro procedimiento está pensado par bases mayores). Algo esencial para nuestro procedimiento es que la suma de las longitudes de los conjuntos C_ℓ no esté acotada. Por lo tanto, tenemos al menos numerables ejemplos, que podemos generar de forma efectiva, que muestran esta propiedad de los conjuntos numerables con respecto a la cardinalidad de su unión. La relación de equivalencia que está detrás de todas estas particiones, al margen de la base que la genere, es la siguiente: *dos naturales x, y están relacionados si y sólo si pertenecen al mismo A_n , es decir, si tienen asociado el mismo n en (4.2)*. Tener asignado el mismo n se prueba que es una relación reflexiva, simétrica y transitiva.

Mostraremos ahora las ecuaciones que caracterizan a la partición asociada a base igual a 3 para explicitar otro ejemplo de esta forma de razonar.

Las ecuaciones que determinan el número natural asociado con n e i dados son:

$$a_{n,i+1} = 3^i a_{n,1} - \frac{1}{2}(2n-3)(3^i-1),$$

$$a_{n,1} = n + \sum_{j=1}^k 3^j, \quad 3^k < n \leq 3^{k+1}.$$

Estas ecuaciones generan la partición siguiente:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 4, 13, 40, \dots\} \\ A_2 &= \{2, 5, 14, 41, \dots\} \\ A_3 &= \{3, 6, 15, 42, \dots\} \\ A_4 &= \{7, 16, 43, 124, \dots\} \\ A_5 &= \{8, 17, 44, 125, \dots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Para una base $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} a_{n,i+1} &= b^i a_{n,1} - ((b-1)n - b) \left(\frac{b^i - 1}{b-1} \right), \\ a_{n,1} &= n + \sum_{j=1}^k b^j, \quad b^k < n \leq b^{k+1}. \end{aligned}$$

En la siguiente página puede descargarse el programa que realiza la partición correspondiente en base 2. Dado un x natural, asigna los correspondientes n e i , además de mostrar algunos elementos del A_n en cuestión, y si se ingresa el par (n, i) , devuelve el natural que corresponde según nuestras ecuaciones: <https://drive.google.com/file/d/0B-rDGOh8gC12OE1RdE5BVGHac1E/view>

§5. Cardinalidad de las PDN

Como hemos probado en la sección anterior, tenemos al menos una forma de realizar estas particiones por cada número natural mayor o igual que 2, es decir, existen al menos numerables particiones de los números naturales en numerables clases, cada una numerable, disjuntas de a pares. Además, en los naturales estas particiones se pueden generar de forma algorítmica. Veamos ahora que, en realidad, existe una de estas particiones por cada número real mayor que 1. Puede apreciarse en las construcciones mostradas que no hemos utilizado propiedades de la base que sean propiamente exclusivas de los números naturales. La única propiedad indispensable es que los naturales queden incluidos en la unión de todos los C_ℓ , que estos conjuntos sean disjuntos, y que en la sucesión de las longitudes C_ℓ sea estrictamente creciente (aunque si en vez de estrictamente creciente pidiéramos que fuera no acotada, podríamos aplicar el método con pequeñas modificaciones). Para explicitar un poco esto, realizaremos la siguiente construcción.

Si mostramos que existe una PDN por cada número real mayor que 2, entonces habrá al menos tantas PDN como número reales, ya que el conjunto $[2, +\infty)$ es equipotente con \mathbb{R} . Sin embargo, nuestro procedimiento efectivo general para generar PDN puede aplicarse para cualquier número real mayor estricto que 1. Por esto mismo, el ejemplo que presentaremos al terminar la siguiente construcción toma como base $\sqrt{2}$. Tomar una base mayor o igual que 2 simplemente sirve para visualizar mejor el proceso, ya que las potencias de 2 crecen de una forma rápida y esto produce que entre una potencia y la siguiente siempre exista al menos un natural facilitando el procedimiento de cálculo.

Sea $r \in \mathbb{R}$, tal que $2 \leq r$. Definimos los C_ℓ de la siguiente forma:

$$C_\ell = [r^{\ell-1}, r^\ell), \quad 1 \leq \ell.$$

Entonces,

$$\mathbb{N} \subset \bigcup_{\ell=1}^{\infty} C_\ell, \quad C_\ell \cap C_{\ell'} = \emptyset, \quad \ell \neq \ell'.$$

Los A_n los definimos como

$$(5.1) \quad A_n = \{x \in \mathbb{N} : [x - r^{\ell-1}] + 1 = n, x \in C_\ell, 1 \leq \ell\}.$$

Donde $[\cdot]$ denota la función parte entera. Todos los A_n a partir de un momento (a partir de un ℓ_0) tienen exactamente un elemento de cada C_ℓ , lo que significa que cada uno de estos conjuntos es numerable. También es fácil ver que son disjuntos de a pares. Para mostrar que cada real mayor o igual que 2 genera una partición diferente, hay que ver que dados dos reales cualesquiera, r y r' , sus potencias difieren en al menos una unidad a partir de un momento. Si esto pasa, a partir de ese momento, los C_ℓ se distinguirán de los $C_{\ell'}$ y esa diferencia repercutirá (por definición) en los A_n (a partir de un momento). En otras palabras, aunque dos números reales r y r' sean muy cercanos, existirá una potencia natural n_0 a partir de la cual la diferencia entre r^{n_0} y $(r')^{n_0}$ será mayor que 1. Y esto garantizará que exista un natural entre ambos.

También podríamos preguntarnos, ¿todo número natural pertenece a algún A_n ?

Veamos esto detenidamente. Como $\mathbb{N} \subset \bigcup_{\ell=1}^{\infty} C_\ell$ y los C_ℓ son disjuntos, dado un número natural n_1 , existe un ℓ_1 , tal que $n_1 \in C_{\ell_1} = [r^{\ell_1-1}, r^{\ell_1})$. Formemos ahora el siguiente número natural n ,

$$n = [n_1 - r^{\ell_1-1}] + 1.$$

Mirando la ecuación 5.1, vemos que los números ℓ_1, n conducen directamente a que $n_1 \in A_n$. Con lo que queda probado de qué manera calcular el único A_n al cual pertenece cualquier natural.

Mostraremos, como bien habíamos ya anticipado, un ejemplo de aplicación con una base mayor que 1, pero menor que 2. Tomemos $r = \sqrt{2}$ y veamos qué partición de los naturales nos genera esta base.

Primero generamos los C_ℓ .

$$\begin{aligned} C_1 &= [\sqrt{2}^0, \sqrt{2}^1) = [1, \sqrt{2}), & C_2 &= [\sqrt{2}^1, \sqrt{2}^2) = [\sqrt{2}, 2), \\ C_3 &= [\sqrt{2}^2, 2\sqrt{2}) = [2, 2\sqrt{2}), & C_4 &= [2\sqrt{2}, \sqrt{2}^4) = [2\sqrt{2}, 4), \\ C_5 &= [\sqrt{2}^4, 4\sqrt{2}) = [4, 4\sqrt{2}), & C_6 &= [4\sqrt{2}, \sqrt{2}^6) = [4\sqrt{2}, 8), \dots \end{aligned}$$

Observación: El inconveniente que trae una base mayor que 1, pero menor que dos, es que podemos tener algunos C_ℓ, C_2 en este caso, que no tienen ningún natural. Son conjuntos superfluos para el método.

Por lo tanto,

$$A_1 = \{x \in \mathbb{N} : [x - \sqrt{2}^{\ell-1}] + 1 = 1, x \in C_\ell, 1 \leq \ell\}.$$

Para cada valor de l natural, obtenemos como máximo un elemento para A_1 . Puede pasar que para algún l no haya ningún número natural que pertenezca a A_1 como bien observamos anteriormente. En este caso, C_2 no tiene ningún natural, por lo tanto no aportará en la construcción de ninguno de los A_n . Con lo cual nos queda

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 23, \dots\},$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{N} : [x - \sqrt{2}^{\ell-1}] + 1 = 2, x \in C_\ell, 1 \leq \ell\} = \{5, 7, 9, 13, 17, 24, \dots\},$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{N} : [x - \sqrt{2}^{\ell-1}] + 1 = 3, x \in C_\ell, 1 \leq \ell\} = \{10, 14, 18, 25, \dots\}.$$

Y de esta manera se puede continuar para todo número natural.

En los modelos estándar de los números reales, siempre tenemos asegurado que dos números reales distintos tengan potencias diferentes a partir de un momento, y que esta diferencia sea mayor que 1 garantizándose la buena definición de nuestra partición. Esto es una consecuencia del binomio de Newton y de la Arquimeneidad de los reales (estándar) (Fava y Zó, 2013; Stein y Shakarchi, 2007).

Si tenemos dos números reales r, r' tan cercanos como se quiera. Entonces,

$$r' = r + \epsilon, \quad \epsilon > 0.$$

Y por el binomio de Newton, tenemos entonces:

$$\begin{aligned} (r')^m = (r + \epsilon)^m &= \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} r^{m-k} \epsilon^k \\ &= r^m + \frac{m!}{(m-1)!} r^{m-1} \epsilon + \sum_{k=2}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} r^{m-k} \epsilon^k. \end{aligned}$$

Para cualquier ϵ fijo dado (y r mayores que uno), el término $\frac{m!}{(m-1)!} r^{m-1} \epsilon$ puede hacerse, a partir de un cierto m_0 , tan grande como se desee. Esto se debe a la propiedad de Arquimedeana nombrada. Por lo tanto, a partir de un momento este término supera la unidad y se obtiene lo deseado, ya que el resto de los términos son todos positivos.

Observación: Dentro de los modelos no estándar de los reales, los elementos pertenecientes al halo de cada real podrían no cumplir con lo anterior (ver (Cobillón, 2015)).

Por lo tanto, este método permite ver que la cardinalidad de las PDN es mayor que la de los naturales. También podemos ver que no puede superar el cardinal de los reales, ya que cada una de estas particiones pertenece a $\mathcal{P}_{num}(\mathcal{P}_{num}(\mathbb{N}))$, donde

$$\mathcal{P}_{num}(\mathbb{N}) = \{A \subset \mathbb{N} : |A| = |\mathbb{N}|\}.$$

Se puede probar (usando AE) que las partes numerables de los naturales tienen la potencia del continuo. Por otro lado, las partes numerables de los reales también tienen la misma potencia. Por lo tanto, la cantidad de PDN no puede ser mayor que la cantidad de reales. Hemos probado que estas particiones de los naturales tienen la potencia de los números reales.

Antes de terminar la sección, podría ser de interés presentar una prueba, hasta donde nosotros sabemos, original de uno de los resultados que acabamos de nombrar: *Que*

las partes numerables de los naturales tiene la misma potencia que las partes de los naturales. Presentamos la prueba como apoyo a nuestros razonamientos. La realizaremos para un caso general que incluye el caso de los números naturales.

Observación: El resultado obtenido brinda una forma alternativa de caracterizar a los conjuntos infinitos, que se prueba equivalente a las demás definiciones si se utiliza AE.

Definimos

$$\mathcal{P}_{max}(A) = \{D \subset A : |D| = |A|\}.$$

Teorema 5.1. Sean A, B, C conjuntos, tales que $A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$ y $|A| = |B| = |C|$. Bajo estas condiciones, $|\mathcal{P}_{max}(A)| = |\mathcal{P}(A)|$.

Está claro que esto se cumple en el caso particular de los naturales, ya que la partición en pares e impares sirve para cumplir las condiciones del teorema y, por otro lado, sabemos que las partes numerables de los naturales son equipotentes con las partes de los naturales (ambos conjuntos tienen la cardinalidad de los reales).

Demostración. Comencemos formando el siguiente conjunto:

$$\{F \cup C : F \subset B\}.$$

Claramente pasa que

$$\{F \cup C : F \subset B\} \subset \mathcal{P}_{max}(A),$$

ya que la cardinalidad de $F \cup C$ es igual a la cardinalidad de C .

Observación: Esto es debido a que C tiene la cardinalidad del conjunto A (que es la máxima posible para el caso). El conjunto C es unido a cada F de forma intensional para que cada elemento de $\{F \cup C : F \subset B\}$ tenga la cardinalidad máxima (y de esta manera pertenezca también a $\mathcal{P}_{max}(A)$). Por otro lado, este conjunto tendrá tantos elementos como conjuntos posibles haya en B , uno por cada F . Para garantizar lo anterior, necesitamos una de las consecuencias del teorema (CSB)(2.5), más precisamente una versión más débil de (CSB) (debida a Dedekind) que dice que si A es equipotente con un subconjunto de C' y $C' \subset A$, entonces C' es equipotente con A .

Por lo tanto, si se da la inclusión anterior, tenemos que

$$|\{F \cup C : F \subset B\}| \leq |\mathcal{P}_{max}(A)|.$$

Por otro lado, por construcción, este conjuntos tiene exactamente un elemento por cada subconjunto de B , con lo cual tenemos que

$$|\mathcal{P}(B)| = |\{F \cup C : F \subset B\}| \leq |\mathcal{P}_{max}(A)|.$$

Y como A y B son equipotentes, entonces

$$|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)| = |\{F \cup C : F \subset B\}| \leq |\mathcal{P}_{max}(A)|.$$

De la cadena anterior puede concluirse que

$$|\mathcal{P}(A)| \leq |\mathcal{P}_{max}(A)|.$$

Pero por definición de \mathcal{P}_{max} se tiene que

$$|\mathcal{P}_{max}(A)| \leq |\mathcal{P}(A)|.$$

Utilizando la antisimetría de la relación *tener cardinal menor o igual que*, justificada por el Teorema 2.5 (CSB), y juntando las últimas dos desigualdades, obtenemos

$$|\mathcal{P}_{max}(A)| = |\mathcal{P}(A)|,$$

como queríamos ver. □

Para el caso particular de los números naturales, nuestro resultado se expresa como

$$|\mathcal{P}_{num}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}.$$

Siempre que un conjunto dado pueda disjuntarse en (al menos) dos conjuntos equipotentes, entonces los conjuntos de máxima cardinalidad son aquellos que aportan a la cardinalidad del conjunto de sus partes. Lo que caracterizaría desde este punto de vista a los conjuntos infinitos sería la siguiente propiedad:

$$|\mathcal{P}_{max}(A)| > |A|.$$

Esto último significa que la cardinalidad de las partes máximas pasan de tener una cardinalidad igual a 1 (para todos los conjuntos finitos) a tener una cardinalidad 2^{\aleph_0} (para los conjuntos no finitos) sin escala intermedia. Esta propiedad característica de los conjuntos infinitos se prueba equivalente a las demás definiciones de infinitos (usando AE). Este resultado es de importancia para nosotros porque se basa en la propiedad fundamental de poder generar una partición dada. Además, si quisiéramos aplicar el mismo procedimiento utilizado con los naturales para el caso de un conjunto numerable general, el resultado obtenido sobre la cardinalidad de sus partes máximas puede ser de importancia a la hora de probar cuántas particiones diferentes podemos generar. En contraposición con la propiedad mostrada sobre las partes numerables de los Naturales, podemos nombrar que si en lugar de quedarnos con los subconjuntos infinitos (numerables) de \mathbb{N} , tomáramos sólo los finitos, entonces la cardinalidad de sus partes finitas, es decir, $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ sería la misma que la de los números naturales. En otras palabras, existen tantos subconjuntos finitos de naturales como naturales mismos, pero existen más subconjuntos infinitos de \mathbb{N} que números naturales. En ecuaciones,

$$|\mathcal{P}_{num}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|, \quad |\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}|.$$

Vamos a dejar para un próximo trabajo la cuestión de bajo qué condiciones pueden darse pruebas de equivalencia entre la siguiente definición de infinito, motivada por el Teorema 5.1, y las definiciones más utilizadas en la literatura.

Definición 5.2 (Versión 1). *Un conjunto X es infinito si y sólo si $|\mathcal{P}_{max}(X)| > |X|$.*

Definición 5.3 (Versión 2). *Un conjunto X es infinito si y sólo si $|\mathcal{P}_{max}(X)| > 1$.*

§6. Una aplicación interesante

Cuando usamos la ecuación (5.1) para el caso de particiones generadas por reales, nos importó que todos los naturales quedaran distribuidos en las diferentes A_n , por eso

usábamos la parte entera en la definición. Vamos a variar ahora ligeramente la definición de los A_n para incorporar el caso real. Dado un r fijo mayor que uno, definimos los conjuntos C_ℓ como antes:

$$C_\ell = [r^{\ell-1}, r^\ell), \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Entonces,

$$\mathbb{R}_{\geq 1} \subset \bigcup_{\ell=1}^{\infty} C_\ell, \quad C_\ell \cap C_{\ell'} = \emptyset, \quad \ell \neq \ell'.$$

Para cada $d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, definimos A_d como

$$(6.1) \quad A_d = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 1} : x - r^{\ell_0-1} = d \text{ y } x \in C_{\ell_0}\}.$$

Por cada C_ℓ puede existir a lo sumo un x cuya distancia al primer elemento del C_ℓ al que pertenece ($x - r^{\ell-1}$) sea exactamente d . A partir de un cierto momento, todos los C_ℓ tienen un elemento que cumple esa condición, por lo tanto cada A_d es numerable. También puede probarse que ningún x puede pertenecer a más de un A_d (si r se encuentra fijo) y que todo real mayor que 1 pertenece a alguno de los A_d .

Si un x perteneciera tanto a A_d como a $A_{d'}$ (con d y d' distintos), entonces estaría a distancia d del primer elemento de algún C_ℓ , al cual pertenece, y también a distancia d' del primer elemento de un $C_{\ell'}$, al cual también pertenece. Pero como los C_ℓ son disjuntos, este no puede ser el caso. Por otro lado, como todo real mayor que 1 pertenece a un único C_ℓ , la distancia al primer elemento de ese conjunto determina de forma unívoca el A_d al que pertenece.

Los C_ℓ forman una partición de los $\mathbb{R}_{\geq 1}$ en numerables conjuntos donde cada uno es equipotente con los reales. Los A_d forman una partición del mismo conjunto, pero en un continuo de conjuntos, identificados por d , donde cada uno es numerable. Las particiones del estilo C_ℓ sirven de ejemplos para la proposición que dice que *la unión numerable de conjuntos con potencia del continuo* da como resultado otro conjunto cuya cardinalidad es el continuo. Las particiones del estilo A_d pueden servir de ejemplos de que *la unión continua de conjuntos numerables* tienen la cardinalidad del continuo. Que la cardinalidad de las partes numerables de los reales sea igual a la cardinalidad de los reales está en total acuerdo con lo que mostramos con este ejemplo.

§7. Comentarios finales

Las particiones doblemente numerables de los números naturales se presentan como un método algorítmico efectivo a la hora de generar múltiples ejemplos de conjuntos numerables y disjuntos cuya unión es numerable. Se probó que existen tantas particiones de estas como números reales y se explicitó un método efectivo para construir una PDN por cada natural mayor que 1. Hemos presentado un ejemplo de programa que realiza esta tarea en el caso particular de base igual a 2. Su utilidad a la hora de resolver problemas de cardinalidad ha quedado a la vista con algunos ejemplos y se mostró eficiente para resolver variantes potenciadas del *Hotel de Hilbert*. Queda pendiente para futuras investigaciones el rol que estas particiones puedan jugar definiendo posibles modelos para los números reales

como así también la relación directa que guardan con los números reales (no estándar) ilimitados.

Agradecimientos. Estamos muy agradecidos con Rafael Grimson por sus sugerencias y recomendaciones cuando la idea se estaba gestando. También queremos agradecerle al revisor anónimo, su experticia ayudó a dejar más claro y completo el presente artículo.

Bibliografía

- Apostol, T. M. (1984). *Introducción a la teoría analítica de números*. REVERTE, ISBN: 9788429150063.
- Apostol, T. M. (1998). *Análisis matemático*. REVERTE, Segunda edición. ISBN: 8429150048.
- Basa, J. (2014). *Sobre el Teorema de Cantor-Bernstein y la matemática de conjuntos*.
- Cobillón, M. S. (2015). *Análisis real no estándar*. Facultad de Matemáticas. Universitat de Barcelona.
- El hotel de Hilbert. (2020). *El hotel de Hilbert*. Descargado de <https://plato.stanford.edu/entries/spacetime-supertasks>
- El hotel infinito de Hilbert. (2021). *El hotel infinito de Hilbert*. Descargado de https://es.wikipedia.org/wiki/El_hotel_infinito_de_Hilbert
- Fava, N., y Zó, F. (2013). *Medida e integral de Lebesgue. curso de grado. fascículo 4*. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos.
- Ivorra, C. (2018a). *Teoría de conjuntos y topología*. Descargado de <https://www.uv.es/ivorra/Libros/Libros.htm>
- Ivorra, C. (2018b). *Teorías de conjuntos*. Descargado de <https://www.uv.es/ivorra/Libros/TCS.pdf>
- Ortiz, J. R. (1994). El concepto de infinito. *Asociación Matemática Venezolana*, 1(2).
- Paenza, A. (2005). *Matemática... ¿estás ahí?* Universidad Nacional de Quilmes. Siglo Veintiuno Editores, Colección Ciencia que ladra. Descargado de <http://cms.dm.uba.ar/material/paenza/libro1/matematicaEstasAhi.pdf>
- Rubin, H., y Rubin, J. (1963). *Equivalents of the axiom of choice* (Vol. 116). Oxford. University Press.
- Stein, E., y Shakarchi, R. (2007). *Real analysis*. Princeton lectures in analysis.
- Suppes, P. (1968). *Teoría axiomática de conjuntos*. Editorial Norma. Cali, Colombia.
- Vinogradov, M. (1977). *Fundamento de la teoría de los números*. MIR, Moscú. Traducción al español.

JUAN PABLO JORGE

Departamento de Física, Universidad de Buenos Aires, CABA (1428), Argentina; Instituto de Filosofía, Universidad Austral, Pilar (1629), Argentina.

(✉) jorgepablo@gmail.com

HERNÁN LUIS VÁZQUEZ

Departamento de Computación, Universidad de Buenos Aires, CABA (1428), Argentina.

(✉) vazquez.hernan.luis@gmail.com

Recibido: 1 de marzo de 2021.

Aceptado: 14 de julio de 2021.

Publicado en línea: 31 de julio de 2021.

En memoria del pensador y educador matemático brasileño Ubiratan D'Ambrosio: creador del *Programa Etnomatemática*

por Marcelo C. Borba y Olenêva Sanches Sousa

Traducción: Mónica E. Villarreal

COMO brasileños, nos sentimos honrados por la invitación de la Revista de Educación Matemática para contribuir a la difusión de la obra de Ubiratan D'Ambrosio, fallecido el 21 de mayo de 2021, a los 88 años, en São Paulo, Brasil, donde también nació.

Ubiratan D'Ambrosio dejó a la comunidad científica y educativa la organización intelectual de un programa de investigación y de una epistemología general, cuyo conjunto teórico denominó *Programa Etnomatemática*. Ubiratan tenía formación académica en Matemática. Obtuvo su Doctorado en Matemática en la Universidade de São Paulo (USP), en 1963. Fue profesor emérito de la Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), y entre 1972 y 1980 fue director del Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da



Computação (IMECC/UNICAMP). Fue contratado para ser profesor en la Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Río Claro, actualmente Universidade Estadual Paulista (UNESP - Campus de Río Claro), de la primera cohorte que comenzó en 1959.

EN su experiencia académica, fue profesor visitante de la UNESCO en el programa de postgrado del Centre Pédagogique Supérieur, en Bamako, República de Mali, entre otros nombramientos. Ubiratan fue profesor en varios cursos de postgrado, entre los que destacamos el *Programa de Ensino de Ciências e Matemática* de la UNICAMP, que tuvo una vida corta, pero formó a varios líderes en

Brasil y América Latina. De este programa egresaron decenas de magísteres en los años 70 y fue el germen de un programa posterior, éste ya en Río Claro.

En 1984, en la UNESP de Río Claro, D'Ambrosio creó, junto con dos colegas de la UNICAMP y varios profesores de la UNESP, el primer *Programa de Pós-graduação em Educação Matemática*, a nivel de maestría, en Brasil, y el primero de Sudamérica, si consideramos los que aún están vigentes. En 1993, de nuevo con Ubiratan a la cabeza, se puso en marcha el doctorado, además de la maestría ya existente. Según varios investigadores, este programa marcó el comienzo de la fase científica de la Educación Matemática brasileña que tomó forma en la segunda mitad del siglo XX. Este programa con sus magísteres y doctores ayudó a generar otros varios programas en el país, y cuenta con ex alumnos de Argentina y varios países de América Latina. Es también en el marco de este programa de posgrado donde se produce la primera tesis de maestría que utiliza la noción de Etnomatemática. La misma fue desarrollada por el primer autor de este texto y contó con un fuerte apoyo de Ubiratan D'Ambrosio. En 1984, en Río Claro, con el primer grupo de estudiantes de este programa de postgrado, ensaya la conferencia que le otorgaría definitivamente el reconocimiento de la comunidad internacional. Fue en ese año cuando Ubiratan D'Ambrosio fue invitado a dictar la conferencia inaugural en el *5th International Congress on Mathematical Education (ICME 5)* en Adelaida, Australia, en la cual presentó formalmente el concepto de Etnomatemática, focalizándose sobre las bases socioculturales de la Educación Matemática. Como investigador, se dedicó a organizar el Programa Etnomatemática.

EL reconocimiento de sus estudios justificó la creación del *Grupo Internacional de Estudios sobre Etnomatemática (International Study Group on Ethnomathematics - ISGEm)* en 1985 y de la *Red Internacional de Etnomatemática (RedINET)*, iniciada en Colombia en 2003, así como la organización de diversos eventos, que continúan realizándose hasta hoy, tales como la *Conferencia Internacional de Etnomatemática (International Conference on Ethnomathematics - ICEm)* iniciada en 1998 en España, el *Encuentro Latinoamericano de Etnomatemática (ELEm)* en 2016 en Guatemala, o el *Congresso Brasileiro de Etnomatemática (CBEm)*, desde 2000.

En Brasil, varios grupos de investigación, registrados en el Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), tienen la Etnomatemática como objeto de estudio explícito. Por ejemplo, el *Grupo de Estudo e Pesquisa em Etnomatemática* de la Faculdade de Educação de la Universidade de São Paulo (GEPem-FEUSP) desde 1999, y el *Grupo de Estudo e Pesquisa em Etnomatemática (GEPetno)* de la UNESP, en 2004, ambos en São Paulo, de cuya creación Ubiratan fue partícipe, entre otros grupos creados posteriormente y activos en varios estados del país, como Bahía, Mato Grosso, Minas Gerais, Pará, Piauí, Río de Janeiro, Río Grande do Sul. Además, en Brasil existe una coordinación nacional de la *RedINET* y una comunidad virtual, *EtnoMatemaTicas Brasis*, que mantiene un

canal sobre Etnomatemática en YouTube y que ha publicado recientemente el [e-Almanaque EtnoMatemaTicas Brasis](#).

En 2001, D'Ambrosio recibió el premio Kennedy de la *Comisión Internacional de Historia de la Matemática*. En 2005, la *International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)*, vinculada a la *International Mathematical Union*, le concedió la medalla Félix Klein (1849-1925), la cual lleva el nombre de uno de los matemáticos más importantes de su tiempo. Este premio es otorgado



a académicos de excelencia que han dado forma al campo de la educación matemática a lo largo de su vida, a través de contribuciones sustanciales a la investigación y que han introducido nuevos temas, ideas, perspectivas y reflexiones críticas. Indudablemente, Ubiratan D'Ambrosio se encuentra entre los educadores matemáticos más influyentes de los siglos XX y XXI.

FUE su labor crítica como matemático, sus estudios sobre Filosofía de la Ciencia y su trabajo con la Historia de la Matemática y la Educación Matemática, así como su frecuente asistencia a congresos de diversas áreas, lo que lo llevó a formular la noción de Etnomatemática. En conferencias en el extranjero, veía cómo los matemáticos profesionales de una determinada área tenían dificultades para comunicarse con colegas de otras áreas de la Matemática. Así, alguien del área de Análisis no podía comunicarse fluidamente sobre problemas específicos con un colega, por ejemplo, del área de Topología, de forma similar a lo que ocurre con pueblos que no podían comunicarse por no tener un lenguaje común. Con su amplitud de conocimientos, surge la idea de relacionar la matemática con otras áreas. Al igual que los investigadores que propusieron la noción de etnobotánica, Ubiratan reúne la Antropología, la Matemática, la Historia y la Filosofía para concebir la noción de Etnomatemática.

Sus reflexiones basadas en diversas realidades lo llevaron a reconocer la importancia de lo sociocultural en la generación del conocimiento y el camino cíclico que involucra su organización intelectual y social y su difusión, atento a los filtros del poder que le garantizan el dominio. En este sentido, Ubiratan amplió la concepción del conocimiento matemático al situarlo en la base de las necesidades humanas de sobrevivencia y trascendencia, lo que implicó resistencias desde

una estricta visión académica de la Matemática como ciencia, ya que ésta se convirtió, desde su concepción ampliada de conocimiento, en una Etnomatemática cuyo etno sería la academia, vista como un grupo cultural.

Su aguda curiosidad y creatividad y su osadía bien fundamentada dieron alas al investigador, al educador, al filósofo, al historiador de la matemática, de las ciencias y del conocimiento en general, para vivenciar experiencias en y entre diversas “jaulas epistemológicas”. Esta metáfora que él utiliza representa un estímulo para abrirse a la realidad, donde están los problemas que pueden dar sentido a una investigación y a una educación que busquen resolverlos.



Al centrarse en la evolución cultural de la humanidad, el Programa Etnomatemática ha encontrado apoyo en diversas áreas del conocimiento, como las Ciencias Cognitivas, la Antropología, la Sociología, la Historia de las Religiones y de las Artes, entre otras. Obviamente también en la Historia y Filosofía de las Ciencias que se han visto muy influenciadas por el Programa Etnomatemática en el sentido de que sus intereses de investigación van más allá de su construcción eurocéntrica. Este factor ha llevado a la Etnomatemática a movimientos sociopolíticos en defensa de los derechos humanos, la

democracia, la justicia social y la paz, orientando teóricamente las investigaciones y las prácticas destinadas a luchar contra los diversos tipos de prejuicios y desigualdades socioeconómicas que provienen, principalmente, del proceso de colonización europeo.

Un ejemplo evidente de la importancia de la Historia y la Filosofía de las Ciencias para el desarrollo del Programa Etnomatemática de D'Ambrosio se encuentra en Argentina. Ubiratan fue miembro fundador de la Asociación de Filosofía e Historia de la Ciencia del Cono Sur (AFHIC) en Quilmes en 2000, y tiene sede administrativa en Campinas, São Paulo, Brasil. D'Ambrosio fue un entusiasta constructor de la unión iberoamericana y ayudó a fundar varios congresos, sociedades y revistas que reunieron a España, Portugal y los países de América.

Sus ideas extraordinarias le llevaron a relacionar sus estudios con cuestiones de gran relevancia, como la paz mundial y la justicia social, participando en debates de carácter holístico y sobre temas como la transdisciplinariedad. Ubiratan D'Ambrosio participó en el *Foro de Ciencia y Cultura*, promovido por la UNESCO, en la fundación de la Universidade Internacional da Paz (UNIPAZ), en Brasilia, en el Centre International de Recherches et Études Transdisciplinaires y en las *Pugwash Conferences on Science and World Affairs*, un movimiento por la paz iniciado a partir del manifiesto Russell-Einstein, que en 1995 recibió el Premio Nobel de la Paz por sus acciones contra las armas nucleares. Además, fue uno de los firmantes de la Declaración de Venecia y de la Carta de la Transdisciplinariedad.

EL profesor D'Ambrosio, con un corazón y un alma gigantescos, fomentaba la curiosidad científica y personal de todos los que le rodeaban. Ciertamente, él no quería que los autores de esta semblanza sean llamados como "seguidores", pero realmente nos marcó de muchas maneras. Por cierto, Ubiratan era una persona especial, muy cuidadosa y atenta con sus relaciones, sin distinciones. Este hecho motivó que algunos de sus estudiantes y amigos organizaran periódicamente, entre 2014 y 2016, reuniones con él en São Paulo, ciudad donde residía. Los organizadores se autodenominaron *Grupo de Amigos do Ubi* (GAU), y la idea era la promoción de encuentros afectivos, que siendo sorpresas para él permitieran la creación de lazos de amistad en torno a su persona. Sentiremos su ausencia, sentiremos saudades de Ubi.

MARCELO C. BORBA

Programa de Pós Graduação em Educação Matemática UNESP - Câmpus de Rio Claro, São Paulo, Brasil.

(✉) marcelo.c.borba@unesp.br

OLENÊVA SANCHES SOUSA

Red Internacional de Etnomatemática (RedINET) Brasil.

(✉) oleneva.sanches@gmail.com

Para quienes estén interesados en conocer la obra de Ubiratan se proporciona un listado de algunos de sus libros, en sus últimas ediciones:

D'Ambrosio, U. (2019). *Etnomatemática. Elo entre as tradições e a modernidade*. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, v. 1. 150p.

D'Ambrosio, U. (2016). *Educação para uma sociedade em transição*. 3. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física.

D'Ambrosio, U. (2016). *Educação Matemática. Da Teoria à Prática*. 23. ed. Campinas: Papirus Editora.

D'Ambrosio, U. (2012). *Cultura de Paz e a Luta pela Sobrevivência*. 1. ed. São Paulo: TRION Centro de Estudos Marina e Martin Harvey Editorial e Comercial.

D'Ambrosio, U. (2012). *Transdisciplinaridade*. 3. ed. São Paulo: Palas Athena, v. 1.

- D'Ambrosio, U. (2012). *Formação de valores. Um enfoque transdisciplinar, Caminhos da Educação Integral no Brasil: direito a outros tempos e espaços educativos*. 1. ed. Porto Alegre: Penso.
- D'Ambrosio, U. (2011). *Uma Síntese Sociocultural da História da Matemática*. 1. ed. São Paulo - SP: PROEM Editora.

Para mayor información sobre la producción bibliográfica de D'Ambrosio y otros autores que trabajan en el marco del Programa Etnomatemática consultar [Biblioteca Digital EtnoMatemáticas \(BDEm\)](#).

Nota: las fotos incluidas en esta semblanza fueron gentilmente proporcionadas por el Grupo de Amigos do Ubi (GAU), y tomadas por Amaro Fotografia.

Sección de Problemas

✉ por Juan Pablo Rossetti

Los siguientes problemas están pensados para un público amplio. Las soluciones se encuentran en la página siguiente.



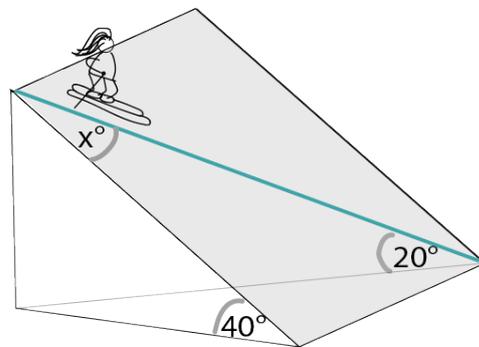
Problema 1. *Ángulo en la pista de esquí.*

Una pista de esquí tiene una pendiente pronunciada, de 40° con el plano horizontal. La chica del dibujo la quiere bajar, pero yendo en diagonal, para evitar el descenso directo.

Quiere que su trayectoria tenga una pendiente menor, que forme un ángulo de 20° con el plano horizontal.

¿Cómo debe elegir el ángulo que forma su diagonal con la línea de descenso directo?

¿Puede resolver el problema general para pendientes de ángulos arbitrarios?



Problema 2. *100 fichas de reversi.* Se tiene una fila de 100 fichas de reversi, que son blancas de un lado y negras del otro, puestas en forma alternada:



El juego consiste en ir dando vuelta las fichas de modo de dejarlas a todas de un mismo color. La mecánica es tomar bloques del largo que uno quiera, y dar vuelta todas las fichas de ese bloque, que puede tener entre 1 y 100 fichas. Por ejemplo, si en el primer movimiento se toma el bloque de las fichas 2, 3 y 4, nos quedará:



¿Cuánto es el mínimo número de movimientos para lograr el objetivo?

Justificar la respuesta.

Problema 3. *Compra en euros.* Una profesora de matemática gastó en material educativo en un congreso en el extranjero la mitad de su dinero, y lo curioso es que le quedaron la misma cantidad de centavos que los euros que tenía, y la mitad de euros que los centavos que tenía.

¿Cuánto dinero tenía la profesora antes de hacer estas compras? ¿Cuánto gastó?

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones? ¿Y una fórmula general?

- $\{a_n\}$: 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, ...
- $\{b_n\}$: 0,1; 0,11; 0,110001; 0,110001000000000000000001;
0,1100010000000000000000000100... agregar noventa ceros ... 0001 ; ...
- $\{c_n\}$: 1, 5, 14, 33, 72, 151, 310, 629, 1268, 2547, 5106, 10225, 20464, 40943, 81902, ...
- $\{d_n\}$: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, 2, 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92, 3, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93, 4, 14, 24, 34, 44, 54, 64, 74, 84, 94, 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 6, 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96, 7, 17, 27, 37, 47, ...

Podés encontrar las soluciones en la página 98.



SOLUCIONES

Solución 1. Respuesta: El ángulo es $x \cong 57,85^\circ$.

Una solución se puede obtener poniendo valores a algunos segmentos y usando reiteradamente el Teorema de Pitágoras.

Pero damos aquí otra solución que consideramos más elegante. Pensemos en el tetraedro (no regular, sino con varios ángulos rectos) cuyos vértices son el punto desde donde parte la chica, el punto donde llegará, el punto donde llegaría si descendiera en forma directa y el punto (dentro de la montaña) que está verticalmente debajo de ella.

En todo tetraedro se cumple un *teorema del seno*, que se deduce al aplicar el Teorema del Seno a los ángulos interiores inferiores y a los lados no inferiores de los tres triángulos que forman las paredes del tetraedro. Esto produce una igualdad entre el producto de los senos de tres de dichos ángulos (tomados en forma alternada) con el producto de los senos de los otros tres ángulos.

En nuestro tetraedro, notamos que tres de estos ángulos son rectos, por lo que se simplifica la igualdad a

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma = \operatorname{sen} \beta$$

donde α sería el correspondiente al ángulo de 40° , β el correspondiente al ángulo de 20° y γ el complementario de x , en la cara del tetraedro que corresponde a la pista.

Por lo tanto, resulta $\operatorname{sen} \gamma = \cos x$ y luego $\cos x = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha}$.

El caso del enunciado es $x = \arccos\left(\frac{\operatorname{sen} 20^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ}\right) \cong \arccos \frac{0,342}{0,643} \cong \arccos 0,532 \cong 57,85^\circ$.

Solución 2. Respuesta: Se necesitan 50 movimientos.

Por un lado, es claro que con 50 movimientos es posible lograrlo, ya que podríamos tomar bloques de 1 sola ficha e ir dando vuelta las 50 fichas negras de una hasta tener todas blancas.

Por otro, no es posible hacerlo en menos de 50 movimientos. Una linda demostración es pensar en algo así como la *energía* que hay entre las fichas, que podemos pensarla como que suma uno cada vez que dos fichas contiguas son de distinto color. En la posición inicial hay 99 diferencias. Notemos que en cada movimiento, a lo sumo se pueden reducir 2 diferencias, las del extremo del bloque, pero nunca más de dos. Por lo tanto, con 49 movimiento se pueden reducir la energía a lo sumo a $99 - 49 \times 2 = 1$, pero no a cero.

Solución 3. *Respuesta:* Tenía 99 euros y 98 centavos (es decir €99,98). Gastó 49 euros y 99 centavos (notar que 99 centavos es como 49 centavos más medio euro).

Para resolverlo se pueden plantear ecuaciones. Comenzó con (e, c) , donde e es la cantidad de euros y c la de centavos. La cantidad de dinero, contada en centavos, es $100e + c$, por lo que la mitad es $50e + \frac{c}{2} = 100\frac{e}{2} + \frac{c}{2}$. Si le hubieran quedado $(\frac{e}{2}, \frac{c}{2})$, las consignas del enunciado nos llevarían a que $\frac{c}{2} = e$ y $\frac{e}{2} = \frac{c}{2}$, lo cual no tiene solución (no nula).

En cambio, la otra posibilidad, es que le haya quedado $(\frac{e-1}{2}, 50 + \frac{c}{2})$, en cuyo caso las consignas producen las ecuaciones $50 + \frac{c}{2} = e$ y $\frac{e-1}{2} = \frac{c}{2}$, cuya única solución es $e = 99$ y $c = 98$.

Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $a_{15} = 24$.
Son los números naturales que no son primos.
- $b_6 = b_5 + \frac{1}{10^{6!}}$.
Esta sucesión converge al primer número real que se demostró que es trascendente (Liouville, 1851).
- $c_{16} = 163821$.
 $c_{n+1} = 2 \times c_n + (n + 2)$. También $c_{n+1} = 52^n - n - 4$.
- $d_{75} = 57$.
Son los números naturales leídos al revés, de derecha a izquierda.

Viene de la página 96.