# Revista de Educación Matemática




Registro Nacional de la Propiedad Intelectual N° 168024

ISSN 0326-8780 (versión impresa)

ISSN 1852-2890 (en línea)

Página web: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index
Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

Revista de Educación Matemática

Volumen 36, N° 1 – 2021

# ÍNDICE



También encontrarás al final las *¡Sucesiones al toque!*

# Editorial

A principios de marzo dio comienzo un nuevo ciclo lectivo luego de un año escolar que muy probablemente haya sido, para las instituciones educativas, el más difícil de la historia reciente. En este nuevo año los desafíos educativos se renovarán y serán nuevamente muy demandantes, lo que impulsa a toda la comunidad docente a sacar a relucir el brillo y la vocación que tiene, aprovechando al máximo la creatividad y los recursos disponibles para que el impacto en los estudiantes de todos estos cambios forzados por la pandemia sea el menor posible. Más que nunca es muy importante transmitir entusiasmo y optimismo a los estudiantes para que no permitamos que el desinterés, que a veces es desánimo, deje huellas demasiado profundas.

Hablando de optimismo, celebramos que la Dra. Alicia Dickenstein, profesora titular de la FECyN de la UBA e investigadora superior del Conicet, haya sido galardonada con el premio L´Oreal UNESCO para Mujeres en Ciencia por "*su destacado trabajo en la vanguardia de la innovación matemática, explotando la geometría algebraica en el campo de la biología molecular*". Alicia tiene una muy destacada labor científica que es inspiración para jóvenes generaciones de chicos y chicas que sueñan con trabajar haciendo ciencia. Entre sus aportes para la enseñanza de la matemática destacamos *Matemax*, un libro de problemas de la vida cotidiana para estudiantes de comienzos de secundaria, que originalmente fue publicado por Coquena en 1994 y, muy recientemente, en coautoría con Juan Sabia, ha sido republicado por la American Mathematical Society. En este número, Adrián Paenza nos comparte una semblanza muy humana de ella.

Además, en este número, contamos con cuatro artículos. Tres de ellos nos presentan aportes para la enseñanza. En *Las demostraciones dinámicas del Teorema de Pitágoras* los autores nos presentan un estudio y selección de algunas demostraciones de este importante teorema desde la perspectiva del uso de software libre de geometría dinámica, discutiendo posibles agregados o modificaciones y señalando el nivel educativo para el que están orientadas.

En *Reflexiones acerca de la definición de radicación y su relación con la construcción de nuevos conceptos* los autores repasan las definiciones de varios conceptos relacionados con la radicación. Al mismo tiempo señalan la observación, tanto en estudiantes de secundaria como en ingresantes universitarios, de errores recurrentes en relación a estos temas, algunos de los cuales están presentes en algunos libros escolares. Los autores enfatizan la importancia de corregirlos y ofrecen un camino que permite abordar estos conceptos de manera coherente y consistente con eventuales aprendizajes posteriores.

En *Una construcción de las reglas de cálculo de los números enteros a partir de la manipulación de expresiones algebraicas* se expone parte de un proyecto conjunto entre investigadores y profesores de matemática de escuelas secundarias en el que se analizan las dificultades que estos últimos observaban en sus alumnos, particularmente en relación a la manipulación de los signos en los cálculos. Los autores describen un proceso en el que surgen las reglas de cálculo para la suma, resta y multiplicación de sumandos y sustraendos apoyadas en los conocimientos de los números naturales, donde las expresiones algebraicas tienen un rol fundamental.

Entre los trabajos de matemática, la estadística está presente en el artículo *Acerca de la Moda*. Allí el autor comienza haciendo una breve introducción a las medidas de tendencia central para luego enfocarse en la moda y particularmente en la construcción de la fórmula para la moda en datos agrupados. Esta construcción se realiza a través de una relación de proporcionalidad que involucra la frecuencia del intervalo modal y la de los intervalos adyacentes.

Además, en una nota editorial, Juan Carlos Pedraza nos deleita con un paseo que comienza analizando el extraño fenómento de cierta especie de cigarras que aparecen cada 17 años en el este de EEUU (y que lo harán en mayo de este año) y cómo este suceso inspiró a Bob Dylan; para luego terminar dándonos detalles sobre el Problema del Milenio del Instituto Clay que involucra la función zeta de Riemann.

Como siempre, contamos con las propiedades divertidas del número 2021, un ¿sabías qué...? y los problemas para pensar.

*Leandro Cagliero*

NOTA: Es muy importante para la RevEM contar con la colaboración de ustedes a través del envío de contribuciones de calidad para publicar. Solicitamos enviar los artículos preferentemente a través del sistema en la página web, pero si tienen inconvenientes pueden hacerlo a la dirección de correo electrónico que figura abajo.

Página web: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index

Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

# Curiosidades del 2021

*Todos los números tienen alguna curiosidad, aquí compartimos algunas del 2021.*

El 2021 no sólo es la yuxtaposición de dos enteros consecutivos (20 y 21) sino que también es el producto de dos primos consecutivos (43 y 47) que a su vez se escriben ¡como sumas de enteros consecutivos! Es decir:

$$2021 = 43 \cdot 47 = (21 + 22) \cdot (23 + 24).$$

Además, el reverso de 2021 es 1202 y tanto la suma como el producto de 2021 con su reverso dan números capicúas (palíndromos):

$$\begin{aligned} 2021 + 1202 &= 3223, \\ 2021 \cdot 1202 &= 2429242. \end{aligned}$$

Más aún, el cuadrado del reverso es el reverso del cuadrado y tenemos

$$1202^2 + 2021^2 = 1444804 + 4084441.$$

## *Expresiones con los dígitos*

- 2021 puede ser escrito con las operaciones elementales en forma ascendente o descendente (con los dígitos o permitiendo también el 10):

$$\begin{aligned} 2021 &= 1 + 2 \times (3^4 \times (5 + 6) + 7 \times (8 + 9)) \\ &= 12 \times (3 \times 4 + 5 + 6) \times 7 + 89 \\ &= (1 + 2 \times 3 + 45 \times 6) \times 7 + 8 \times 9 + 10\,, \\ 2021 &= (9 \times 8 + 7 + 6) \times 5 \times 4 + 321 \\ &= (-9 + 8) \times 7 - 6 \times (5 - (4 + 3)^{2+1}) \\ &= 10 + 9 + 87 + 65 + 43^2 + 1\,. \end{aligned}$$

También existen expresiones de este tipo usando factoriales o raíces cuadradas o ambas ¿te animás a encontrar una?

- 2021 puede ser escrito usando solo uno cualquiera de los dígitos:

$$\begin{aligned}
2021 &= (1+1)^{11} - (1+1+1)^{(1+1+1)} \\
&= (2 \times 22 + \tfrac{2}{2})^2 - 2 - 2) \\
&= (3 - \tfrac{3}{3})^{\frac{33}{3}} - 3^3 \\
&= 4 + (4+4) \times (4^4 - 4) + \tfrac{4}{4} \\
&= 5 + \tfrac{(5+5)^{(5-\frac{5}{5})}+55}{5} + 5 \\
&= 6 + 66 \times (6 \times 6 - 6) + 6 \times 6 - \tfrac{6}{6} \\
&= \tfrac{77+7}{7} + 7 \times (7 \times (7 \times 7 - 7) - 7) \\
&= 8 \times (8+8) \times (8+8) - 8 - 8 - \tfrac{88}{8} \\
&= (\tfrac{9+9}{9})^{\frac{99}{9}} - (9+9+9)\,.
\end{aligned}$$

- La misma representación usando un único dígito $a$:

$$2021 = \frac{(aaaaa - a) \times (a + a) + a \times aa}{a \times aa}$$

para cualquier $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

- Usando los mismos dígitos en bases y potencias:

$$\begin{aligned}
2021 &= -1^6 + 2^1 + 3^7 - 6^3 + 7^2 \\
&= 1^8 - 3^5 + 4^9 + 5^6 - 6^7 + 7^3 + 8^4 - 9^1\,,
\end{aligned}$$

y usando además dígitos consecutivos:

$$\begin{aligned}
2021 &= -1^3 - 2^5 + 3^6 + 4^1 + 5^2 + 6^4 \\
&= 0^4 + 1^7 + 2^8 - 3^9 + 4^6 + 5^2 + 6^1 + 7^5 + 8^3 + 9^0\,.
\end{aligned}$$

## *Números primos*

- Si consideramos los primos menores que 100 y formamos todos los pares de primos consecutivos (dominós):

$$(2,3), \quad (3,5), \quad (5,7), \ldots, \quad (83,89), \quad (89,97)$$

entonces la suma de todos estos pares da 2021. Es decir

$$2021 = 2 + 2(3 + 5 + 7 + \cdots + 83 + 89) + 97.$$

- 2021 es la suma de 33 más los primeros 33 números primos:

$$2021 = 33 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{33} = 33 + (2 + 3 + 5 + \cdots + 127 + 131 + 137).$$

## *Cuadrados, cubos y otras potencias*

- 2021 como suma de 3 cuadrados. Hay 17 formas, y usando al menos un primo tenemos:

$$\begin{aligned} 2021 &= 2^2 + 9^2 + 44^2 \\ &= 4^2 + 18^2 + 41^2 \\ &= 6^2 + 7^2 + 44^2 \\ &= 6^2 + 31^2 + 32^2 \\ &= 7^2 + 26^2 + 36^2 \\ &= 12^2 + 14^2 + 41^2 \\ &= 14^2 + 23^2 + 36^2 \\ &= 17^2 + 24^2 + 34^2 \\ &= 22^2 + 24^2 + 31^2 \,. \end{aligned}$$

  ¿Te animás a encontrar las 8 que faltan?

- 2021 como suma de 4 cuadrados:

$$2021 = 2^2 + 21^2 + 26^2 + 30^2 \,.$$

- 2021 como suma de cubos o potencias cuartas:

$$\begin{aligned} 2021 &= 11^3 + 7^3 + 7^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 \\ &= 6^4 + 5^4 + 3^4 + 2^4 + 1^4 + 1^4 + 1^4 \,. \end{aligned}$$

- 2021 como suma de potencias y sumas con los mismos dígitos:

$$\begin{aligned} 2021 &= 1^8 + 44^2 + 73^0 + 83^1 = 18 + 442 + 730 + 831 \\ &= 2^8 + 41^2 + 75^0 + 83^1 = 28 + 412 + 750 + 831 \\ &= -5^1 + 45^2 + 162^0 = -51 + 452 + 1620 \,. \end{aligned}$$

## *Ternas pitagóricas*

- 2021 satisface las siguientes ternas pitagóricas:

$$\begin{gathered} 2021^2 + 180^2 = 2029^2 \\ 2021^2 + 43428^2 = 43475^2 \\ 2021^2 + 47472^2 = 47515^2 \\ 2021^2 + 2042220^2 = 2042221^2 \,. \end{gathered}$$

## *Cuadrados mágicos*

Un cuadrado mágico de tamaño $n$ es un arreglo de $n \times n$ donde se colocan los números $1, 2, \ldots, n^2$, de modo tal que todas las filas y columnas y las 2 diagonales principales tienen la misma suma. Damos 3 cuadrados mágicos $7 \times 7$ donde las filas, columnas y diagonales principales son números primos palindrómicos.

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\
3 & 2 & 9 & 1 & 9 & 2 & 3 \\
1 & 9 & 5 & 2 & 5 & 9 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\
1 & 9 & 5 & 2 & 5 & 9 & 1 \\
3 & 2 & 9 & 1 & 9 & 2 & 3 \\
1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
1 & 3 & 7 & 1 & 7 & 3 & 1 \\
3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 \\
7 & 3 & 6 & 2 & 6 & 3 & 7 \\
1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\
7 & 3 & 6 & 2 & 6 & 3 & 7 \\
3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 \\
1 & 3 & 7 & 1 & 7 & 3 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
7 & 1 & 7 & 7 & 7 & 1 & 7 \\
1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\
7 & 2 & 2 & 6 & 2 & 2 & 7 \\
7 & 0 & 6 & 9 & 6 & 0 & 7 \\
7 & 2 & 2 & 6 & 2 & 2 & 7 \\
1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\
7 & 1 & 7 & 7 & 7 & 1 & 7
\end{array}
$$

Revista de Educación Matemática
Volumen 36, N° 1 (2021), páginas 9 – 26
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

*Aportes para la Enseñanza de la Matemática*

# REFLEXIONES ACERCA DE LA DEFINICIÓN DE RADICACIÓN Y SU RELACIÓN CON LA CONSTRUCCIÓN DE NUEVOS CONCEPTOS

Fernando Benítez y Marilina Carena

Resumen. En este trabajo presentamos experiencias transitadas por cada uno de los autores en distintos niveles de educación, referidas a un mismo concepto: la radicación. Tanto en diferentes grupos de la escuela secundaria como en ingresantes a la universidad hemos observado ciertos errores recurrentes de conceptos que luego redundan en dificultades o contradicciones en la construcción de nuevos objetos matemáticos. La repetición de dichos errores nos condujo a revisar algunos libros escolares, evidenciando la importancia de la labor del docente para lograr erradicarlos, desde el cuestionamiento y debate continuo del material bibliográfico, y desde la precisión y consistencia en la presentación de los conceptos.

Abstract. In this work we present some experiences that both authors have witnessed in different educational levels, regarding the same concept: the nth root. We have observed certain recurrent errors of concepts, not only in high school students but also in college students, that later conduct to difficulties or contradictions in the construction of new mathematical objects. The recurrence of these errors led us to review some school books, where the importance of the teacher's work becomes essential to eradicate possible errors, from the continuous questioning and debate of the bibliographic material, and from the precision and consistency in the presentation of the concepts.

## Introducción

Quienes estamos en contacto con la Matemática, ya sea estudiándola o transmitiéndola, no tenemos dudas acerca de su consistencia, coherencia y su rigurosidad. La entendemos como una construcción constante de conocimientos mediante razonamientos lógicos a partir de ciertos axiomas. En esta construcción, una condición necesaria para la validación y aceptación de nuevos conceptos y resultados es que no contradigan a otros presentados y probados previamente.

*Palabras clave*: Educación Matemática, Escuela Secundaria, Radicación.
*Keywords*: Mathematics Education, Secondary School, $n$th Root.

Sin embargo, en el proceso de transmisión de los objetos culturales de la Matemática, encontramos que ciertos conceptos son presentados en algunos textos escolares de manera que atenta con esa consistencia, coherencia y rigurosidad esperadas, generando luego procedimientos algebraicos sin sentido y una inconsistencia entre los mismos objetos matemáticos, como quedará expuesto a lo largo del trabajo.

En particular, en este artículo centramos nuestra atención en contenidos relacionados a la radicación. Mostraremos, mediante ejemplos, algunas ambigüedades y errores provenientes de ciertos textos escolares, y cómo estos pueden transformarse en obstáculos que generan contradicciones en el aprendizaje de nuevos conceptos bien definidos. Así, nos hacemos eco de las palabras pronunciadas en (Bidart Gauna, Cabral, Cafure, Cambriglia, y Fuentes, 2017):

> *Entendemos que los libros de textos utilizados en la escuela media son, en cierto modo, los responsables de difundir estas malas interpretaciones. Esto nos lleva también a discutir sobre la formación de profesores: en qué medida los ámbitos de formación contribuyen a formar ideas erróneas en este contexto.* (*p.9*)

Si bien los errores o ambigüedades presentadas en este trabajo no aparecen cuando se trabaja la radicación en el campo de los números naturales, los mismos aparecen inmediatamente cuando se extiende a los números enteros y, en consecuencia, cuando se trabaja con números reales. Los textos escolares aquí mencionados corresponden a la operación en estos dos últimos conjuntos numéricos. No consideramos la radicación en los números complejos.

El objetivo de este trabajo es aportar observaciones que puedan colaborar en la labor del docente de detectar dichos errores, debatirlos, corregirlos y, así, erradicarlos. A su vez, ofrecemos un camino que permita abordar ciertos conceptos de manera coherente y consistente con eventuales aprendizajes posteriores.

## §1. La radicación

En los primeros años de la escolaridad secundaria aprendimos que la radicación es una operación en la que intervienen dos números, $x$ y $n$, llamados radicando e índice, respectivamente, y que se escribe como $\sqrt[n]{x}$. El símbolo $\sqrt{\phantom{x}}$ se denomina *radical*.

En ese contexto, aprendimos también que si $n = 2$ se lee "raíz cuadrada de" y que, por convención, no se escribe como índice del radical. Por ejemplo, $\sqrt{4}$ se lee "raíz cuadrada de $4$". Resulta muy probable que muchas personas no vean nada erróneo en la siguiente afirmación:

$$\sqrt{4} = \pm 2. \tag{1.1}$$

De hecho, en (Sobel y Lerner, 1996, p.38) se enuncia: "¿Dijo usted que $\sqrt{25} = \pm 5$? Si lo hizo, ¡cometió un error muy común!"

Aunque este error aparece en libros antiguos como el célebre "Tapia", aún persiste en algunos actuales (ver, por ejemplo, (Covelo y Covelo, 2019, p.14) donde el concepto se aborda en el campo de los números reales; (Pacetti y Bonardi, 2016, p.19) o (Ferraris y Tasso, 2008, p.35)). En particular, en (Covelo y Covelo, 2019) se enuncia que $\sqrt{9} = \pm 3$, y se lo reescribe como

$$\sqrt{9} = x, \quad \text{con } |x| = 3.$$

Durante un taller para 25 docentes de escuelas primarias y secundarias, la segunda autora de este trabajo propuso una votación anónima, en la que debían colocar un papel en una urna marcando la opción que consideraban correcta para el valor de $\sqrt{4}$. Las dos opciones posibles eran $\sqrt{4} = 2$ o $\sqrt{4} = \pm 2$. Por otro lado, propuso una encuesta a través de la cuenta de Instagram de su cátedra, de la que participaron voluntariamente 74 estudiantes universitarios de carreras denominadas "exactas", provenientes de distintas escuelas y ciudades. En ambos casos, el resultado llamó la atención: aproximadamente el 60 % votó por la opción incorrecta $\sqrt{4} = \pm 2$.

Si bien la cantidad de personas encuestadas es baja como para establecer una conclusión al respecto o considerar la experiencia como un trabajo estadístico, nos motivó a abordar el origen de esta concepción equivocada y de qué manera puede afectar a la construcción del nuevo conocimiento.

### 1.1. La definición

Comencemos por mostrar algunos de los obstáculos que pueden surgir como consecuencia de la aceptación del error conceptual presentado al comienzo.

Con el objetivo de estudiar la jerarquía de las operaciones, es común que se propongan ejercicios combinados en los cuales se presente la radicación. Supongamos que se llega a esto con la idea de que la igualdad en (1.1) es válida y que se propone, por ejemplo, el siguiente ejercicio combinado:

$$\sqrt{4} - 2 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} + 3 \cdot \sqrt{25}.$$

Por supuesto, nunca dudaríamos de lo que debemos hacer: separamos en términos y operamos. El resultado es $-7$. Y acá aparece la primera inconsistencia ya que, si (1.1) es cierta y, en forma general, para cada $x > 0$ se admiten dos resultados para $\sqrt{x}$, entonces debemos considerar los dos valores posibles en cada raíz cuadrada que aparece en el ejercicio dado. Así, si consideramos todas las posibles combinaciones de estos signos, el ejercicio no tiene un único resultado, ¡sino $16$ posibles! Aunque resulta poco probable que un alumno de secundaria considere estas $16$ opciones como resultado de un ejercicio combinado, lo mencionamos para enfatizar la inconsistencia que genera suponer dos valores posibles para el símbolo radical. Sin embargo, sí es más probable que un alumno se pregunte por qué la calculadora devuelve un solo resultado cuando se ingresa $\sqrt{4}$.

En algunas escuelas secundarias se aborda el concepto de función. Se habla de existencia y unicidad de imagen, se analizan gráficos de funciones y se puede presentar la función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Una forma usual de bosquejar la gráfica de dicha función es mediante una tabla de valores. ¿Qué valor le asignamos, por ejemplo, a $f(4)$? Si seguimos afirmando que la igualdad en (1.1) es cierta, entonces $f(4) = \pm 2$, es decir, no hay unicidad de imagen y por lo tanto no es función. Pero no, esto es incorrecto, ya que todos sabemos que $f$ es función y conocemos su gráfica (ver Figura 1). Este es otro ejemplo que pone en evidencia

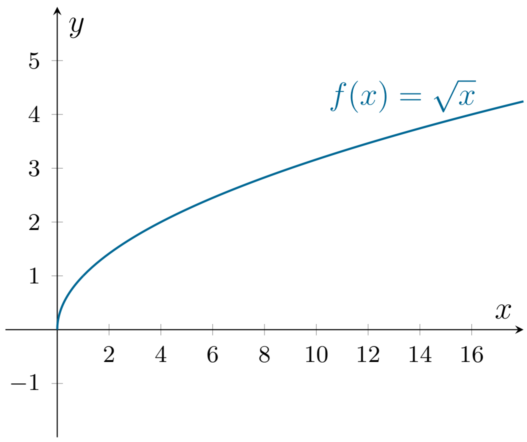



Figura 1. Gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

las contradicciones que genera (1.1) alrededor de otros conceptos bien definidos.

Después de trabajar el concepto de función hay, al menos, dos tipos de funciones que merecen un trato especial: la afín y la cuadrática. Con respecto a esta última, es probable que se hable de su vértice, sus ramas, su eje de simetría, y sus raíces. Y es aquí donde la fórmula resolvente nos ayuda a calcular las raíces de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, las cuales están dadas por

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Y la pregunta natural es: si (1.1) fuera cierta, entonces la fórmula resolvente no necesitaría el doble signo antes de la raíz cuadrada, ya que ambos resultados estarían ya contemplados por la raíz. Si enseñamos que (1.1) vale, entonces debemos considerar correcto que un alumno afirme que la fórmula resolvente es

$$x_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

ya que ambas opciones quedan implícitamente contenidas.

Cabe señalar que el origen del doble signo antes de la raíz tiene su justificación en el uso de la propiedad $\sqrt{x^2} = |x|$, que trabajaremos con mayor detalle en la Sección 1.3, y en la definición del valor absoluto de un número, y no en pensar que $\sqrt{x}$ tiene dos valores posibles, cuando $x$ es un número real positivo.

Los ejemplos previos muestran algunas de las inconsistencias que puede generar en la construcción de otros conceptos el hecho de pensar que $\sqrt{4} = \pm 2$ o, en forma general, que $\sqrt{x}$, con $x > 0$, tiene dos resultados posibles. Así, independientemente del campo numérico en el cual se esté presentando la radicación (naturales, enteros o reales), el siguiente mensaje debe ser claro en la escuela secundaria:

**Mensaje correcto 1.** *El símbolo $\sqrt{x}$, siendo $x$ un número real no negativo, tiene como resultado un* ***único*** *número real no negativo. Luego, $\sqrt{4} = 2$.*

Una pregunta natural en este punto es: ¿de dónde proviene el error de considerar dos resultados posibles? Proviene del uso del *símbolo radical* en la definición de raíz cuadrada de un número positivo. La siguiente definición, que resulta inconveniente por lo que mencionamos arriba, puede encontrarse en varios libros de Matemática escritos para la educación secundaria:

$$\sqrt{x} = r \quad \text{si} \quad r^2 = x.$$

Si fuera correcta, entonces implicaría que $\sqrt{4} = 2$ y también $\sqrt{4} = -2$, ya que tanto $2$ como $-2$ satisfacen que al ser elevados al cuadrado dan $4$ como resultado. Esto es, por supuesto, incorrecto ya que el símbolo $\sqrt{x}$ debe arrojar un único resultado para cada $x \geq 0$. Para evitarlo, se puede:

- Abordar, inicialmente, la enseñanza de las *raíces cuadradas* de un número $x$, sin usar el símbolo radical. Esto es: $r$ es una *raíz cuadrada* de $x$ si $r^2 = x$.
- Luego, si $x \geq 0$, reservar el símbolo $\sqrt{x}$ solo para el resultado no negativo, es decir, para la llamada *raíz cuadrada principal*.
- Agregar el requisito mencionado en el inciso anterior dentro de la definición cuando se utilice el símbolo radical (Sobel y Lerner, 1996, p.38): si $x \geq 0$ entonces

$$\boxed{\sqrt{x} = r \quad \text{si} \quad r \geq 0 \quad \text{y} \quad r^2 = x.}$$

Para el caso general, uno de los textos en donde la definición se encuentra sencilla y correcta es (Larson y Falvo, 2012). Allí, en su apéndice se define, para $x$ y $r$ números reales y $n \geq 2$ un entero positivo, los siguientes conceptos:

**Raíz $n$-ésima de un número:** Si $r^n = x$ decimos que $r$ es una *raíz $n$-ésima* de $x$.

**Raíz $n$-ésima principal de un número:** Si $x$ tiene al menos una raíz $n$-ésima, se denomina *principal* a la que tiene el mismo signo que $x$. En tal caso, la misma se denota con el símbolo radical:

**$\sqrt[n]{x}$ denota la $n$-ésima raíz principal de $x$.**

Algo similar puede encontrarse en (Sobel y Lerner, 1996, p.38). Con esta definición queda claro que $\sqrt{4} = \pm 2$ es incorrecto, y que lo correcto es $\sqrt{4} = 2$.

Si bien la demostración de la existencia de raíces cuadradas de números reales no negativos escapa a los contenidos de la escuela secundaria, la *unicidad* de $\sqrt{x}$ puede probarse fácilmente. En efecto, sea $x \geq 0$ y supongamos que existen dos números, $r$ y $a$, tales que $r = \sqrt{x}$ y $a = \sqrt{x}$. Entonces $r$ y $a$ son dos números reales no negativos tales que $r^2 = x$ y $a^2 = x$. Luego $r^2 = a^2$, o bien

$$r^2 - a^2 = 0.$$

Factorizando, la ecuación anterior equivale a $(r-a)(r+a) = 0$. Por la propiedad del producto cero* se tiene que

$$r = a, \quad \text{o bien} \quad r = -a.$$

Puesto que tanto $r$ como $a$ son números reales no negativos, lo anterior implica que $r = a$, lo que prueba la unicidad.

La existencia y unicidad mencionadas hacen que el símbolo radical pueda entenderse como una función definida en el dominio correspondiente, en el sentido que $\sqrt{x}$ asigna un único valor a cada $x \geq 0$.

## 1.2. Radicación vs. ecuaciones.

El mismo razonamiento aplicado para demostrar la unicidad de la radicación permite probar que las únicas soluciones de la ecuación

$$x^2 = 4$$

son $x = 2$ y $x = -2$. En efecto, la ecuación equivale a resolver

$$x^2 - 4 = 0,$$

lo que a su vez es equivalente a $(x-2)(x+2) = 0$. Nuevamente, por la propiedad del producto cero, se tiene que $x = 2$ o $x = -2$. Así, el conjunto de soluciones de $x^2 = 4$ es $S = \{-2, 2\}$.

Observar que el número $4$ puede reemplazarse por cualquier otro número real positivo, es decir, de la misma forma se prueba que las únicas soluciones para la ecuación

$$x^2 = a,$$

*Recordemos que esta propiedad establece que un producto de factores es igual a cero si y solo si uno o más de los factores es igual a cero.

siendo $a$ un número real positivo, son $x = \sqrt{a}$ y $x = -\sqrt{a}$. Esto se resume escribiendo $x = \pm\sqrt{a}$ Ahora sí, el doble signo colocado delante del símbolo radical indica explícitamente que se deben considerar ambos valores. Así, el conjunto de soluciones de la ecuación $x^2 = a$ es $S = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$.

En relación a esto, haremos mención a un error de notación que puede generar confusión entre la operación radicación y el conjunto de soluciones de una ecuación. Precisamente, en (Covelo y Covelo, 2019, p.32) se indica que

$$\sqrt{-4} = \emptyset.$$

Lo anterior pretende transmitir que la raíz cuadrada de un número negativo no está definida en los números reales, asignando como resultado de la operación un conjunto: el vacío. De ninguna manera podemos asignar un conjunto como resultado a esta operación, en ningún campo numérico en el cual se esté trabajando la radicación. Así como no decimos que $\sqrt{4} = \{2\}$, no podemos decir que la raíz cuadrada de un número negativo es el conjunto vacío. Lo correcto es decir que **no está definida** en los números reales.

**Mensaje falso 1.** *El símbolo $\sqrt{x}$ es un número en ciertos casos, pero es un conjunto en otros.*

Aquí queda expuesta una confusión entre la operación radicación, cuyo resultado es un número o no está definida, y las soluciones de una ecuación, las cuales pueden expresarse como un conjunto. En particular, para el ejemplo mencionado se tiene que $\sqrt{-4}$ no está definida, mientras que el conjunto de soluciones de la ecuación

$$x^2 = -4$$

es el vacío (es decir, no tiene solución).

**Mensaje correcto 2.** *El símbolo $\sqrt{x}$ denota un único número real cuando $x \geq 0$, y no está definido para $x < 0$. Por otra parte, el conjunto $S$ de soluciones de la ecuación*

$$x^2 = a$$

*es $S = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$ cuando $a \geq 0$, y $S = \emptyset$ si $a < 0$.*

Queremos solamente observar, para concluir esta parte, que la forma de resolución de $x^2 = a$ presentada previamente permite conocer, además, la multiplicidad de las raíces. Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$x^4 = 16.$$

Notar que la misma equivale a $x^4 - 16 = 0$. Aplicando diferencia de cuadrados se transforma en

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0.$$

Por la propiedad del producto cero y lo trabajado antes, se concluye que el conjunto solución es $\{-2,2\} \cup \emptyset = \{-2,2\}$. La forma más frecuente de resolución de esta ecuación es la siguiente:

$$\begin{aligned} x^4 &= 16 \\ |x| &= \sqrt[4]{16} = 2 \\ x &= \pm 2. \end{aligned}$$

Más adelante volveremos sobre el valor absoluto involucrado en la resolución anterior. Si bien la misma es correcta, no da información sobre la multiplicidad de las raíces. Identificar de antemano la diferencia de cuadrados puede ayudar a no cometer errores al factorizar, en un futuro, expresiones como $x^4 - 16$ resolviendo la ecuación anterior, ya que el exponente de la variable suele hacer pensar al alumno que posee dos raíces dobles. Lo que sí resulta importante es no caer en el error de escribir una resolución como la siguiente:

$$\begin{aligned} x^2 &= 25 \\ x &= \sqrt{25}, \end{aligned}$$

para luego deducir que $x = -5$ o $x = 5$. En este proceso de resolución, que aparece en (Covelo y Covelo, 2020, p.76), se están cometiendo dos errores juntos: simplificar la raíz cuadrada con el exponente sin colocar el valor absoluto, y afirmar que $\sqrt{25} = \pm 5$.

## 1.3. Algunas propiedades.

Abordaremos ahora algunas propiedades muy conocidas de la radicación, de las cuales haremos uso a lo largo del texto. Previamente hicimos mención a la forma correcta de simplificar índice con exponente. Más precisamente, es sabido que para todo número real $x$ se tiene que

$$\sqrt{x^2} = |x|. \tag{1.2}$$

La prueba es sencilla y, por completitud, la incluimos a continuación.

*Demostración.* Sabemos que $\sqrt{x^2}$ denota al único número real $t \geq 0$ que verifica que $t^2 = x^2$. Puesto que $|x|$ satisface ambas condiciones, esto es, es no negativo y $|x|^2 = x^2$, entonces $t = |x|$, es decir, $\sqrt{x^2} = |x|$. □

De la misma forma se prueba que $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ para todo $n$ par y todo número real $x$, puesto que también ocurre que $|x|^n = x^n$ en dicho caso.

A pesar de que la prueba de la validez de (1.2) utiliza la definición correcta del símbolo radical, la misma no suele ser presentada para los alumnos de escuela secundaria. En general, es ilustrada mediante ejemplos de cómo debe aplicarse. Así, contamos con alumnos que, aún aplicando de manera acertada (1.2), la concepción incorrecta de los dos resultados posibles para el símbolo radical los conduce a cometer un error en la resolución de desigualdades simples como

$$x^2 \leq 4.$$

Concretamente, un grupo de alumnos de tercer año acudió a su profesor, autor de este trabajo, con el siguiente planteo: para resolver la desigualdad anterior aplicaron raíces cuadradas a ambos miembros y la monotonía de la raíz (es monótona creciente, por lo que conserva el sentido de la desigualdad) para obtener:

$$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{4}.$$

Luego, al emplear el concepto erróneo que $\sqrt{4} = \pm 2$, concluyeron que:

$$|x| \leq \pm 2.$$

Así, se llega a una desigualdad que no tiene sentido y que no refleja la solución buscada. Esto no habría ocurrido si siempre se hubiera tenido en claro que el símbolo denota la raíz principal, obteniendo así:

$$|x| \leq 2,$$

es decir, $-2 \leq x \leq 2$.

## §2. Los exponentes racionales y las bases negativas

En esta sección abordaremos el problema de trabajar con potencias con bases negativas y exponente racional. Precisamente, veremos cómo los obstáculos se generan desde la definición y el uso de las propiedades.

### 2.1. La definición

La radicación es la operación que permite definir la potencia con exponente racional. El camino para ello es el siguiente:

(d.1) Se define la potencia con base $x \in \mathbb{R}$ y exponente natural $n$ como el producto de $x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$, donde $x$ aparece como factor $n$ veces.

(d.2) Se define $x^0 = 1$, siempre que $x \neq 0$.

(d.3) Para $p, q \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$, se define

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{x^m},$$

en caso que $\sqrt[n]{x^m}$ esté definida, siendo $m/n$ la forma **irreducible** de $p/q$.

(d.4) Si $b$ es un número racional positivo, se define $x^{-b}$ como $\frac{1}{x^b}$, siempre que $x^b$ sea un número real distinto de cero. En particular, se tiene que $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \neq 0$.

Así, tenemos por ejemplo que

$$(-8)^{\frac{2}{6}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2.$$

Sucede que, en general, el requisito de utilizar la forma irreducible para el exponente no está contemplado en los libros de texto utilizados en la enseñanza secundaria. En ellos, lo que suele encontrarse como definición en lugar de (d.3) es lo siguiente:

(d.5) Si $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m},$$

en caso de que sea posible.

Veamos qué ocurre si aplicamos esta definición para calcular lo siguiente:

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2,$$

pero si escribimos $\frac{1}{3}$ de manera equivalente como $\frac{2}{6}$, entonces:

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = 2.$$

Así, vemos que se obtienen diferentes resultados al utilizar distintas representaciones del mismo exponente racional.

En matemática, que un concepto *esté bien definido* significa que se determina sin ambigüedad alguna, es decir, que no depende de la representación o forma de llegar a los objetos involucrados. Si se enuncia una definición por una elección arbitraria, entonces se debe comprobar que la definición es independiente de dicha elección. El ejemplo anterior muestra que la definición (d.5) no es buena si permitimos que la base sea negativa y, sin embargo, es la más frecuente en los libros de Matemática de nivel secundario. Aunque en los ejercicios no aparecen, en general, exponentes racionales no irreducibles, los mismos suelen generarse cuando se aplican propiedades de la potencia (como productos de potencias de igual base o potencia de otra potencia). Analizaremos con mayor profundidad lo referido a la validez de las propiedades en la subsección siguiente.

**Mensaje contradictorio 1.** *La definición (d.5) de potencia con exponente racional no puede contemplar bases negativas, ¡pero éstas siempre aparecen en los ejercicios!*

Por supuesto que la condición de ser el exponente irreducible **no** es necesaria si solamente trabajamos con bases positivas. En dicho caso, es fácil ver que la definición no depende de la representación elegida para el racional (ver, por ejemplo, (Noriega, 1979)). Sin embargo, si se quiere abarcar tanto bases positivas como negativas, esta condición garantiza la buena definición de potencias con exponente racional.

Es importante también remarcar que, aún considerando solo bases positivas, los requisitos $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ son importantes cuando se define $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, y esto no siempre es mencionado en los textos escolares. En efecto, si se enuncia solamente $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, se permite que el denominador sea un entero negativo, y la definición no tiene sentido pues la radicación no se define para índices negativos. Así, si el exponente es un racional negativo, el signo menos lo debe llevar el numerador, para poder aplicar la definición para exponentes enteros negativos y luego la radicación. Este requisito sobre el numerador y el denominador de un exponente racional no suele ser explicitado en la mayoría de los libros de Matemática utilizados en la escuela secundaria.

**Mensaje correcto 3.** *Las condiciones sobre el exponente impuestas en (d.3) garantizan la correcta definición de potencias con exponente racional, incluyendo a las bases negativas.*

Pese a que queda demostrada la necesidad de requerir el exponente en su forma irreducible, esta condición está ausente en gran parte de los libros de texto. Sin embargo, aunque no está escrito, cuando en (De Simone y Turner, 2016, p.19) se afirma que "si $a$ es un número real negativo, la definición $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ tiene sentido **sólo si** $n$ es impar", pareciera estar considerando la condición de irreducibilidad de $m/n$. De lo contrario, dicha afirmación es falsa, pues basta con observar que

$$(-1)^{\frac{4}{6}} = \sqrt[3]{(-1)^2} = 1,$$

y también

$$\sqrt[6]{(-1)^4} = \sqrt[6]{1} = 1,$$

por lo que es cierta la igualdad $(-1)^{4/6} = \sqrt[6]{(-1)^4}$, a pesar de que $a = -1$ es negativo y $n = 6$ es par. Esto muestra, una vez más, que dicha condición debe explicitarse si se quiere trabajar con bases negativas.

Es importante también mencionar que la potencia con exponente racional *se define* a través de la radicación. Este procedimiento no puede quedar plasmado como un simple intercambio de números para pasar de una potencia a una radicación, y viceversa. No son, a priori, dos escrituras equivalentes, sino la *definición* de una operación a partir de otra ya existente. No se debe confundir al alumno tratando de demostrar, como en (Kaczor, Schaposchnik, Franco, Cicala, y Díaz, 1999, p.37), que $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, ya que es exactamente su definición. Tampoco se debe expresar, como en (Covelo y Covelo, 2020, p.48), que "las raíces también se pueden expresar como potencias: $\sqrt[a]{b^c} = b^{\frac{c}{a}}$". Por supuesto que esta igualdad es verdadera pero, justamente, porque el miembro derecho se define como el izquierdo, y no al revés.

Para finalizar esta parte, cabe señalar que en (Sobel y Lerner, 1996, p.41) se da una definición alternativa de potencias con exponente racional, donde cambia la condición de irreducible en el exponente por otra:

(d.6) Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y sea $x \in \mathbb{R}$. Se define

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m,$$

siempre que $\sqrt[n]{x}$ esté definida.

Esta última condición, que es distinta a pedir que $\sqrt[n]{x^m}$ esté definida como en (d.3), hace que no se presenten ambigüedades en la definición ya que **no** podemos aplicarla para calcular $(-8)^{\frac{2}{6}}$, debido a que $\sqrt[6]{-8}$ no está definida. Entonces no queda otra opción que aplicar la definición con su exponente reducido a $\frac{1}{3}$, o con cualquier otra fracción equivalente cuyo denominador no sea par. Así, con esta definición, tenemos:

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2, \qquad (-8)^{\frac{2}{6}} = (-8)^{\frac{1}{3}}.$$

Además, otra observación en cuanto a la no ambigüedad de la definición (d.6) es que si $m/n = p/q$ y además están definidas tanto $\sqrt[n]{x^m}$ como $\sqrt[q]{x^p}$, entonces obtendremos el mismo valor en el lado derecho de (d.6) usando cualquiera de las representaciones. Por ejemplo:

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2, \qquad (-8)^{\frac{3}{9}} = \sqrt[9]{-512} = -2.$$

Puesto que todo el análisis previo presenta demasiada complejidad para ser abordado en la escuela secundaria, restringirse a bases positivas parece una buena opción para abordar este tema. El modo en que se trabaja actualmente, que incluye a las bases negativas pero no se aclara nada, conduce a las ambigüedades enunciadas y a los errores y contradicciones producidos por la aplicación de propiedades que expondremos a continuación.

## 2.2. Las propiedades

Una vez definida la radicación, analicemos las consecuencias de permitir el uso de las propiedades de la potencia cuando la base es negativa. Es común encontrar en la bibliografía ejercicios del tipo: *Resolver aplicando propiedades de la potenciación:*

i. $(-27)^{\frac{1}{3}} : (-27)^{-1} \cdot (-27)^{\frac{2}{3}} : (-27)^{-2} =$

ii. $(a^m)^{\frac{1}{n}} =$

Así, el mensaje es claro: las propiedades de la potencia pueden usarse también con bases negativas. Es cierto que en el primer inciso se tuvo el cuidado de que cada vez que aparece un exponente racional, su denominador sea impar. Pero, en general, no se hace referencia a ello. En el segundo, al no decir nada sobre $a$, se entiende que puede ser cualquier número real. ¿Qué respuesta se espera en este último caso? Si se espera que la respuesta sea:

$$(a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}},$$

entonces se debe considerar correcto si un alumno realiza el siguiente procedimiento:

$$\sqrt{(-3)^2} = \left[(-3)^2\right]^{\frac{1}{2}} = (-3)^{\frac{2}{2}} = (-3)^1 = -3,$$

aunque contradiga (1.2), ya que es la misma resolución que la efectuada para ii), con $a = -3$ y $m = n = 2$.

Esto conduce a que el alumno obtenga un resultado si aplica las propiedades, diferente al obtenido al utilizar la fórmula (1.2) previamente trabajada:

**Mensaje contradictorio 2.** $(a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$ *pero* $(a^2)^{\frac{1}{2}} = |a|$. *Entonces, ¿corresponde o no el valor absoluto?*

El origen de esta ambigüedad es, sin dudas, el mensaje que se deja en el alumno al presentarle ejercicios donde deben aplicar las propiedades de la potencia con exponentes racionales y bases negativas.

**Mensaje falso 2.** *Las propiedades de la potencia estudiadas para exponentes enteros pueden extenderse a exponentes racionales, sin aclaración adicional.*

A diferencia del caso de exponentes enteros, donde las propiedades valen independientemente del signo de la base, estas no valen, en general, cuando la base es negativa y el exponente es racional. Esto se prueba observando los siguientes ejemplos:

$$\left((-4)^2\right)^{\frac{1}{4}} \neq (-4)^{\frac{1}{2}},$$
$$-1 \neq (-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}}.$$

Lo primero ilustra que no vale la propiedad llamada "potencia de otra potencia" que enuncia que $(x^a)^b = x^{ab}$, mientras que la segunda invalida la conocida como "producto de potencias de igual base", que asegura que $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$. Recordemos que estamos trabajando en los números reales (las operaciones en los números complejos merecen un análisis aparte). De hecho, aún cuando no aparezcan raíces con índice par y radicando negativo, las propiedades no valen: por ejemplo, por un lado tenemos que

$$((-8)^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2,$$

mientras que, por el otro,

$$(-8)^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2.$$

Nuevamente, vemos que $(x^a)^b$ es distinto de $x^{ab}$.

Observar que el inconveniente aparece cuando se involucra un exponente racional con denominador par. Sin embargo, en la mayoría de la bibliografía no se dice nada sobre esto, y las propiedades se aplican sin pedir que la base sea positiva. Restringirse solamente a bases positivas vuelve a aparecer como opción para trabajar correctamente las propiedades de la potencia con exponente racional. Frente a esta elección, es importante enfatizar y explicitar que las propiedades de la potenciación de exponentes racionales sí son válidas cuando la base es positiva, pues se deducen de su definición y de las propiedades de la radicación.

Lo que sí podemos decir es que las propiedades valen siempre y cuando cada una de las cantidades que intervienen estén definidas. Por ejemplo, si $a$ y $b$ son racionales, entonces:

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

siempre que $x^a$, $x^b$ y $x^{a+b}$ sean número reales, lo que ocurre, por ejemplo, cada vez que el exponente es un racional con denominador impar, independientemente del signo de $x$. Lo mismo para la resta. Para el caso de potencia de otra potencia, debido a la propiedad conmutativa del producto, se debe requerir que las cantidades involucradas existan en ambos órdenes: $(x^a)^b = x^{ab} = (x^b)^a$, siempre que cada una de las cantidades $x^a$, $x^b$ y $x^{ab}$ sea un número real. La validez de todo lo anterior puede demostrarse, por ejemplo, utilizando la fórmula (2.1) dada posteriormente en este trabajo, pero escapa a los contenidos de la escuela secundaria.

El hecho de transmitir que las propiedades de las potencias pueden aplicarse para exponentes racionales sin decir nada sobre la base, además de producir errores como todos los ya enunciados, contradice observaciones en las cuales se pone mucho énfasis al enseñar radicación. Más precisamente, se aclara insistentemente que la propiedad distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación y a la división es válida **siempre que existan cada una de las raíces por separado**, es decir, siempre que cada una sea un número real:

$$\sqrt{(-25)\cdot(-4)} = 10 \neq \sqrt{-25}\cdot\sqrt{-4},$$

lo cual es correcto, pero no siempre se aplica la misma rigurosidad cuando se piensa el mismo ejercicio como potencias con exponentes racionales.

**Mensaje contradictorio 3.** *Si bien $x^{\frac{1}{2}}$ y $\sqrt{x}$ se presentan como equivalentes, las restricciones en el uso de las propiedades no siempre se plantean para la potencia pero sí para la radicación.*

Para lograr una enseñanza consistente resulta necesario, aunque no suficiente, transmitir que las propiedades de la potencia valen *"siempre y cuando cada una de las cantidades que intervienen estén definidas"*, como ya mencionamos previamente. Notar que esta frase tiene la simpleza suficiente como para ser presentada en el nivel secundario, en caso de que se desee (o se necesite) trabajar con bases negativas y exponentes racionales.

**Mensaje correcto 4.** *Las propiedades de la potencia no valen, en general, cuando la base es negativa y el exponente es racional. Sin embargo, pueden aplicarse en tal caso cuando cada una de las cantidades que intervienen estén definidas en los reales.*

Finalizamos esta parte exponiendo más obstáculos generados en el aprendizaje de contenidos básicos de la escuela secundaria, al permitir el uso de las propiedades de la potencia con exponente racional y base negativa. En particular, en la extracción de factores fuera del signo radical.

Este contenido está estrechamente ligado con el uso de las propiedades de la potenciación y la radicación. Más precisamente, las propuestas editoriales hacen su aporte en este estudio de los radicales ejemplificando cómo usar dichas propiedades para lograr ese objetivo.

El esfuerzo está puesto en mostrar la técnica para lograr extraer correctamente factores y se descuida el análisis sobre las variables involucradas en el radicando. Por ejemplo, en (De Simone y Turner, 2016, p.13), se ejemplifica cómo extraer factores en el siguiente caso:

$$\sqrt{12a^3b^2} = \sqrt{2^2 3a^2 ab^2} = 2ab\sqrt{3a}.$$

En lo anterior, no se especifica nada sobre la naturaleza de $a$ y $b$. Es claro que $a$ no puede ser negativo puesto que, en tal caso, el radicando inicial sería negativo. La pregunta natural es: ¿qué ocurre si $b$ es negativo? Por ejemplo, utilicemos la igualdad obtenida con $a = 1$ y $b = -1$:

$$\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$$

lo cual es, claramente, incorrecto. El error se podría haber evitado de dos maneras:

- la primera es restringir el ejercicio propuesto en el texto mencionado solamente a valores no negativos para $a$ y $b$;
- la segunda, que permite que $b$ sea cualquier número real, es trabajar de modo correcto la simplificación de índices con exponentes, utilizando que $\sqrt{b^2} = |b|$. Así, la fórmula correcta para $a \geq 0$ y $b \in \mathbb{R}$, es

$$\boxed{\sqrt{12a^3b^2} = 2a|b|\sqrt{3a}.}$$

Sin embargo, nuevamente un alumno podría llegar a una fórmula incorrecta y diferente a la anterior si comete el error de aplicar las propiedades de la potencia para bases que pueden ser negativas:

$$\sqrt{12a^3b^2} = \sqrt{3 \cdot 2^2a^3b^2} = \left(3 \cdot 2^2a^3b^2\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}}2a^{\frac{3}{2}}b = 2ab(3a)^{\frac{1}{2}} = 2ab\sqrt{3a}.$$

Por tal motivo, hacemos énfasis nuevamente en el error grave que se comete al desarrollar el tema incluyendo bases negativas sin aclaración alguna.

### 2.3. Una alternativa

Una forma para no cometer errores que conduzcan a resultados incorrectos al trabajar con bases negativas y exponentes racionales es aplicar la siguiente fórmula (ver, por ejemplo, Carena, 2019, p.29) que relaciona una potencia con base negativa con otra cuya base es positiva, siempre que el exponente sea irreducible y tenga denominador impar (el cual es el único caso que importa pues, de lo contrario, la potencia no existe). Más precisamente, sean $m$ y $n$ naturales, con $n$ *impar* y $\frac{m}{n}$ irreducible. Para $x > 0$ se tiene que

$$\boxed{(-x)^{\frac{m}{n}} = (-1)^m x^{\frac{m}{n}}.} \tag{2.1}$$

La demostración de la fórmula (2.1) es sencilla debido a las hipótesis: aplicando (d.3) tenemos que $(-x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(-x)^m}$. Además,

$$(-1)^m = \begin{cases} 1, & \text{si } m \text{ es entero par;} \\ -1, & \text{si } m \text{ es entero impar.} \end{cases}$$

Lo anterior, junto a la definición de raíz $n$-ésima, implican que $\sqrt[n]{(-1)^m} = (-1)^m$, para todo entero $m$ y todo $n$ natural impar. Luego, aplicando la propiedad distributiva de la raíz con respecto al producto (recordar que es posible porque el índice es impar), se tiene que

$$(-x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(-x)^m} = \sqrt[n]{(-1)^m x^m} = \sqrt[n]{(-1)^m}\,\sqrt[n]{x^m} = (-1)^m x^{\frac{m}{n}},$$

como queríamos ver.

Es justamente la fórmula (2.1) la que permite probar que las propiedades de la potencia valen para cualquier base siempre que cada una de las cantidades involucradas exista, pero también es una herramienta muy útil para "deshacernos" de las bases negativas. De esta forma cada potencia con exponente racional se transforma en una potencia con base positiva y exponente racional, multiplicada por una potencia de base $-1$ y exponente *entero*. En cada uno de estos dos casos, las propiedades de la potencia pueden ser aplicadas.

## Conclusiones y reflexiones finales

Lo expuesto en este trabajo nos recuerda que todo material bibliográfico puede contener errores. Es importante desde nuestro rol docente estar atentos a ello ya que, como vimos, pequeños detalles de enunciado, definición o notación pueden crear pensamientos contradictorios y erróneos en los alumnos. Esto influye de forma negativa en el aprendizaje, desde lo conceptual hasta en el interés por la disciplina.

En este punto, nos parece importante y pertinente recordar, nuevamente, palabras enunciadas en (Bidart Gauna y cols., 2017), trabajo en el que se aborda un conflicto similar al aquí planteado pero en relación a la racionalización:

> *La situación brevemente descrita a lo largo de este artículo nos lleva a la encrucijada de estar frente a un obstáculo tanto didáctico como epistemológico muy evidente. Siendo que estamos frente a él, ¿no vale la pena corregirlo? Sin dudas, nos arriesgamos a pensar que sí.* [...] *La idea de corregir este concepto, más allá de que debemos hacerlo, se basa en el hecho de que instalarlo de manera errónea nos provoca, no sólo a nosotros, los docentes, sino también a los alumnos, un doble trabajo, innecesario por cierto, en el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que los errores instalados son resistentes y difíciles de superar porque esto requiere una reorganización de los conocimientos que el alumno y los docentes poseemos. Debemos comenzar a discutir entonces qué acontece en los espacios de formación, qué tipo de trabajo se despliega en torno a lo matemático que lleva a que ciertas ideas erróneas perduren a lo largo de los años.* (*p.20*)

La comunicación de conceptos de forma precisa y correcta es una condición necesaria, aunque no suficiente, para un aprendizaje sólido. En caso de observar entre los alumnos la presencia de conceptos erróneos, será precisó revisarlos a fin de aclararlos y corregirlos, para así lograr una construcción consistente. Como menciona la cita previa, esto provoca un doble trabajo, tanto para los docentes como para los alumnos, ya que ciertos errores instalados son resistentes y persistentes. En muchos casos, como en el de la radicación, este camino puede agilizarse al iniciarse con la concepción correcta del símbolo radical desde su aparición.

En el caso particular de la potencia con exponente racional, una opción posible es restringirse a las bases positivas, donde sí valen las propiedades de las potencias. Es preciso evaluar si es conveniente utilizar bases negativas al momento de afianzar el uso de dichas propiedades mediante ejercitación, teniendo en cuenta el gran riesgo de incurrir, por un lado, en errores matemáticos no menores y, por el otro, en la transmisión de contradicciones o inconsistencias. En caso de ser necesario trabajar con bases negativas y exponentes racionales se deberían, entonces, incorporar las condiciones y advertencias que garanticen una construcción matemática consistente. Este trabajo pretende, a su vez, reunir ejemplos que sirvan para exponer las contradicciones y resultados incorrectos que surgen al no imponer dichas condiciones, para que puedan ser utilizados como herramientas en el proceso educativo.

**Agradecimientos.** Los autores agradecen las observaciones y sugerencias realizadas tanto por el editor como por los/as evaluadores/as de este artículo, quienes reflejaron en sus reportes el tiempo y seriedad que dedicaron a la lectura y mejora del mismo. Además, se agradecen los comentarios de Estefanía Dalmasso, Ignacio Garcia y Victoria Gómez durante la elaboración de este trabajo.

## Bibliografía


Bidart Gauna, G., Cabral, G., Cafure, A., Cambriglia, V., y Fuentes, C. (2017). Algunas reflexiones sobre la racionalización. *Rev. Educ. Mat*, *32*(1), 9–21.

Carena, M. (2019). *Manual de matemática preuniversitaria*. Ediciones UNL, Santa Fe.

Covelo, L., y Covelo, M. E. (2019). *Matemática 2*. Maipue, Buenos Aires.

Covelo, L., y Covelo, M. E. (2020). *Matemática 3*. Maipue, Buenos Aires.

De Simone, I., y Turner, M. (2016). *Matemática, funciones y estadísticas*. A-Z editora, Buenos Aires.

Ferraris, L., y Tasso, M. (2008). *Aprendamos matemática 8*. ComunicArte, Córdoba.

Kaczor, P., Schaposchnik, R., Franco, E., Cicala, R., y Díaz, B. (1999). *Matemática 1*. Ed. Santillana, Buenos Aires.

Larson, R., y Falvo, D. (2012). *Precálculo, octava edición*. CENGAGE Learning, México.

Noriega, R. (1979). *El número real*. Ed. Docencia, Buenos Aires.

Pacetti, A., y Bonardi, C. (2016). *Matemática 3*. El semáforo, Córdoba.

Sobel, M., y Lerner, N. (1996). *Álgebra*. Pearson - Prentice Hall.



Fernando Benitez
*Escuela de Educación Secundaria Orientada Particular Incorporada Nro. 8132 "Belén"*
(✉) *benitezfer10@gmail.com*

Marilina Carena
*CONICET - Facultad de Ingeniería Química (UNL)*
(✉) *marilcarena@gmail.com*



Recibido: *18 de abril de 2020.*
Aceptado: *9 de enero de 2021.*
Publicado en línea: *5 de abril de 2021.*

Revista de Educación Matemática
Volumen 36, N° 1 (2021), páginas 27 – 42
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

*Aportes para la enseñanza de la matemática*

# LAS DEMOSTRACIONES DINÁMICAS DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

María Consuelo Barrantes Masot, Víctor Zamora Rodríguez y Manuel Barrantes López

Resumen. Presentamos un estudio sobre demostraciones algebraicas y geométricas del Teorema de Pitágoras, para la Enseñanza Secundaria, usando software libre de geometría dinámica. La categorización de las demostraciones ofrece al docente un muestrario útil como herramienta para la selección de los recursos didácticos necesarios para la enseñanza y aprendizaje de dicho teorema. El conjunto de construcciones dinámicas representadas con GeoGebra, como resultado de una revisión actualizada y una selección posterior podría favorecer la tarea docente del profesor.

Abstract. We present a study on algebraic and geometric proofs of the Pythagorean Theorem, for Secondary Education, using free software of dynamic geometry. The categorization of the demonstrations offers the teacher a useful sample as a tool for the selection of the didactic resources necessary for the teaching and learning of this theorem. The set of dynamic constructions represented with GeoGebra, as a result of an updated revision and a subsequent selection, could favour the teacher's teaching task.

## §1. Introducción

Durante muchos años se le ha atribuido a Pitágoras (585-500 a.C.), filósofo y matemático griego, el enunciado y demostración del teorema geométrico que lleva su nombre, el cual expresa la relación entre los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo. Existen evidencias de que en otras culturas también se conocía el teorema aunque no se conoce la existencia de su demostración. Se asegura (Bergua, 1958) que durante sus viajes a Egipto y al oriente antiguo, el sabio griego conoció el enunciado de la regla y se dedicó a demostrarla.

*Palabras clave*: Teorema de Pitágoras, Software de geometría dinámica, Enseñanza de la geometría, Demostraciones geométricas.

*Keywords*: Theorem of Pythagoras, Dynamic geometry software, Teaching Geometry, Geometrical demonstrations.

El enunciado que dieron los griegos al Teorema de Pitágoras es el siguiente: *el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos*. El enunciado moderno usa términos algebraicos: *en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos*. Euclides, según su interpretación al teorema, dice que *el área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa es la suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos*.

Esta celebre proposición, conocida como el Teorema de Pitágoras, la proposición pitagórica o la proposición 47 del primer libro de los Elementos de Euclides, ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de la Matemática. La relación pitagórica es la ecuación de la circunferencia que aparece constantemente en el estudio de la Geometría Analítica y de la Trigonometría, y el teorema del coseno es un caso particular de dicho teorema. También es la raíz histórica del análisis indeterminado de Diofanto y Fermat, y la fuente de casi todas las relaciones métricas en Geometría.

Es notorio el valor práctico del teorema en todas las Ciencias, concretamente en el campo de la Física se encuentra en la rama de Mecánica Clásica, Astrofísica, Física del Estado Sólido, Electromagnetismo, entre otros.

Nuestro trabajo se orienta principalmente a resaltar el interés didáctico de dicha proposición en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, y en particular de la Geometría. Así pues, el objetivo general de este aporte para la enseñanza ha sido el de presentar de manera selectiva, demostraciones dinámicas, entendidas como aquellas en las que el alumno manipula los elementos bien manualmente o mediante el ordenador. Estas demostraciones pretendemos contribuyan a la enseñanza de dicho teorema como resultado de una revisión actualizada. Además de la manipulación, queremos mostrar a la comunidad docente la necesidad de utilizar metodologías de enseñanza en las que se haga uso de software de geometría dinámica.

Para cumplir este objetivo se ha realizado una aproximación mediante una revisión bibliográfica, así como una exploración de las construcciones dinámicas del teorema que ofrecen varias webs educativas incluidas en la webgrafía como por ejemplo:

`http://elcuadradodelahipotenusa.blogspot.com.es`,

`http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml`

A partir de este material, se ha realizado una selección y clasificación de las demostraciones dinámicas encontradas, a las que hemos añadido construcciones propias que complementan la revisión general y añaden un componente didáctico a fin de propiciar adaptaciones para el aula.

## §2. Acerca de la construcción de las reglas de cálculo para sumar

La historia de la Matemática, como lugar de encuentro entre las ciencias y las humanidades, es un instrumento magistral para enriquecer culturalmente la enseñanza de la Matemática en el aula (González, 2004; Alsina, Fortuny, y Burgués, 1988; Alsina, 1997, 2008). Ahora bien, cuando las actividades se reducen a la inclusión de la biografía de un personaje determinado o de algún hecho aislado relacionado con la materia a tratar, entonces el atractivo y la utilidad de los recursos históricos para la enseñanza quedan muy limitados.

Una aproximación más directa al aprovechamiento matemático de estos recursos en la enseñanza se puede conseguir proponiendo al alumnado, diferentes demostraciones clásicas de la proposición o problemas relacionados con ella, transportando a éstos a la época en las que fueron realizadas, apelando a las tecnologías disponibles, mediante las demostraciones que veremos en nuestro estudio.

Para ello, los profesores en sus clases, además de comentar la biografía de Pitágoras (Bergua, 1958; Schuré, 1995; Caniff, 1997; Strathern, 1999) pueden examinar qué métodos utilizaban para las diferentes demostraciones utilizando los recursos que se describen en este trabajo como son los puzles y GeoGebra.

Por ejemplo, (González, 2001, 2008) presenta el pensamiento de Pitágoras de una forma integrada. Se destacan los logros matemáticos del filósofo griego en el contexto de los restantes aspectos del Pitagorismo. Se presentan los antecedentes del Teorema de Pitágoras en civilizaciones como la Prehelénica, la Babilónica, en la India, Egipto y China, así como las implicaciones y desarrollo de su pensamiento, no sólo en la Historia de las Matemáticas, sino también en la Historia general. En este último sentido, el plural recorrido de las enseñanzas pitagóricas a través del tiempo resulta uno de los aspectos más interesantes de estos trabajos de González.

En (Barrantes, 1998) se realiza el estudio de dicho teorema desde el punto de vista histórico, tratando de estudiar o conocer la vida de Pitágoras y los pitagóricos. También se trabajan diferentes demostraciones de la proposición a lo largo de la historia que son curiosas o pertenecen a algún matemático conocido, así como las repercusiones y aplicaciones de dicha proposición para el avance de la Matemática.

Por ejemplo, (Nelsen, 1993), con el objetivo principal de proporcionar pistas en cada demostración para estimular el pensamiento matemático, presenta una recopilación de demostraciones matemáticas a través de imágenes o diagramas. Sin embargo, una de las recopilaciones más importante la hace (Loomis, 1968), en una reedición del mismo texto de 1940. Encontramos 370 demostraciones diferentes numeradas y clasificadas como: algebraicas, geométricas, vectoriales y otras que utilizan la dinámica. Las dos principales vías de demostración del teorema, es decir: la analítica o algebraica y la visual o geométrica consideramos son las más adecuadas para la utilizarlas en la Enseñanza Secundaria (12–16 años).

Por otra parte, dentro de los matemáticos, físicos e ingenieros ilustres de la historia que abordaron el Teorema de Pitágoras no falta el genio del Renacimiento, Leonardo da Vinci que presenta una demostración basada en equivalencias de polígonos y que también es nombrada en (Loomis, 1968) con el número 46. También es el caso de la demostración realizada por James A. Garfield (clasificada con el número 23) que tiene la particularidad de ser muy ingeniosa y puede servir al profesor para relacionar la propiedad pitagórica con el cuadrado de la suma de un binomio, también estudiado en estos cursos.

Para ilustrar que el teorema era conocido por geómetras anteriores a los pitagóricos, sería estimulante considerar dos demostraciones más, idóneas para la Enseñanza Secundaria: la atribuida al matemático indio Bhaskara y (ver ejemplo 3 de este artículo) y una demostración china que nos muestra (Loomis, 1968) con los números 353 y 36.

En (Barrantes, 1998) se presentan también tres demostraciones basadas en puzles de seis piezas, de cinco piezas y tres piezas. La principal curiosidad del puzle de tres piezas radica en que es el de menor número de piezas que nos permite mostrar la propiedad pitagórica. En dicho estudio se considera el teorema como un problema abierto, accesible a los alumnos y a la vez motivante, mediante la utilización de recursos y materiales apropiados como son los puzles pitagóricos con los que se pueden realizar diferentes demostraciones del teorema, e incluso el alumno puede construir su propia demostración en consonancia con las demostraciones geométricas de (Loomis, 1968).

Llegados a este punto, se puede ampliar el estudio de la proposición pitagórica, pues no es válida únicamente para la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos que nos da el área del cuadrado de la hipotenusa, sino también para cualquier tipo de polígonos construidos sobre los lados del triángulo rectángulo, siempre que los tres polígonos, así construidos, sean semejantes entre sí. Concretamente, (Barrantes, 1998) muestra la propiedad ampliada a triángulos semejantes, rombos, trapecios y otras figuras irregulares. En la misma línea (Vasquez, 2012) presenta demostraciones para distintos casos como: rectángulos semejantes, triángulos equiláteros y semejantes, que se generalizan a polígonos irregulares semejantes, como figuras siempre triangulables, y en el límite, a semicírculos entendidos como polígonos de infinitos lados.

Esto nos indica **que la generalización de la propiedad no es sólo para polígonos, sino para figuras cualesquiera que verifiquen la condición de semejanza**. Así pues, los alumnos pueden comprobar que se verifica para semicírculos, cuartos de círculos, segmentos o sectores circulares.

## §3. Uso del software de GeoGebra para la enseñanza de geometría

Los diferentes currículum en las legislaciones educativa vigentes hacen mención a la competencia digital, al tratar de forma adecuada la información y, en su caso, servir de apoyo a la resolución de problemas y comprobación de la solución. Consideramos la geometría dinámica como un ambiente computacional de construcción geométrica, basado en la geometría euclidiana. Este recurso se fundamenta en la tecnología y las herramientas que nos proporciona, ya que a través de ellas podemos movilizar las figuras geométricas para que adquieran dinamismo (Cabrera y Campistrous, 2007).

Con esta nueva concepción de la enseñanza de la geometría, se evitan las figuras rígidas que se corresponden con una única forma de representación. Sin embargo, mediante esta metodología, los alumnos, pelando a un gran número de representaciones, se pueden hacer una idea más precisa de las figuras y llegar a comprender mejor las propiedades geométricas.

Así pues, consideramos que los programas informáticos de geometría dinámica, son un recurso importante que se ponen a disposición de los estudiantes para realizar las demostraciones dinámicas. (Groman, 1996) afirma que la geometría dinámica hace que el alumno aprenda las demostraciones de forma que construye por sí mismo los significados matemáticos en un contexto donde el profesor es un participante más del proceso.

Las demostraciones dinámicas hacen que el alumno explore las figuras geométricas para producir conjeturas. (Fiallo, 2010) señala que los estudiantes, descubren los conceptos y propiedades con gran independencia del profesor. Esto los motiva a querer demostrar la validez, y el programa les proporciona herramientas necesarias para hacerlo. (Mariotti, 2000), que trabaja con Cabri, indica que se produce una correspondencia importante entre los comandos del menú y las justificaciones que dan los alumnos de manera que se incrementa la necesidad de recurrir a la demostración como un recurso de validación. Para (Marrades y Gutiérrez, 2000), el programa de geometría dinámica permite una exploración empírica de las representaciones de las figuras geométricas, hecho que influye en una evolución positiva hacia la producción de justificaciones cada vez más próximas a demostraciones deductivas. La explicación de las figuras construidas juega implícitamente con la idea de inferencia y prepara al alumnado para comprender cómo opera una demostración (Jones, 2000).

Otro aspecto importante a resaltar son las interacciones que se producen entre estudiantes y profesor. Distintos autores como (Bell, 1976; Lampert, 1990; Gutiérrez y Jaime, 2012) o (Alibert y Thomas, 1991) sugieren desarrollar las actividades de forma que los estudiantes pueden aceptar o rechazar argumentos independientemente de lo que afirme el profesor. Las estrategias didácticas en las que el alumno reflexiona sobre lo que constituye una demostración aceptable en matemática conducen a que el debate sea una forma excelente para discutir y comprender la validez de las premisas, y querer justificarlas mediante la producción de una demostración (Hoyles, 1997; Jones, 2000). La demostración como recurso de comunicación de ideas debe llevarse a cabo a través de actividades que propician la formulación de argumentos para convencer a los demás (De Villiers, 1993; Duval, 1998).

En esta propuesta, los autores utilizan GeoGebra como software de Geometría dinámica. GeoGebra aumenta las posibilidades didácticas pues además de utilizarse como apoyo a las explicaciones, da al alumnado posibilidades para visualizar figuras, modificarlas y construirlas, así como para observar, buscar la solución, describir, conjeturar, comprobar e investigar. En definitiva, actividades para que sean ellos quienes hagan y aprendan a partir de su experiencia más que de los conceptos teóricos que pueda impartirle el profesor (Sada, 2010).

Así pues, el uso de un paquete de geometría dinámica como GeoGebra, permite generar experiencias de aprendizaje en las que los alumnos se pregunten el por qué, y el qué sucedería si... de ciertos hechos geométricos, aportando una oportunidad para desarrollar una base para llegar a una completa apreciación de la naturaleza y el propósito de las demostraciones dinámicas.

Una vez hecho un recorrido bibliográfico del tema central del estudio, en los siguientes apartados, pasaremos a describir el desarrollo para el aporte en la enseñanza.

## §4. Objetivos y metodología

El objetivo principal de nuestro trabajo es presentar selectivamente construcciones dinámicas que contribuyan a la enseñanza del Teorema de Pitágoras en Secundaria haciendo uso de software de geometría dinámica, como resultado de una revisión actualizada.

Es decir, pretendemos realizar una aproximación sobre la enseñanza del Teorema de Pitágoras en la Enseñanza Secundaria y sobre la enseñanza del mismo a través de software de geometría dinámica, concretamente utilizando GeoGebra.

El trabajo se realizó en dos fases, una primera fase de primer contacto con las demostraciones del Teorema de Pitágoras en general, y una segunda enfocada en su selección, clasificación y posterior diseño con el programa GeoGebra. Durante la primera fase se revisaron las demostraciones desechando aquellas que tenían semejanzas con otras, o aquellas que consideramos no adecuadas al nivel educativo al cual fue orientando la investigación, debido a la propia complejidad de éstas.

Se hizo un estudio bibliográfico en textos como (Barrantes y Balletbo, 2012), revistas y otros documentos, tanto de las bibliotecas de la Universidad de Extremadura como en páginas webs educativas que se encuentran en internet.

La segunda fase fue útil para realizar la selección definitiva de las demostraciones y para ir perfilando su clasificación. La formación de las categorías de análisis (nivel educativo y tipo de demostración: geométrica y algebraica) fue un proceso que se sustentó en la revisión bibliográfica realizada, así como en los objetivos de la investigación. Se han tenido en cuenta, también, aquellas demostraciones tanto algebraicas como geométricas de matemáticos o personas relevantes a lo largo de la historia, y cuyas demostraciones han causado un impacto en el campo de la Geometría.

Para cada una de las demostraciones se presenta una ficha en la que se incluye: cuatro imágenes (momentos); el procedimiento generalizado utilizado para su construcción; una explicación justificativa de la demostración y por último, dicha demostración. Para observar todos los pasos de los que constan las construcciones el alumno puede entrar en la página de GeoGebra creada por los autores de este trabajo (`https://www.geogebra.org/m/j6wRRyxB`).

Por último, aclarar que las conclusiones e implicaciones del trabajo se sustentan tanto en la bibliografía revisada como en los resultados obtenidos y, en general, en todos los procesos llevados a cabo.

## §5. Datos y resultados

Partiendo de la revisión bibliográfica e internet seleccionamos un total de 97 construcciones dinámicas sobre las demostraciones geométricas y algebraicas del Teorema de Pitágoras. Teniendo en cuenta los niveles del estudio hemos seleccionado 28 demostraciones del Teorema de Pitágoras realizadas con GeoGebra; 10 son demostraciones algebraicas y 18 geométricas. Estas demostraciones, se han clasificado de acuerdo al nivel educativo para el que están orientadas, de forma que seis corresponden a primer curso, doce demostraciones son para segundo y diez para cuarto curso de la Enseñanza Secundaria (12–16 años) como se muestra en la Tabla 1.

Atendiendo al desarrollo madurativo de los alumnos podemos observar que las demostraciones dirigidas a primer curso, son básicamente puzles, de manera que las piezas en que se dividen los cuadrados construidos sobre los catetos deben rellenar todo el área del cuadrado de la hipotenusa. Esta es una forma motivante para trabajar la relación pitagórica, ya que ayuda al alumno a desarrollar un comportamiento más inteligente que de tipo reflejo automático (Barrantes, 1990).

Las demostraciones geométricas dirigidas a segundo curso, son demostraciones realizadas por matemáticos célebres o personalidades de otros campos, que en algún momento de su trabajo han realizado una demostración de dicho teorema.

| **Geométricas** | | **Algebraicas** |
|---|---|---|
| **1º ESO** | **2º ESO** | **4º ESO** |
| 1. Puzzle 1: | 7. Euclides (L. 33) | 19. Bashkara (L. 36) |
| Hipotenusa/cateto menor = 3 | 8. Liu Hui (L. 28) | 20. Chou Pei Suan (L. 253) |
| 2. Puzzle 2: | 9. Platón (L. 98) | 21. Pappus (L. 42) |
| $30^\circ \leq A \leq 60^\circ$ y $30^\circ \leq B \leq 60^\circ$ | 10. Dobriner (L. 18) | 22. Vieta (L. 63) |
| 3. Puzzle 3: | 11. Perigal (L. 205) | 23. Garfield (L. 231) |
| Cateto mayor/cateto menor=2 | 12. Ozanam (L. 16) | 24. L. da Vinci (L. 46) |
| 4. Puzzle 4: | 13. J. Adams (L. 27) | 25. H. Boad (L. 90) |
| Triángulo rectángulo isósceles | 14. Hoffmann (L. 240) | 26. Loomis 108 |
| 5. Puzzle 5: Lados 3, 4 y 5 | 15. Loomis 2 | 27. Thâbit Ibn Qurra (a) |
| 6. Caso Particular (L. 4) | 16. Loomis 26 | 28. Thâbit Ibn Qurra (b) |
| | 17. Poo-Sung-Park | |
| | 18. A. G. Samosvat | |

TABLA 1. Demostraciones seleccionadas del Teorema de Pitágoras (entre paréntesis aparece el número de la demostración de Loomis).

Para la muestra, en este artículo, hemos seleccionados la demostración clásica y muy conocida de Euclides.

Por último, las demostraciones algebraicas de cuarto curso, son también demostraciones realizadas por celebridades de todos los tiempos entre las que hemos elegido la del matemático Bashkara.

Si el lector está interesado, el resto de las demostraciones clasificadas pueden ser consultadas de manera electrónica en el Libro de GeoGebra “Pruebas del Teorema de Pitágoras”, en la página web: https://www.geogebra.org/m/j6wRRyxB. También, en la Tabla 1 están reflejadas todas las demostraciones construidas en el estudio.

A continuación, se muestran 3 ejemplos de las construcciones dinámicas construidas, cada una según su propia ficha y explicada en base a su contenido.

**5.1. Ejemplo 1: Puzle triángulo rectángulo isósceles.** Esta de la relación pitagórica posee el código (4.I.A), que significa que es la ficha número 4 en orden ascendente de acuerdo al nivel académico al que pertenece, además que es una demostración de tipo geométrica (disección de áreas) y por último también se sabe que el uso de la construcción es más indicado para primer curso debido a la facilidad que presenta. Además de presentarlo como una construcción dinámica (Figura 1), este puzle también se puede realizar en madera u otros materiales y ser presentado a los estudiantes como un material concreto- manipulativo de geometría, tal como se plantea en (Barrantes, 1998) y en el que se elige trocear en piezas de puzles las figuras geométricas construidas sobre los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo, para después recubrir con estas piezas la figura construida sobre la hipotenusa.

**Ficha Puzle 4: Triángulo rectángulo isósceles  Código: 4. I.A**

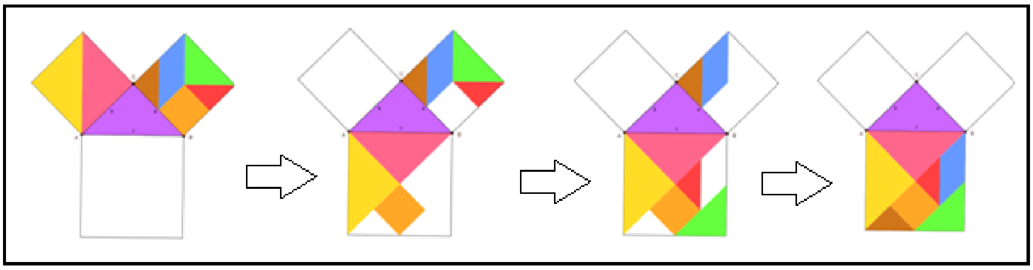


FIGURA 1. Momentos de la demostración para triángulos rectángulos isósceles.

**Procedimiento:** Podemos observar en la Figura 2, que las piezas del cuadrado de la hipotenusa corresponden a un tangram cuadrado. Luego basta con construir las piezas del geoplano cuadrado tomando como lado del cuadrado la hipotenusa. El triángulo rectángulo inicial, que aparece en morado, es el tamaño que se utiliza para generar los dos triángulos mayores del tangram. Así pues:

1. Se construye el triángulo rectángulo $ABC$ (morado).
2. Se construyen un tangram cuadrado de siete piezas de forma que el lado del cuadrado coincida con la hipotenusa.
3. Podemos resolver a partir del cuadrado de la hipotenusa o a partir de los cuadrados de los catetos.
4. En el segundo caso (momentos de la Figura 1), se trasladan los siete polígonos construidos para completar el cuadrado que está sobre el lado c del triángulo $ABC$.

**Explicación:** Esta demostración es válida solo en el caso de que el triángulo rectángulo inicial es isósceles por la construcción del tangram.

**Demostración:** Se puede hacer una demostración formal, hablando matemáticamente, pero en este caso hemos decidido hacer la demostración a partir de las propiedades del tangram.

Si tomamos como unidad de medida el triángulo pequeño rojo, se puede comprobar (por ejemplo superponiendo las piezas) que el cuadrado, el paralelogramo y el triángulo mediano miden 2 unidades y los triángulos

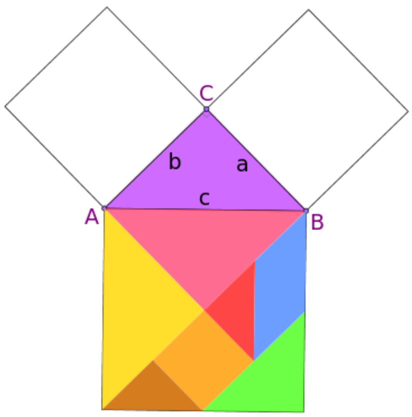



FIGURA 2. Puzle triángulo rectángulo isósceles.

grandes 4 unidades. Luego el área del cuadrado sobre la hipotenusa sería 16 unidades. Tomando las medidas de los cuadrados sobre los catetos obtenemos que miden cada uno 8 unidades, lo que demuestra el teorema.

Este ejemplo, para su uso en el aula, tiene la ventaja que la demostración puede ser manipulada por el alumno mediante la sencilla construcción de un tangram cuadrado. De esta forma, la demostración mediante GeoGebra le va a ser mucho más fácil de comprender y asimilar porque ya la ha vivenciado manipulativamente. Esto es así, asumiendo que los estudiantes conocen lo que es un tangram.

**5.2. Ejemplo 2: Demostración de Euclides.** Esta demostración de la relación pitagórica posee el código (7.I.B), es una demostración de tipo geométrica (comparación de áreas equivalentes) indicada para el segundo curso. Es conocida como la demostración de Euclides y es clasificada en (Loomis, 1968) como la demostración número 33. Euclides fue el primer matemático en demostrar geométricamente el Teorema de Pitágoras. Dicha demostración se encuentra en su libro *Los Elementos* numerada como I.47. El alumno puede investigar también sobre dicho texto y saber que comienza con la definición de "punto" y termina con el inverso del Teorema de Pitágoras cuyo enunciado dice: *Si la suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado del tercer lado, se trata de un triángulo recto*. La demostración basada en equivalencia de triángulos, también, puede ser consultada en (Thomas, 1985).

**Procedimiento:**

1. Se construye el triángulo rectángulo $ABC$ (Figura 3).
2. Se construyen cuadrados sobre todos sus lados.
3. Se construye una recta perpendicular a la hipotenusa por el punto $C$, la intersección de esta recta con el segmento $AB$ se llama $P$ y con $GF$ se llama $E$.
4. Se dividen por la diagonal los cuadrados construidos sobre los catetos en dos triángulos semejantes a los construidos sobre el cuadrado de la hipotenusa (imagen C de la Figura 3).
5. Mediante estos triángulos semejantes, se traslada el cuadrado construido sobre el cateto mayor al rectángulo $BPEG$ (Figura 4).
6. Igualmente se traslada el cuadrado construido sobre el cateto menor al rectángulo $PAFE$.

**Explicación:** El segmento $CPE$ divide el cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo $ABC$ en dos rectángulos que tienen áreas iguales a las de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo inicial. Es decir, el área del rectángulo $BPEG$ es igual al área del cuadrado construido sobre el cateto mayor y el área del rectángulo $PAFE$ es igual al área del cuadrado construido sobre el cateto menor del triángulo $ABC$. Es decir, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.

**Ficha demostración de Euclides (Loomis 33)** **Código: 7.I.B**

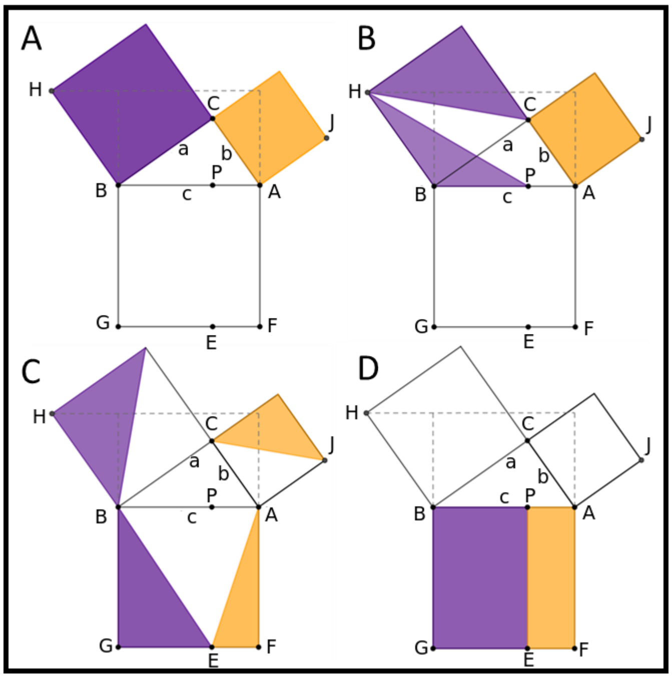



FIGURA 3. Momentos de la demostración de Euclides.

**Demostración:** Sean $a$ y $b$ los catetos del triángulo rectángulo $ABC$ y $c$ su hipotenusa, además, $A_1$ es la suma del área de los cuadrados construidos sobre los catetos y $A_2$ el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, esto es: $A_1 = a^2 + b^2$ y $A_2 = c^2$.

Dividimos por la diagonal el cuadrado del cateto mayor obteniendo dos triángulos uno de los cuales es $\triangle BHC$. El triángulo $\triangle BHC$ tiene el mismo área que el triángulo porque la altura sobre la base $BH$ es la misma.Se puede comprobar que en los dos casos tienen la misma medida que el segmento $BC$ por construcción del triángulo rectángulo.

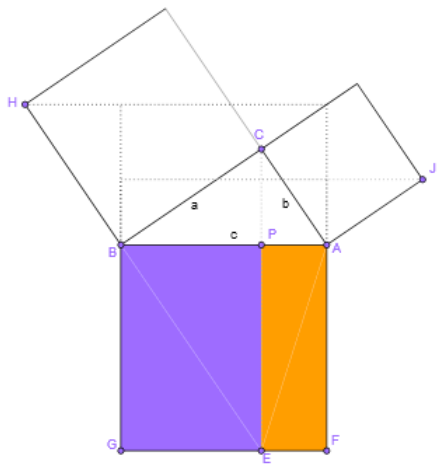


FIGURA 4. Demostración Euclides.

Se tiene que $\angle HBA = \angle CBG$ ya que cada uno de ellos es $\angle CBA + 90°$; esto implica que $\triangle HBA$ y $\triangle CBG$ son congruentes y su área es la misma área. También, el área de $\triangle CBG$ es igual al área de $\triangle BGP$ porque la altura sobre la base $BG$ es la misma. Se puede comprobar que en ambos casos es la medida del segmento $BP$.

Luego el área de $\triangle HBC$ es igual al área de $\triangle BGP$. Haciendo lo mismo con el otro triángulo formado en el cateto mayor llegamos a que el rectángulo $BPEG$ es igual al cuadrado sobre el cateto mayor. Si dividimos ahora el cuadrado del cateto menor de igual forma, se llega a que el rectángulo $PAFE$ es igual al cuadrado sobre el cateto menor. Como $A_1 = A_2$, se tiene que $a^2 + b^2 = c^2$.

El potencial de esta demostración, para su uso en el aula, está precisamente en su posibilidad de estudiar conjuntamente la historia de los matemáticos griegos, sus biografías y sus descubrimientos más notables para hacer comprender a los alumnos como se ha ido desarrollando la Geometría a lo largo del tiempo.

**5.3. Ejemplo 3: Demostración de Bashkara.** Tiene de código (19.II.C) y es del tipo algebraica para cuarto curso. Bhaskara es también conocido como Bhaskara II o como Bhaskaracharya, que significa "Bhaskara el maestro", nació en 1114, es probablemente el matemático indio de la antigüedad mejor conocido. Estaba dedicado a las matemáticas y a la astronomía y aportó una demostración sencilla del Teorema de Pitágoras en su trabajo Bijaganita (cálculo de raíces).

**Ficha Bashkara (Loomis 36) Código:19. II.C**

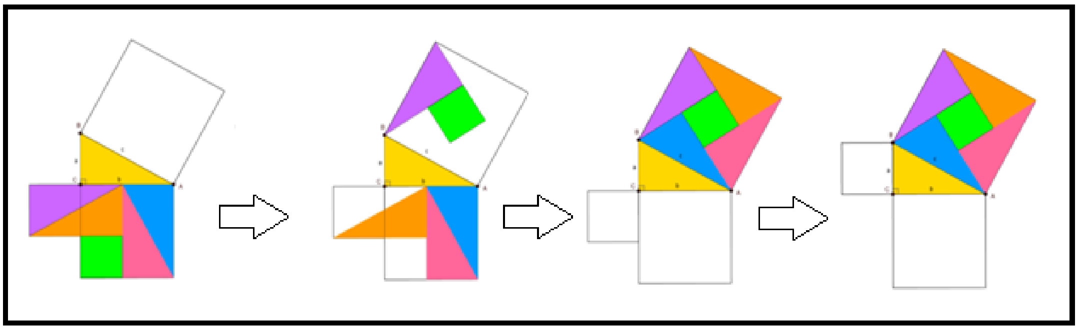


FIGURA 5. Momentos de la demostración de Bashkara (Loomis 36).

**Procedimiento:** El cuadrado sobre la hipotenusa se divide, como indica la Figura 5 (última imagen), en cuatro triángulos congruentes o equivalentes en área al dado y un cuadrado de lado igual a la diferencia de los catetos.

**Explicación:** Las piezas son reordenadas fácilmente para formar una figura que resulta ser la yuxtaposición de los cuadrados sobre los catetos. Esta demostración, también, puede ser utilizada en los primeros cursos de la Enseñanza Secundaria como una demostración geométrica del tipo partición de los cuadrados.

**Demostración:** Sean $a$ y $b$ los catetos del triángulo rectángulo $ABC$ (Figura 6) y $c$ su hipotenusa, además, $A_1$ es el área de los 4 triángulos de lados $a$ y $b$ más la del cuadrado (cuyo lado mide $b - a$) construidos inicialmente; y $A_2$ el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. Al comparar sus áreas se obtiene:

$$A_1 = 4\frac{ab}{2} + (b-a)^2$$
$$A_2 = c^2$$

Como $A_1 = A_2$, se obtiene que

$$4\frac{ab}{2} + (b-a)^2 = c^2$$

es decir $c^2 = a^2 + b^2$.

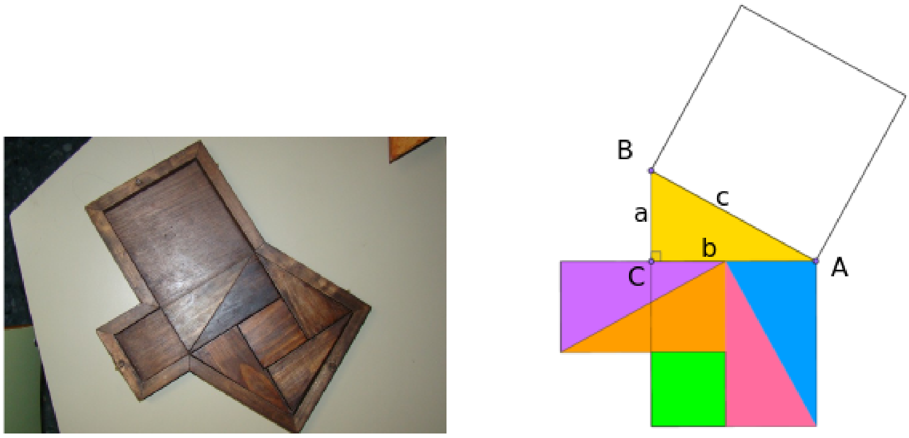



Figura 6. Demostración de Bashkara.

Esta demostración también puede ser manipulable (ver puzle Figura 6), como el primer ejemplo, por lo que la demostración con GeoGebra ya cuenta con la experiencia manipulativa del alumno. Desde el punto de vista histórico, este autor admite muchas curiosidades y anécdotas que completan el estudio teórico del tema. Así es recomendable su famoso libro Lilavati en el que además de su vida y obra, ofrece una gran variedad de problemas en verso, dedicados a su hija, y que comprenden varios temas de matemática básica y media que abarca aritmética, álgebra, combinatoria, geometría y trigonometría (Bhaskara, 2015), versión en español.

## §6. Conclusiones

Hemos presentado un conjunto de construcciones dinámicas sobre las demostraciones geométricas y algebraicas del Teorema de Pitágoras, construidas con GeoGebra de manera selectiva, en base a una revisión actualizada y habiendo pasado por un proceso de clasificación y diseño, en el que se incluyeron elementos didácticos (procedimiento y explicación) para favorecer su uso en el proceso enseñanza y aprendizaje del teorema.

Estas construcciones, consideramos, son un recurso importante para que el profesor trabaje la propiedad pitagórica de una manera activa y dinámica pudiendo además seleccionar, entra la gran variedad de demostraciones que ofrecemos, las que considere más acordes para el aprendizaje de sus alumnos.

Entendemos que el uso de software de geometría dinámica se ha convertido en un recurso que, combinado con el correcto uso del profesor, puede favorecer el aprendizaje en los alumnos debido al dinamismo en las construcciones, lo que permite que haya una interacción entre el conocimiento, el alumno y el profesor a través de las construcciones geométricas (Barrantes y Barrantes, 2017).

El estudio propone al alumnado diferentes demostraciones clásicas de la proposición pitagórica a la vez que se revaloriza la importancia de la demostración pitagórica, haciéndoles observar la cantidad de personas famosas, matemáticos o no, que se han preocupado por ella.

Las actividades dinámicas permiten explorar visualizaciones de la demostración pitagórica favoreciendo la construcción de conocimientos, a través de la manipulación directa del software de geometría dinámica; acciones que serían más trabajosas utilizando lápiz y papel. Los alumnos experimentan dificultades y logros de actividades que, aunque parecen actuales, han sido planteados y resueltos hace muchos siglos.

En futuros trabajos abordaremos las aplicaciones del Teorema de Pitágoras con el diseño de construcciones dinámicas que tengan que ver con problemas, juegos y curiosidades del mismo. Entre algunos de estos problemas, se pueden mencionar los cuadrados mágicos pitagóricos, las ternas pitagóricas, el problema del inverso del teorema, problemas de la historia de las Matemáticas, la generalización al espacio, el análogo del teorema en la geometría sólida y la relación entre el teorema y la sucesión de Fibonacci (Barrantes, 1998).

Evidenciamos de esta manera la importancia y posibilidades que tiene el Teorema de Pitágoras dando lugar a un sin número de demostraciones y aplicaciones que lo convierten en un auténtico problema abierto de la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

La realización de estas actividades deben producir un cambio en las concepciones de los profesores y alumnos hacia una nueva mirada de la Geometría, distinta de la tradicional de libro y pizarra, en la que el alumno es el eje del aprendizaje de una materia básica en su vida diaria y laboral (Barrantes y Blanco, 2006).

## Bibliografía

Alibert, D., y Thomas, M. (1991). *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Alsina, C. (1997). *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO.* Madrid: Síntesis.

Alsina, C. (2008). Geometría y realidad. *Sigma: Revista de matemáticas.*(33), 165-179.

Alsina, C., Fortuny, J., y Burgués, C. (1988). *Materiales para construir la geometría.* Madrid, España: Síntesis.

Barrantes, M. (1990). Pitágoras en el país de los puzles. *Campo Abierto. Revista de Educación*, *7*(1), 221-230.

Barrantes, M. (1998). *La geometría y la formación del profesorado en primaria y secundaria.* Badajoz, España: Manuales UEX.

Barrantes, M., y Balletbo, I. (2012). *La enseñanza y aprendizaje de la gometría en revistas científicas españolas de mayor impacto de la última década.* San Juan Bautista, Paraguay: Litocolor.

Barrantes, M., y Barrantes, M. (2017). *Geometría en la Educación Primaria*. Badajoz, España: Indugraphic Digital.

Barrantes, M., y Blanco, L. (2006). A study of prospective Primary teacher's conceptions of teaching a learning geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(9), 411-436.

Bell, A. (1976). A study of pupil's proof-explanation in mathematical situation. *Educational Studies in Mathematics*, *1*(7), 23-40.

Bergua, J. (1958). *Pitágoras*. Madrid, España: Ibéricas.

Bhaskara. (2015). *Lilivati. Matemáticas en verso del siglo XII*. Madrid, España: Real Sociedad Matemática Española S.M.

Cabrera, C., y Campistrous, L. (2007). Geometría dinámica en la escuela, ¿Mito o realidad? *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *13*(45), 61-79.

Caniff, P. (1997). *Pitágoras*. Madrid, España: M.E. Editores.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemática. *Epsilon*, *26*, 15-29.

Duval, R. (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica* (Tesis Doctoral no publicada). Universitat de València.

González, P. (2001). *Pitágoras. El filósofo del número.* Madrid: Nivola.

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma*, *45*, 17-28.

González, P. (2008). El teorema de Pitágoras: Una historia geométrica de 4000 años . *Sigma*, *32*, 103-130.

Groman, M. (1996). *Integrating Geometer's Sketchpad into geometry couser for secondary education mathematics major.*

Gutiérrez, A., y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED.*, *32*, 55-70.

Hoyles, C. (1997). The curricular shaping of students' approaches. *For the learning of Mathematics*, *1*(17), 7-16.

Jones, K. (2000). Providing oa foundation for deductive reasoning: students' interpretation when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 55-85.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29-63.

Loomis, E. (1968). *The Pythagorean Proposition*. Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics.

Mariotti, M. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environmet. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 87-125.

Marrades, R., y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dunamic computer environmmet. *Educational Studies in Matematics*(44), 87-125.

Nelsen, R. (1993). *Proof without word: Exercises in visual thinking.* Washington, D.C., EEUU: The Mathematical Association of America.

Sada, M. (2010). Algunas de las posibilidades didácticas de GeoGebra en las aulas. *II Jornadas de Integración de las TIC en la Enseñanza*.

Schuré, E. (1995). *Los grandes iniciados. Vol. II.* Buenos Aires, Argentina: REI.

Strathern, P. (1999). *Pitágoras y su teorema.* Madrid, España: Siglo XXI de España Editores.

Thomas, I. (1985). *Matemáticos griegos.Enciclopedia Sigma I*. Barcelona, España: Grijalbo.

Vasquez, M. (2012). Una ampliación al teorema de Pitágoras. *Revista de Educación Matemática*, *27*(3), 3-22.

María Consuelo Barrantes Masot
*Universidad de Valencia. España.*
(✉) *conbarmas@gmail.com*

Victor Zamora Rodríguez
*Universidad de Extremadura. España.*
(✉) *victor@unex.es*

Manuel Barrantes López
*Universidad de Extremadura. España.*
(✉) *barrante@unex.es*

Recibido: *23 de marzo de 2020.*
Aceptado: *11 de noviembre de 2020.*
Publicado en línea: *5 de abril de 2021.*

# Las cigarras y los números primos

*Nota editorial por Juan Carlos Pedraza*

DURANTE el mes de enero de este año se pudo leer en un periódico de Illinois

> *Si prefiere masticar vidrio en lugar de escuchar la fuerte llamada de apareamiento de miles de millones de cigarras de 17 años, mayo podría ser un buen momento para salir de Illinois* (Dalbey, s.f.)

El título, replicado en varios medios locales, llamó mi atención y me recordó una anécdota que vincula a estas cigarras, al trovador estadounidense Bob Dylan y a los números primos.

Era la primavera de 1970. Bob Dylan se encontraba en la Universidad de Princeton para recibir un doctorado honorífico. Desde el bosque que circunda a la universidad, Dylan pudo escuchar el ensordecedor "canto" de cientos de miles de cigarras similares a las que podemos escuchar los días calurosos en muchos parajes de nuestro país que también llamamos chicharras o coyuyos, según la región.

Esto inspiró a Dylan para componer *Day of the Locust* (Día de la Langosta). Tal vez Dylan debió llamar a su tema *Day of the Cicada* (Día de la Cigarra) ya que no eran langostas; pero podemos concederle a un Premio Nobel de Literatura, esa licencia poética o el derecho a la ignorancia de tal hecho.

Lo cierto es que Bob Dylan no se encuentra muy a gusto en el ambiente académico donde debe recibir su diploma, por lo menos eso dice la letra de la canción (Dylan, s.f.):

*I glanced into the chamber where the judges were talking.*
*Darkness was everywhere, it smelled like a tomb.*
*I was ready to leave, I was already walkin'.*
*But the next time I looked there was light in the room.*
*And the locusts sang, yeah, it give me a chill.*
*Oh, the locusts sang such a sweet melody,*
*Oh, the locusts sang their high whining trill.*
*Yeah, the locusts sang and they were singing for me.*

*Eché un vistazo a la sala donde hablaban los jueces.*
*Tinieblas por todas partes, aquello olía a tumba.*
*Yo estaba listo para irme, ya emprendía la marcha.*
*Pero cuando volví a mirar había luz en la habitación.*
*Y cantaron las langostas, sí, y sentí un escalofrío.*
*Las langostas cantaron una dulce melodía,*
*las langostas cantaron quejumbrosos gorgoritos.*
*Sí, las langostas cantaron y cantaban para mí.*

Estas cigarras, como otras variedades que se encuentran en el este de Estados Unidos tienen algo muy particular: durante 17 años permanecen ocultas bajo tierra en forma de ninfas, recogiendo nutrientes de las raíces de los árboles. Durante el mes de mayo en el que Dylan estaba en Princeton, como lo habían hecho 17 años antes, salieron al exterior para una bacanal que duraría unas pocas semanas. En ellas, comen, fundamentalmente se aparean, las hembras ponen sus huevos y mueren. Son, en promedio, medio millón de cigarras por hectárea y solo los machos "cantan" para atraer a las hembras (en realidad poseen unos sacos con aire que funcionan como cajas de resonancia). El concierto es tan ensordecedor que muchos vecinos de la zona suelen irse de allí durante esos días tal como invita el título del periódico de Illinois. Se las puede oír a casi dos kilómetros de distancia.

Pero ¿por qué 17 años? ¿Por qué tanta exactitud? ¿Por qué su ciclo de vida es un número primo? ¿Es casualidad? Es probable que no porque estas cigarras que se guían por el número primo 17 no son la única variedad que se guía por un número primo. Otras variedades de cigarras, por ejemplo, tienen un ciclo de vida de 13 años, como ocurre en Alabama. Y otras pocas, el número 7. Todos números primos.

Esta mágica relación de las cigarras con los números primos la explica el matemático y divulgador Marcus du Sautoy de la Universidad de Oxford en su libro *La música de los números primos* (du Sautoy, 2003). Su teoría, se basa en

> *la posible existencia de un depredador que también solía aparecer periódicamente en el bosque, coordinando su llegada para que coincidiera con la de las cigarras y dándose el festín con los insectos recién aparecidos. Aquí es donde irrumpe la selección natural, porque las cigarras que regulan sus vidas con un ciclo que es un número primo se encontrarán con los depredadores con mucha menos frecuencia que las cigarras con un ciclo que no es un número primo.*

Supongamos, por ejemplo, que los depredadores aparecen cada cinco años. Las cigarras que aparecen cada 17 años sólo coincidirán con los depredadores cada 85 años, ya que 5 y 17 no tienen factores comunes. Será mejor para ese depredador buscar otro alimento...

## Historia incompleta de un fracaso

El estudio de los números primos ha sido motor de la teoría de números que se pensaba del reino exclusivo de la matemática pura, alejada de toda contaminación práctica. Sin embargo, esta teoría ha servido para generar en las últimas décadas, sofisticadas técnicas de encriptación, fundamentales en el desarrollo de internet, en la defensa y en la seguridad bancaria entre otras muchas aplicaciones.

Desde la creación de los sistemas de numeración y las operaciones, entre ellas la de multiplicar dos números, se pudo observar que unos se obtienen a partir de otros usando esta operación. Por ejemplo: el $30$ se obtiene de multiplicar el $5$ y el $6$. Pero como el $6$ es $2$ por $3$, resulta también que el $30$ es el producto de tres *factores*: $2$ por $3$ por $5$. El nombre *factor* viene de *hacedor* o *fabricador*. Es decir, el $2$, el $3$ y $5$ hacen o forman el $30$. ¿Qué nos detiene en este proceso de factorizar el $30$? Tanto el $2$ como el $3$ como el $5$ no pueden ser formados por ningún otro número. Mientras que podríamos sacar el $30$ de la lista de números, sabiendo que lo podemos fabricar con solo multiplicar adecuadamente sus factores, el $2$, el $3$ y el $5$ son insustituibles. En este proceso de fabricación de los números a partir de otros usando la multiplicación, los números primos (los insustituibles) vienen a jugar el papel de los átomos de la aritmética y allí radica tal vez su importancia.

Tal vez el primer intento fue hacer una lista de estos números. La lista no solo es "larga", sino que también es caótica:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots$$

Salvo el $2$ todos son impares pero no todos los impares están en la lista. No había una forma de saber cuál sería el próximo número primo y si siempre habría un próximo.

La matemática busca regularidades, patrones que puedan predecir de qué va la cosa. Encontrar la regularidad de un objeto de estudio, encontrar su ritmo, es como amansar un caballo salvaje. Los primos resultaron ser a lo largo del tiempo unos números salvajes que no se dejaron domar.

Los *Elementos* de Euclides tiene la primera demostración de que siempre hay un primo después de otro. Es decir, que hay infinitos primos. Se puede leer en los Elementos: supongamos que $2$, $3$ y $5$ son los únicos números primos que hay y que todos los demás números son, en contrapartida, compuestos y se pueden obtener a partir de ellos. Se fabrica un nuevo número: producto de estos tres y únicos primos más 1:

$$2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$$

Ni $2$, ni $3$, ni $5$ dividen en forma exacta a $31$ ya que siempre da resto $1$ en la división porque así fue construido. O bien $31$ es un nuevo número primo, o bien está formado por otros números primos que no están en la lista de los tres únicos primos.

Sabemos que $31$ es primo, con lo cual estamos en el primer caso. Pero cualquiera sea el caso, esto contradice que sólo haya tres números primos. Este razonamiento se puede hacer con cualquier cantidad finita de números primos y siempre se llega a la misma contradicción: hay un número que o bien es un primo que no está en la lista o bien hacen falta nuevos números primos para construirlo. Por lo tanto hay infinitos números primos. Decía Godfrey A. Hardy (1877–1947) al referirse a este razonamiento de reducción al absurdo: *el ajedrecista sacrifica una pieza para ganar una partida, el matemático ofrece la partida misma para llegar a la verdad*.

Pasaron 2100 años. Nadie podía encontrar la cadencia, el ritmo de estos números al tiempo que nuevos problemas, desarrollos y conjeturas nacían al compás de su errático andar.

En 1792 un chico de 15 años recibió como regalo de cumpleaños una tabla de logaritmos que tenía al final, una larga lista con los primeros números primos. El joven era Carl Fiedrich Gauss (1777–1855). Él, como tantos otros, no podía establecer un patrón que permitiera predecir cuál sería el siguiente número primo. Pero Gauss (un adolescente por entonces), tuvo una nueva mirada. En lugar de preocuparse por encontrar una fórmula, se preguntó cómo estaban distribuidos. Observó que entre los primeros diez números, había abundancia de números primos: el $2$, el $3$, el $5$, el $7$. Eran $4$, casi la mitad. Vio que esta abundancia de primos que se comprueba entre los primeros números se iba disipando conforme se exploran números más grandes. Lo sorprendente para Gauss era que lo hacían siguiendo cierta cadencia rítmica: mientras que entre los primeros diez casi la mitad eran primos, entre los cien primeros números, una cuarta parte de ellos eran primos, entre los primeros mil solo la sexta parte aproximadamente resultaban ser primos, entre los primeros diez mil apenas uno de cada ocho de ellos era primo y entre los primeros cien mil lo eran $1$ de cada diez aproximadamente. Cada vez que agregaba un cero a la cantidad de números, la proporción de primos disminuían con cierta regularidad, con un número cercano a $2$ como factor de regularidad. Una breve tabla muestra esta cadencia descubierta por Gauss. Llamó $\pi(x)$ a la cantidad de primos que no superan a $x$

| $x$ | $\pi(x)$ | $x/\pi(x)$ | diferencia |
|---:|---:|---:|---:|
| 10 | 4 | $2,500$ | |
| 100 | 25 | $4,000$ | $1,500$ |
| 1.000 | 168 | $5,952$ | $1,952$ |
| 10.000 | 1.229 | $8,137$ | $2,185$ |
| 100.000 | 9.592 | $10,425$ | $2,288$ |
| 1.000.000 | 78.498 | $12,740$ | $2,315$ |
| 10.000.000 | 664.579 | $15,047$ | $2,307$ |

(donde en la cuarta columna se da la diferencia entre dos proporciones consecutivas de la tercer columna).

Aunque seguramente Gauss no tenía una lista de primos tan grande, pudo ver que este factor que al principio se parece a $2$, en realidad se parece mucho más a $2,305$. En la misma tabla que tenía Gauss en sus manos pudo ver que este número es bastante aproximado al $\ln(10)$. En otras palabras, él observa que cuando $x = 10^n$, entonces $\frac{x}{\pi(x)}$ se parece a $\ln(10) \times n$, es decir

$$\frac{x}{\pi(x)} \approx \ln(10) \times \log_{10}(x) = \ln(x).$$

Conjeturó entonces que la cantidad de primos $\pi(x)$, que no superan a $x$, se podía aproximar en forma asintótica mediante la fórmula $\dfrac{x}{\ln(x)}$. Por ejemplo,

$$\pi(1.000.000.000) = 50.847.534 \quad \text{y} \quad \frac{1.000.000.000}{\ln(1.000.000.000)} = 48.254.942.$$

El cociente de ambas cantidades es un número cercano a $1$ $(1,054)$. El error es de apenas el 5 %.

Gauss no pudo demostrar su conjetura y hubo que esperar hasta 1896, para que Jacques Hadamard (1865–1963) y Charles Jean de la Vallée Poussin (1866–1962) demostraran en forma independiente que la conjetura era cierta. Los primos tenían una música propia, aunque todavía no se sabía (aún no se sabe) la partitura completa. La demostración de estos dos matemáticos se basaba en un descubrimiento prodigioso realizado por un discípulo de Gauss de la Universidad de Gotinga. En 1859 descubrió una relación inesperada entre la distribución de los números primos y la misteriosa *función zeta*.

Georg Fredrich Bernhard Riemann (1826–1866) era un estudiante tímido, hipocondríaco y poco afecto a socializar con sus compañeros. Entró a estudiar en Gotinga en 1846. Riemann se dio cuenta de que el gráfico de la función zeta, le proporcionaba un escenario tridimensional que podía servir para estudiar los números primos. Obtuvo así un fascinante paisaje con extensas mesetas, depresiones abismales y cordilleras infinitas. Pero no era esto lo interesante del paisaje sino que en los valles había ciertos lugares a nivel del mar (los ceros de la función), que parecían estar distribuidos de una manera muy particular. Los *ceros* de la función, parecía que estaban todos alineados y que tenían una conexión estrecha con la distribución de los números primos. Podríamos decir que los ceros daban las notas de la música que se estaba buscando. Los ceros de la función zeta pueden interpretarse como frecuencias armónicas en la distribución de los números primos. Riemann había encontrado una regularidad, un patrón. Pero Riemann no pudo demostrar lo que intuía ni disfrutar la fama que le trajo. La guerra entre Hanover y Prusia hizo temer a Riemann que una bala lo encontraría en las calles de Gotinga y se fue a Italia. A las tres semanas, con solo 39 años, murió de tuberculosis.

Esta conjetura de que todos los ceros de la función zeta están alineados se llama desde entonces la *hipótesis de Riemann* y se convirtió en el desvelo de varias generaciones de matemáticos, En 1914 Hardy demostró que había infinitos ceros de la función zeta sobre la recta crítica. Un avance asombroso pero que no cerraba el problema. El desafío es uno de los *siete problemas del milenio* y por su resolución el Instituto Clay de Matemática estableció un premio de un millón de dólares. Poco dinero para tamaña proeza...

...

Lo cierto es que en mayo de 2021, 51 años después (17 por 3 ☺) de que Dylan recibiera su doctorado en Princeton, la *dulce melodía* de las cigarras volverá a repetirse. ¿Saben acaso las cigarras la música de los números primos? La próxima cita será en la primavera de 2038. Tal vez para ese entonces, sepamos algo más sobre este misterio y sobre la música de los números primos. Tal vez para entonces, la hipótesis de Riemann haya sido por fin demostrada o todavía mejor, nuevos desafíos se hayan planteado en pos de su solución. En tiempos de pandemia, donde el esfuerzo colectivo y solidario pareciera ser el camino para que nuestra especie encamine virtuosamente su futuro, esta historia, como tantas otras de la ciencia, brinda evidencia de ello. La humanidad atraviesa centurias en el intento de resolver problemas con una tenacidad admirable y asombrosa. Los individuos, en cambio, con frecuencia somos alcanzados por el desánimo y la frustración ante los obstáculos que imponen las circunstancias. María Elena Walsh, cuando cantaba al sol como la cigarra, nos decía con sabiduría que *a la hora del naufragio y de la oscuridad alguien nos rescatará, para ir cantando*. No nos podemos dar el lujo de no formar parte de ese esfuerzo.

## La misteriosa función zeta

La función zeta se define como una suma infinita:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{*}$$

donde los valores de $s$ se toman sobre los números complejos. Cuando la parte real de $s$ es mayor que 1, se obtiene una suma infinita convergente que define, en ese semiplano, una función *analítica*, esto es, que se puede expresar como una suma infinita de potencias y resulta ser suave ella y todas sus derivadas. Por ejemplo es conocido el valor de la función zeta para $s = 2$:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

La función zeta se puede *extender* en forma analítica (se llama *prolongación analítica*) para el semiplano complejo con parte real menor que 1. Además, $\zeta$ satisface una ecuación funcional que relaciona los valores para $s$ con parte real menor que

1 con los de $s$ de parte real mayor que 1:

$$(**) \qquad \zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s).$$

Esta ecuación (que involucra a la función gamma, extensión del factorial en el sentido que $\Gamma(n) = (n-1)!$ cuando $n$ es un número natural) permite ver que la función zeta se anula sobre los números enteros pares negativos (la función seno se anula cuando $s$ es par en esta ecuación). A estos ceros se los llama *triviales* ya que se los obtiene fácilmente de la ecuación funcional. Pero además tiene otros ceros llamados *no triviales*. La hipótesis de Riemann dice que estos ceros son todos de la forma $s = \frac{1}{2} + bi$. Es decir están en una misma recta, llamada *recta crítica*. La Figura 1 (Wikipedia, s.f.) muestra el "coloreo del gráfico" de la función $\zeta$: primero se le asigna un color a cada número complejo, y luego a cada complejo $s$ se lo colorea con el color asignado a $\zeta(s)$. En la imagen se distinguen ciertos "nudos": sobre el eje real corresponden a los ceros triviales en los $s$ negativos pares y a la singularidad en $s = 1$; y sobre la recta crítica correspondiente a parte real igual a $\frac{1}{2}$ los nudos corresponden a los ceros no triviales en $s = \frac{1}{2} \pm 14{,}14\,i,\ \frac{1}{2} \pm 21{,}02\,i,\ \frac{1}{2} \pm 25{,}01\,i$.

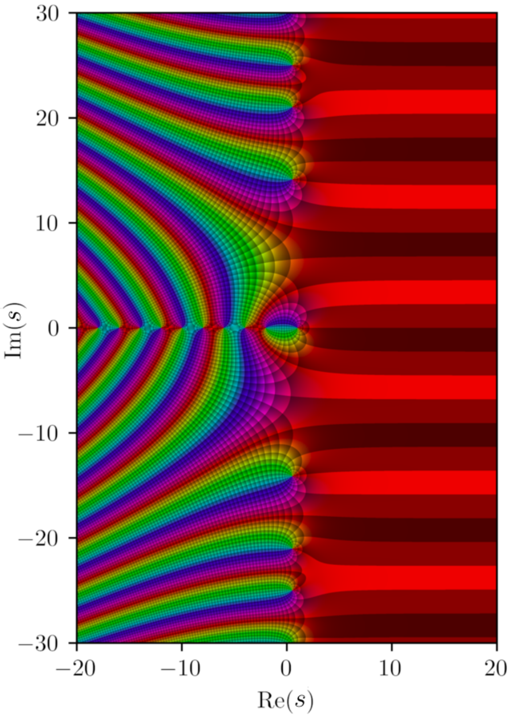



FIGURA 1. Coloreo del gráfico de la función $\zeta$. Extraída de Wikipedia, Riemann zeta function.

La primera conexión con los números primos la estableció Euler al mostrar que:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}} \cdot \frac{1}{1-5^{-s}} \cdot \frac{1}{1-7^{-s}} \cdot \frac{1}{1-11^{-s}} \cdots = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

válida para los complejos con parte entera mayor que 1. Es fascinante seguir el razonamiento de Euler para $s = 1$ donde la función zeta es la serie armónica que sabemos que es divergente. Esto produce una nueva demostración de que hay infinitos primos o bien, sabiendo eso, que la serie armónica es divergente (Muñoz, 2011).

Para terminar, queremos destacar que a partir de la ecuación funcional (**), y sabiendo que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, se obtiene

$$\zeta(-1) = 2^{-1}\pi^{-2} \operatorname{sen}\left(\tfrac{-\pi}{2}\right) \Gamma(2)\, \zeta(2) = -\tfrac{1}{12}.$$

Esta es una curiosidad interesante pues "establece la falsa igualdad"

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-1}}=\zeta(-1)=-\tfrac{1}{12}.$$

Esta "loca identidad" estaba incluida, entre otras identidades asombrosas, en la carta que Srinivasa Ramanujan (1887–1920) le enviara a Hardy pidiéndole se publicaran sus teoremas si encontraba algún valor en ellos. Tal vez el primer impulso de Hardy fue arrojar la carta de Ramanujan al fuego en ese frío enero de 1913 en el Trinity College de Cambridge. Pero cuando vio junto con J.E. Littlewood (1885–1977) la conexión que tenía con la función zeta, se convencieron de que tal vez estaban ante un genio de escala nunca imaginada por ellos (Leavitt, 2011). Al año siguiente de la llegada de esa carta, Ramanujan estaba trabajando junto a Hardy. Para él, según sus propias palabras, el descubrimiento de Ramanujan fue el aporte más importante que hizo a la matemática.

La falla en la argumentación está en que no es correcto que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-1}}=\zeta(-1)$ pues la fórmula (*) solamente es válida para los números complejos $s$ con parte real mayor que 1. Hay sitios y videos en internet que discuten más en detalle esta falsa igualdad, por ejemplo (Mathologer, 2020).

## Bibliografía

Dalbey, B. (s.f.). *Billions, yes billions, of 17-year cicadas will emerge in 2021.* Descargado 2021-01-22, de https://patch.com/us/across-america/billions-yes-billions-17-year-cicadas-will-emerge-2021

du Sautoy, M. (2003). *La música de los números primos.* Editorial Acantilado.

Dylan, B. (s.f.). *Day of the locusts.* Descargado 2021-03-08, de https://www.bobdylan.com/songs/day-locusts/

Leavitt, D. (2011). *El contable hindú.* Editorial Anagrama.

Mathologer. (2020). *700 years of secrets of the sum of sums (paradoxical harmonic series).* Descargado 2021-03-08, de https://www.youtube.com/watch?v=vQE6-PLcGwU

Muñoz, J. M. S. (2011). Riemann y los números primos. Descargado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3744317

Wikipedia. (s.f.). *Riemann zeta function.* Descargado 2021-03-08, de https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function

Revista de Educación Matemática
Volumen 36, N° 1 (2021), páginas 51 – 71
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

*Aportes para la enseñanza de la matemática*

# UNA CONSTRUCCIÓN DE LAS REGLAS DE CÁLCULO DE LOS NÚMEROS ENTEROS A PARTIR DE LA MANIPULACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Patricia Detzel, María Elena Ruiz y Lucas Colipe

Resumen. En este artículo presentamos parte de un trabajo desarrollado en un proyecto de investigación, en el que abordamos, en forma conjunta investigadores y profesores de matemática de escuelas secundarias, la problemática de la enseñanza de los números enteros desde una perspectiva colaborativa. Dicha problemática era una preocupación de los profesores de matemática, debido a las dificultades que observaban en sus alumnos, en particular en relación a la manipulación de los signos en los cálculos. Para ello acordamos en conjunto, estudiar y adaptar una propuesta de enseñanza en la que se aborda la introducción de los números negativos conjuntamente con el álgebra. Transitamos un proceso de esclarecimiento que nos permitió cargar de sentido un recorrido, en el que surgen las reglas de cálculo para la suma, resta y multiplicación de sumandos y sustraendos apoyadas en los conocimientos de los números naturales, donde las expresiones algebraicas tuvieron un rol fundamental. Desarrollamos en este artículo, parte de los análisis y reflexiones que llevamos a cabo profesores e investigadores en ese proceso para la adaptación de dicha propuesta.

*Palabras clave*: números enteros, actividad matemática, ruptura entre aritmética y álgebra, enseñanza escuela secundaria.

*Keywords*: integers, mathematical activity, gap between algebra and arithmetic, secondary school teaching.

Abstract. This article presents part of a research developed in collaboration, by math education researchers and teachers of mathematics at the secondary level. The work addresses the problems encountered by teachers when teaching integers, and the difficulties students had grasping the concept, particularly in reference to the sign manipulation needed to carry on computations. Because of this premise, we all decided to study and make adaptations to an instructional proposal focused on the presentation of the negative integers together with that of algebra. We navigated a process of clarification that gave room for us to follow a meaningful path where the rules of addition, subtraction, and multiplication can be developed based on the knowledge of natural numbers. The role of algebra was fundamental in following this path. This article provides the analysis and reflections of the researchers and math teachers while adapting the original instructional approach.

## §1. Introducción

Este trabajo se enmarca en un proyecto de investigación que desarrollamos en la Universidad Nacional del Comahue (UNCo), en el que abordamos, en forma conjunta investigadores y profesores de matemática de escuelas secundarias, problemáticas de la enseñanza de la matemática desde una perspectiva colaborativa (Desgagné, Bednarz, Couture, y Lebuis, 2001; Bednarz, 2015, 2013, 1997). En particular, en este artículo nos centramos en una experiencia compartida con profesores que consistió en el estudio y adecuación a sus aulas, de una producción de investigación en didáctica de la matemática.

A partir de la demanda de los profesores, preocupados por dificultades que tienen los estudiantes en el transcurso de la escuela secundaria, en relación a la manipulación de los signos en los cálculos, acordamos abordar conjuntamente la problemática de la enseñanza de los números negativos, en los primeros años de la educación secundaria. Para ello nos basamos en el trabajo desarrollado por Eva Cid en su tesis doctoral (Cid, 2015), quien propone introducir los números negativos conjuntamente con el álgebra. Así, aceptamos involucrarnos en un proceso de readaptación de dicha propuesta para la enseñanza de los números enteros, cuya experiencia tuvo lugar desde 2013 hasta 2019 en escuelas de Río Negro y Neuquén.

En este sentido, (Perrin-Glorian, 2011; Perrin-Glorian y Baltar Bellemain, 2019), destacan la importancia de estudiar la adaptación de ingenierías didácticas[1] a las condiciones ordinarias de enseñanza y a las necesidades de los docentes. Los espacios colectivos de trabajo entre docentes e investigadores, constituyen un escenario favorable para discutir con los docentes las cuestiones fundamentales que se ponen en juego en tales secuencias de enseñanza más que para difundir los productos acabados (Sadovsky, Itzcovich, Quaranta, Becerril, y García, 2016). En este caso, discutir la contextualización y descontextualización de los modelos

[1]La ingeniería didáctica nace en el campo de la didáctica de la matemática francesa y se centra en modelar situaciones de enseñanza, para así permitir el estudio de su funcionamiento en las aulas.

matemáticos y los diferentes funcionamientos de algunos objetos en aritmética y en álgebra, entre otros, fueron asuntos importantes de esta propuesta para llevar adelante una posible gestión de las actividades en las clases.

En la propuesta (Cid y Ruiz-Munzón, 2011) que analizamos y estudiamos se construyen reglas de cálculo para sumar, restar y multiplicar los números enteros. Esta construcción toma como base conocimientos del cálculo aritmético que los estudiantes disponen y se propone, mediante rupturas, hacerlos evolucionar hacia nuevos conocimientos propios del álgebra. Según estas autoras (Cid y Ruiz-Munzón, 2011), "*la razón de ser*"[2] de los números negativos se encuentra en el cálculo algebraico, es decir, en la medida en que se avanza en la gestión de dichos cálculos, a partir de la manipulación de determinadas expresiones algebraicas, se gana en comprensión en la operatoria de los números enteros. Para ello, se parte de problemas del *mundo sensible*, que dan lugar a crear modelos que son expresiones algebraicas o programas de cálculos aritméticos (PCA)[3], para luego centrar el estudio en el funcionamiento de los mismos. Además de crear el modelo, es importante *aprender a trabajar con el mismo*. El problema en contexto permite al estudiante "hacer" y controlar que lo que hace funciona, admite una resolución a partir de las acciones de *añadir, quitar, ganar, perder, subir, bajar*. Sin embargo, la producción de una expresión algebraica y el análisis del desarrollo de los cálculos involucrados en la misma, permitirá reemplazar estas acciones por las de *sumar y restar*. Es necesario entonces, un proceso de descontextualización, en el que esos modelos se tomen como objeto de estudio, dando posibilidad a que emerjan las reglas de cálculos entre sumandos y sustraendos que se constituirán en el soporte para la operatoria de los números enteros.

Por otro lado, se asocian conceptos matemáticos con problemas cuya resolución permite, a partir de saberes disponibles, elaborar relaciones que darán lugar a conocimientos nuevos. En nuestro caso, esos conocimientos nuevos que circularán en la clase, forman parte de la propuesta de enseñanza y son inéditos para el ámbito escolar. Los mismos y su vínculo con las actividades fueron ideados en el ámbito de una investigación (producto de una tesis doctoral) en la que no habíamos participado (docentes e investigadores de este grupo colaborativo). Entonces, comprender el andamiaje construido con los problemas en contexto, la manipulación de expresiones y el trabajo con sumandos y sustraendos, que permite conectar los saberes conocidos (los números naturales) y los que se desea

[2]La teoría antropológica de los didáctico (TAD) propone un paradigma didáctico de cuestionamiento del mundo que propugna una presentación funcional del saber. Esta manera de entender la enseñanza de las matemáticas convierte los procesos de modelización matemática, tanto externa como interna, en el eje que vertebra dicha enseñanza, proporcionando las razones de ser que dan sentido a los objetos matemáticos y poniendo de manifiesto las relaciones que existen entre ellos, en vez de presentarlos como objetos aislados (Cid, Muñoz-Escolano, y Ruiz-Munzón, 2020).

[3](Chevallard, 2005) le da el nombre de programa de cálculo aritmético (PCA) a una cadena de operaciones aritméticas que se realizan a partir de los datos de un problema.

enseñar (los números enteros), fue una cuestión a esclarecer. Tal reconstrucción de ideas conlleva a (re)diseñar un recorrido que asegure una coherencia entre los aprendizajes y lo que se quiere enseñar (Sadovsky y cols., 2016). Así, el proceso de adaptación compartido (investigadores y profesores) nos permitió avanzar en comprensión de ese andamiaje, involucrándonos en un recorrido de estudio para una construcción escolar de las operaciones suma, resta y producto de números enteros, apoyada en los conocimientos de los números naturales. Dicho recorrido está atravesado por rupturas entre concepciones y modos de calcular que viven en la aritmética y que evolucionan a nuevas concepciones y funcionamientos en el álgebra. En este texto compartimos parte de ese recorrido que permite evidenciar el potencial de expresiones algebraicas que surgen de los problemas, como objeto de estudio para construir reglas de cálculos de sumandos y sustraendos emergentes, las que a su vez permiten cargar de sentido a la operatoria de números enteros.

## §2. Acerca de la construcción de las reglas de cálculo para sumar

Como lo mencionamos anteriormente, la razón de ser de los números negativos se encuentra en el álgebra. Es importante reconocer que, en la suma, una ruptura entre lo aritmético y lo algebraico, aparece con el cambio de significado de los signos $+$ y $-$. En aritmética tienen un significado binario, determinan operaciones, mientras que en álgebra pasan a tener otros significados como los de operador unario y predicativo (Detzel y Martinez, 2017).

Esto nos condujo a que, en los espacios de estudio compartidos con los docentes, tuviéramos que resignificar ideas que permitan construir lazos entre "sumas y restas de números naturales" con "una suma de enteros que no se escribe". Nos llevó así, a reconocer que en el procedimiento $9 - 5 - 2 + 5 = 9 - 2$ se está resolviendo una suma que no aparece: $9 + (-5) + (-2) + (+5)$. Y por otro lado advertir que los significados de los signos $+$ y $-$ cambian según las decisiones que se toman en los cálculos. Por ejemplo, en la expresión $12 - 4 - 5 + 4$ si se hace $12 - 4 - 5 + 4 = 8 - 5 + 4 = 3 + 4 = 7$ los signos $+$ y $-$ estarían funcionando como operadores binarios y se estarían resolviendo sumas y restas entre números naturales. Sin embargo, si se resuelve $12 - 4 - 5 + 4 = 12 - 5 - 4 + 4 = 12 - 5 = 7$ los signos $+$ y $-$ están funcionando como predicativo (signo que acompaña al número). En este caso se está resolviendo la suma de los términos $+12$, $-4$, $-5$ y $+4$, donde el signo binario, que indica la suma entre ellos, no aparece. Es una suma no escrita la que habilita ese modo de hacer, la resta entre naturales no es conmutativa. Reconocer que en este cálculo están involucradas implícitamente las propiedades asociativa, conmutativa, existencia del neutro y de los opuestos, propias de una suma de los números enteros, es lo que posibilita entrar en un proceso de construcción de dicha operación.

El tratamiento de expresiones tales como $4 - 10 + 3 + 10$ donde la sucesión de cálculos de sumas y restas como números naturales no es posible, dispone a iniciar un trabajo para facilitar resoluciones del tipo $4+3-10+10 = 4+3 = 7$, donde la suma de números enteros a nivel implícito es el saber involucrado. La evolución de un cálculo aritmético a un cálculo de tipo algebraico implica abordar los diferentes sentidos de los signos $+$ y $-$, también lograr que las sumas y restas de naturales avancen transformándose en una suma implícita de enteros. Un modo de realizar ese proceso, según lo proponen (Cid, 2015; Cid y Bolea, 2010), es a partir de construir reglas de cálculos de sumandos y sustraendos usando expresiones algebraicas. Con estas reglas para simplificar expresiones, está presente la idea de suma como composición de traslaciones y los significados, operativo binario generalizado, de los signos $+$ y $-$ (Barrio y Petich, 2018). Es decir, operar con sumandos y sustraendos, permite que funcione la suma a nivel implícito de números enteros donde valen las propiedades conmutativa y asociativa (cuestión que se pierde si se piensa sólo en sumas y restas de números naturales). También se va estableciendo una representación horizontal por sobre la vertical.

**2.1. Actividades para construir las reglas de cálculo para sumar.** En un principio las actividades propuestas corresponden a problemas aritméticos contextualizados donde la falta de alguno de los datos necesarios para resolverlos, fuerza a la utilización de letras y de este modo la solución a un problema cambia de status, ya no es un número, sino que es una expresión algebraica. Será necesario, entonces, habilitar un contexto algebraico en el que el modelo $x - a + b$ posibilite cálculos que permitan gestionar el paso de expresiones del tipo $x - 9 + 7$ a su forma reducida $x - 2$.

Los problemas contextualizados del tipo:

- *Ana lleva sus figuritas para jugar en la escuela. En el primer recreo pierde 9 y en el segundo recreo gana 7. ¿Con cuántas figuritas vuelve a su casa?*
- *El colectivo KoKo sale de Roca y viaja a Neuquén con cierta cantidad de pasajeros. En Allen bajan 15 y suben 12, luego en Cipolletti bajan 38 y suben 42. ¿Con cuántos pasajeros llega a Neuquén?*

dan lugar a encontrar respuestas en el contexto. En el primer caso, una respuesta posible es: “llega con dos figuritas menos”; en el segundo caso una respuesta podría ser: “llega a Neuquén con un pasajero más”.

Los problemas descontextualizados del tipo:

- *Un chico, al hacer los deberes, tiene que simplificar unas expresiones algebraicas. Lo hace de la siguiente manera:*

  $(a)$ $d - 7 - 4 + 10 = d - 3 + 10 = d - 13.$
  $(b)$ $27 - q - 8 - 8 = 27 - q - 0 = 27 - q.$
  $(c)$ $18 - 5 + x + 5 - 8 = 18 + x - 8 = 18 - 8 + x = 10 + x.$

  *¿Crees que el profesor le pondrá un bien?*

dan lugar a trabajar la justificación de las igualdades. Aquí se ponen en juego las reglas de cálculo para determinar si las simplificaciones están bien realizadas. Un error del tipo $d - 3 + 10 = d - 13$ es una producción que pone de manifiesto "un modo de hacer" que tuvo su éxito en el dominio de la aritmética y que es necesario hacerlo consciente y rechazarlo para dar lugar al nuevo cálculo. En aritmética es relativamente frecuente que los alumnos realicen, de izquierda a derecha, las secuencias de sumas y restas indicadas. En este caso, la primera sucesión de cuentas que pueden reconocer es $3 + 10$, ya que a $d$ no se puede restar $3$. Haber percibido esta situación fue un hecho muy importante en el grupo de discusión en el espacio colaborativo, pues permitió dar una interpretación a un hecho muy recurrente en las clases.

Entre los dos tipos de problemas descriptos anteriormente, contextualizados y descontextualizados, se tiene que dar un proceso donde hay que lograr que las expresiones algebraicas se tomen como objeto de estudio. Para ello hay que crear lazos entre la equivalencia de las expresiones $x - 9 + 7$ y $x - 2$, apoyada por el contexto, por ejemplo "*figuritas perdidas y ganadas*" con el cálculo $x - 9 + 7 = x - 2$, apoyado en las reglas "*restar* $9$ *y sumar* $7$ *es lo mismo que restar* $2$". El último problema pone en discusión el modo en que se realizan esas cuentas, permitiendo poner en evidencia la diferencia entre los cálculos aritmético y algebraico. El paso de la actividad aritmética a la algebraica supone transitar de un cálculo entre números sin determinación (números absolutos) a un cálculo en el que hay que tener en cuenta la condición de sumandos y sustraendos de los números.

A partir de problemas de este tipo se favorece la circulación en la clase de los siguientes conocimientos: "la respuesta a un problema puede ser una expresión o una relación (no solamente un número)"; "si no se conoce un dato, se usa una letra"; "se representan situaciones armando expresiones con números y letras"; "hay distintas expresiones para representar lo mismo" y "simplificar expresiones sin contexto, usando reglas de cálculo para la suma como las siguientes":

1) *"restar* $9$ *y sumar* $2$ *es lo mismo que restar* $7$*"*,
2) *"restar* $5$ *y luego sumar* $7$ *es lo mismo que sumar* $7$ *y luego restar* $5$*"*,
3) *si en una expresión se suma y resta un mismo número, se tachan los dos y se vuelve a escribir toda la expresión sin esos términos*.

## §3. Acerca de la resta como diferencia y construcción de las reglas de cálculo para restar

Para abordar la resta será importante seguir ahondando en las rupturas necesarias entre lo aritmético y lo algebraico. Así, la concepción de número asociada a las magnitudes y la de resta vinculada a la acción de quitar, son ideas que obstaculizan la construcción del número negativo (Cid, 2000), dificultando su manipulación de forma aislada y su aceptación como resultado de una diferencia. Esto encuentra su explicación en que el cero absoluto que se identifica con la ausencia de cantidad de magnitud, la nada, el vacío, dificulta pensar en una resta en la que el sustraendo es mayor que el minuendo, condicionado por la existencia de medidas que son "menos que nada". Será necesario entonces ampliar la concepción de resta como sustracción a una concepción de resta como diferencia y abandonar la concepción de número ligada al resultado de una medida de una cantidad de magnitud para concebir a un número como resultado de una diferencia.

Frente al tratamiento que se propone para introducir la diferencia nos encontramos, en los espacios de estudio compartidos entre docentes e investigadores, con un entramado de los conceptos comparación, diferencia, resta y presentación de número negativo, cuyo desentrañado fue un trabajo conjunto. Por un lado, tuvimos que comprender que asociar la diferencia con cuantificar una comparación amplía la concepción de la misma y que, asociar la diferencia con una resta permite ampliar las reglas de cálculos. Además, comprender que ambos asuntos se enlazan para presentar en la clase el número negativo como resultado de una diferencia, el cual indica que el minuendo es menor que el sustraendo. Por otro lado, advertimos que hay conocimientos matemáticos necesarios para avanzar en comprensión, que posiblemente no aparezcan como ideas de los estudiantes a partir de las actividades que ellos realicen, y entonces fue necesario discutir la ocasión de ser explicitados. La idea de la diferencia a partir de comparar es una cuestión que surge de la reflexión de las actividades a resolver, sin embargo, asociar la diferencia con la operación restar, podría ser un objeto a declarar por parte del docente. Algo similar ocurre con la escritura de los paréntesis en una expresión para indicar una operación de una operación, como por ejemplo la resta de una suma o la resta de una resta.

En un contexto algebraico, comparar expresiones como $a + 6$ y $b - 2$ y expresar en cuánto una es mayor/menor que la otra, conduce a encontrar la diferencia y gestionar expresiones del tipo: $a + 6 - (b - 2)$, a la vez que permite concebir la resta sin la restricción de que el minuendo sea mayor que el sustraendo. Así, la resta entre expresiones surge para hallar la diferencia entre ellas y lo que da lugar a ese proceso es la comparación de expresiones. El significado de la resta como diferencia[4], está relacionado con la acción de comparar y de cuantificar esa comparación, la cual será positiva o negativa según que el minuendo sea mayor o menor que el sustraendo. Además, reinterpretar la resta como diferencia dando la posibilidad a una diferencia negativa, contribuye a dar sentido al número negativo, ligado al álgebra, como un número con la propiedad de ser menor que cero. Así, el número $-3$ surgirá, por ejemplo, de la diferencia entre las expresiones $x-4$ y $x-1$. El resultado de $x-4-(x-1)$ es $-3$, un número $3$ con un signo "$-$", que indica dos cosas: "3", revela de cuánto es la diferencia entre esas expresiones y el signo "$-$" del número informa que la segunda expresión es mayor que la primera (Martinez y Issa Nuñez, 2019).

En principio se deberán ampliar las reglas de cálculo y pasar de efectuar operaciones entre sumandos y sustraendos a efectuar operaciones de operaciones, lo que da lugar a nuevos significados de los signos $+$ y $-$. Es interesante compartir aquí, que antes de la aceptación de los números negativos como números aislados, los matemáticos realizaban cálculos sólo con números positivos y utilizaban distintas propiedades para la resta como la siguiente:

$$\text{si } b < c \text{ entonces } a-(b-c) = c-(b-a) = (a-b)+c.$$

Esta propiedad permite realizar restas entre números naturales, aunque los cálculos intermedios sean negativos, como se ve en el siguiente ejemplo: $5-(9-12) = 12-(9-5)$. Así, pensar en la resta de la resta o la resta de una suma ha sido una cuestión constitutiva de este conocimiento a lo largo de la historia y la técnica de supresión de paréntesis no siempre estuvo presente. Entonces, para trabajar la resta entre sumandos y sustraendos será necesario evolucionar en los significados de los signos $+$ y $-$, del conocido operador binario (resta entre números) a uno nuevo, el operador unario (el menos delante del paréntesis indica un cambio en los sumandos y sustraendos que intervienen dentro del paréntesis). Esto significa, en la práctica, desarrollar un cálculo con términos, que a su vez son operaciones indicadas, para reducirlas a sumas de sumandos y sustraendos. Por ejemplo, ante situaciones como $4-(b-7)$, para encontrar la expresión simplificada, la idea que funciona es la de restar una resta y aplicar la regla de cálculo "restar $(b-7)$ es lo mismo que restar $b$ y sumar $7$". Este abordaje, en el que emerge la regla que permite suprimir paréntesis, se constituirá en el soporte en el que se apoyará la justificación de la resta de números enteros.

**3.1. Actividades para la concepción de diferencia.** Veamos, en particular, un tipo de problema contextualizado que permite asociar la diferencia con la comparación y su cuantificación.

[4]La resta como diferencia es el resultado de una comparación entre los cardinales de dos conjuntos en un orden establecido que informa en cuánto es mayor o menor uno que otro. Por ejemplo, si $A$ tiene $x$ y $B$ tiene $y$, la diferencia entre lo que tiene $A$ y lo que tiene $B$ es $x-y$, es decir que $A$ tiene $x-y$ elementos más/menos que $B$.

*Al empezar la semana, María, Adrián y Luisa tienen el mismo dinero en su alcancía. Entre lunes y jueves gastan o reciben las siguientes cantidades:*

| *María* | *Adrián* | *Luisa* |
|---|---|---|
| *Recibe \$10* | *Gasta \$5* | *Recibe \$10* |
| *Gasta \$5* | *Gasta \$10* | *Recibe \$5* |
| *Gasta \$15* | *Gasta \$15* | *Recibe \$15* |
| | *Recibe \$30* | *Gasta \$35* |

($a$) *¿Quién tiene más dinero? ¿Quién tiene menos? ¿En cuánto se diferencia de los demás el dinero que tiene cada uno?*

Las primeras preguntas que se refieren a quién tiene más o menos, remiten a una comparación. La situación contextualizada permite dar respuestas a partir de las acciones de "*recibir*" y "*gastar*". Así, el que tiene más es Adrián pues recibe y gasta lo mismo. María es la que tiene menos dinero ya que tiene 10 menos que al principio mientras que Luisa tiene 5 menos que al principio. La última pregunta conlleva a una cuantificación de la diferencia, la cual surge en forma inmediata entre Adrián y las demás, pues él queda con el mismo dinero que al inicio. La cuestión es entre María y Luisa, que remite a buscar la diferencia entre la cantidad de dinero de una y de otra, esto es, $x - 10$ y $x - 5$ y sin necesidad de realizar el cálculo escrito se puede concluir que esa diferencia es de $5$.

Este problema admite una resolución desde el contexto mismo de la situación, lo importante aquí es reflexionar, sobre el accionar más allá de la respuesta. Es decir, destacar que para hallar una diferencia, por ejemplo, entre lo que tienen dos personas, está presente la comparación pues se evalúa cuánto más o cuánto menos tiene una en relación a la otra.

**3.2. Actividades para construir las reglas de cálculo para restar.** En un principio las tareas que se proponen para construir estas reglas de cálculo, se apoyan en conocimientos aritméticos. Para realizar operaciones entre dos números se recurre a un cálculo auxiliar donde los números redondos facilitan las cuentas, así sumar $100$ y restar $1$, es más fácil que sumar $99$. Un ejemplo de este tipo de actividades es el siguiente:

*Cuando se calcula mentalmente se procura buscar la forma más sencilla posible de efectuar las operaciones. ¿Cómo lo haces con las siguientes operaciones?*

$a)$ $678 + 99$ $b)$ $157 - 99$ $c)$ $601 - 103$

Luego, el registro de ese cálculo auxiliar pondrá en escena el paréntesis. El cálculo de las operaciones indicadas dará lugar a nuevas reglas de cálculo que permitirán abordar operaciones de operaciones. Para tal fin se proponen tareas del tipo:

*Coloca los signos $+$ y $-$ que faltan en las siguientes igualdades:*

$765 - (100 - 1) = 765 - 99 = 765\_\_\_100\_\_\_1.$

$80 - (30 - 1) = 80 - 29 = 80\_\_\_30\_\_\_1.$

$141 - (100 + 2) = 141 - 102 = 141\_\_\_100\_\_\_2.$

La actividad matemática involucrada en esta última tarea, se relaciona con la primera en el sentido que en $765 - (100 - 1)$ se visualiza la escritura con paréntesis; luego se vincula con $765 - 99$, que proviene de aplicar la prioridad que establece el paréntesis y a su vez es una expresión en la que convendría usar la estrategia de los números redondos, y finalmente completar $765\_\_\_100\_\_\_1$ da lugar a registrar las estrategias puestas en juego en los cálculos mentales realizados en la actividad anterior. Si se efectúa la cuenta resolviendo primero el paréntesis, se pierde el número redondo. La búsqueda de economía de los cálculos lleva entonces a explorar una regularidad entre $765 - (100 - 1)$ y $765 - 100 + 1$. Esas relaciones que vinculan una operación de operación con la suma de sumandos y sustraendos van a permitir institucionalizar las reglas de cálculo que darán lugar a suprimir el paréntesis.

Por otro lado, la comparación de expresiones permitirá, como veremos más adelante, determinar si una diferencia entre expresiones es positiva o negativa, dando lugar a que emerja un sentido del número negativo. Será necesario entonces poder determinar si una expresión algebraica es menor o mayor que otra en actividades descontextualizadas, donde las acciones que comandan las decisiones sean las operaciones de "*sumar*" o "*restar*" en lugar de las del tipo "*recibir*" o "*gastar*", como vimos en "Actividades para la concepción de la diferencia". El siguiente ejemplo tiene ese objetivo:

*Compara las siguientes expresiones, diciendo cuál de ellas es menor o mayor que la otra:*

*a*) $x + 1\_\_\_x - 10.$

*b*) $p - 7\_\_\_p - 3.$

*c*) $2a + 5\_\_\_3a + 12.$

*d*) $25 - z\_\_\_25 - 2z.$

*e*) $3n + 5\_\_\_2n + 30.$

Para analizar qué expresión es menor/mayor que otra, una técnica posible es comparar los términos de cada expresión. Por ejemplo, en el ítem c)[5], $2a + 5$ es menor que $3a + 12$, pues "$2a$ es menor que $3a$" y a ese primer término se le suma algo menor que lo que se suma a la segunda expresión. Aquí surgen técnicas de comparación de expresiones, analizando término a término. Con el ítem e) se pone

[5]Tengamos presente que las letras de estas expresiones tienen como dominio los números naturales.

en evidencia que a veces no se puede decidir cuál expresión es mayor, porque depende del valor de la variable.

El siguiente problema tiene por objetivo asociar la diferencia con el cálculo de una resta y el uso de paréntesis.

*Carlos tiene* 6 *canicas más que Javier y Enrique* 10 *canicas menos que Marcos. Si sabemos que Carlos tiene más canicas que Enrique, ¿cuántas más tiene?*

| | |
|---|---|
| *Nº de canicas de Javier* | |
| *Nº de canicas de Carlos* | |
| *Nº de canicas de Marcos* | |
| *Nº de canicas de Enrique* | |
| *Diferencia entre el nº de canicas de Javier y Marcos* | |
| *Diferencia entre el nº de canicas de Carlos y Enrique* | |

La discusión y análisis, al interior del grupo colaborativo, de las posibles resoluciones del problema, nos llevó a reflexionar sobre las intervenciones del docente para abordar códigos de escrituras (registro de la diferencia como una resta y la ocasión de escribir el paréntesis) como un conocimiento nuevo.

Para establecer la diferencia entre el número de canicas de Javier y Marcos, siendo $x$: cantidad de canicas que tiene Javier e $y$: cantidad de canicas de Marcos, las expresiones para las que hay que hallar su diferencia tienen variables diferentes, $x$ e $y$, por lo tanto, la técnica de comparación "término a término", descrita anteriormente, se vuelve insuficiente. Advertimos que se estaba poniendo en juego el registro de la diferencia entre expresiones y su cálculo. Esto trajo a discusión cómo y cuándo explicitar en la clase que ese registro se corresponde con una resta y destacar la orientación de la misma, es decir aclarar que: "para indicar la diferencia entre $x$ e $y$ se escribe $x - y$, para registrar la diferencia entre $y$ y $x$ se escribe $y - x$".

Por otro lado, al anticipar la resolución de los alumnos para completar la fila que solicita la diferencia entre Carlos: $x + 6$ y Enrique: $y - 10$, pusimos el foco en el uso de paréntesis, pues en esta resolución es necesario proponer expresiones en las que se involucra la escritura de este símbolo. Observemos que en la aritmética escolar el paréntesis en las expresiones viene dado, la experiencia que tienen los alumnos es entonces, interpretar la información que brinda ese símbolo en relación a la prioridad de las operaciones. En cambio, en este problema, se pone en juego un código de escritura que responde a una "norma matemática". Se abre así un espacio para explicitar el uso del paréntesis para expresar operaciones de operaciones, en particular la resta de una suma o la resta de una resta.

**3.3. Actividad para que emerja el número negativo.** El siguiente problema, presentado en forma descontextualizada, da lugar a una nueva concepción de número junto al significado predicativo de los signos $+$ y $-$.

*Calcula la diferencia entre las siguientes expresiones algebraicas:*

| | | |
|---|---|---|
| $a)$ | $7p + 3q$ | $2p - 2q$ |
| $b)$ | $4t - 6 - 15$ | $4t - 3 - 2$ |
| $c)$ | $21 - 2m + 3 - 23 + 5m$ | $10m - 30 + 5m + 25$ |

Este tipo de problema exige poner en funcionamiento los conocimientos anteriores. Por ejemplo, en b) se podría calcular la diferencia entre $4t - 6 - 15$ y $4t - 3 - 2$ comparando $4t-21$ con $4t-5$. Usando la técnica de comparación término a término se puede decir que las expresiones difieren en $16$ y cuál de ellas es mayor. Si bien la respuesta es $-16$, con los conocimientos disponibles por parte de los alumnos, esta respuesta es poco factible que surja en la clase. Frente a esta situación se abre un espacio fértil para que el docente, a partir de sus intervenciones, pueda ir enlazando la respuesta probable del alumno, $16$, con la presentación del número negativo, $-16$, interpretado como el resultado de una diferencia en la que el minuendo es menor que el sustraendo. ¿Cuáles son esos conocimientos que se deberían enlazar?

Para calcular la diferencia entre $4t-6-15$ y $4t-3-2$, también se podría realizar: $4t - 6 - 15 - (4t - 3 - 2)$, que implica recuperar la asociación de la diferencia con la resta y la aplicación del paréntesis. Esto da lugar a las técnicas de cálculos, en un principio las de la suma, por ejemplo "restar $6$ y restar $15$ es lo mismo que restar $21$", obteniendo $4t - 21 - (4t - 5)$; luego las reglas de cálculo de la resta de una resta: "restar $4t-5$ es lo mismo que restar $4t$ y sumar $5$" quedando: $4t-21-4t+5$ y por la técnica de simplificación se "tachan" $4t$ y $-4t$, finalmente se obtiene $-21 + 5$. Con este último cálculo surge lo nuevo.

Entonces, hay que asociar con el resultado de este cálculo:

$$4t - 6 - 15 - (4t - 3 - 2) = \cdots = -21 + 5 = -16,$$

que las expresiones $4t - 6 - 15$ y $4t - 3 - 2$ difieren en $16$ y que la primera es menor que la segunda. Así, el $-16$ surge de interpretar por un lado el "$16$" como la cantidad en la que difieren las expresiones y por otro lado ese signo "$-$" delante del número como la cualidad del número que indica que esa diferencia es negativa, pues el minuendo es menor que el sustraendo. Se comienza a aceptar a estos nuevos números con signo como resultado de una diferencia. Así, se establece que el resultado del cálculo de la diferencia entre expresiones indica en cuánto una de ellas sobrepasa a la otra y el signo muestra cuál es la mayor. Además, se puede establecer el cálculo de una diferencia como una técnica para comparar los términos de una diferencia, según su resultado sea positivo o negativo, da información de cuál término es mayor o menor.

Los problemas que presentamos en esta sección, favorecen la circulación en la clase de los siguientes conocimientos de los alumnos: "para hallar una diferencia se puede comparar y decir cuánto más/menos tiene una expresión en relación a otra"; "hay expresiones que son mayores/menores que otras y hay otras que no se pueden comparar"; "para hacer las cuentas más fáciles se usan números redondos"; "para hallar la diferencia entre expresiones que no se pueden comparar, se hace una resta y se tiene que usar paréntesis para la expresión que está restando"; "la diferencia puede ser positiva o negativa y eso depende de que la primera expresión sea mayor o menor que la segunda en la resta"; "si la diferencia es negativa se escribe el número con el signo $-$"; "Si una cuenta tiene paréntesis se hace primero la cuenta del paréntesis o se resuelve con las siguientes reglas de cálculos para restar una suma o restar una resta":

- *Restar $a + b$ es lo mismo que restar $a$ y restar $b$.*
- *Restar $a - b$ es lo mismo que restar $a$ y sumar $b$.*
- *Sumar $a + b$ es lo mismo que sumar $a$ y sumar $b$.*
- *Sumar $a - b$ es lo mismo que sumar $a$ y restar $b$.*

## §4. Acerca de la construcción de las reglas de cálculo para multiplicar

Para abordar el producto de sumandos y sustraendos se sigue profundizando en el funcionamiento algebraico de algunos objetos matemáticos, contrapuesto al aritmético. Para ello la representación simbólica y el trabajo con expresiones aditivo-multiplicativas son asuntos que están presentes. El dominio y manipulación de programas de cálculos del tipo $a(x \pm b) - c(x \pm d)$, siendo $a$, $b$, $c$ y $d$ números naturales, pone de manifiesto la importancia de la propiedad distributiva en el cálculo algebraico y permite establecer las reglas del producto de sumandos y sustraendos. Además, la escritura convencional del producto en el álgebra requiere dejar de lado el uso de la cruz: $3 \times a$ o $4 \times 5$ para indicar una multiplicación, del mismo modo que analizar cuándo se hace necesario usar paréntesis en una expresión. Asumir que en $ab$ y que en $a(x+y)$ hay una operación que no se escribe y que hay nuevas reglas que involucra la distributiva son parte de los conocimientos necesarios para avanzar en el cálculo algebraico.

Las reflexiones y discusiones en los espacios de estudio compartidos entre docentes e investigadores, nos llevaron a comprender el rol que cumple el trabajo con este tipo de expresiones en una nueva ruptura con el cálculo aritmético. Las secuencias de sumas y restas, frecuentes en aritmética, son realizadas por los alumnos de izquierda a derecha, este tipo de procedimiento es el que hay que hacer evolucionar. En este sentido (Cid, 2015) plantea:

> "*La jerarquía de las operaciones que establecen las reglas del cálculo algebraico rompe con la técnica aritmética de efectuar las operaciones de izquierda a derecha, imponiendo una lectura de toda la expresión algebraica para efectuar en primer lugar aquellas operaciones que tienen prioridad, independientemente del lugar que ocupen en la expresión*" (p. 286).

Esta comprensión nos permitió interpretar que un procedimiento anclado todavía en un cálculo aritmético, se manifestaría en errores como se observa en el siguiente ejemplo:

$$5 - 3(4 + x) = 2(4 + x) = 2.4 + 2x = 8 + 2x = 10x$$

Por otro lado, resignificamos conocimientos implicados cuando se aplica la propiedad distributiva del producto con la suma de números enteros. Habitualmente, en la enseñanza del nivel secundario, la resolución de este tipo de expresiones se trabaja después de tener definidos los números enteros y explicitada la regla de los signos. Así, la justificación que $9 - 5(m - 4)$ es $9 - 5m + 20$ deviene de concebir la expresión $9 - 5(m - 4)$ como $9 + (-5)(m + (-4))$, donde el signo $+$ no está presente en forma explícita y esta ausencia frecuentemente pasa inadvertida en la enseñanza.

Entonces, debimos reconstruir un camino retomando los conocimientos construidos anteriormente que permita, a partir de la creación y manipulación de programas de cálculos aritméticos y del trabajo con la notación incompleta[6], justificar que $9 - 5(m - 4)$ es igual a $9 - 5m + 20$. La justificación se sostiene por los cálculos de primero distribuir el cinco y luego concebir la operación resultante como la resta de una resta. El estudio del funcionamiento de estas expresiones habilita la gestión de una operación entre paréntesis multiplicada por un sumando o un sustraendo. Así, trabajando primero con la propiedad distributiva y operación de operaciones (por ejemplo, resta de una resta, resta de una suma), se logran condiciones para apuntalar una justificación de la conocida "regla de los signos" ("menos por menos es más", "más por menos es menos", etc.).

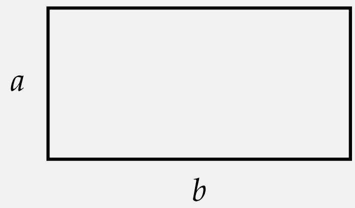
A continuación mostramos el proceso que dará lugar a gestionar expresiones del tipo $a(x \pm b) - c(x \pm d)$, a través de un contexto geométrico que involucra el cálculo y la comparación de áreas de rectángulos[7].

**4.1. Actividades para construir las reglas de cálculo para multiplicar.** En una primera instancia el trabajo se centra en la representación simbólica de expresiones de la forma $ax$ y $a(x + b)$, es decir en las distintas escrituras para simbolizar la operación de multiplicación y el uso del paréntesis. Para ello, en este primer problema, se solicita expresar las distintas áreas de los rectángulos y encontrar la diferencia entre las mismas, diferencia que se puede hallar sin necesidad de los cálculos.

[6] *La diferencia entre la notación algebraica completa y la incompleta es que en la primera figuran los signos de suma y producto entendidos como indicadores de operaciones binarias entre términos, mientras que en la incompleta estos símbolos se suprimen* (Cid, 2015, p.212). Por ejemplo: notación completa: $(-3) + (+5) - (+7)$; notación incompleta: $-3 + 5 - 7$.

[7] Si bien los números representan medidas de longitud y, en principio, podrían tomar valores positivos no enteros, las letras de las expresiones siguen teniendo dominio en el conjunto de los números naturales.

*Como ya saben, la fórmula del área de un rectángulo es $A = ba$, donde $b$ es la longitud de uno de los lados (base) y $a$ la longitud del otro lado (altura).*




*i) Si nos dicen que $a = 3$ cm, ¿cómo expresaremos el área de ese rectángulo?*

*ii) Si ahora te dicen que en ese rectángulo el lado $b$ aumenta 2 cm, haz un dibujo del nuevo rectángulo. ¿Cuál será ahora la longitud de sus lados? ¿Cuánto habrá aumentado su área?*

El enunciado del problema expresa “el área de un rectángulo es $A = ba$”, esto dará lugar a la discusión acerca de cómo simbolizar el producto, a partir de analizar las distintas expresiones que puedan surgir para expresar el área del rectángulo: $3 \times b$, $3.b$, $3b$ o $b \times 3$, $b.3$, $b3$. En el inciso ii) el lado desconocido sufre modificaciones y el conocido no cambia. Para resolver lo solicitado, en primer lugar, se tiene que indicar la medida de un lado, que no es un número ni una letra, ahora es una expresión, en este caso “$b + 2$”. Para comparar las áreas de los rectángulos no es necesario realizar la diferencia de las expresiones, ya que en este caso se puede resolver desde el gráfico (Colipe, Zambrano, y Ruiz, 2018), como lo muestra el rectángulo de la derecha en la Figura 1:

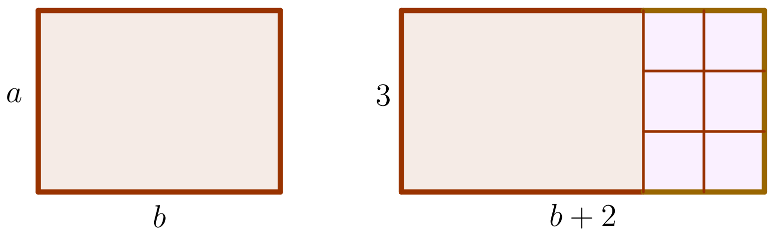



Figura 1. Rectángulo original y rectángulo ampliado

El contexto geométrico y la comparación de áreas en las que sólo varía un lado, permite encontrar y justificar que la diferencia entre las expresiones corresponde a un número. Percibir que la ampliación corresponde a un rectángulo de lados $2$ y $3$ (ver Figura 1) es lo que permite asegurar que el incremento es de $6$. El trabajo algebraico encuentra su apoyo en lo geométrico, pues el dibujo facilita encontrar que la diferencia entre las áreas de los rectángulos (original y ampliado) es $6$ y en esa certeza se gestiona la construcción de nuevas expresiones en las que el paréntesis empieza a tener protagonismo.

En el grupo colaborativo, un trabajo de análisis fue imaginar diálogos entre posibles producciones de los estudiantes en distintos contextos (geométrico y algebraico). Expresar al área del rectángulo ampliado llevará a la cuestión de cómo construir expresiones en las que el uso del paréntesis es objeto de análisis. Así, hipotetizamos distintas expresiones que podrían surgir según lo que se ponga en juego. Por ejemplo: si usan la fórmula del área para un rectángulo de lados $3$ y $b+2$ surgirán expresiones como: $b + 2.3$ o $3b + 2$ o $3(b + 2)$ o $(b + 2)3$; si, apoyados en el dibujo del rectángulo ampliado de la Figura 1, descomponen en dos áreas, una es $3b$ o $b3$ y la otra es $6$, aparecerán expresiones como: $3b + 6$ o $b3 + 6$ y si construyen una expresión $6$ unidades más grande que $3b$ podrán escribir: $3b + 6$.

Analizar y establecer vínculos entre estas posibles expresiones da lugar a un trabajo acerca del uso oportuno de paréntesis y a establecer la equivalencia entre $3(b + 2)$ o $(b + 2)3$ y $3b + 6$ o $b3 + 6$. Y descartar expresiones tales como $b + 2.3$ que es $b + 6$ y $3b + 2$ porque no corresponden a expresiones "$6$ unidades mayor que $3b$", área del rectángulo ampliado.

En un segundo problema, se trabaja con expresiones de la forma $ax$ y $b(x+c)$ con $a \neq b$, buscando la diferencia entre áreas de rectángulos, la cual no será un número, sino una expresión. El contexto geométrico no alcanza para dar una respuesta y se hace necesario avanzar en cálculos que dan lugar a recuperar el vínculo entre diferencia y resta.

En este caso, el rectángulo dado sufre aumento y disminución de sus lados en forma simultánea, lo que no permite anticipar si aumenta o disminuye el área del rectángulo modificado. Esto habilita a involucrarse con el cálculo de la diferencia. Sin embargo, depende de qué diferencia se calcule, se activa o no la propiedad distributiva entre sumandos. Las áreas a comparar son $4x$ y $6(x - 1)$, en caso que se busque la diferencia haciendo $6(x - 1) - 4x$, si bien hay que distribuir, es la propiedad distributiva entre naturales. En caso que se realice la otra diferencia $4x - 6(x - 1)$ exigiría un análisis como lo detallamos en el siguiente problema:

> *A partir de un rectángulo del que conocemos la longitud de un lado, $5$ cm, construimos otros dos rectángulos: uno en el que aumentamos el lado conocido en 3 cm y el desconocido lo disminuimos en 3 cm, y otro en que disminuimos el lado conocido en 3 cm y aumentamos el lado desconocido en 3 cm.*
>
> *a*) *Haz un dibujo del primer rectángulo.*
> *b*) *Haz un dibujo del segundo y tercer rectángulos.*
> *c*) *Encuentra la diferencia entre las áreas de los dos últimos rectángulos. ¿Cuánto tiene que medir el lado desconocido para que las dos áreas sean iguales?*

En la Figura 2 se muestran los dibujos de los tres rectángulos solicitados en la consigna.

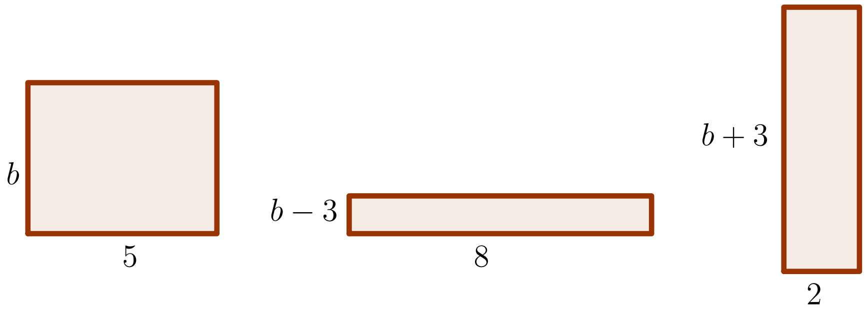



FIGURA 2. Rectángulos solicitados en la consigna

Este problema plantea tanto el aumento como la disminución de los lados de un rectángulo y propone estudiar las modificaciones de las áreas de los rectángulos resultantes. Aquí, se pone en juego comparar y hallar la diferencia entre expresiones del tipo $a(x \pm b)$ y $c(x \pm d)$ donde $a$ y $c$ son distintos, lo cual exige lidiar con cálculos como $a(x \pm b) - c(x \pm d)$, donde la propiedad distributiva tiene un rol fundamental.

Reconocemos la importancia de abordar este trabajo siendo conscientes que, de modo similar a lo que ocurre con las reglas para sumar, aquí también se pone en tensión un "hacer aritmético" que persiste y encuentra un límite en estas nuevas cuentas. La búsqueda de las diferencias entre las expresiones indicadas anteriormente, obliga a cálculos que deberán evolucionar de aplicar la propiedad distributiva entre números naturales (ya conocida), hacia una distributiva entre sumandos o sustraendos. Las reglas de cálculos para la suma y la resta, construidas anteriormente, se constituirán en el soporte para llevar a cabo este proceso.

Así, por ejemplo, para resolver el inciso c) y si consideramos que $A_2 = 8(b-3)$ y $A_3 = 2(b+3)$ representan las áreas de los rectángulos modificados (ver Figura 2), la diferencia entre las mismas implica cálculos que se justifican en las reglas aprendidas, como se muestra a continuación:

$$A_2 - A_3 = 8(b-3) - 2(b+3),$$

si se aplica la propiedad distributiva de números naturales (se distribuye el $8$ y el $2$), se obtiene $8b - 24 - (2b+6)$. Por la regla de cálculo para la resta: *restar* $2b+6$ *es lo mismo que restar* $2b$ *y restar* $6$, quedando entonces $8b - 24 - 2b - 6$. Por la regla de cálculo para la suma: *restar primero* $24$ *y luego restar* $2b$ *es lo mismo que restar primero* $2b$ *y luego restar* $24$, queda $8b - 2b - 24 - 6$. Finalmente, por regla de cálculo para la suma, *restar* $24$ *y restar* $6$ *es lo mismo que restar* $30$ quedando $6b - 30$.

Es importante vincular las expresiones donde está presente el producto de un sustraendo por una suma o diferencia como "$8(b-3)-2(b+3)$" y las que se reducen a sumas de sumandos y sustraendos como "$8b - 24 - 2b - 6$". Así, afirmándose en conocimientos disponibles, como lo son la distributiva entre naturales y la resta de una resta, da lugar a una nueva técnica que permitirá resolver el producto de un sumando o sustraendo por una suma o diferencia.

A partir del trabajo con las actividades anteriores, se favorece en clase la circulación de los siguientes conocimientos: "para escribir el producto no se coloca nada, salvo que sean dos números, y en ese caso se usa el punto"; "para hallar la diferencia entre expresiones se puede compararlas y decir en cuánto más grande o más chica es una en relación a la otra o se calcula una resta entre ellas"; "si a una expresión se le suma o se le resta un número, la expresión será mayor o menor que la dada"; "si hay que multiplicar un número con una suma o una resta se tiene que usar paréntesis". Y surgen las reglas de cálculo del tipo:

- *Restar* $2(a+b)$ *es lo mismo que restar* $2a$ *y restar* $2b$.
- *Restar* $2(a-b)$ *es lo mismo que restar* $2a$ *y sumar* $2b$.
- *Sumar* $2(a+b)$ *es lo mismo que sumar* $2a$ *y sumar* $2b$.
- *Sumar* $2(a-b)$ *es lo mismo que sumar* $2a$ *y restar* $2b$.

Hasta aquí hemos visto un recorrido en el que surgen las reglas de cálculo para la suma, resta y multiplicación de sumandos y sustraendos apoyados en los conocimientos de los números naturales, donde las expresiones algebraicas tuvieron un rol fundamental. Este recorrido está atravesado por rupturas entre concepciones y modos de calcular que viven en la aritmética y que evolucionan a nuevas concepciones y funcionamientos en el álgebra.

La estructura aditivo-multiplicativa de sumandos y sustraendos que acabamos de desarrollar, se convertirá en el nuevo soporte para apuntalar las reglas de cálculos de suma, resta y multiplicación de los números enteros. Así, la regla que se usa en $8-(0-5)$ que es *restar* $0-5$ *es lo mismo que restar* $0$ *y sumar* $5$, va a permitir justificar que $8-(-5)=13$. De modo similar, la regla que está en juego en $0-5(0-3)$ que es *restar* $5(0-3)$ *es lo mismo que restar* $5.0$ *y sumar* $5.3$, permitirá justificar que $-5(-3)=15$.

Es decir, una vez que "los números con signos" estén declarados como nuevos números: los enteros, la operatoria de éstos encuentra su justificación en las reglas de cálculos de sumandos y sustraendos, a partir de asociar un número positivo con un sumando y un número negativo con un sustraendo.

## §5. A modo de cierre

Como planteamos en la introducción de este artículo, los espacios de trabajo colectivos entre docentes e investigadores, constituyen un escenario favorable para discutir con los docentes las cuestiones fundamentales que se ponen en juego en secuencias de enseñanza más que para difundir los productos acabados de una investigación (Sadovsky y cols., 2016). En este caso el espacio colaborativo que formamos investigadores y profesores de escuela secundaria, toma una relevancia importante ya que nos permitió estudiar y profundizar una secuencia de enseñanza diseñada en una investigación que no es propia y analizar una posible gestión de las actividades para las clases. Como plantean (Perrin-Glorian y Baltar Bellemain, 2019), aún si en dicha investigación fue considerada la complejidad de la enseñanza en el aula, las condiciones para la difusión en las clases requieren ser estudiadas.

La propuesta que adaptamos, propone una ruptura epistemológica del quehacer algebraico frente al aritmético, alejándose de la concepción del álgebra entendida como aritmética generalizada, que es la más habitual en la escolaridad obligatoria. Toma como base conocimientos del cálculo aritmético que los estudiantes disponen y se propone, mediante rupturas, hacerlos evolucionar, hacia nuevos conocimientos propios del álgebra. Con el análisis precedente quisimos compartir algunos aspectos que nos resultaron relevantes en la comprensión conjunta (profesores e investigadores) de dicho proyecto de enseñanza que le da sentido a la operatoria y concepción de número entero. Reconstruimos un camino entre las ideas que se producen al resolver las tareas y los saberes a enseñar. En esta reconstrucción aparecen conocimientos contextualizados con cierta provisoriedad, tales como las reglas de cálculos para operar sumandos y sustraendos, los cuales no forman parte de la enseñanza habitual y aquí tienen un rol fundamental. Entonces, reconocer y apropiarse de estos conocimientos fue parte del trabajo que se realizó en esta experiencia.

## Bibliografía

Barrio, E., y Petich, A. (2018). El rol de los significados de los signos "+" y "-" en la construcción de los números negativos. En *Políticas y prácticas de producción y circulación de conocimientos. a 20 años del primer congreso de investigación educativa en la universidad nacional del comahue.* Cipolletti, Argentina. (Conferencia llevada a cabo en el VII Congreso Nacional y V Internacional de Investigación Educativa)

Bednarz, N. (1997). Formación continua de los docentes de matemática: una necesaria consideración del contexto. *Universidad de Quebec*. (Trabajo mimeografiado)

Bednarz, N. (2013). Regarder ensemble autrement: ancrage et développement des recherches collaboratives en éducation au Québec. *Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement*, 13–29.

Bednarz, N. (2015). La recherche collaborative. *Carrefours de l'éducation*, *1*(39), 171–184. Descargado de https://www.cairn.info/revue-carrefours-de-l-education-2015-1-page-171.htm

Chevallard, Y. (2005). La place des mathematiques vivantes dans l'enseignement secondaire. En C. Ducourtioux y P. Hennequin (Eds.), (p. 239-263). París, Francia: Publications de l'APMEP. Descargado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=48

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, *10*, 1-15. Descargado de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin10.htm

Cid, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos* (Tesis Doctoral no publicada). Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España.

Cid, E., y Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, 575–594.

Cid, E., Muñoz-Escolano, J. M., y Ruiz-Munzón, N. (2020). La introducción de los REI en la formación de profesores: un ejemplo de REI-FP. *Educaçao Matemática Pesquisa*(22(4)), 646–660.

Cid, E., y Ruiz-Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En *Un panorama de la TAD: Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 579–604). Barcelona, España.

Colipe, L., Zambrano, J., y Ruiz, M. E. (2018). Introducción al producto de números enteros a partir de multiplicar expresiones algebraicas. Un camino entre lo ideal y lo posible. En *Políticas y prácticas de producción y circulación de conocimientos. A 20 años del primer congreso de investigación educativa en la Universidad Nacional del Comahue.* Cipolletti, Argentina. (Conferencia llevada a cabo en el VII Congreso Nacional y V Internacional de Investigación Educativa)

Desgagné, S., Bednarz, N., Couture, L., C.and Poirier, y Lebuis, P. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation*, *27*(1), 33–64.

Detzel, P., y Martinez, R. (2017). Cálculo algebraico. Un escenario fértil para la construcción del sentido del número negativo. *Novedades Educativas Centro de publicaciones educativas y material didáctico*(315), 63–66.

Martinez, R., y Issa Nuñez, E. (2019). Enseñanza de los números negativos a través de la modelización algebraica: desafíos y ventajas. *Novedades Educativas Centro de publicaciones educativas y material didáctico*(344).

Perrin-Glorian, M. J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Vers une ingénierie didactique de deuxième génération", editor= Ç. Margolinas and M. Abboud-Blanchard and L. Bueno-Ravel and N. Douek and A. Fluckiger and P. Gibel and F. Wozniak. En *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 57–78). Grenoble. Francia: La pensée sauvage Grenoble.

Perrin-Glorian, M. J., y Baltar Bellemain, P. M. (2019). L'ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maitres. *Caminhos da Educação Matemática*, *9*(1), 45–82. Descargado de https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/298

Sadovsky, P., Itzcovich, H., Quaranta, M. E., Becerril, M. M., y García, P. (2016). Tensiones y desafíos en la construcción de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática. *Educación matemática*, *28*(3), 9–29.

Patricia Detzel
*Departamento de Matemática, FaEA, Universidad Nacional del Comahue, Argentina.*
(✉) *pdetzel@gmail.com*

María Elena Ruiz
*Departamento de Matemática, FaEA, Universidad Nacional del Comahue, Argentina.*
(✉) *ruiz.melena@gmail.com*

Lucas Colipe
*Departamento de Matemática, FaEA, Universidad Nacional del Comahue, Argentina.*
(✉) *lukscolipe@gmail.com*

Recibido: *4 de agosto de 2020*.
Aceptado: *3 de marzo de 2021*.
Publicado en línea: *5 de abril de 2021*.

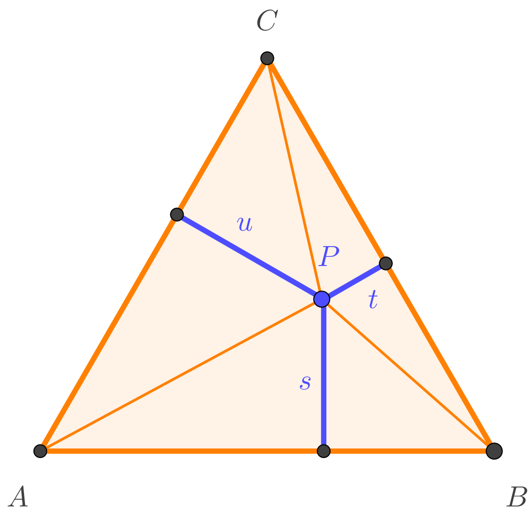
*dado cualquier punto interior en un triángulo equilátero la suma de las distancias del punto a los lados es igual a la altura del triángulo?*

Este resultado es conocido como el Teorema de Viviani.

La demostración de este hecho es muy sencilla. Consideremos un punto $P$ interior a un triángulo equilátero $T = \triangle ABC$. Luego el triángulo $T$ queda dividido en 3 triángulos mas pequeños,

$$T_1 = \triangle APB, \quad T_2 = \triangle BPC \quad \text{y} \quad T_3 = \triangle CPA.$$

Sea $h$ la altura de $T$ y sean $s$, $t$ y $u$ las alturas de los triángulos $T_1$, $T_2$ y $T_3$, respectivamente.




Además, como el tránglo $T$ es equilátero, todos los triángulos $T$, $T_1$, $T_2$ y $T_3$ tienen bases congruentes, digamos de longitud $b$. El área de $T$ es igual a la suma de las áreas de los 3 triángulos interiores, es decir

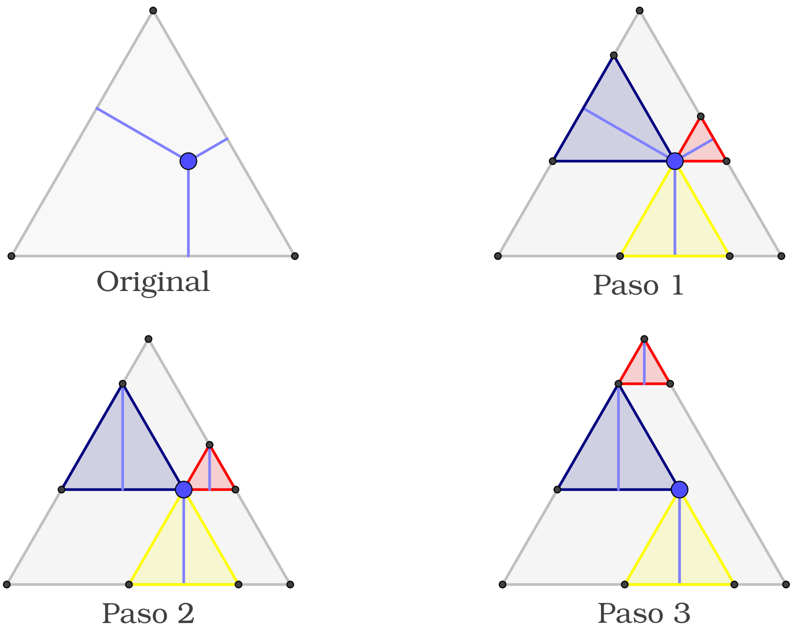
$$\tfrac{1}{2}bh = A(T) = A(T_1) + A(T_2) + A(T_3) = \tfrac{1}{2}b(s+t+u),$$

de donde se obtiene

$$h = s + t + u$$

que es lo que queríamos ver.

*Prueba gráfica.* Es muy interesante el hecho de que hay una demostración gráfica de este hecho en 3 simples pasos:




A pesar de que la demostración es evidente por sí misma, hacemos algunos comentarios para justificar completamente cada paso.

- *Paso 1*: usando líneas paralelas a los lados de $T$ que pasan por $P$ quedan determinados 3 triángulos interiores que son semejantes a $T$, y por lo tanto equiláteros.
- *Paso 2*: por construcción, el segmento que da la distancia de $P$ a cada lado de $T$ es la altura del triángulo mas pequeño correspondiente. Como los triangulos interiores son equiláteros, estos pueden ser rotados de modo que las alturas queden verticales.
- *Paso 3*: cualquiera de los dos triángulos con vértice en $P$ que no tocan la base puede ser desplazado paralelamente hasta hacer coincidir un vértice con $C$.

De esta manera es claro que la altura del triángulo mayor coincide con la suma de las alturas de los tres triangulitos interiores, y esto equivale a la suma de las distancias de $P$ a los lados de $T$.

Vincenzo Viviani (5/4/1622 – 22/11/1703, Florencia) fue un matemático y físico italiano. En 1639 comenzó a trabajar con Galileo Galilei y más tarde escribió la primera biografía conocida sobre él. Viviani reconstruyó además los escritos de Arquímedes y Euclides. En 1661 llevó a cabo el ensayo que posteriormente se conocería como el péndulo de Foucault (ya que este experimento fue repetido y descrito por Jean Foucault casi 200 años más tarde). En 1660 con Giovanni Alfonso Borelli, realizó un experimento para determinar la velocidad del sonido. Además del teorema, una curva y un cráter lunar llevan su nombre.

Revista de Educación Matemática
Volumen 36, N° 1 (2021), páginas 75 – 90
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

*Artículo de Matemática*

# ACERCA DE LA MODA

Eugenio Saavedra Gallardo.

Resumen. Después de hacer una breve síntesis sobre la medida de tendencia central moda, en datos no agrupados, se construye la fórmula para la moda en datos agrupados. Esta construcción se realiza a través de una relación de proporcionalidad, que se deriva como consecuencia de la búsqueda de un punto, cuya abscisa es la moda.

Abstract. After a brief synthesis of the definition and main properties of the mode (a measure of central tendency) for ungrouped data, we derive a formula for it in the case of grouped data. Our construction is based on a proportionality relation, that is derived as a consequence of searching for a point whose abscissa is the mode.

## §1. Introducción

A lo largo de varios años en que nuestra facultad ha realizado perfeccionamientos para docentes de nuestro sistema escolar (en que han participado alrededor de 700 docentes), hemos observado cómo la gran mayoría de ellos aplican a "ciegas" fórmulas utilizadas en estadística descriptiva, por ejemplo, el caso de los percentiles o el de la moda para datos agrupados en intervalos.

Probablemente esta "ceguera" es producto de la forma en que se presenta, al menos en el sistema escolar, la estadística descriptiva, generalmente solo a través de fórmulas. Caso particular de lo anterior es el de la moda para datos agrupados, la cual puede encontrarse en textos escolares (por ejemplo, las referencias (Bennett, 2015) y (León, 2012)), o en otros libros (por ejemplo las referencias (Bacchini, 2018) y (Salazar, 2018)), y en muchos otros sitios, entre los cuales, solo por nombrar algunos, están las referencias (Farigua, 2016; Sectormatematica, s.f.; Superprof, s.f.; Wiki2, s.f.). En todos ellos, lo que se entrega es solo una fórmula para su cálculo, junto a una identificación de los símbolos que componen dicha fórmula. Sin embargo es preciso señalar que sí existen algunos sitios web donde se muestra,

*Palabras clave*: Medidas de tendencia central, moda, datos agrupados.
*Keywords*: Measures of central tendency, mode, grouped data.

en forma bastante resumida, la construcción de dicha fórmula (entre otras, las referencias (Firmfunda, s.f.; Topperlearning, s.f.; Math.Stackexchange, s.f.).

Motivados por lo anterior se escribe este artículo, con el objetivo de construir detalladamente la fórmula para calcular la moda en datos agrupados, y de esta manera mostrar de forma pormenorizada qué es lo que se pretende capturar con ella.

La construcción se realiza por medio de una relación de proporcionalidad que involucra tanto la frecuencia del intervalo modal como la de los intervalos contiguos. Esta relación de proporcionalidad se deriva como consecuencia de la busqueda de un punto del cual la moda es su abscisa, además la busqueda de este punto se hace tanto desde una mirada algebraica (intersección de dos rectas en el plano), cómo desde una mirada geométrica (semejanza de triángulos).

El artículo comienza con la presentación de las 3 medidas comunmente utilizadas para describir la idea de centro de un conjunto de datos (media o promedio, moda y mediana), para luego analizar brevemente la moda, tanto para datos cuantitativos (no agrupados) como para datos cualitativos (categorías). Seguidamente se entrega la fórmula para el cálculo de la moda en datos agrupados, mostrando su operatoria a través de un ejemplo. Posteriormente, se hace la construcción y el análisis de la fórmula para la moda en datos agrupados, para luego reinterpretar la forma en que esta se expresa.

## §2. La idea de centro

Comúnmente 3 medidas son usadas para describir el "centro" o "localización central" de un conjunto de datos (a este conjunto también se le llama datos muestrales o muestra):

- la moda,
- la mediana,
- la media (o promedio).

Cada una de estas medidas interpreta la idea de "centro" en diferentes maneras. La moda interpreta el significado de "centro" como el valor que ocurre más a menudo en el conjunto de datos analizados, en cambio la mediana interpreta el significado de "centro" como el valor que divide al conjunto de datos, después de ordenarlos en forma ascendente, en dos partes, de modo que al menos el 50 % de los datos son menores o iguales a la mediana y al menos el 50 % de los datos son mayores o iguales a esta. Por último el promedio interpreta la idea de "centro" como una especie de repartición "equitativa" en el siguiente sentido. Tres amigos coleccionan poster de su cantante preferido, ellos tienen 19, 31 y 13 poster respectivamente. Los amigos deciden repartirse los poster de modo que cada uno quede con la misma cantidad, ¿con cuántos poster queda cada uno? La respuesta es 21, que corresponde al promedio de los valores 19, 31 y 13.

La elección de una apropiada medida para cualquier conjunto de datos, dependerá de al menos dos factores:

- Los aspectos de la "localización central" que pretenden capturarse.
- El tipo de datos de que se disponga, es decir, si los datos son cuantitativos (numéricos) o cualitativos (categorías).

La segunda consideración es importantísima, porque, dependiendo del tipo de datos, será posible calcular todas o sólo algunas de las medidas de tendencia central recién mencionadas:

- si los datos son cuantitativos entonces la moda, mediana y media pueden ser calculados,
- si los datos son cualitativos, la única medida de localización central que puede ser calculada es la moda, ya que por el significado de "centro" de la mediana y del promedio, para su cálculo es necesario que operaciones algebraicas con los datos sean posibles.

## §3. La moda para datos cuantitativos no agrupados

Como dijimos anteriormente, la moda interpreta la idea de "centro" como el valor que ocurre más a menudo en el conjunto de datos analizados. El valor de la moda se puede calcular de la siguiente forma:

- arreglar los datos en forma creciente,
- contar el número de veces que cada valor ocurre,
- identificar el valor que ocurre con mayor frecuencia. Este valor es la moda.

Cuando existan solo dos datos con mayor frecuencia, se dice que la distribución de los datos es bimodal, o sea, tiene dos modas. En el caso en que al menos tres datos tengan mayor frecuencia, se dice que la distribución de los datos es multimodal (tiene al menos 3 modas). En particular, si todos los datos tienen igual frecuencia, entonces la distribución es multimodal.

**Propiedades de la moda**

- El cálculo de la moda no usa toda la información en la muestra, es decir, no involucra todos los valores obtenidos en la muestra, sólo usa el valor que ocurre más a menudo. Este hecho podría considerarse como una seria debilidad si pensamos que toda la información disponible en la muestra debería ser usada.

  Debido a lo anterior, la moda podría no ser muy descriptiva de lo que ocurre en la muestra. Por ejemplo, si las notas (en escala de 0 a 100) de un alumno en la asignatura de matemática fuesen:

$$88, \quad 83, \quad 40, \quad 84, \quad 35, \quad 86, \quad 95, \quad 40, \quad 92, \quad 85\,,$$

que ordenadas de menor a mayor resultan

$$35, \quad 40, \quad 40, \quad 83, \quad 84, \quad 85, \quad 86, \quad 88, \quad 92, \quad 95\,,$$

obtendríamos que la moda es la nota $40$, por lo que juzgar el rendimiento de este alumno en matemática, por medio de la moda, parece poco adecuado.

- La moda es una medida que es sensible a pequeños cambios de los valores muestrales.
- La moda no es particularmente afectada por valores extremos en la muestra, es decir, por valores que resultan mucho más grandes o mucho más pequeños que el resto de los datos.
- La moda es siempre igual a uno de los valores presentes en la muestra (en el caso de datos no agrupados).
- No hay un orden (estricto) predeterminado entre la moda y las otras dos medidas de tendencia central. En efecto, si denotamos por $M_d$ a la mediana, $M_0$ a la moda y $\bar{x}$ al promedio, entonces puede ocurrir que:

$M_d < M_0 < \bar{x}$, si los datos son $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 6,\ 98,\ 99,\ 100$,

$M_d < \bar{x} < M_0$, si los datos son $-1,\ 0,\ 1,\ 5,\ 5$,

$M_0 < \bar{x} < M_d$, si los datos son $-3,\ -3,\ -2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$,

$M_0 < M_d < \bar{x}$, si los datos son $-1,\ -1,\ 0,\ 3,\ 4$,

$\bar{x} < M_0 < M_d$, si los datos son $-100,\ -4,\ -4,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$,

$\bar{x} < M_d < M_0$, si los datos son $-3,\ -2,\ 0,\ 1,\ 1$,

$\bar{x} = M_0 = M_d$, si los datos son $-2,\ 0,\ 0,\ 2$.

## §4. La moda para datos cualitativos (categorías)

En este caso, es decir, cuando los datos son cualitativos, la moda es la única medida de tendencia central que se puede calcular para este tipo de datos. El procedimiento es el mismo que en el caso de datos cuantitativos (numéricos). La moda es(son) la(s) categoría(s) que ocurre(n) más frecuentemente en el conjunto de datos analizados (muestra).

Por ejemplo, una Compañía de telefonía móvil realiza una encuesta a 10 de sus clientes, acerca de su servicio, entregándole como opciones: muy satisfecho (MS); satisfecho (S); insatisfecho (I) y muy insatisfecho (MI). La Tabla 1 más abajo resume la información recogida.

En este caso la moda resulta ser la categoría “muy satisfecho”, es decir, lo que más frecuentemente ocurre (en los datos de la muestra) es que el cliente se encuentre muy satisfecho con el servicio de telefonía móvil que le ofrece la compañía.

| Categoría | Frecuencia |
|---|---|
| Muy insatisfecho | 2 |
| Insatisfecho | 3 |
| Satisfecho | 1 |
| Muy satisfecho | 4 |

Tabla 1

A través de este mismo ejemplo podemos ver que el cálculo de la media no tiene sentido. Si trataramos de calcular la media, deberíamos sumar los 10 datos, lo cual obviamente no es posible.

Incluso si asignamos valores numéricos a las categorías (esta operación es conocida como codificación), por ejemplo, muy insatisfecho = $0$, insatisfecho = $1$, satisfecho = $2$, muy satisfecho = $3$, la media todavía continúa sin sentido. Esto porque los valores numéricos que asignamos a las diferentes categorías, asumen que la diferencia entre la respuesta "satisfecho" y "muy satisfecho" es la misma que la diferencia entre la respuesta "muy insatisfecho" e "insatisfecho", lo cual en general no corresponde a la realidad. Puede ser que "estar muy satisfecho" sea mucho mejor que "estar satisfecho".

El mismo argumento anterior se aplica a datos cualitativos ordinales numéricos. Por ejemplo, el test de Apgar, arroja como resultado un número que puede ser $0, 1, \ldots, 10$. Pero, un recién nacido con puntaje $10$ no significa que sea el doble de saludable que uno con puntaje $5$.

También, para este tipo de datos no tiene sentido calcular la mediana. Por ejemplo, con los datos de la tabla anterior, la mediana sería el promedio entre I y S, lo cual no tiene sentido.

## §5. La moda para datos cuantitativos agrupados

Consideremos un conjunto de datos agrupados, los cuales pueden presentarse a través de una tabla de datos agrupados en intervalos, un histograma o una ojiva. Además, estas presentaciones pueden mostrarse con frecuencias absolutas y/o frecuencias relativas y/o frecuencias relativas porcentuales. Por otra parte, teniendo un tipo de presentación de los datos agrupados, inmediatamente pueden obtenerse las otras dos.

Si llamamos $M_0$ a la moda para datos agrupados en intervalos (de igual amplitud), entonces $M_0$ se define como

$$M_0 = \text{lim}_{\text{inf}} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot a \quad \text{ó} \quad M_0 = \text{lim}_{\text{inf}} + \frac{f_M - f_1}{2f_M - f_1 - f_2} \cdot a,$$

donde

$$
\begin{aligned}
I_M &= \text{intervalo con mayor frecuencia (se conoce como intervalo modal)},\\
\lim_{\text{inf}} &= \text{límite inferior de } I_M,\\
\lim_{\text{sup}} &= \text{límite superior de } I_M,\\
a &= \text{amplitud de } I_M\text{, es decir, } \lim_{\text{sup}} - \lim_{\text{inf}},\\
f_M &= \text{frecuencia del intervalo } I_M,\\
f_1 &= \text{frecuencia del intervalo contiguo por la izquierda a } I_M,\\
f_2 &= \text{frecuencia del intervalo contiguo por la derecha a } I_M,\\
d_1 &= f_M - f_1,\\
d_2 &= f_M - f_2.
\end{aligned}
$$

**Observaciones:**

- En la fórmula, cuando se habla de frecuencia, esta puede ser la frecuencia absoluta, la frecuencia relativa o la frecuencia relativa porcentual. Con cualquiera de ellas el valor de $M_0$ es el mismo.
- Si el intevalo modal se encuentra en el primer intervalo, entonces en la fórmula se considera que $f_1 = 0$ (el intervalo contiguo a la izquierda del intervalo modal tiene frecuencia 0, por ello no aparece). Similarmente, si el intevalo modal se encuentra en el último intervalo, entonces en la fórmula se considera que $f_2 = 0$ (el intervalo contiguo a la derecha del intervalo modal tiene frecuencia 0, por ello no aparece)
- Si hay más de un intervalo modal, entonces se aplica la fórmula a cada uno de estos intervalos, con lo cual se obtienen tantas modas como intervalos modales se tenga.

Por ejemplo, los siguientes datos corresponden al puntaje obtenido por 80 estudiantes de diversos establecimientos escolares en una prueba estandarizada.

| Intervalo | Frecuencia Absoluta | Frecuencia Relativa Porcentual |
|---|---|---|
| $[395 - 455[$ | 6 | $7,5\,\%$ |
| $[455 - 515[$ | 8 | $10\,\%$ |
| $[515 - 575[$ | 10 | $12,5\,\%$ |
| $[575 - 635[$ | 22 | $27,5\,\%$ |
| $[635 - 695[$ | 16 | $20\,\%$ |
| $[695 - 755[$ | 12 | $15\,\%$ |
| $[755 - 815]$ | 6 | $7,5\,\%$ |
| Total | 80 | $100\,\%$ |

Tabla 2

A partir de la tabla anterior obtenemos:

| Símbolo | Con Frecuencia Absoluta | Con Frecuencia Relativa Porcentual |
|---|---|---|
| $\lim_{\text{inf}}$ | $575$ | $575$ |
| $\lim_{\text{sup}}$ | $635$ | $635$ |
| $a$ | $60$ | $60$ |
| $f_M$ | $22$ | $27,5\,\%$ |
| $f_1$ | $10$ | $12,5\,\%$ |
| $f_2$ | $16$ | $20\,\%$ |
| $d_1$ | $12$ | $15\,\%$ |
| $d_2$ | $6$ | $7,5\,\%$ |
| $\dfrac{d_1}{d_1+d_2}$ | $\dfrac{12}{12+6}=\dfrac{2}{3}$ | $\dfrac{15\,\%}{15\,\%+7,5\,\%}=\dfrac{2\cdot 7,5}{3\cdot 7,5}=\dfrac{2}{3}$ |

Tabla 3

Así,

$$M_0 = \lim_{\text{inf}} + \frac{d_1}{d_1+d_2}a = 575 + \tfrac{2}{3}60 = 615.$$

Si conociéramos explícitamente los 80 datos (por ejemplo, los que se presentan a continuación y que satisfacen las condiciones de la Tabla 2)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 395 | 410 | 410 | 410 | 410 | 449 | 460 | 495 | 500 | 505 |
| 511 | 511 | 511 | 513 | 515 | 515 | 521 | 523 | 530 | 550 |
| 562 | 570 | 571 | 573 | 575 | 575 | 580 | 581 | 582 | 585 |
| 585 | 585 | 588 | 590 | 592 | 595 | 598 | 599 | 600 | 615 |
| 615 | 616 | 620 | 625 | 630 | 631 | 635 | 635 | 639 | 640 |
| 645 | 648 | 650 | 652 | 655 | 655 | 660 | 660 | 665 | 667 |
| 680 | 690 | 700 | 708 | 710 | 725 | 725 | 730 | 735 | 738 |
| 740 | 747 | 750 | 754 | 778 | 780 | 790 | 795 | 800 | 815 |

Tabla 4

veríamos que la verdadera moda es $410$. El error que cometimos al obtener como moda el valor $615$, es el precio que se debe pagar por el desconocimiento de los datos cuando estos se presentan agrupados y no se conocen explícitamente.

## §6. Construcción de la Fórmula

Primero, recordemos que la fórmula para $M_0$, la moda en datos agrupados, es

$$M_0 = \mathrm{lim}_{\mathrm{inf}} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} a.$$

En adelante, para simplificar, usaremos $L_i = \mathrm{lim}_{\mathrm{inf}}$ y $L_s = \mathrm{lim}_{\mathrm{sup}}$.

¿Qué trata de expresar la fórmula de la moda para datos agrupados? Trata de escoger un valor (llamado $M_0$) dentro del intervalo modal.

¿Con que criterio se escoge $M_0$? El criterio que se utiliza para escoger $M_0$, es la comparación entre la frecuencia del intervalo contiguo por la izquierda al intervalo modal, esto es $f_1$, y la frecuencia del intervalo contiguo por la derecha, o sea $f_2$.

Si $f_1$ es mayor que $f_2$, entonces el punto $M_0$ se debe "acercar" más al extremo izquierdo del intervalo modal, es decir, a $L_i$, en cambio, si $f_1$ es menor que $f_2$, el punto $M_0$ se debe "acercar" más al extremo derecho del intervalo modal, es decir, a $L_s$.

Para el caso en que las frecuencias de los intervalos contiguos sean iguales, entonces el punto escogido debe corresponder al punto medio del intervalo modal.

¿Cómo decide la fórmula "acercarse" más al extremo izquierdo (respectivamente derecho) del intervalo modal?

La forma como lo hace es escogiendo a $M_0$ como la abscisa del punto de intersección entre los segmentos de línea punteada que se muestran en el gráfico siguiente.

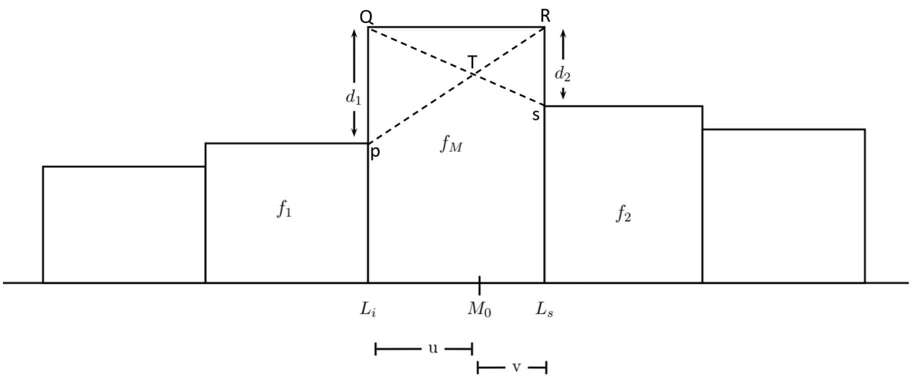



Gráfico 1

Cabe señalar que el gráfico anterior es la representación de un conjunto de datos agrupados en intervalos, en el sentido que en el eje horizontal se ponen los intervalos y la altura de un rectángulo representa la frecuencia correspondiente al intervalo que forma su base.

¿Qué relaciones algebraicas satisface el punto de intersección entre los segmentos de línea punteada?

Como $M_0$ se escoge de modo que sea la abscisa del punto intersección del segmento $\overline{PR}$ con el segmento $\overline{SQ}$ (ver Gráfico 1), entonces $M_0$ puede ser determinado encontrando la intersección de la recta que pasa por los puntos $P = (L_i, f_1)$ y $R = (L_s, f_M)$, con la recta que pasa por los puntos $Q = (L_i, f_M)$ y $S = (L_s, f_2)$.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $P$ y $R$ se puede escribir como

$$y = \frac{d_1}{a}x + f_1 - \frac{d_1}{a}L_i.$$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $Q$ y $S$ se puede escribir como

$$y = -\frac{d_2}{a}x + f_2 + \frac{d_2}{a}L_s.$$

Como el punto de intersección de las rectas, que es de la forma $(M_0, y_0)$, debe satisfacer las ecuaciones que las determinan, entonces $M_0$ debe satisfacer la relación

$$\frac{d_1}{a}M_0 + f_1 - \frac{d_1}{a}L_i = -\frac{d_2}{a}M_0 + f_2 + \frac{d_2}{a}L_s,$$

esto es,

$$d_1M_0 + af_1 - d_1L_i = -d_2M_0 + af_2 + d_2L_s.$$

Por lo cual, utilizando las relaciones $L_i = -(L_s - L_i) + L_s = -a + L_s$ y $L_s = (L_s - L_i) + L_i = a + L_i$ se tiene que

$$d_1M_0 + af_1 - d_1(-a + L_s) = -d_2M_0 + af_2 + d_2(a + L_i),$$

o sea

$$d_1M_0 + af_1 + d_1a - d_1L_s = -d_2M_0 + af_2 + d_2a + d_2L_i,$$

de donde

$$d_1(M_0 - L_s) = -d_2(M_0 - L_i) - af_1 - ad_1 + af_2 + ad_2.$$

Pero, $d_1 = f_M - f_1$ y $d_2 = f_M - f_2$, por lo cual

$$-af_1 - ad_1 + af_2 + ad_2 = a\big( - f_1 - (f_M - f_1) + f_2 + (f_M - f_2)\big) = 0.$$

En consecuencia

$$d_1(M_0 - L_s) = -d_2(M_0 - L_i),$$

esto es,

$$\frac{M_0 - L_i}{L_s - M_0} = \frac{d_1}{d_2}. \qquad (*)$$

Finalmente, esta relación de proporcionalidad es la que nos permite determinar $M_0$. En efecto, como

$$M_0 - L_i = \frac{d_1}{d_2}(L_s - M_0),$$

entonces

$$M_0 + \frac{d_1}{d_2}M_0 = L_i + \frac{d_1}{d_2}L_s,$$

por lo cual

$$M_0\frac{d_1+d_2}{d_2} = L_i + \frac{d_1}{d_2}L_s,$$

esto es

$$M_0 = \frac{d_2}{d_1+d_2}L_i + \frac{d_2}{d_1+d_2}\frac{d_1}{d_2}L_s.$$

Por otra parte, $L_s = (L_s - L_i) + L_i = a + L_i$, así

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{d_2}{d_1+d_2}L_i + \frac{d_1}{d_1+d_2}(a+L_i) \\ &= \left(\frac{d_2}{d_1+d_2} + \frac{d_1}{d_1+d_2}\right)L_i + \frac{d_1}{d_1+d_2}a \\ &= L_i + \frac{d_1}{d_1+d_2}a = \text{lim}_{\text{inf}} + \frac{d_1}{d_1+d_2}a. \end{aligned}$$

Para el caso en que $f_1 = f_2,$ esto es, cuando $d_1 = d_2,$ la proporción entre $d_1$ y $d_2$ es uno, por lo que la proporción entre $(M_0 - L_i)$ y $(L_s - M_0)$ debe ser uno. Para que esto se cumpla, $M_0$ debe ser el punto medio del intervalo modal.

En efecto, al ocurrir que $d_1 = d_2,$ se tiene que $\frac{d_1}{d_1+d_2} = \frac{1}{2}$, por lo que

$$M_0 = L_i + \tfrac{d_1}{d_1+d_2}a = L_i + \tfrac{1}{2}a = L_i + \tfrac{1}{2}(L_s - L_i) = \tfrac{L_i+L_s}{2},$$

que corresponde al punto medio del intervalo modal.

**Observación:** ¿Qué relaciones geométricas satisface el punto de intersección de los segmentos $\overline{PR}$ y $\overline{SQ}$?

El gráfico que se presenta a continuación, corresponde a la "parte superior" del rectángulo que tiene por base al intervalo modal que se muestra en el Gráfico 1, por lo cual $PQ$ corresponde a $d_1,$ $RS$ corresponde a $d_2$ y $T$ a la intersección del segmento $\overline{PR}$ con el segmento $\overline{SQ}$.

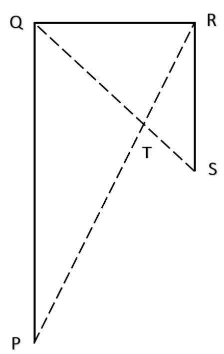



Gráfico 2

Del gráfico anterior se puede observar que, si $f_1 < f_2$, entonces $PQ$ será mayor que $RS$, por lo que $T$ estará más cerca del segmento $\overline{RS}$ que del segmento $\overline{PQ}$. Para visualizar lo anterior, basta recordar que las diagonales de un rectángulo se cortan en el centro de este.

En el caso en que $f_1 > f_2$, tendremos un gráfico análogo al Gráfico 2, solo que en este caso $PQ$ será menor que $RS$, por lo que $T$ estará más cerca del segmento $\overline{PQ}$ que del segmento $\overline{RS}$.

Ahora, si $f_1 = f_2$, entonces $PQ = RS$, por lo que el cuadrilátero $PQRS$ será un rectángulo. Por esta razón $T$ estará en el centro de este, por tanto T será equidistante de los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$.

También, desde el Gráfico 2, utilizando que $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ y el criterio de semejanza de triángulos $AAA$, se tiene que $\triangle PTQ \sim \triangle RTS,$ de donde $\frac{PQ}{RS} = \frac{PT}{RT}$.

El gráfico que se presenta ahora, es similar al Gráfico 2, solo que ahora se agregaron unas líneas punteadas auxiliares.

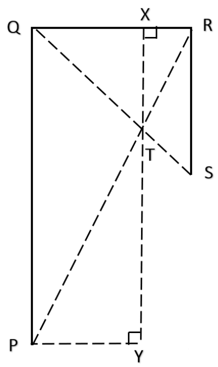



Gráfico 3

Usando nuevamente el criterio de semejanza de triángulos $AAA$, se deduce que $\triangle PYT \sim \triangle RXT,$ por lo que se tiene $\frac{PT}{RT} = \frac{PY}{RX}$.

En consecuencia, $\frac{PQ}{RS} = \frac{PT}{RT} = \frac{PY}{RX},$ de donde $\frac{PQ}{RS} = \frac{PY}{RX},$ o dicho de otra forma,

$$\frac{PY}{PQ} = \frac{RX}{RS}.$$

A partir de los Gráficos 1, 2 y 3, vemos que $PY = u,\ PQ = d_1,\ RX = v$ y $RS = d_2$, por lo que la última expresión puede escribirse de la siguiente manera:

La proporción entre la magnitud del segmento $\overline{L_i\, M_0}$ y $d_1$, es igual a la proporción entre la magnitud del segmento $\overline{M_0\, L_s}$ y $d_2$.

En otras palabras

$$(M_0 - L_i) : d_1 = (L_s - M_0) : d_2,$$

es decir

$$\frac{M_0 - L_i}{L_s - M_0} = \frac{d_1}{d_2}. \quad (*)$$

O sea, $M_0$ debe satisfacer la misma relación de proporcionalidad $(*)$, a partir de la cual, anteriormente, obtuvimos la fórmula para $M_0$.

**Observación:** En rigor, la principal razón para escoger a $M_0$ como la abscisa del punto de intersección entre los segmentos $\overline{PR}$ y $\overline{SQ}$ (ver Gráfico 1), es tratar de capturar el valor donde una curva "suave" (densidad de probabilidad que pudiese ajustarse a los datos agrupados, que están representados en el Gráfico 1) alcanzaría su valor máximo, esto es, capturar la moda de la distribución de probabilidad que se estaría ajustando a los datos.

**A modo de ejemplo:** El siguiente gráfico muestra los datos asociados a la Tabla 2, nuevamente, en el sentido que la altura de un rectángulo representa la frecuencia correspondiente al intervalo que forma su base.

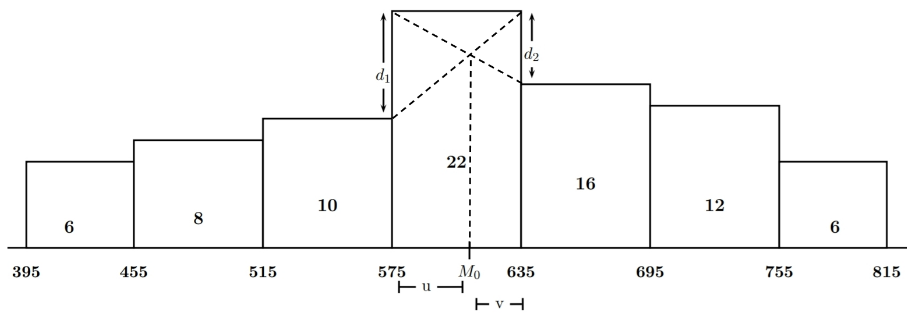


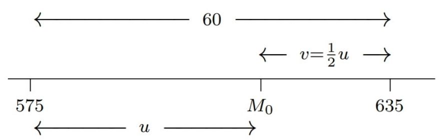

Gráfico 4

En este caso, $u = M_0 - 575$, $v = 635 - M_0$, $d_1 = 12$ y $d_2 = 6$. Como $f_1 = 10$ es menor que $f_2 = 16$, entonces $M_0$ debe estar más "cerca" del extremo derecho del intervalo modal, es decir, más cerca de $L_s = 635$.

Por otra parte, $\frac{d_1}{d_2} = 2$, por lo que $\frac{u}{v}$ debe ser igual a 2 (puesto que la forma como decide la fórmula acercase a uno u otro extremo del intervalo modal, se traduce en que ambas proporciones sean iguales). Dicho de otra forma, como $d_1$ es el doble de $d_2$, entonces $u$ debe ser el doble que $v$.

También, $u + v = 60$, o sea, $2v + v = 60$, por lo que $v = \frac{60}{3} = 20$, de donde $u = 40$. Pero, $M_0 = 575 + u$, por lo cual $M_0$ debe ser 615 (resultado obtenido en la Sección 5).

La figura siguiente ilustra lo anterior.



## §7. Otra Aproximación a la Fórmula

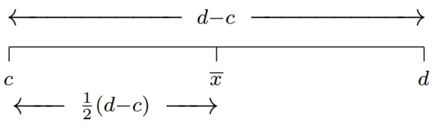
Sean $c$ y $d$ números reales, con $c < d$, entonces el promedio de estos dos valores es $\bar{x} = \frac{c+d}{2}$, el cual puede escribirse como $\bar{x} = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d$, y corresponde al punto medio del intervalo $]c, d[$.

De forma más general se define el promedio ponderado para $c$ y $d$ como el número real $\bar{x}_p = \alpha c + \beta d$, donde $\alpha$ y $\beta$ son números reales pertenecientes al intervalo $]0, 1[$, y tal que $\alpha + \beta = 1$.

Un caso particular de promedio ponderado es cuando $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, esto es, el promedio de los valores $c$ y $d$ es un caso particular de promedio ponderado.

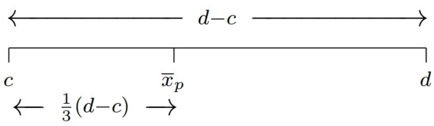
A continuación veamos que $\bar{x}_p$ pertenece al intervalo $]c, d[$, y que $\bar{x}_p$ estará más cerca de $c$ cuando $\beta$ sea menor que $\alpha$, más cerca de $d$ cuando $\beta$ sea mayor que $\alpha$ y al centro del intervalo cuando $\beta$ sea igual a $\alpha$. Además veremos que la moda para datos agrupados es un promedio ponderado de los extremos del intervalo modal.

Primeramente la distancia entre $c$ y $d$ es $(d - c)$ y por otra parte $\bar{x} = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d = c + \frac{1}{2}(d - c)$.



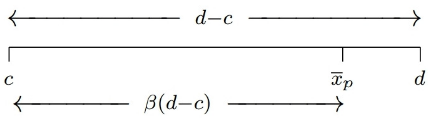

Esto es, la distancia entre $c$ y $\bar{x}$ es la misma que entre $\bar{x}$ y $d$, en otras palabras $\bar{x}$ es el punto medio del intervalo de extremos $c$ y $d$.

Ahora sea $\bar{x}_p = \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d = c + \frac{1}{3}(d - c)$.




Entonces la distancia entre $c$ y $\bar{x}_p$ es la mitad de la distancia entre $\bar{x}_p$ y $d$.

Sea ahora $\bar{x}_p = \alpha c + \beta d$. Como $\alpha + \beta = 1$, entonces $\bar{x}_p = (1 - \beta)c + \beta d$, esto es, $\bar{x}_p = c + \beta(d - c)$.




Por lo tanto la distancia entre $c$ y $\bar{x}_p$ es $\beta(d - c)$ y la distancia entre $\bar{x}_p$ y $d$ es $(1 - \beta)(d - c)$, con $\beta \in ]0, 1[$ (en los casos anteriores $\beta$ era $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, respectivamente).

Así, en el caso en que $\beta < \frac{1}{2}$, $\bar{x}_p$ estará más cerca de $c$ que de $d$ y si $\beta > \frac{1}{2}$, $\bar{x}_p$ estará más cerca de $d$ que de $c$.

Ahora reescribamos la fórmula de la moda.

$$M_0 = L_i + \tfrac{d_1}{d_1+d_2} a = L_i + \tfrac{d_1}{d_1+d_2}(L_s - L_i) = \tfrac{d_2}{d_1+d_2} L_i + \tfrac{d_1}{d_1+d_2} L_s.$$

Entonces $M_0$ resulta ser el promedio ponderado entre $L_i$ y $L_s$, con $\alpha = \frac{d_2}{d_1+d_2}$ y $\beta = \frac{d_1}{d_1+d_2}$.

Notar que, en el caso en que el intervalo contiguo por la izquierda al intervalo modal tenga mayor frecuencia que el intervalo contiguo por la derecha, esto es, cuando $f_1 > f_2$, se tendrá que $f_M - f_1 < f_M - f_2$, o sea $d_1 < d_2$. Esta desigualdad es equivalente a $\beta = \frac{d_1}{d_1+d_2} < \frac{1}{2}$. O sea, en este caso la moda $M_0$ estará más cerca del límite inferior del intervalo modal que del límite superior.

Análogamente, si $f_1 < f_2$, entonces $\beta = \frac{d_1}{d_1+d_2} > \frac{1}{2}$, por lo que $M_0$ estará más cerca del límite superior del intervalo modal que del límite inferior.

En el ejemplo de la Sección 5, $f_1 = 10$, $f_2 = 16$ y $f_M = 22$, por lo que $d_1 = 12$, $d_2 = 6$ y $\beta = \frac{2}{3}$. En consecuencia,

$$M_0 = \tfrac{1}{3} \cdot 575 + \tfrac{2}{3} \cdot 635 = 615.$$

En este caso $f_1 < f_2$, o sea, $\beta > \frac{1}{2}$, por lo cual la moda $M_0 = 615$ está más cerca de $635$ que de $575$ (la distancia entre la moda y $575$ es $40$, mientras la distancia entre la moda y 635 es 20).

## §8. Comentarios finales

Con esto finalizamos el análisis de la fórmula para calcular la moda desde datos agrupados. Esta fórmula es la que se presenta (sin ninguna explicación, salvo la identificación de cada símbolo que la compone) tanto en algunos textos como en otros recursos pedagógicos que se utilizan en el sistema escolar. Las preguntas que surgen en forma natural respecto a esta fórmula son: ¿valdrá la pena, al menos en el sitema escolar, presentar esta fórmula sin ninguna explicación sobre su construcción? ¿será necesario, al menos para el sistema escolar, que la moda esté más cerca del límite inferior o del límite superior del intervalo modal si este valor puede diferir tanto respecto al verdadero valor de la moda (como en el ejemplo de la Sección 5)?

**Agradecimientos.** El autor quiere agradecer a los revisores anónimos del artículo, por sus valiosas observaciones y sugerencias, las cuales permitieron mejorar la redacción del mismo.

## Bibliografía


Bacchini, e. a., R. (2018). *Introducción a la probabilidad y a la estadística*. Universidad de Buenos Aires. Descargado de http://bibliotecadigital.econ.uba.ar/download/libros/

Bennett, e. a., J. (2015). *Matemática 8° Básico, Texto del Estudiante*. Edición para el Ministerio de Educación de Chile, Editorial Galileo, Santiago, Chile.

Farigua, K. (2016). *Propuesta de enseñanza para medidas de tendencia central a través de objetos virtuales de aprendizaje*. Universidad Pedagógica Nacional, Bogota. Descargado de http://funes.uniandes.edu.co/12013/1/Farigua2016Propuesta.pdf

Firmfunda. (s.f.). https://firmfunda.com/statistics-basics. (Descargado la fecha de publicación del artículo)

León, P. e. a. (2012). *Matemática 8° Básico, Texto del Estudiante*. Edición para el Ministerio de Educación de Chile, Editorial MN, Santiago, Chile.

Math.Stackexchange. (s.f.). https://math.stackexchange.com/questions/3687290/derivation-of-the-equation-of-mode-for-grouped-data. (Descargado la fecha de publicación del artículo)

Saavedra, E. (2020). *Contenidos básicos de estadística y probabilidad, 3$^{ra}$ edición.* Editorial Usach, Santiago, Chile.

Salazar, S., C. y Del Castillo. (2018). *Fundamentos básicos de estadística*. Universidad Central del Ecuador. Descargado de https://www.dspace.uce.edu.ec

Sectormatematica. (s.f.). https://sectormatematica.cl/educmedia.htm. (Descargado la fecha de publicación del artículo)

Superprof. (s.f.). https://superprof.es/apuntes/escolar\protect\penalty-\@M/matematicas/estadistica/descriptiva/. (Descargado la fecha de publicación del artículo)

Topperlearning. (s.f.). https://www.topperlearning.com/answer/what-is-the-deivation-of-the-formulae-for-finding-median-and-mode-of-grouped-data-as-listed-in-class-10-mathematics-book/url59dcc. (Descargado la fecha de publicación del artículo)

Wiki2. (s.f.). https://wiki2.org/es/Moda_(estadistica). (Descargado la fecha de publicación del artículo)

Eugenio Saavedra Gallardo.
*Departamento de Matemática y C.C. , Universidad de Santiago de Chile*
(✉) *eugenio.saavedra@usach.cl*

Recibido: *17 de abril de 2020*.
Aceptado: *21 de diciembre de 2020*.
Publicado en línea: *5 de abril de 2021*.

# Gracias Ali

*por Adrián Paenza*

Alicia está sentada en la oficina que compartimos durante muchos años. Por las dudas: oficina 2090 del segundo piso del Pabellón Uno. La oficina es chica... Diría que muy chica. Estantes con libros (muchos) y sobre todo apuntes dentro de carpetas. Carpetas viejas llenas de polvo, llenas de tiza.

Un fichero enorme que ocupaba un lugar desproporcionado. Demasiado grande para un lugar tan pequeño. Allí guardábamos los ejercicios que habíamos preparado para las diferentes materias. Un pizarrón negro, quebrado en diferentes lugares. Tizas. Algunas amarillas. Un borrador viejo, con felpa que parecía de otro siglo, casi derruida. No sé por qué pero tengo la sensación que el pizarrón estaba siempre escrito, como si contuviera algunas verdades que había que conservar. Más aún: había un recuadro escrito a mano que decía "No Borrar".

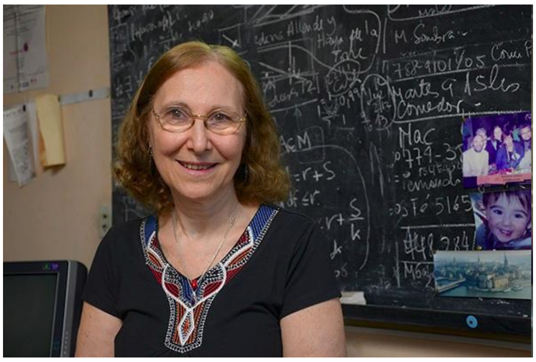


Figura 1. Alicia Dickenstein en la oficina 2090

Una ventana dividida en dos partes. Una fija, la superior. La otra, se abría hacia adentro. ¿Raro, no? Y además, con un espesor a prueba de aviones que aterrizaban y decolaban en el Aeroparque...muy cerca. Es que al construir la Ciudad Universitaria, el ruido de los aviones hacía añicos los vidrios.

Dos escritorios. El de Alicia mira a una pared. No lo dije pero las paredes, que alguna vez fueron grises, también fueron amarillas. Mi escritorio mira hacia la puerta de entrada. Pero en realidad, todo es una ilusión óptica, porque para ser sincero, todo es tan diminuto que todo mira hacia las paredes.

Alicia sigue sentada, mirándome sin verme. Está pensando. Mientras tanto, su mano derecha le cruza la cara (casi) para poder acomodarse el pelo del lado izquierdo, como si se lo estuviera estirando. Sería equivalente a encontrarse con un cartel y una leyenda: "Persona pensando". Claro, en este caso, sería "Alicia pensando".

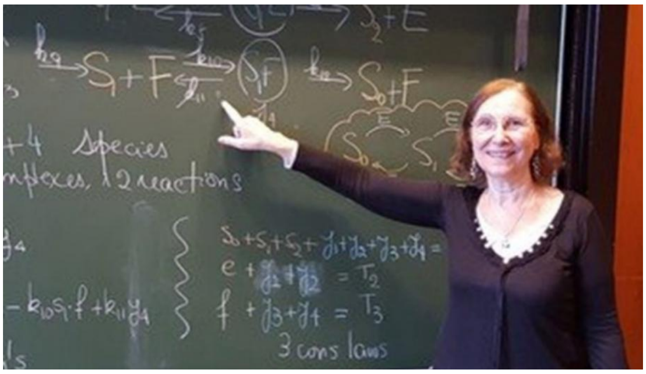



Figura 2. Alicia Dickenstein explicando la matemática de las reacciones químicas

Algunas veces, ese mismo pelo estaba aún húmedo, de una mujer que había salido apurada de la ducha pero que tenía un compromiso profesional en la facultad. Conmigo o con cualquier otra persona. No hay tiempo para coqueterías ni siquiera para esperar que el pelo 'se seque'.

La conocí como alumna en las prácticas de Topología (o Topo). Siempre con Carmen (Sessa). Más tarde el mundo que habitaba el departamento de Matemática, las conocería como 'la holomorfa' y 'la analítica'. Inseparables.

¿Cómo resumir una vida? ¿Cómo resumir el privilegio de haber compartido con ella horas y horas? ¿Cómo contar las veces que discutimos? Los ejercicios que pensamos juntos, las clases que preparamos, los concursos de los que fuimos partícipes y también jurados. Todo lo que aprendí. Los viajes. El legado; eso, el legado.

El camino que recorrió Alicia no existía, lo hizo ella. Lo construyó ella. Cuando se casó con Raúl (su inseparable compañero de ruta), es como si hubieran establecido un pacto: la Alicia 'matemática profesional' no se quedaría encerrada en la Argentina, y mucho menos en Buenos Aires. Alicia necesitaba romper las cadenas de lo pre-establecido. ¿Cuántos matrimonios conoce usted en donde el que viaja es la mujer y la que se queda con los niños pequeños (Mariana y Alejandro) es el marido? Y no hablo de un viaje, ni viajes de un par de días. No. Hablo de múltiples viajes, algunos de varias semanas, e incluso meses.

Alicia entendió muy rápido que la clave estaba en las redes, pero no las redes sociales (todavía ni siquiera eran un sueño), sino las redes con el mundo, con el mundo de la matemática. Las fue construyendo en forma incansable, golpeando puertas, proponiendo ideas, pagándose sus viajes para no perderse las novedades, pero también para aportar las suyas.

Estaba claro que la matemática se hacía en Buenos Aires, pero también en Córdoba o Tucumán, y se hacía en Berkeley o en Trieste. O en Seúl o en la ciudad de México o en Bahía Blanca o Bariloche. O en China. Los viajes eran cada vez más frecuentes. Sus trabajos empezaban a tener trascendencia, local e internacional.

Como su (nuestro) mentor, el queridísimo e inolvidable Miguel Herrera murió tan joven, Alicia se quedó sin guía. En el medio del puente, ya bien entrada la noche, la persona que llevaba la linterna, aquél que sabía por dónde ir, se nos escapó entre los dedos en forma inexplicable. En lugar de sentarse y penar por su fortuna, aún a costa de tener que frotar dos piedras y empezar todo de nuevo, de re-descubrir el fuego, Alicia construyó el camino. Ese mismo camino que la llevó a ser la primera mujer directora del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA. Y lo escribo así, con todas las letras, con todas las palabras, para ponerle la 'pompa' que se merece.

Y fueron llegando los premios. Y los reconocimientos. Y la elección en el 2014 como una de las vicepresidentas de la Unión Internacional de Matemática. Escribí "Internacional". Y escribí "que la eligieron". Su curiosidad la llevó a lugares insospechados, pero no me refiero a la geografía sino dentro del mundo de la matemática misma. Y después la biología. Las conexiones. Las redes. Después empezaron a llegar los nietos, su otra pasión: los niños. Y el Matemax, el libro con el querido e inigualable Juan Sabia.


FIGURA 3. Foto gentileza: Premio Internacional L'Oréal-UNESCO "Por las Mujeres en la Ciencia".

Y acá, paro. Si escribiera que Alicia es la mejor matemática argentina de la historia, seguramente sería considerado un atrevido. Y posiblemente lo sea. Pero le sugeriría que viera sus contribuciones en diferentes disciplinas y los reconocimientos que recibió. Pero de lo que estoy seguro es que Alicia, cuando se quedó sola en ese camino, sin "padre, tutor o encargado", como decía en las libretas a mediados del siglo pasado, se fue como una mochilera a recorrer Europa… y Estados Unidos.. y Asia. Peleó por los derechos de la mujer, por la igualdad de género cuando todavía no era un 'trending topic', como se acostumbra a decir ahora. Y ganó. Su tarea es hoy señalada y distinguida por ese mismo mundo que ponía las piedras.

Su curiosidad infinita, la seguridad que siempre exhibió para exponerse vulnerable, su audacia para decir 'no sé, decímelo de nuevo, no te entiendo', sus alumnas y alumnos, sus charlas y sus clases, sus proyectos e iniciativas… ¿Qué más tiene que hacer una persona para dejar una marca en la vida?

Este es un brevísimo resumen de alguien que fue testigo (y lo sigue siendo) de una mujer única, pionera y que merece el mayor reconocimiento en vida, cuando ella lo pueda disfrutar. Y me voy a atribuir una representatividad que nadie me confirió, para decirle: "Gracias Ali. Gracias por todo".

# Sección de Problemas

☞ *por Juan Pablo Rossetti*

Los siguientes problemas están pensados para un público amplio. Las soluciones se encuentran en la página siguiente.

*Problema 1.* *Tiempo para armar un rompecabezas.* Si te lleva una hora armar un rompecabezas de 100 piezas, ¿cuánto tiempo te llevará armar uno de 200 piezas?

En general: si lleva $x$ horas armar un rompecabezas de $N$ piezas, ¿cuántas horas llevará, aproximadamente, armar uno de $2N$ piezas?

[Aclaración: para precisar más matemáticamente el problema, pensemos que en lugar de ser un rompecabezas de 100 piezas, es uno de miles de piezas en el que solo te falta colocar 100 piezas en 100 huequitos que quedaron, y que ni los colores ni las formas te ayudan, sino que hay que "ir probando" de a una pieza hasta dar con la que encaja perfectamente.

La pregunta sería: si te llevó una hora colocar las últimas 100 piezas de este rompecabezas, ¿cuánto tiempo, aproximadamente, te hubiera llevado colocar las últimas 200 piezas?]

---

*Problema 2.* *Jugando al ping pong*. Tres amigos pasan un buen rato jugando al ping pong. Se enfrentan dos y cuando uno pierde, le deja su lugar al que está afuera, y así sucesivamente, juegan muchos partidos.

Cuando terminan, se dan cuenta que uno jugó 17 partidos, otro 15 y otro 10. ¿Quién perdió el 6to partido?

---

*Problema 3.* *Suma de diferencias*. A los números $1, 2, 3, \ldots, 2n$, los partimos en dos conjuntos, digamos $A$ y $B$, de $n$ números cada uno y vamos a sumar las diferencias (en valor absoluto) entre el número menor de $A$ y el mayor de $B$, con la diferencia entre el 2do menor de $A$ y el 2do mayor de $B$ y así sucesivamente hasta la diferencia entre el mayor de $A$ y el menor de $B$. Calcular cuánto da esta suma y justificar porqué.

En símbolos, si ordenamos $A$ de menor a mayor (es decir, $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$) y ordenamos $B$ de mayor a menor (es decir, $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$), calcular

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n|,$$

con demostración.

---

## SOLUCIONES

*Solución 1.* *Respuesta:* 4 horas. Y en general: $4x$ horas.

En el modelo propuesto en la Aclaración, el tiempo aproximado que lleva colocar la primera de $N$ piezas varía entre 1, si justo acertamos, y $N$, si fuimos probando con todas y la última era la correcta (en unidades de tiempo). Esto nos da un promedio de $\frac{1+N}{2}$ para la primera de $N$ piezas. Para llenar el 2do hueco, hacemos lo mismo y nos da un promedio de $\frac{1+(N-1)}{2}$. Así seguimos hasta que la última pieza nos lleva solo 1 tiempo. Al sumar queda:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1+k}{2} = \frac{1}{2}\frac{(N+3)N}{2} = \frac{1}{4}(N^2+3N).$$

Haciendo una fuerte simplificación podemos pensar que el crecimiento del tiempo en función de $N$, el número de piezas, es cuadrático en $N$. Por lo tanto, colocar 200 piezas demoraría, aproximadamente, $2^2 = 4$ horas.

En general, armar algo de $2N$ piezas llevará aproximadamente 4 veces el tiempo que lleva armar algo de $N$ piezas.

*Solución 2.* *Respuesta:* Perdió el 6to partido el amigo que jugó solo 10 partidos.

Si contamos, hubo $\frac{17+15+10}{2} = \frac{42}{2} = 21$ partidos. Un jugador nunca queda afuera en dos partidos consecutivos, de modo que el que solo jugó 10 partidos, jugó necesariamente el 2do partido, el 4to, el 6to, etc, hasta el vigésimo partido, es decir, todos los partidos pares y ninguno impar. Entonces perdió los 10 partidos que jugó, por lo tanto él perdió el 6to partido.

*Solución 3.* *Respuesta:* Da $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$.

Esto es así porque si, por ejemplo, $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $B = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$, entonces $|a_1 - b_1| = |1-2n| = 2n-1$, $|a_2 - b_2| = |2-(2n-1)| = 2n-3$,…,$|a_n - b_n| = |n-(n+1)| = 1$.

Lo notable ahora es que la suma da siempre igual, sin importar cómo sean los conjuntos $A$ y $B$. Para ver esto, supongamos que tenemos $b_j = a_i + 1$ y que queremos intercambiar estos dos elementos de conjuntos, es decir, que el $b_j$ pase a $A$ y el $a_i$ pase a $B$. Veamos que la suma del enunciado no se modifica al hacer este intercambio. Notemos que los únicos valores que cambiarían en la suma serían $|a_i - b_i|$ y $|a_j - b_j|$.

Hay 3 casos: si $i = j$, entonces en lugar de tener dos términos donde hay cambios, habría uno solo, el $|a_i - b_i|$, que por tener valor absoluto, no cambiaría.

Si $i < j$, entonces $|a_i - b_i|$ baja uno, pues el nuevo $a_i$ es ahora el viejo $a_i$ más uno, mientras que $b_i$ permanece igual y es mayor a estos. Pero el término $|a_j - b_j|$ sube uno pues el nuevo $b_j$ es ahora menor por uno al viejo $b_j$ y se alejó un lugar de $a_j$, que es mayor. Por lo tanto, el cambio se compensa y la suma total permanece igual.

Si $i > n + 1 - j$, sucede algo similar, pues $|a_i - b_i|$ sube uno mientras que $|a_j - b_j|$ baja uno.

Con esto, queda demostrada la invariancia de la suma del enunciado, pues se puede lograr armar cualquier par de conjuntos $A$ y $B$ a partir del ejemplo y una sucesión de intercambios como el analizado entre $a_i$ y $b_j$ contiguos.

Vale la pena mencionar que hay diversas demostraciones de esta invariancia.

## ¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones? ¿Y una fórmula general?

- $\{a_n\}$: 1, 2, 6, 15, 31, 56, 92, 141, 205, 286 , . . .
- $\{b_n\}$: 1, 10, 12, 21, 100, 102, 111, 120, 122, 201, 210, 212, 221, 1000, 1002, 1011, 1020, 1022 , . . .
- $\{c_n\}$: 1, 5, 14, 33, 72, 151, 310, 629, 1268, 2547, 5106, 10225, 20464, 40943, 81902, 163821 , . . .
- $\{d_n\}$: 1, 1, 2, 3, 7, 16, 65, 321, 4546, 107587, 20773703, 11595736272 , . . .

[Ayuda para $\{d_n\}$: cada término tiene en cuenta los dos términos anteriores.]

Podés encontrar las soluciones en la página siguiente.

## Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $a_{11} = 386$.
  $a_{n+1} = a_n + n^2$.
- $b_{19} = 1101$.
  Son los números impares escritos en base 3. O lo mismo, los números ordenados, salteados, usando solo los dígitos 0, 1 y 2.
- $c_{17} = 327660$.
  $c_n = 2c_{n-1} + (n+1)$. También $c_{n+2} = 3c_{n+1} - 2c_n + 1$.
- $d_{13} = 431558332068481$.
  $d_{n+1} = d_{n-1}^2 + d_n$.

Viene de la página anterior.