

Revista de Educación Matemática

Consejo Editorial

Editor Ejecutivo

Leandro Cagliero, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Editores Asociados

Juan Carlos Pedraza, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Mónica Villarreal, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Comité Editorial

Abraham Arcavi, Weizmann Institute of Science, Israel

Susana Paula Graça Carreira, Universidade do Algarve, Portugal

Carlos D'Andrea, Universitat de Barcelona, España

Cristina Esteley, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

Patricio Herbst, Universidad de Michigan, Estados Unidos

Teresa Krick, Universidad de Buenos Aires - CONICET, Argentina

Ricardo Podestá, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Nélia Maria Pontes Amado, Universidade do Algarve, Portugal

Juan Pablo Rossetti, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Jhony Alexander Villa-Ochoa, Universidad de Antioquia, Colombia

Registro Nacional de la Propiedad Intelectual N° 168024

ISSN 0326-8780 (versión impresa)

ISSN 1852-2890 (en línea)

Página web: <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index>

Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

Revista de Educación Matemática

Volumen 35, N° 3 – 2020

ÍNDICE

- Editorial 3

ARTÍCULOS

- **INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS: EL USO DE GEOGEBRA**
Marisa Álvarez y Rodolfo Murúa 7
- **INFLUENCIA DE LAS CREENCIAS DE LOS ESTUDIANTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**
Arnulfo Fajardo Valencia y David Benítez Mojica 21
- **EXTENSIONES DE LOS TEOREMAS DEL VALOR MEDIO DEL ANÁLISIS DE UNA VARIABLE**
Ginés R. Pérez Teruel 41
- **EL CRECIMIENTO EXPONENCIAL: UN DESAFÍO A LA INTUICIÓN**
Marilina Carena 53
- **RESEÑA DE LA TESIS DOCTORAL DE NICOLÁS GEREZ CUEVAS**
Luis Alicia B. Acin y Mónica E. Villarreal 73

SECCIONES FIJAS

- **¿Sabías que...?**
por L. Cagliero y R. Podestá 37
- **Sección de Problemas**
por J.P. Rossetti 79

También encontrarás al final las *¡Sucesiones al toque!*

Editorial

CERRAMOS el 2020. Año complejo, atravesado por una extensa cuarentena a raíz de la pandemia por COVID 19 que fuera declarada por la Organización Mundial de la Salud el 11 de marzo de este año. Un año con muchas pérdidas de vidas a raíz de esta peste. Un año con profundas tristezas por las partidas de personajes emblemáticos de nuestro país, como lo son los geniales Quino y Maradona. Un año en que la importancia de la ciencia y de la educación se han puesto de manifiesto de una manera dolorosamente clara. La editorial de Juan Carlos Pedraza, en el número 2 de este volumen, se refiere a este último aspecto.

CON este número completamos el volumen 35 de nuestra revista y en él contamos con cuatro artículos. Rodolfo Murúa y Marisa Álvarez presentan el análisis de una tarea de lectura de gráficos cartesianos en el entorno del software GeoGebra, anticipando posibles acciones de estudiantes al resolverla. A través de un *análisis a priori* se muestran y contrastan técnicas que potencialmente se podrían poner en juego en este entorno de geometría dinámica con aquellas de un entorno “de lápiz y papel”. En particular, se analizan diversas posibilidades que las herramientas del software utilizado ofrecen para abordar este tipo de tareas. El texto de Arnulfo Fajardo Valencia y David Benítez Mujica trae aportes que invitan a pensar sobre la influencia que las creencias de los estudiantes en torno a la matemática pueden tener en los procesos de resolución de problemas.

Con la mirada puesta en la matemática, el texto de Ginés R. Pérez Teruel muestra extensiones de los teoremas del valor medio que involucran funciones reales de una variable real. El autor propone un uso extensivo del teorema de Rolle para conseguir generalizaciones de los clásicos teoremas del valor medio. A partir de la modificación de las funciones auxiliares que usualmente se construyen para que satisfagan las condiciones del teorema de Rolle, es posible deducir otros teoremas parecidos al teorema del valor medio de Lagrange. El artículo presenta una versión del teorema del valor medio de Lagrange para funciones compuestas, llegando a una generalización que contiene, como casos particulares, a todos los

teoremas anteriores, incluido el propio teorema del valor medio de Lagrange. Un interesante ejercicio de generalización matemática en acción.

El artículo de Marilina Carena trae una recopilación de conocidos problemas relacionados con el crecimiento exponencial, una expresión que en este año ha estado particularmente presente en noticias periodísticas o en trabajos e investigaciones científicas asociadas con la pandemia por COVID 19; un tipo de crecimiento que desafía la intuición y merece una atención especial en la educación matemática. Además de un minucioso estudio aritmético en torno a la famosa leyenda de Sissa y los granos de trigo en el tablero de ajedrez y del análisis pormenorizado de la estafa del telar de la abundancia, entre otros ejemplos de crecimiento exponencial mostrados en el artículo, la autora se detiene en el análisis de modelos exponenciales de contagio y explica el significado de una expresión que atravesó el discurso sanitario del 2020: *aplanar la curva* de contagios para que el sistema sanitario no colapse.

Finalmente, en este número podrán leer la reseña de una tesis doctoral sobre el oficio docente en la educación matemática de jóvenes y adultos. Se trata de la tesis titulada: *La enseñanza de la matemática en el nivel primario de la modalidad de Educación Permanente de Jóvenes y Adultos: saberes docentes, prácticas y condiciones institucionales*. Esta tesis, de autoría de Nicolás Gerez Cuevas, fue dirigida por Dilma Fregona y Fernanda Delprado y defendida en el marco del Doctorado en Ciencias de la Educación de la Facultad de Filosofía y Humanidades de la Universidad Nacional de Córdoba. Esperamos que esta breve reseña sea una invitación para su lectura.

RECORDAMOS que en la editorial del último número del volumen 34, en diciembre de 2019, comentábamos sobre la realización de la 14^a Conferencia Internacional de Educación Matemática, ICME 14, según la sigla en inglés para *International Conference in Mathematical Education 14*. La misma estaba prevista para ser realizada en Shangai (China), entre el 12 y el 19 de julio de 2020. A mediados de marzo de 2020, el Comité Organizador y la Comisión Internacional de Instrucción Matemática, ICMI (*International Commission on Mathematical Instruction*), resolvieron suspender el evento y posponerlo para 2021. Recientemente, el 6 de noviembre, se comunicó oficialmente que ICME 14 se realizará, con un formato híbrido, entre el 11 y el 18 de julio de 2021. La información del congreso puede seguirse en la página: <https://www.icme14.org>. Ojalá que podamos disfrutar de ese evento tan caro para la comunidad internacional de educación matemática.

PARA terminar, una buena noticia, a pesar del año difícil y atípico que estamos viviendo. Queremos cerrar esta editorial compartiendo con ustedes el

logro de un importante objetivo, tras haber transitado un proceso demorado y dedicado: la indexación de la Revista en varios sistemas de información académica (Latindex, DOAJ, REDIB y Google Académico). Seguiremos trabajando para lograr nuevas indexaciones en otros sistemas de reconocimiento internacional.

Esperamos que en 2021 nos sigan acompañando como lectores y como autores, con contribuciones que enriquezcan las diferentes secciones que conforman la Revista. También esperamos que 2021 sea un mejor año para todos.

Mónica Villarreal

NOTA: Es muy importante para la RevEM contar con la colaboración de ustedes a través del envío de contribuciones de calidad para publicar. Solicitamos enviar los artículos preferentemente a través del sistema en la página web, pero si tienen inconvenientes pueden hacerlo a la dirección de correo electrónico que figura abajo.

Página web: <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index>

Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS: EL USO DE GEOGEBRA

Marisa Álvarez y Rodolfo Murúa

RESUMEN. Son bien conocidos los problemas donde los alumnos y las alumnas tienen que interpretar y “leer” información de un gráfico de una función (o de una relación entre dos variables) dada una situación en contexto extramatemático. Aquí suelen incluirse preguntas para hallar el correspondiente de cierto valor de abscisa (u ordenada), donde a veces la información puede deducirse de forma exacta y otras aproximada. También se pueden analizar variaciones o cuestiones que tengan que ver con el crecimiento o decrecimiento de la función. Ahora bien, ¿qué ocurre si el gráfico viene dado en GeoGebra? Los procedimientos (o las técnicas) para deducir información de él, ¿son las mismas que al trabajar con lápiz y papel? En este artículo anticiparemos distintos tipos de procedimientos que podrían implementar las y los estudiantes. Algunos de ellos están más cercanos al trabajo realizado en lápiz y papel y otros, en nuestra opinión, son sumamente novedosos. Por otro lado, nos podemos preguntar cuáles son los aportes, en cuanto a conocimientos matemáticos, que brinda el programa al trabajar con gráficos “dinámicos”. Cabe aclarar que cualquier potencialidad que tenga el *software* no se puede desligar de la intencionalidad docente.

Palabras clave: registros de representación, procedimientos instrumentales, GeoGebra.

Keywords: registers of representation, instrumental procedures, GeoGebra.

ABSTRACT. Problems in which students have to interpret and “read” information from a graph of a function (or a relationship between two variables), given a situation in an extra-mathematical context, are well known. Questions to find the corresponding value of a certain abscissa (or ordinate), in which sometimes the information can be deduced exactly and others approximately, are usually included. It is also possible to analyze variations or issues related to increasing or decreasing intervals of a function. Now, what happens if the graph is presented in GeoGebra? Are the procedures (or techniques) for deducing information from it the same as working with pencil and paper? In this article, we will anticipate different types of procedures that could be implemented by students. Some of them are closer to the work done with pencil and paper and others, in our opinion, are extremely novel. Besides, we may ask ourselves what are the contributions, in terms of mathematical knowledge, that the software provides when working with “dynamic” graphs. It should be clarified that any potentiality of the software cannot be separated from the teaching intention.

§1. Introducción

Hay algunas investigaciones que dan cuenta de la “potencia” que tiene el programa GeoGebra para modelizar un problema geométrico y luego estudiar posibles relaciones entre pares de variables involucradas analizando los gráficos de las funciones resultantes (Arcavi & Hadas, 2000; Borsani et al., 2018); aunque para trabajar con este tipo de problemas, las y los estudiantes deben tener varios conocimientos geométricos y sobre todo, conocer la noción de función. Es por esto que, nos propusimos indagar sobre un contenido previo que es la interpretación y la lectura de gráficos; la novedad radica en que, en nuestra propuesta, los gráficos están presentados en GeoGebra.

Sostenemos que un gráfico dado en lápiz y papel y otro dado en GeoGebra son distintas representaciones. En este último caso, es posible cambiar la escala, visualizar o no los ejes, hacer *zoom*, trazar rectas horizontales o verticales, utilizando determinadas herramientas del programa, e intersecarlas con el gráfico, marcar un punto sobre un gráfico e ir desplazándolo para ver sus coordenadas, etc. Por lo tanto, varios de los procedimientos para leer información de un gráfico son distintos a los utilizados en lápiz y papel. Es por esto, que el estudio de estas dos representaciones del objeto gráfico, en lápiz y papel y en GeoGebra, debiera diferenciarse.

§2. Referencias teóricas

En el artículo mostraremos distintas anticipaciones sobre algunos posibles procedimientos de las y los estudiantes a la hora de interpretar y leer información de un gráfico dado en GeoGebra; por ello consideramos pertinente hacer referencia a

la noción de *técnica instrumentada* (Artigue, 2007). Con lo cual, es necesario mencionar la idea de *técnica* de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997). Según esta teoría, toda tarea se puede resolver por una o varias técnicas, pensando a la técnica como una manera de hacer, no necesariamente algorítmica, ni siquiera algoritmizable.

Una técnica es una manera de resolver una tarea y, tan pronto como uno va más allá del cuerpo de tareas rutinarias de una institución determinada, cada técnica es un conglomerado complejo de razonamiento y trabajo rutinario. Me gustaría recalcar que las técnicas se perciben y evalúan con mayor frecuencia en términos de su valor pragmático, es decir, centrándose en su potencial productivo (eficiencia, costo, campo de validez). Pero también tienen un valor epistémico, ya que contribuyen a la comprensión de los objetos que involucran, por lo que las técnicas son fuente de interrogantes sobre el conocimiento matemático. (Artigue, 2002, p.4, traducción propia)"

A las técnicas utilizadas en un ambiente computarizado, (Artigue, 2007) las llama **técnicas instrumentadas**. También este tipo de técnicas tienen un valor pragmático y uno epistémico. Como se mencionó en la cita anterior, la investigadora hace referencia al valor pragmático cuando el sujeto puede actuar sobre las representaciones de un objeto determinado permitiendo producir ciertos resultados. Se habla de valor epistémico cuando luego de llevar a cabo el procedimiento, se pudo comprender mejor al objeto en cuestión, se aprendió algo que hasta el momento no se conocía, se abren nuevas preguntas a ser indagadas, etc. Al igual que en un entorno de lápiz y papel, una técnica instrumentada resulta interesante si contiene tanto valores pragmáticos como epistémicos. Cuando se trabaja con un problema en un ambiente computarizado es esperable que surjan, por parte de las y los estudiantes, procedimientos propios de ese entorno. Luego, el o la docente determinará cuáles son valiosos por sus valores epistémicos y pragmáticos, para luego sistematizarlos y darles el "status" de técnicas.

Por otro lado, una potencialidad muy interesante que tiene el programa GeoGebra es la posibilidad de trabajar simultáneamente con una vista algebraica y una vista gráfica¹. En este artículo estaremos interesados, en particular, por las distintas representaciones del objeto "punto".

(Duval, 1993) fue uno de los primeros investigadores en analizar las representaciones de los objetos bajo su teoría de registros de representación semiótica. La enseñanza de la matemática trata con muchos objetos ideales, abstractos, como

¹Estos nombres fueron tomados de las versiones anteriores al GeoGebra 6. En la versión actual esas "vistas" no tienen una denominación.

por ejemplo los números, las funciones, los puntos o las figuras dentro del campo de la geometría. Ahora bien, como estos objetos teóricos no son accesibles, es necesario representarlos de alguna manera; la complejidad radica en que cada objeto puede tener más de una representación. El desafío para los y las docentes es doble: por un lado, que sus estudiantes sepan diferenciar al objeto de sus representaciones y por el otro, que además sepan coordinarlas. Cuando se establecen vínculos y relaciones entre distintos registros de representación se dice que se realiza una coordinación entre registros. Para este investigador (Duval, 1993) la existencia de al menos dos registros de representación de un mismo objeto, el tratamiento (transformaciones dentro del mismo registro), la conversión de uno al otro y la coordinación entre los mismos, son todas condiciones necesarias para que haya aprendizaje con respecto a la aprehensión del objeto teórico en cuestión por parte de las y los estudiantes.

§3. Un posible problema para ser llevado al aula

A continuación, haremos un despliegue del análisis a *priori* de un problema para ser trabajado con GeoGebra. Decimos que es un estudio a *priori* porque tiene un carácter anticipatorio: es previo a que la actividad se lleve a cabo en el aula. En él, incluimos posibles procedimientos instrumentados por parte de las alumnas y los alumnos y algunas intervenciones docentes frente a dichos procedimientos. Esperamos que este estudio sea un insumo para la gestión de una clase.

El problema analizado es la cuarta actividad de una secuencia didáctica destinada a estudiantes de segundo año de la escuela secundaria. En los primeros problemas de la misma², se propone un trabajo en torno a las distintas representaciones de los puntos y también se trabaja sobre las nociones de paralelismo y perpendicularidad. Luego, se plantea comenzar a trabajar con la interpretación y lectura de gráficos en lápiz y papel y a continuación, se propone esta misma tarea con GeoGebra.

Los objetivos generales de la secuencia son: que las y los estudiantes identifiquen que un punto permite relacionar dos variables en un contexto dado, que reconozcan las distintas representaciones de un punto y sean capaces de coordinarlas, que deduzcan el tipo de información que se puede inferir a partir de un gráfico y que además analicen el crecimiento o el decrecimiento de una relación entre variables³.

²Para ver la secuencia, el lector o la lectora pueden ingresar a este enlace: https://drive.google.com/file/d/1Q0tVj1-6jYEhW_mli_ZCVRd8SSPh2sZs/view

³Hablamos de relación entre variables porque algunos gráficos no se corresponden con el de una función.

3.1. Lectura e interpretación de gráficos. En esta sección presentaremos la consigna del primer problema a ser trabajando con GeoGebra, posibles procedimientos de las y los estudiantes, tanto en lápiz y papel como con el programa, y algunas posibles intervenciones docentes.

En cuanto a los objetivos, se espera que las alumnas y los alumnos sigan relacionando las distintas representaciones de un punto, utilicen y luego identifiquen que hay varias estrategias para hallar el correspondiente de un valor de abscisa (u ordenada) determinado. Por último, se pretende poner a discusión las distintas respuestas dadas a partir del uso del GeoGebra, en comparación a las obtenidas cuando el gráfico viene dado en lápiz y papel.

Para abordar los objetivos mencionados, proponemos plantear la siguiente tarea:

Un grupo de estudiantes realizó una excursión. El siguiente gráfico muestra la distancia del colectivo al colegio (en km) en función del tiempo transcurrido desde la partida.

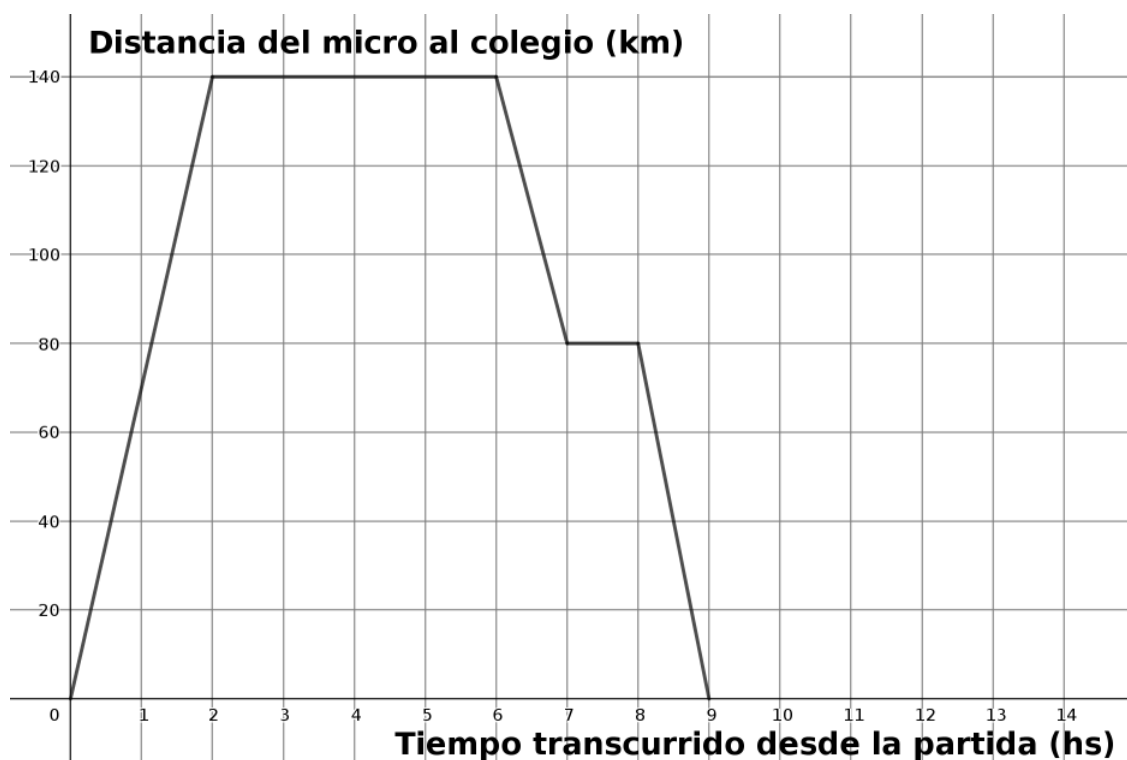


FIGURA 1. Gráfico en papel correspondiente a la tarea.

Dada la siguiente tabla, completen la primera columna viendo el gráfico en lápiz y papel. Luego abran el archivo de GeoGebra y completen la segunda y tercera columna. Compáren si sus respuestas fueron las mismas analizando los dos gráficos presentados.

	Pregunta	Respuesta viendo el gráfico en papel	Respuesta viendo el gráfico en GeoGebra	Herramientas utilizadas
a)	¿A qué distancia se encontraban después de una hora de viaje? ¿y después de 7 horas? ¿y después de media hora?			
b)	¿En qué momento los estudiantes se encontraban a 100 km del colegio? ¿Y a 80 km? ¿Y a 110 km?			
c)	¿A cuántos kilómetros estaba el lugar que visitaron?			
d)	¿Cuánto tiempo duró la visita al lugar?			
e)	¿Hubo alguna parada a la ida? ¿y a la vuelta?			
f)	¿Cuánto duró la excursión completa (incluyendo el viaje de ida y el de vuelta)?			
g)	¿Cuántos kilómetros recorrió el colectivo?			
h)	A la vuelta, ¿la velocidad del colectivo fue siempre la misma?			

FIGURA 2. Figura 2: Tabla comparativa de respuestas a la tarea.

Como se menciona en el enunciado, el problema planteado tiene dos instancias. En la primera, los alumnos y las alumnas tienen que analizar el gráfico dado en papel (Figura 1) y en la segunda, en GeoGebra⁴. Luego de estudiar cada gráfico, deben completar la información en la tabla (Figura 2) utilizando la columna correspondiente y comparar la información registrada.

3.2. Posibles procedimientos de las y los estudiantes y algunas intervenciones docentes. A continuación, presentaremos diversos procedimientos por parte de las y los estudiantes con algunas intervenciones docentes. Elegimos analizar los apartados en los cuales las posibles estrategias permiten evidenciar el contraste entre los procedimientos en lápiz y papel y aquellos con GeoGebra. Es por esto, que focalizaremos nuestro estudio en los ítems a) y b), relacionando el trabajo en ambos entornos.

3.2.1. Viendo el gráfico en lápiz y papel. Respecto del ítem a), pensamos que es probable que las y los estudiantes respondan que no se puede saber la distancia a la hora de haber partido porque no es un valor exacto. También anticipamos que

⁴Enlace al archivo: <https://www.geogebra.org/classic/ehugntk7>

pueden utilizar dos reglas apoyadas perpendicularmente para dar una respuesta aproximada a la pregunta planteada.

El ítem b) tiene una complejidad mayor porque el dato brindado se tiene que identificar en el eje y . Nuevamente las respuestas son aproximadas. Al igual que en el punto anterior, para lograr una mayor exactitud quizás los alumnos y las alumnas utilicen dos reglas, una apoyada sobre la recta horizontal $y = 100$ y otra apoyada perpendicularmente a ella sobre los puntos de intersección con el gráfico de la función. Es de esperar que solamente miren el primer valor y respondan 1,5hs aproximadamente. Aquí pensamos en no realizar ninguna intervención para que luego las y los estudiantes quizás entren en una contradicción en la segunda parte del problema con GeoGebra.

Con respecto a los 80 km, hay toda una franja horaria en la cual el colectivo estaba a dicha distancia (además del valor cercano a 1 hora). En general, las alumnas y los alumnos suelen identificar solamente a los extremos del intervalo, en este caso las 7hs y las 8hs.

3.2.2. Viendo el gráfico en GeoGebra. Si bien muchas respuestas se obtendrán de la observación de la pantalla, esa lectura requiere de varios conocimientos matemáticos, como ser: coordenadas de un punto, rectas paralelas, perpendiculares, horizontales, verticales, entre otros. Respecto del ítem a) al abrir el archivo (Figura 3) no se visualiza el número 1 en el eje x .

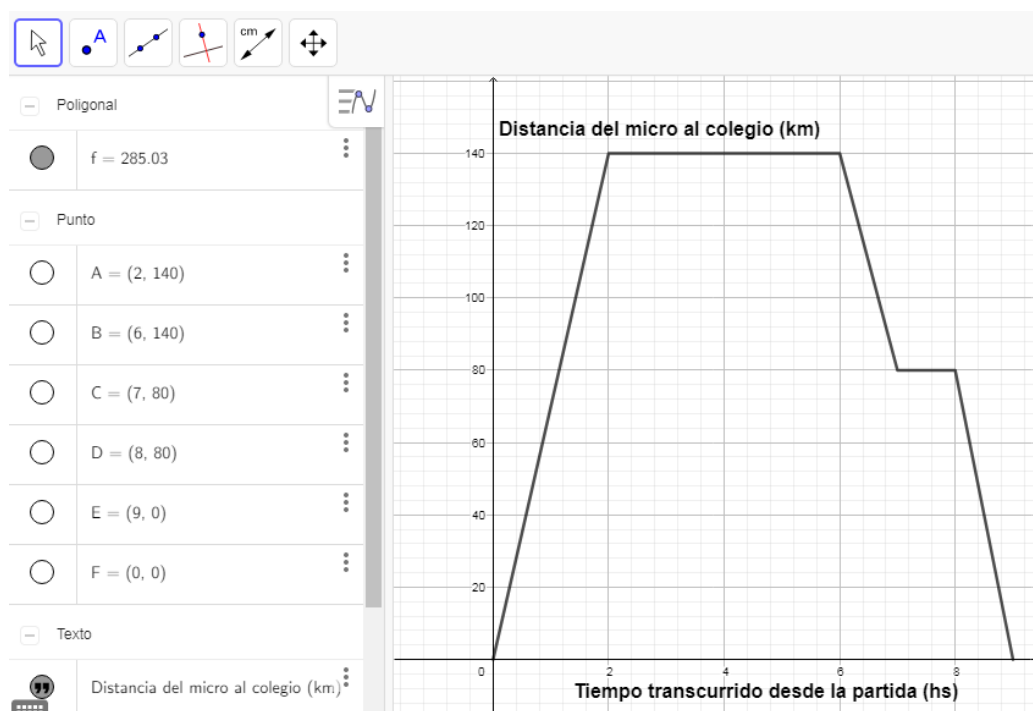


FIGURA 3. Captura de la pantalla inicial que se observa al abrir el archivo.

En caso de ser necesario, pensamos comentar cómo se hace para cambiar la escala de los ejes coordenados, por ejemplo, haciendo *zoom*. Al hacer esto, se podrían modificar las escalas hasta obtener un gráfico como el de la Figura 4 y visualizar que la distancia solicitada es de 70 km.

También se podría trazar una recta vertical por $x = 1$ ingresando por ejemplo los puntos $(1, 0)$ y $(1, 20)$ en la barra de entrada y luego mediante la herramienta *Recta* trazar la recta que pasa por dichos puntos (Figura 5).

Finalmente se puede marcar el punto de intersección entre la recta vertical y el gráfico y leer las coordenadas de dicho punto en la Vista Algebraica.

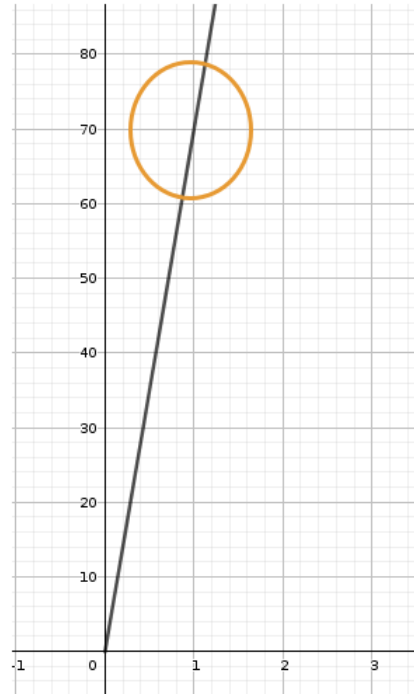


FIGURA 4. Captura de pantalla del gráfico con *zoom* en el cual la escala muestra el 1 en el eje x y el 70 en el eje y .

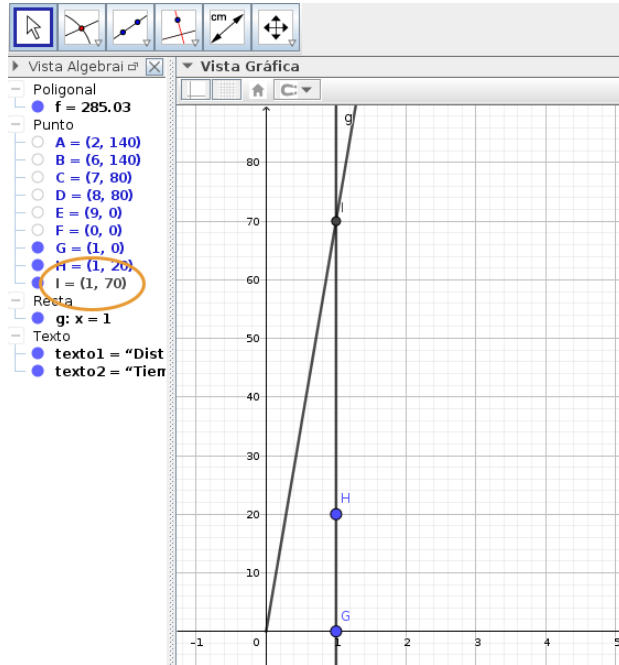


FIGURA 5. Captura de pantalla del gráfico con *zoom* en el cual la escala muestra el 1 en el eje x y el 70 en el eje y .

punto es “a ojo”, tal vez su abscisa no sea 1 sino algún valor cercano. Ante esta

La estrategia previamente descrita involucra conocimientos matemáticos ya que, por un lado, para construir una recta vertical que pasa por dos puntos se tiene que identificar que éstos tienen que tener la misma abscisa y por otro, se tienen que interpretar las coordenadas del punto de intersección.

En este caso, este procedimiento instrumentado nos resulta interesante tanto por su valor pragmático como por su valor epistémico.

En caso de utilizarse la herramienta *Punto* (en lugar de ingresarlo en la barra de entrada), dado que el trazado de un

situación, una posible intervención docente consiste en invitar a utilizar el *zoom* para visualizar, apelando a la cuadrícula, si ante la ampliación la recta construida es vertical o no. También, para fomentar la coordinación entre los distintos registros de los puntos, se puede preguntar cómo nos damos cuenta si la recta es vertical mirando la vista algebraica del programa.

Con respecto a la pregunta b) “¿En qué momento los estudiantes se encontraban a 100 km del colegio? ¿Y a 80 km? ¿Y a 110 km?” se podría trazar una recta horizontal a partir de dos puntos cuyas ordenadas sean los valores indicados y luego obtener las intersecciones de esta recta con el gráfico. Por ejemplo, como se muestra en la Figura 6, para responder la primera pregunta, se pueden marcar dos puntos con ordenada 100 y luego con la herramienta *Recta*, trazar la recta que pasa por ellos.

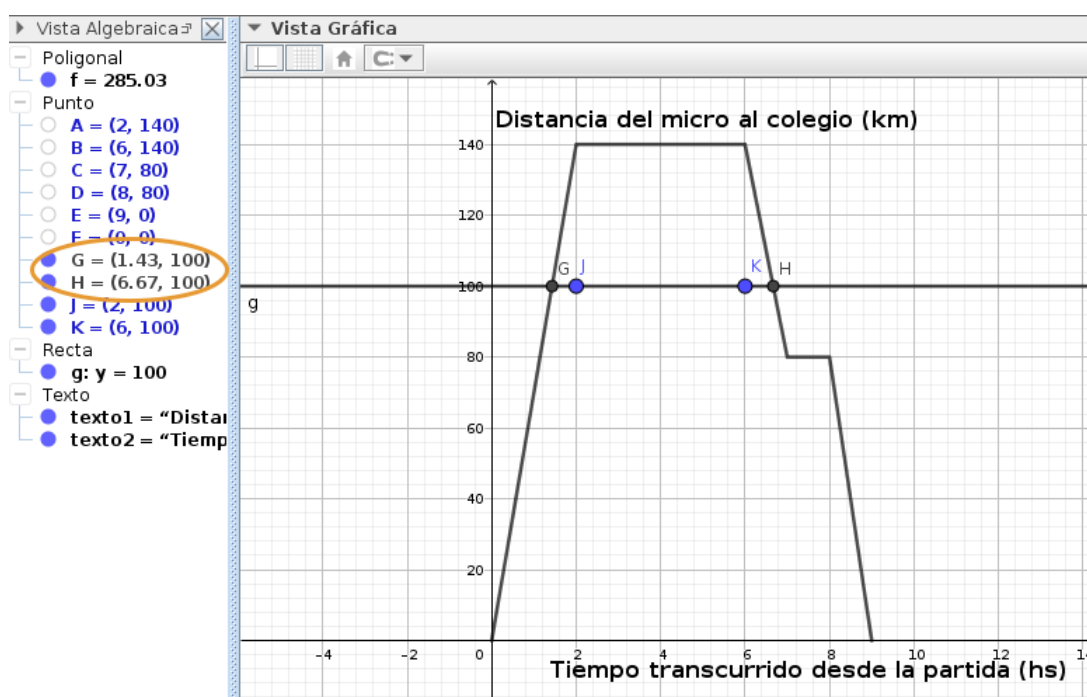


FIGURA 6. Trazado de la recta horizontal $y = 100$ mediante dos puntos con ordenada 100.

En este caso, al utilizar la herramienta *Intersección*, el software muestra dos puntos de intersección, hecho que podría invitar a la reflexión si en la resolución en papel solamente se identificó un sólo momento. Aquí el valor pragmático de este procedimiento resulta fundamental para hallar todas las soluciones pedidas.

Para responder las preguntas de este ítem, otra estrategia resulta de modificar la escala del eje y hasta que el valor en cuestión aparezca. Veamos en la Figura 7, el caso de 110 km.

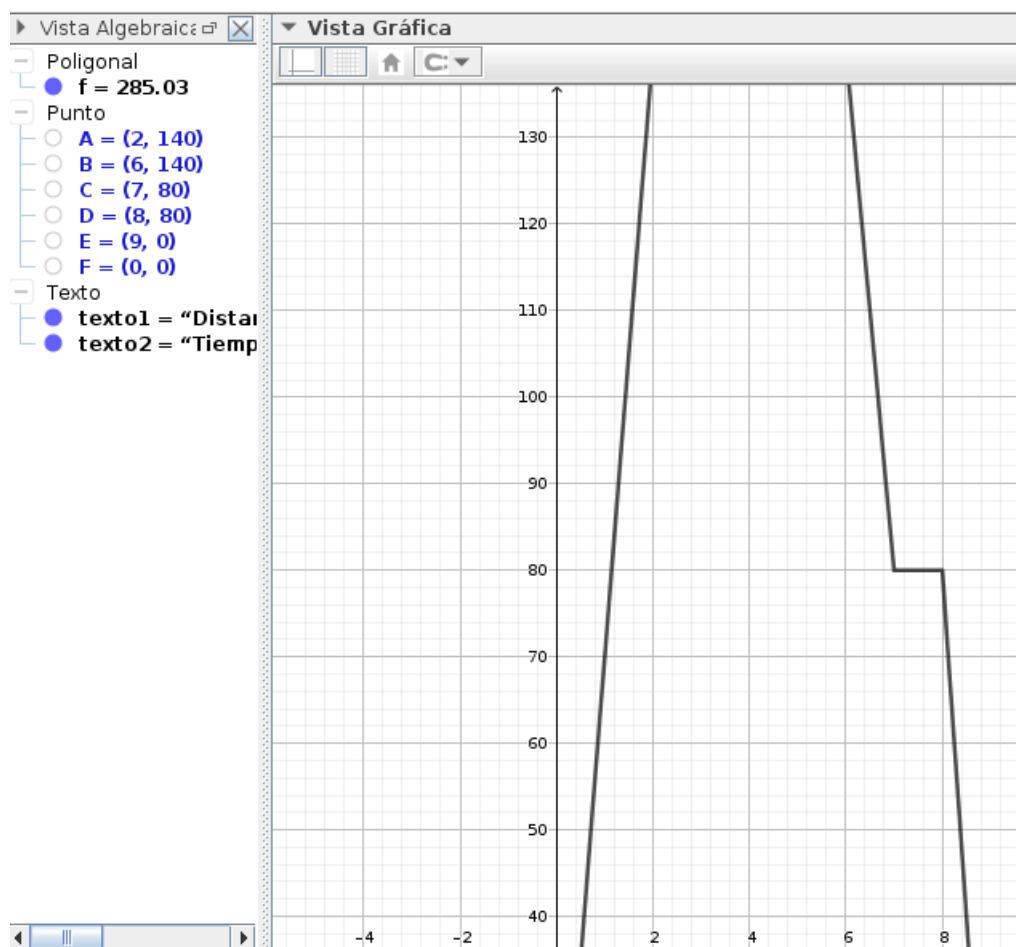


FIGURA 7. Captura de pantalla donde se visualiza el valor 110 en el eje y .

La dificultad de esta estrategia radica en luego identificar cuáles son los valores de abscisa que se corresponden con 110 km.

Dado que la construcción del gráfico está hecha como una poligonal, también anticipamos que se podría marcar un punto utilizando la herramienta *Punto en objeto* sobre la poligonal y ver sus coordenadas en la Vista Algebraica. En este caso, una estrategia podría consistir en ir deslizando el punto hasta intentar obtener puntos con las coordenadas deseadas. En la Figura 8, se muestra cuando el punto G tiene ordenada 110. Esta estrategia no siempre es útil porque a veces no se puede “atrapar” el valor buscado al mover el punto sobre la poligonal.

Más allá de que este procedimiento no tenga un alto valor pragmático, rescata-mos esta estrategia porque permite poner en juego la coordinación de los distintos registros de representación de un punto (uno de nuestros objetivos de enseñanza) y además porque esa **coordinación se da de manera instantánea, en tiempo real**. Es decir, no se ven fotos, sino que se van visualizando los cambios de las coordenadas a medida que vamos moviendo el punto.

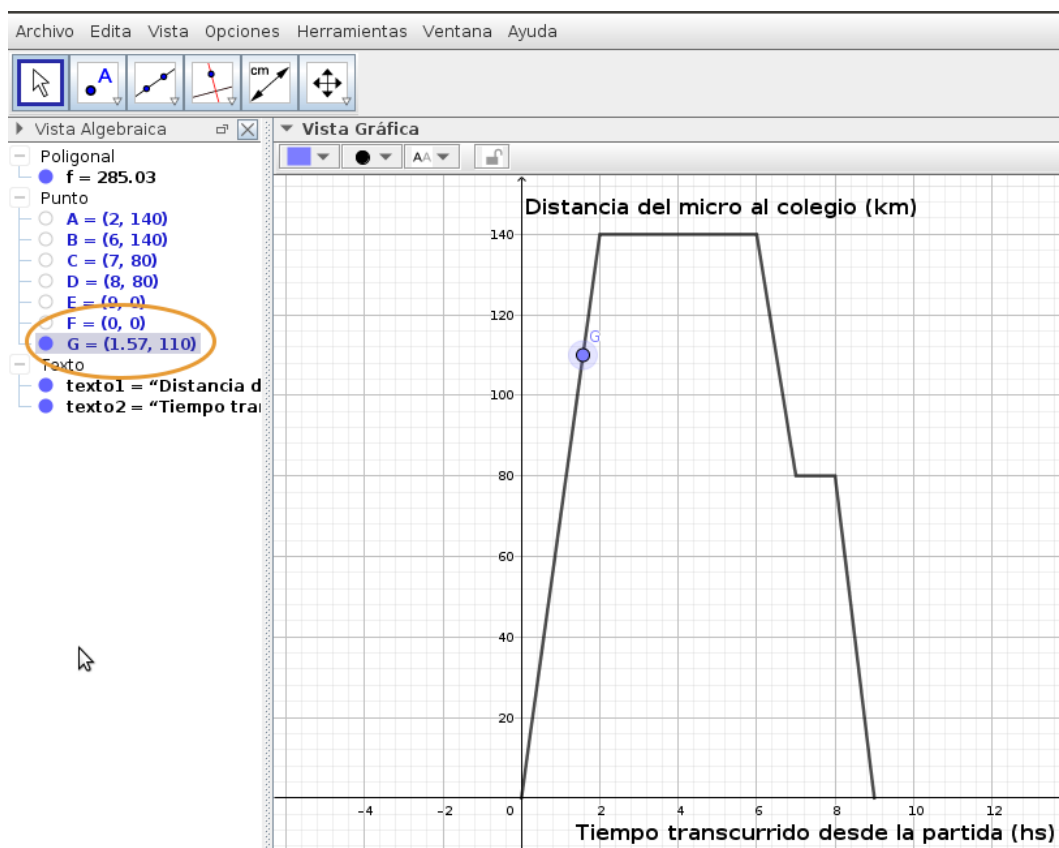


FIGURA 8. Captura de pantalla donde se muestra que G tiene ordenada 110.

Luego del trabajo realizado, para finalizar la clase pensamos enfatizar que en las dos partes de la actividad se aplicaron distintas estrategias para extraer información de un gráfico. Los conocimientos construidos en la primera parte (lectura de un gráfico dado en papel), como por ejemplo el trazado de rectas verticales por un valor de abscisa hasta la intersección con el gráfico y luego el trazado de una recta horizontal que contenga a ese punto de intersección para determinar la ordenada, se aplican y adquieren un nuevo sentido al estudiar un gráfico hecho en GeoGebra. Esto ocurre porque, en general, la selección de las herramientas que se utilizan, da cuenta de los conceptos involucrados. Es decir, varias herramientas tienen un conocimiento matemático detrás, aunque pueda ocurrir que el alumno o la alumna no sea consciente del mismo.

Pensamos en hacer una sola puesta en común al finalizar todo el problema con el objetivo de ver qué le aporta el GeoGebra a las primeras respuestas dadas viendo el gráfico en papel. Además de analizar los distintos procedimientos que podrían surgir en la clase, también pretendemos comparar las respuestas deducidas de los distintos entornos.

§4. Conclusiones

Como cierre de este artículo, queremos comentar algunas de las potencialidades que, a nuestro entender, tiene GeoGebra en contraposición con el trabajo en lápiz y papel. Al no encontrar bibliografía sobre actividades de lectura de gráficos en un entorno dinámico, muchas de estas ventajas las hemos ido descubriendo al anticipar posibles estrategias de nuestros y nuestras estudiantes. En este sentido, queremos destacar la importancia de haber realizado este análisis *a priori* ya que, además de permitir anticipar posibles intervenciones frente a las estrategias que desarrollen las alumnas y los alumnos, permite al docente conocer más en profundidad el programa, ya sea, tanto sus potencialidades como sus limitaciones. Al mismo tiempo, brinda la posibilidad de estudiar y anticipar si las posibles estrategias a desplegar involucran relaciones teóricas y en caso afirmativo, identificar las nociones que se ponen en juego, estudiar su valor pragmático y su valor epistémico para decidir si serán futuras técnicas a ser institucionalizadas. Como toda técnica, luego se deberán plantear problemas de ejercitación para que las mismas puedan ser sistematizadas.

Por otro lado, como mostramos en nuestras anticipaciones, pensamos que al trabajar con el programa GeoGebra la cantidad de estrategias para leer información de un gráfico es mucho mayor a las disponibles en lápiz y papel. Por lo tanto, la o el estudiante tiene un abanico más amplio de posibilidades para arribar a una respuesta determinada.

Además, una “potencia” del programa, para nosotros fundamental, es que permite visualizar al mismo tiempo dos registros de un punto: la escritura como par ordenado y su gráfico. Creemos que cuanto mayor sea la cantidad de registros (de un mismo objeto) con la cual se trabaje, más se va a comprender al objeto en cuestión. A esto último hay que sumarle el dinamismo del programa ya que, al mover un punto, se visualiza instantáneamente el cambio (o no) de sus coordenadas. Esta coordinación en paralelo con dos registros es muy difícil (o imposible) de abordarla en lápiz y papel.

Por último, aclaramos nuevamente que tiene que haber una intencionalidad docente detrás para explotar todas las potencialidades del programa mencionadas en los párrafos precedentes; es decir, la mera utilización del software no garantiza que ocurra todo lo desplegado en este artículo.

Bibliografía

Arcavi, A., & Hadas. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 25-45. doi: <https://doi.org/10.1023/A:1009841817245>

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274. doi: <https://doi.org/10.1023/A:1022103903080>
- Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. In E. Mancera & C. Pérez (Eds.), *Historia y Prospectiva de la Educación Matemática, Memorias de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (p. 9-21). México: Edebé Ediciones Internacionales, S. A.
- Borsani, V., Cedrón, M., Cicala, R., Di Rico, E., Duarte, B., & Sessa, C. (2018). Modelización de relaciones entre magnitudes geométricas en un entorno enriquecido con TICs: actividades para la escuela secundaria, diseñadas en un grupo colaborativo. *Yupana*, 10, 56-69. doi: <https://doi.org/10.14409/yu.v0i10.7697>
- Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-HORSORI.
- Duval, R. (1993). Registros de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5(1), 37-65.

MARISA ÁLVAREZ

Universidad Nacional de General Sarmiento
Argentina.

(✉) malvarez@es.ungs.edu.ar

RODOLFO MURÚA

Universidad Pedagógica Nacional
& Universidad Nacional de General Sarmiento
Argentina.

(✉) rodolfo.murua@unipe.edu.ar – rmurua@es.ungs.edu.ar

Recibido: 6 de marzo de 2020.

Aceptado: 24 de septiembre de 2020.

Publicado en línea: 7 de diciembre de 2020.

INFLUENCIA DE LAS CREENCIAS DE LOS ESTUDIANTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Arnulfo Fajardo Valencia y David Benítez Mojica

RESUMEN. Este artículo tiene como objetivo contribuir al conocimiento de las creencias que tienen los estudiantes de educación secundaria sobre las matemáticas. El análisis se ha enfocado en dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿Desde qué perspectivas teóricas entendemos los problemas de matemáticas?; ¿Cuál es el concepto de creencia en el marco de la educación matemática?; ¿Cuáles son las creencias más comunes que tienen los estudiantes de secundaria sobre la resolución de problemas?; ¿Cómo inciden algunas creencias de los estudiantes en la resolución de problemas de matemáticas? Identificamos a partir de la literatura, algunas creencias personales e idiosincráticas que pueden incidir en la forma como los estudiantes reaccionan frente al aprendizaje de las matemáticas y determinan la manera en que abordan la solución de un problema. Concluimos que los maestros deben generar estrategias que permitan identificar las creencias que tienen los estudiantes sobre las matemáticas, reforzar las que inciden positivamente y transformar las que sean necesarias para favorecer el análisis y la resolución de problemas.

Palabras clave: Creencias, Resolución de problemas, Educación Matemática.

Keywords: Beliefs, Problem Solving, Mathematics Education.

ABSTRACT. This article aims to contribute to the knowledge of the beliefs that secondary school students have about mathematics. The analysis has focused on providing answers to the following questions: From what theoretical perspectives do we understand mathematical problems; what is the concept of belief in the framework of mathematics education; what are the most common beliefs that secondary school students have about problem solving; how do some of the students' beliefs influence the resolution of mathematical problems? From the literature, we identified some personal and idiosyncratic beliefs that can influence the way students react to mathematical learning and determine the ways they approach the solution of a problem. We conclude that teachers should generate strategies that identify the beliefs that students have about mathematics, reinforce those that have a positive impact and transform those that are necessary to favour the analysis and resolution of problems.

§1. Introducción

Se identifica la resolución de problemas como una actividad importante para el aprendizaje de las matemáticas (Schoenfeld, 1992; Trigo, 1997; Ministerio de Educación Nacional, 2003; NCTM, 2000; Benítez, 2006; English & Sriraman, 2010).

También se reconoce a la resolución de problemas como un proceso central que dinamiza las matemáticas. Halmos (Halmos, 1980) plantea que aquellos que creen que el corazón de las matemáticas consiste en los problemas no están necesariamente equivocados; (Kleiner, 1986) sugiere que algunos conceptos y teorías abstractas nacen a menudo de dar solución a problemas específicos; (Santos-Trigo, 2019) reconoce que hay rastros de actividades de resolución de problemas matemáticos a lo largo de la historia de las matemáticas y la civilización humana.

En diferentes trabajos podemos encontrar definiciones y significados diferenciados acerca de lo que en el presente trabajo entendemos por problema.

Por ejemplo, (Polya, 1962) considera que "tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata." (p. 117). En esta dirección, Polya considera que un problema no puede ser resuelto de manera inmediata, para su solución se debe activar un proceso de búsqueda de conocimientos y de heurísticas que puedan resultar de utilidad para lograr el objetivo. Esta concepción implica que el concepto de problema es relativo al sujeto, esto es, lo que para un sujeto puede ser un problema, para otra persona puede ser un sencillo ejercicio.

Desde esta misma perspectiva, un problema es "una situación en la que se pide a un individuo realizar una tarea para la que no tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución." (Charles & Lester, 1982, 5).

Según (Puig, 1996), el proceso de resolución de problemas se entiende como la actividad mental y manifiesta que desarrolla el resolutor desde el momento en que, presentándosele un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea.

Según (Schrock, 2000) hay tres criterios que un problema debe cumplir: (1) el estudiante debe aceptar que estará implicado en el problema; (2) debe tener cierto grado de obstrucción y no poseer un método para solucionar de inmediato el problema y (3) debe explorar activamente el problema en busca de una solución.

Estos argumentos sustentan el impulso que se viene dando en las últimas décadas a la propuesta de enseñar matemáticas a través del método de resolver problemas. Este método se apoya en el problema como el punto de partida para el aprendizaje y el proceso de resolución se convierte en el camino que permite la construcción del conocimiento matemático. En palabras de (Onuchic, 1999), la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas difiere de los enfoques que privilegian las reglas sobre el “cómo”, abandonando de cierta manera el dominio de los procedimientos algorítmicos o la adquisición de conocimientos a través de la rutina o el ejercicio mental.

Dentro de este marco, se han realizado estudios de investigación enfocados en la educación básica (primaria y secundaria) que evidencian la vigencia de la resolución de problemas y la preocupación por identificar elementos didácticos que puedan fortalecer a los estudiantes en el desarrollo de habilidades para plantear, definir y solucionar problemas (Jones & Inglis, 2015; Lee, 2016; Reiss & Törner, 2007; Sumirattana, Makanong, & Thipkong, 2017; Yuanita, Zulnaidi, & Zakaria, 2018).

En esta línea (Bingolbali & Bingolbali, 2019), por ejemplo, reportan una investigación que explora cómo se aborda la resolución de problemas desde dos libros de texto de matemáticas de sexto grado en Turquía; realizan una comparación con los enfoques que se le da a la enseñanza de los problemas desde el plan de estudios. Los libros se analizan desde tres enfoques de enseñanza: “para, sobre y mediante” la resolución de problemas. El estudio mostró que ninguno de los libros fue guiado por un enfoque específico de los planteados para la enseñanza, los investigadores concluyeron que siendo el libro de texto un elemento esencial de guía para algunos maestros, se corre el riesgo de que estos no sigan ningún enfoque de resolución de problemas en la práctica, lo que podría afectar la calidad de la instrucción sobre el tema.

(Yuanita et al., 2018) reportan un estudio que busca identificar el papel de la representación matemática como mediador entre las creencias y la resolución de problemas en estudiantes de secundaria, utilizando el enfoque de la educación matemática realista como un marco para resolver y proponer problemas que se

basan en rutinas diarias y situaciones suficientemente conocidas por los estudiantes. Los resultados del estudio muestran que el uso de este enfoque aumenta la confianza de los estudiantes al abordar la solución de problemas de aritmética y motiva a los estudiantes para proponer sus propias ideas frente a situaciones o experiencias de la vida real.

(Eisenmann, Novotná, Příbyl, & Břehovský, 2015) realizaron un estudio con jóvenes entre los 12 y 18 años de edad, en el que se exploró el uso de estrategias heurísticas para la resolución de problemas; el estudio tuvo como fin desarrollar una herramienta que permitiera describir la capacidad de un estudiante para resolver problemas. El instrumento fue denominado cultura de resolución de problemas (CPS) y se fundamentó en cuatro elementos de análisis: inteligencia, comprensión del texto, creatividad y capacidad de utilizar el conocimiento existente. Los resultados de la investigación muestran que cuando los estudiantes hacen uso de estrategias heurísticas tales como experimentación sistemática, analogías, trabajo al revés, así como especificación y generalización, son más exitosos al resolver problemas. Los investigadores recomiendan que, si se va a enseñar a los estudiantes el uso de algunas estrategias heurísticas, debe ser a través de un número significativamente alto de problemas.

Otros investigadores han fundamentado sus estudios en la propuesta de (Polya, 1945), tomando como referente las cuatro etapas que deben implementarse para la resolución de un problema matemático: a) entender el problema, b) diseñar un plan, c) llevar a cabo el plan, y d) mirar hacia atrás.

(Tjoe, 2019) por ejemplo centra su estudio en el cuarto paso del enfoque de Polya, “mirar hacia atrás”, plantea que el realizar el análisis retrospectivo de cómo se resolvió un problema, permite al estudiante identificar otros métodos de solución del mismo problema, el estudio advierte que la práctica de “mirar hacia atrás” no se ha integrado de manera efectiva en la instrucción en el aula por lo que propone que se pueden considerar otros estudios que examinen un marco pedagógico, que integre la necesidad de resolver problemas utilizando diferentes métodos de solución.

(Albarracín & Gorgorió, 2014) realizan un trabajo de investigación, centrado específicamente en la etapa del modelo de Polya “diseñar un plan”. El estudio está enfocado en los planes y esquemas destinados a resolver problemas diseñados por estudiantes de 12 a 16 años. Se busca resolver problemas de Fermi que involucran grandes números, los autores argumentan que algunas de las ideas principales que caracterizan este tipo de problema, son la posibilidad de dividirse en problemas más pequeños para resolverlos por separado y por medio de una estimación numérica, se caracterizan además porque no presentan toda la información que sería necesaria para solucionarlos y son ideales para llevar a los estudiantes a diseñar un plan para resolverlos. Los resultados muestran que estudiantes de

diferentes edades, sin experiencia alguna en abordar este tipo de problemas son capaces de crear esquemas que incluyen estrategias matemáticas adecuadas para resolver los problemas presentados.

(Hensberry & Jacobbe, 2012) presentan los resultados de un estudio realizado con niños entre los cinco y once años. Intentan aumentar las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes al hacerles seguir las fases de Polya y llevar un diario del proceso. Estos resultados indican que llevar a los estudiantes a escribir un diario siguiendo todos los pasos del modelo de Polya, puede conducir a estrategias de solución más ricas y, por lo tanto, aumentar la capacidad de los niños para resolver problemas.

Otros investigadores realizan estudios aproximándose más al enfoque de Alan Schoenfeld; reconociendo que sus propuestas tienen fuertes raíces en los argumentos de Polya. (Schoenfeld, 1985) establece cuatro categorías para enfocar la resolución de problemas, a saber: los recursos, estrategias cognitivas, estrategias metacognitivas y el sistema de creencias. Los recursos centrados en los conocimientos específicos de matemáticas con los que cuenta un estudiante y que pueden ser utilizados al abordar la resolución de un problema, las estrategias cognitivas definidas como las maneras, técnicas o estrategias implementadas para encontrar caminos de solución a un problema; las estrategias metacognitivas están compuestas por actividades de control asumidas por los individuos para monitorear y autoevaluar la resolución de un problema, con el propósito de entender el enunciado del problema, revisar los recursos y los caminos de solución seleccionados, monitorear los cálculos, revisar si lo encontrado es solución de problema y si existen alternativas de solución. Sobre el sistema de creencias se hará una reflexión a continuación.

§2. Sobre creencias

(Schoenfeld, 1985) reporta que una dimensión importante en el proceso de resolución de problemas lo constituye el sistema de creencias. En este sentido, todo lo que una persona piense acerca de las matemáticas, o de una parte de ella, determina la forma como selecciona recursos y estrategias para resolver un problema. Una idea importante en esta dirección, es que existe una estricta relación entre las creencias que los estudiantes tienen sobre las matemáticas y su legado cultural.

En años recientes hay un interés creciente sobre las creencias, principalmente en investigaciones sobre resolución de problemas en los niveles de la escuela primaria y en la educación secundaria. Entre otros (Papadopoulos, 2015) presenta un estudio que busca determinar si las mismas creencias influyen en el rendimiento de los estudiantes de la misma manera, en los diferentes niveles educativos (primaria, secundaria y universidad). El estudio se realizó a partir de la tarea de resolver un problema escogido por su potencialidad para plantearlo a estudiantes

sin rango de edades, en el que se pueden aplicar diferentes niveles de razonamiento para resolverlo. Los resultados muestran que en la escuela primaria el impacto positivo de las creencias deja espacio para que los estudiantes empleen el razonamiento creativo durante la resolución de problemas no rutinarios, mientras que los estudiantes de educación secundaria y universitaria buscan principalmente estrategias algorítmicas y conexiones con las matemáticas formales para resolver tales tareas, los estudiantes de primaria se desempeñen casi con la misma tasa de éxito que los estudiantes mayores en los mismos problemas, lo que significa que las mismas creencias son menos determinantes para los estudiantes más jóvenes.

(Stylianides & Stylianides, 2014) reportan una investigación en dónde se busca dar respuesta a la pregunta: ¿es posible desarrollar intervenciones de corta duración en las aulas de matemáticas que tengan un impacto en las creencias específicas de resolución de problemas de los estudiantes? La investigación concluyó que las intervenciones de corta duración en el aula pueden impactar positivamente aspectos afectivos y cognitivos de los estudiantes, es decir que pueden incidir en la transformación de las creencias frente a la resolución de problemas.

(M. L. Callejo & Vila, 2009) presentan un estudio que busca obtener una mejor comprensión del papel de los sistemas de creencias en la fase de aproximación a la resolución de problemas matemáticos, de estudiantes de primer año de educación secundaria que se destacan por su buen rendimiento escolar. La investigación se centró en el análisis de dos estudios de caso, en el que se tuvieron en cuenta tres tipos de datos: las respuestas a una prueba de problemas, las respuestas a un cuestionario de creencias, y la actividad de resolución de problemas. El estudio arrojó, que es necesario abordar los sistemas de creencias de un estudiante y no sólo sus creencias específicas, para interpretar su comportamiento frente a la resolución de problemas. Los investigadores plantean que existe una relación compleja y observable entre los sistemas de creencias y los enfoques de los estudiantes para resolver problemas, aunque no se evidencian relaciones de causalidad entre creencias específicas y actividades de resolución de problemas.

Muy probablemente una de las razones que ha motivado la investigación sobre la identificación, el análisis y la transformación de las creencias de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, radica en dar solución a las dificultades que se evidenciaron después de abordar la resolución de problemas matemáticos sólo desde elementos de tipo cognitivo (Galende, Rojo, & Arrivillaga, 2019; Pongsakdi et al., 2019). En los últimos cuarenta años el estudio de las creencias ha sido reconocido en el campo investigativo como un componente central en el dominio afectivo y aunque no se ha llegado a un acuerdo en el campo de la educación matemática sobre el concepto de creencia, en lo que sí coinciden un buen número de investigadores es en la dificultad para definir dicho término (McDonough &

Sullivan, 2014; M. L. Callejo & Vila, 2009; Stylianides & Stylianides, 2014; Lemus, M., & Ursini, 2016).

Desde la mirada de (Schoenfeld, 1992), las creencias acerca de las matemáticas son la perspectiva desde la cual cada persona se acerca al mundo matemático y pueden determinar la forma, los procedimientos, el tiempo e intensidad del esfuerzo con que abordará un problema dado. Un aspecto que señala también Schoenfeld es que las creencias se abstraen de las propias experiencias y de la cultura en la que uno está inmerso, y recalca que los estudiantes construyen sus creencias sobre las matemáticas formales, su sentido de la disciplina, en gran medida de las experiencias vividas en el aula. Así mismo las creencias de los estudiantes configuran su comportamiento de manera que tiene consecuencias poderosas y a menudo negativas. (Pajares, 1992) considera que las creencias son verdades personales, derivadas de la experiencia o de la fantasía, centradas en componentes afectivos y valorativos. (M. Callejo & Vila, 2003), admiten las creencias como un tipo de conocimiento subjetivo referido a un contenido concreto, sobre el cual versan; plantean además que, aunque tienen un alto grado de estabilidad pueden evolucionar gracias a la confrontación con experiencias que las pueden desestabilizar. (Lemus, M., & Ursini, 2016) consideran que las creencias son el conjunto de perspectivas que una persona tiene acerca de las matemáticas y su aprendizaje, y propician u obstaculizan el desarrollo de las competencias en esta área del conocimiento.

Por otra parte, los investigadores coinciden en que las creencias no son independientes entre sí; por consiguiente, existen grupos que configuran sistemas de creencias, aunque como lo plantea (Stylianides & Stylianides, 2014) no hay consenso en la literatura sobre una definición de "sistemas de creencias." sobre cómo se organizan las creencias en esos sistemas.

Particularmente, consideramos que una creencia en educación matemática es un tipo de conocimiento subjetivo, que se adquiere a partir de experiencias positivas o negativas vividas en los procesos de formación individual y colectiva, es decir que está fuertemente mediado por los sentimientos y las emociones de las personas y por lo tanto son esencialmente construcciones personales y sociales, que pueden definir cómo un individuo abordará el tratamiento y la resolución de un problema matemático, entendiendo así que cada persona podrá verlo de manera diferente.

Asumiendo las creencias como una construcción individual y el conocimiento como una construcción social, se considera que las creencias pueden ser personales e idiosincráticas. (McDonough & Sullivan, 2014) por ejemplo, argumentan que hablar, escuchar, y hacer preguntas a los estudiantes, puede ayudar a los maestros a conocer no solo sus creencias, si no sus sentimientos, comprensiones, experiencias e intereses, lo que permite a los educadores entender mejor a los estudiantes

individualmente. Los autores resaltan que las voces individuales de los estudiantes son importantes, y que la homogenización de la voz del estudiante es una de las formas en que las perspectivas del estudiante son marginadas, algunas voces son más escuchadas y estas no necesariamente representan la diversidad de voces de sus compañeros. Se asume la complejidad de utilizar variedad de procedimientos con todos los estudiantes de un grupo, sin embargo, en aquellos casos particulares de estudiantes con dificultades, realizar entrevistas que permitan a los maestros hablar con ellos, escucharlos y hacerles preguntas, posibilita identificar si existe una disposición emocional negativa o una visión distorsionada de las matemáticas que debe ser modificada en el estudiante de manera individual y no en el grupo en general, ya que las creencias son construcciones personales.

Por su parte (Martínez Padrón, 2013) plantea que las creencias sólo son posibles en el ámbito de la razón, por ello constituyen un elemento de conocimiento, entendiendo el conocimiento como una construcción social. Así mismo, concluye que las creencias son inducidas socialmente y son construcciones que el sujeto va elaborando en su proceso de formación para entender su mundo. Las creencias pueden ser configuradas, transformadas, reforzadas u eliminadas a partir de lo que vive cada individuo.

Entre las creencias más comunes frente a la educación matemática encontramos entre otras: la matemática es una actividad difícil y aburrida (Martínez Padrón, 2008; Gómez Chacón, 2003); la matemática es una actividad solitaria, realizada por individuos de forma aislada, solo hay una forma correcta de resolver cualquier problema matemático, las matemáticas que se aprenden en la escuela tienen poco o nada que ver con el mundo real (Schoenfeld, 1992).

Ante este tipo de planteamientos, algunos investigadores coinciden en que las creencias de los estudiantes pueden afectar la motivación, el interés y el gusto por el aprendizaje de las matemáticas (Erazo-Hurtado & Aldana-Bermúdez, 2015; Papadopoulos, 2015; Martínez Padrón, 2013) y que esta afectación puede darse en sentido negativo o positivo frente a la manera como se aborda la enseñanza en esta área del conocimiento.

En esta misma línea, estamos de acuerdo con quienes plantean que las creencias que tienen los estudiantes frente a las matemáticas inciden en la forma en como ellos mismos se ven frente al aprendizaje en esta área, ya sea generando sentimientos de motivación e interés en sentido positivo o de desinterés y angustia en sentido negativo. Las experiencias de aprendizaje en las clases, contribuyen a la elaboración de sus creencias sobre las matemáticas y determinan elementos centrales en la auto valoración que realiza el estudiante frente a su capacidad para resolver tareas y asumir situaciones cotidianas que impliquen el pensamiento matemático.

§3. Las creencias y la resolución de problemas

Frente a la resolución de problemas existe la creencia de que un problema de matemáticas puede resolverse fácilmente y en corto tiempo (Prendergast et al., 2018; Schoenfeld, 1988, 1992) considera que el origen de este tipo de creencia está relacionado con el diseño de las tareas que el profesor propone en el aula. Durante su investigación observó que los estudiantes no se enfrentaban a tareas matemáticas que pudieran considerarse “problemas”, lo que los estudiantes trabajaban eran particularmente ejercicios, siendo una de las preocupaciones de los maestros que los estudiantes realizaran el mayor número posible en un corto período de tiempo. Cuando este tipo de prácticas se repite, es posible que los estudiantes terminen considerando que un problema de matemáticas no tomará más de unos minutos para ser resuelto.

Esta idea ha sido reforzada por algunos profesores en las aulas de clase con argumentos tales como: “quién termine primero obtendrá la mejor calificación”; “los mejores estudiantes resuelven rápidamente un problema”, etc. Desconociendo que son muchos los ejemplos que podemos encontrar, en donde problemas matemáticos planteados en la antigüedad han sido resueltos siglos después, o han servido de plataforma para el desarrollo de teorías matemáticas modernas. Podríamos mencionar entre otros: los problemas griegos de construcción con regla y compás, el último teorema de Fermat, la conjetura de Goldbach, lo que contradice contundentemente ese tipo de afirmaciones. Sin embargo, la creencia de que pueden resolverse problemas fácilmente y en corto tiempo puede llevar a un estudiante a abandonar fácilmente su trabajo, pues su motivación puede verse afectada al dedicarle un corto tiempo al análisis de un problema y no poder resolverlo.

Así mismo, cuando se refuerza la creencia de que todos los problemas de matemáticas se resuelven a través de cálculos, operaciones y algoritmos (M. Callejo & Vila, 2003; Stylianides & Stylianides, 2014; Jäder, Sidenvall, & Sumpter, 2017; Prendergast et al., 2018), se puede generar la idea errónea, en los estudiantes, de que todo el conocimiento matemático se limita al dominio aritmético o al enfoque determinístico. Este tipo de creencia puede originarse a partir de que tanto en la educación formal como en otro tipo de escenarios, no se han tenido en cuenta otros aspectos de la matemática tales como lo estético y lo lúdico. Como lo argumentan (M. Callejo & Vila, 2003), se ha olvidado su dimensión histórica y humana, sus aportes a otras ciencias y por ende al desarrollo de la humanidad. En la misma línea de (Schoenfeld, 1992) estos autores afirman que las creencias se van modelando según el tipo de actividades que se proponen en las clases, por lo tanto, si las tareas que proponen los profesores están centradas en ejercicios repetitivos, cuya respuesta se obtiene exclusivamente a través de cálculos matemáticos, es posible que se fortalezca esta creencia en los estudiantes, (Garofalo, 1989) argumenta que

esta creencia influye en los estudiantes al abordar las tareas de manera mecánica, dándole poca importancia a la comprensión del pensamiento matemático.

Cuando se refuerza la creencia de que para aprender matemáticas existe una única forma de abordar y solucionar un problema y es la que el profesor ha explicado en clase, es probable que los estudiantes no estén dispuestos en el futuro a realizar trabajos colaborativos, ni a trabajar en proyectos o a hacer parte de discusiones grupales sobre matemáticas. Así mismo, como lo argumentan (McDonough & Sullivan, 2014), si los niños ven el aprendizaje como un proceso activo en el que tienen un papel constructivo, estarán dispuestos a correr riesgos en su aprendizaje y participar en las discusiones.

Algunas creencias idiosincráticas, que pueden incidir en la manera como los estudiantes abordan la resolución de un problema son las que plantean que no todas las personas pueden resolver problemas. De acuerdo con (Martínez Padrón, 2013), se consideran creencias idiosincráticas porque provienen de diversas fuentes tales como las tradiciones, el sentido común, las costumbres sociales y las experiencias vividas; se asumen como verdades indiscutibles aunque no estén basadas en resultados científicos. Algunas de estas creencias son: Sólo los genios son capaces de descubrir o crear matemáticas (Schoenfeld, 1985), las matemáticas son para gente creativa; el resto sólo intenta aprender lo que se le trasmite (Garofalo, 1989), los alumnos que entienden matemáticas son capaces de resolver cualquier problema (Schoenfeld, 1992).

(M. Callejo & Vila, 2004) plantean que este tipo de creencias generan una separación entre quienes son capaces de resolver problemas y quienes no, potenciando actitudes de confianza en sus propias capacidades y como consecuencia motivación para enfrentar problemas o, todo lo contrario. (Garofalo, 1989) manifiesta que los estudiantes que sostienen estas creencias no podrán imaginarse haciendo o produciendo matemáticas por su cuenta y se convertirán en reproductores de las matemáticas de otras personas.

§4. A manera de conclusión

Los profesores de matemáticas reconocemos desde nuestra experiencia, que es factible que las relaciones con los estudiantes terminan siendo el reflejo de lo que ellos sienten y creen sobre la asignatura. Si bien algunos terminan admirando y apreciando al maestro, al menos uno de nuestros estudiantes terminará con el deseo de no volver a saber nada sobre la materia. En algunos casos, podemos encontrar estudiantes que aprecian y reconocen el esfuerzo de sus maestros, pero al terminar sus ciclos de formación en el área no han adquirido un conocimiento específico del contenido que les permita potenciar las habilidades para abordar la resolución de un problema.

Como lo plantean (Martínez-Padrón, Contarino, & Ávila, 2015), una tarea del profesor de matemáticas es entender y asumir que el mal desempeño de los estudiantes en la asignatura, no siempre es achacable a su apatía o falta de compromiso, pudiendo deberse a situaciones de aversión o miedo de no poder satisfacer lo exigido por quien le enseña.

Lo que se busca al indagar sobre las creencias de los estudiantes es generar estrategias que permitan que tanto la enseñanza como el aprendizaje sean más efectivos. La investigación sobre identificación de creencias no tendrá mucho valor si no se generan estrategias que ayuden a los estudiantes a superar las creencias menos positivas ante el aprendizaje de las matemáticas y la resolución de problemas particularmente. Algunos investigadores han reportado avances en esta línea. Por ejemplo, (Wang, Zhang, & Cai, 2019) presentan un estudio que busca examinar las relaciones entre las creencias matemáticas de los estudiantes de secundaria con los elogios de los maestros, así como las percepciones de los estudiantes sobre sus propios logros en las clases de matemáticas. Los resultados muestran que, la estrategia de los elogios de los maestros hacia los estudiantes incide positivamente en las creencias relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas y en la obtención de los logros en la asignatura. (Markovits & Forgasz, 2017) exploraron las creencias de los estudiantes de primaria sobre las matemáticas y sobre ellos mismos como aprendices de matemáticas a través de una “metáfora animal”. Los investigadores propusieron a los estudiantes dar respuesta a la pregunta ¿Qué animal crees que son las matemáticas? El estudio arrojó información que permite a los docentes observar algunas diferencias importantes entre las creencias de las niñas y los niños. La mayoría de las niñas consideraron que las matemáticas son para personas inteligentes, mientras que los niños muestran un mayor número de opiniones negativas sobre las matemáticas. De igual manera, se observó que las niñas son más sensibles que los niños frente a los desafíos que enfrentan los estudiantes en las clases de matemáticas. En este estudio se resalta la estrategia del uso de metáforas para revelar las creencias de los estudiantes hacia las matemáticas. (Pongsakdi et al., 2019) investigaron sobre el papel que tienen las creencias y las variables motivacionales en la mejora de la resolución de problemas de palabras (word problems), con estudiantes de cuarto y sexto grado. El estudio concluyó que utilizar el programa de enriquecimiento de palabras en la enseñanza de las matemáticas, impacta positivamente tanto en el desempeño de los estudiantes, como en sus creencias acerca de la naturaleza de la resolución de problemas.

En los últimos años se han incrementado los estudios de investigación sobre el uso de software dinámico en la resolución de problemas. Como lo presentan (Olsson & Granberg, 2019) el software dinámico facilita visualizar las relaciones entre representaciones, permite ofrecer comentarios sobre las acciones de los estudiantes y proporciona múltiples variaciones, es decir que es beneficioso para

el aprendizaje de las matemáticas. (Fiallo Leal, J.E. & Gutiérrez Rodríguez, 2007), por su parte, plantean que las nuevas tecnologías ofrecen herramientas para la enseñanza que contribuyen a que los estudiantes, a través de ellas, pongan en juego sus ideas, exploren, analicen, tomen datos y pongan a prueba sus conjeturas. Estos conceptos tienen particular validez cuando de abordar resolución de problemas se trata y unidos a la motivación que genera en los estudiantes el uso de dispositivos electrónicos, consideramos que el uso de software dinámico en los procesos de enseñanza puede facilitar la transformación de algunas creencias que los estudiantes poseen sobre dominios específicos de la educación matemática.

El trabajo que presentamos aquí, es parte de un proyecto más amplio, donde se identificarán el sistema de creencias de los estudiantes de educación básica, a partir de ellos se diseñarán actividades de aprendizaje con apoyo de tecnología, para movilizarlas hacia el desarrollo del pensamiento estocástico. De esta manera, se reconoce que el conocimiento del sistema de creencias, se constituye en la línea base sobre la cual el profesor parte para el diseño de tareas para mejorar el desempeño de sus estudiantes.

Bibliografía

- Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2014). Design a plan to solve fermi problems involving large numbers. *Educational studies in mathematics*, 86(1), 79–96.
- Benítez, D. (2006). *Formas de razonamiento que desarrollan los estudiantes en la resolución de problemas con apoyo de la tecnología computacional*. Tesis Doctoral (Unpublished doctoral dissertation). Cinvestav.México.
- Bingolbali, F., & Bingolbali, E. (2019). One curriculum and two textbooks: opportunity to learn in terms of mathematical problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, 31(3), 237–257.
- Callejo, M., & Vila, A. (2003). Origen y formación de creencias sobre la resolución de problemas. estudio de un grupo de alumnos que comienzan la educación secundaria. *Boletín de la Asociación matemática Venezolana*, 10(2), 173–194.
- Callejo, M., & Vila, A. (2004). Matemáticas para aprender a pensar. *El papel de las creencias en la resolución de problemas*. Madrid, Nancea.
- Callejo, M. L., & Vila, A. (2009). Approach to mathematical problem solving and students' belief systems: two case studies. *Educational Studies in Mathematics*, 72(1), 111–126.
- Charles, R. I., & Lester, F. K. (1982). *Teaching problem solving: What, why & how*. Dale Seymour Publications Palo Alto, CA.
- Eisenmann, P., Novotná, J., Příbyl, J., & Břehovský, J. (2015). The development of a culture of problem solving with secondary students through heuristic strategies. *Mathematics Education Research Journal*, 27(4), 535–562.

- English, L., & Sriraman, B. (2010). Theories of Mathematics Education. In L. English & B. Sriraman (Eds.), *Theories of mathematics education* (Springer-V ed., pp. 263–289). Heidelberg: Heidelberg:Springer-Verlag. doi: 10.1007/978-3-642-00742-2
- Erazo-Hurtado, J. D., & Aldana-Bermúdez, E. (2015). Sistema de creencias sobre las matemáticas en los estudiantes de educación básica. *Praxis*, 11(1), 163–169.
- Fiallo Leal, J.E. & Gutiérrez Rodríguez, A. (2007). Unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente Cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración. In P. F. B. G. J. M. G. P. Bolea M. Camacho (Ed.), *Investigación en educación matemática. comunicaciones de los grupos de investigación* (pp. 41–62). Huesca.: X Simposio de la SEIEM.
- Galende, N., Rojo, V., & Arrivillaga, A. R. (2019). The influence of beliefs in the process of teaching-learning mathematics. *Journal of Psychological & Educational Research*, 27(2), 88–110.
- Garofalo, J. (1989). Beliefs and their influence on mathematical performance. *The Mathematics Teacher*, 82(7), 502–505.
- Gómez Chacón, I. M. (2003). La tarea intelectual en matemáticas afecto, meta-afecto y los sistemas de creencias. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 225–248.
- Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87(7), 519–524.
- Hensberry, K. K., & Jacobbe, T. (2012). The effects of polya’s heuristic and diary writing on children’s problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, 24(1), 59–85.
- Jäder, J., Sidenvall, J., & Sumpter, L. (2017). Students’ mathematical reasoning and beliefs in non-routine task solving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(4), 759–776.
- Jones, I., & Inglis, M. (2015). The problem of assessing problem solving: Can comparative judgement help? *Educational Studies in Mathematics*, 89(3), 337–355.
- Kleiner, I. (1986). Famous problems in mathematics: An outline of a course. *For the learning of mathematics*, 6(1), 31–38.
- Lee, S.-Y. (2016). Students’ use of “look back” strategies in multiple solution methods. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(4), 701–717.
- Lemus, M., & Ursini, S. (2016). Creencias y actitudes hacia las matemáticas. Un estudio con alumnos de Bachillerato. In . . . T. F. A. J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández (Ed.), *Investigación en educación matemática xx* (pp. 315–323).

- Markovits, Z., & Forgasz, H. (2017). "mathematics is like a lion": Elementary students' beliefs about mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 49–64.
- Martínez Padrón, O. (2008). Actitudes hacia la matemática. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*, 9(1), 237–256.
- Martínez-Padrón, O., Contarino, A., & Ávila, J. (2015). Aspectos emocionales que impactan el desempeño de los estudiantes en el aula de matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 28, 182–189.
- Martínez Padrón, O. (2013). Las creencias en la educación matemática. *Educere*, 17(57), 231–239.
- McDonough, A., & Sullivan, P. (2014). Seeking insights into young children's beliefs about mathematics and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 87(3), 279–296.
- Ministerio de Educación Nacional. (2003). Estándares curriculares para matemáticas. *Estándares curriculares*.
- NCTM. (2000). Standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Olsson, J., & Granberg, C. (2019). Dynamic software, task solving with or without guidelines, and learning outcomes. *Technology, knowledge and learning*, 24(3), 419–436.
- Onuchic, L. d. I. R. (1999). Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: UNESP, 199–218.
- Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of educational research*, 62(3), 307–332.
- Papadopoulos, I. (2015). Beliefs and mathematical reasoning during problem solving across educational levels. In C. B.-S. Eichler (Ed.), *Views and beliefs in mathematics education* (pp. 183–195). Springer.
- Polya, G. (1945). How to solve it. princeton. *New Jersey: Princeton University*.
- Polya, G. (1962). *Mathematical discovery*, 1962. John Wiley & Sons.
- Pongsakdi, N., Laakkonen, E., Laine, T., Veermans, K., Hannula-Sormunen, M. M., & Lehtinen, E. (2019). The role of beliefs and motivational variables in enhancing word problem solving. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 63(2), 179–197.
- Prendergast, M., Breen, C., Bray, A., Faulkner, F., Carroll, B., Quinn, D., & Carr, M. (2018). Investigating secondary students beliefs about mathematical problem-solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(8), 1203–1218.
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Comares.
- Reiss, K., & Törner, G. (2007). Problem solving in the mathematics classroom: the german perspective. *ZDM*, 39(5-6), 431–441.

- Santos-Trigo, M. (2019). Problem Solving in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 129–135). Cham, Switzerland: Cham, Switzerland: Springer.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press Inc.
- Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of 'well-taught' mathematics courses. *Educational psychologist*, 23(2), 145–166.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 334–370.
- Schrock, C. S. (2000). Problem solving—what is it?. *Journal of School Improvement*, 1(2), 20–24.
- Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2014). Impacting positively on students' mathematical problem solving beliefs: An instructional intervention of short duration. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33(1), 8–29.
- Sumirattana, S., Makanong, A., & Thipkong, S. (2017). Using realistic mathematics education and the dapic problem-solving process to enhance secondary school students' mathematical literacy. *Kasetsart Journal of Social Sciences*, 38(3), 307–315.
- Tjoe, H. (2019). "looking back" to solve differently: Familiarity, fluency, and flexibility. In M. S.-T. Liljedahl (Ed.), *Mathematical problem solving, current themes, trends, and research* (pp. 3–20). Springer.
- Trigo, L. M. S. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Wang, G., Zhang, S., & Cai, J. (2019). Chinese high school students' mathematics-related beliefs and their perceived mathematics achievement: A focus on teachers' praise. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(7), em1713.
- Yuanita, P., Zulnaidi, H., & Zakaria, E. (2018). The effectiveness of realistic mathematics education approach: The role of mathematical representation as mediator between mathematical belief and problem solving. *PloS one*, 13(9), 1–21.

ARNULFO FAJARDO VALENCIA
Universidad del Valle.
✉ arnulfo.fajardo@correounivalle.edu.co

DAVID BENÍTEZ MOJICA

Universidad del Valle.

✉ *david.benitez@correounivalle.edu.co*

Recibido: *6 de abril de 2020.*

Aceptado: *28 de agosto de 2020.*

Publicado en línea: *7 de diciembre de 2020.*

hay una prueba muy bonita del Teorema del Coseno utilizando áreas?

Comenzamos recordando el Teorema de Pitágoras, que dice que en todo triángulo rectángulo de hipotenusa c y catetos a y b se tiene que

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

El “Teorema del Coseno” es una generalización de éste a cualquier triángulo de lados a, b y c y asegura que

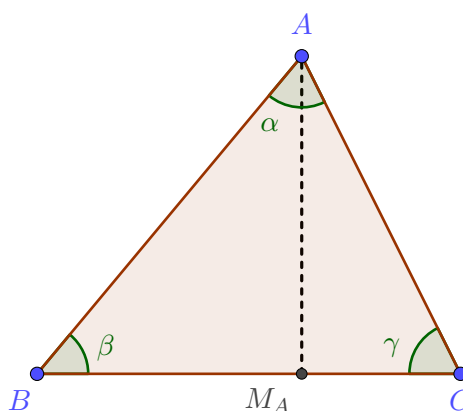
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

donde γ es el ángulo opuesto a c . Observar que si γ es recto, $\cos(\gamma) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ y se recupera el Teorema de Pitágoras. En la figura de abajo, si el punto C se acerca al M_A , el triángulo tiende a ser rectángulo y el coseno de γ tiende a 0.

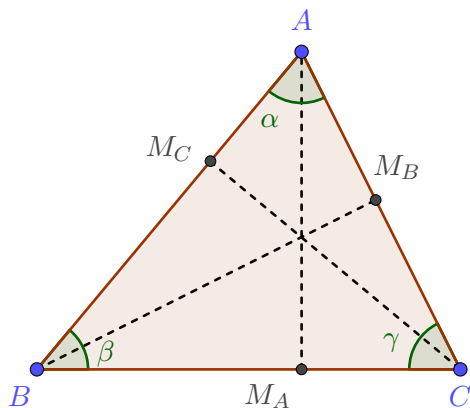
Consideremos un triángulo acutángulo $\triangle ABC$ y tracemos la altura $h_A = \overline{AM_A}$ correspondiente a la base \overline{BC} . Si llamamos α, β y γ a los ángulos interiores al triángulo correspondientes a los vértices A, B y C respectivamente, obtenemos (usando que “coseno es cateto adyacente sobre hipotenusa”)

$$\cos(\beta) = \frac{\overline{BM_A}}{\overline{BA}},$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\overline{CM_A}}{\overline{CA}}.$$



De igual modo, si trazamos las otras dos alturas $h_B = \overline{BM_B}$ y $h_C = \overline{CM_C}$ obtenemos las siguientes igualdades.



Considerando la altura h_B :

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AM_B}}{\overline{AB}},$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\overline{CM_B}}{\overline{CB}};$$

y considerando la altura h_C :

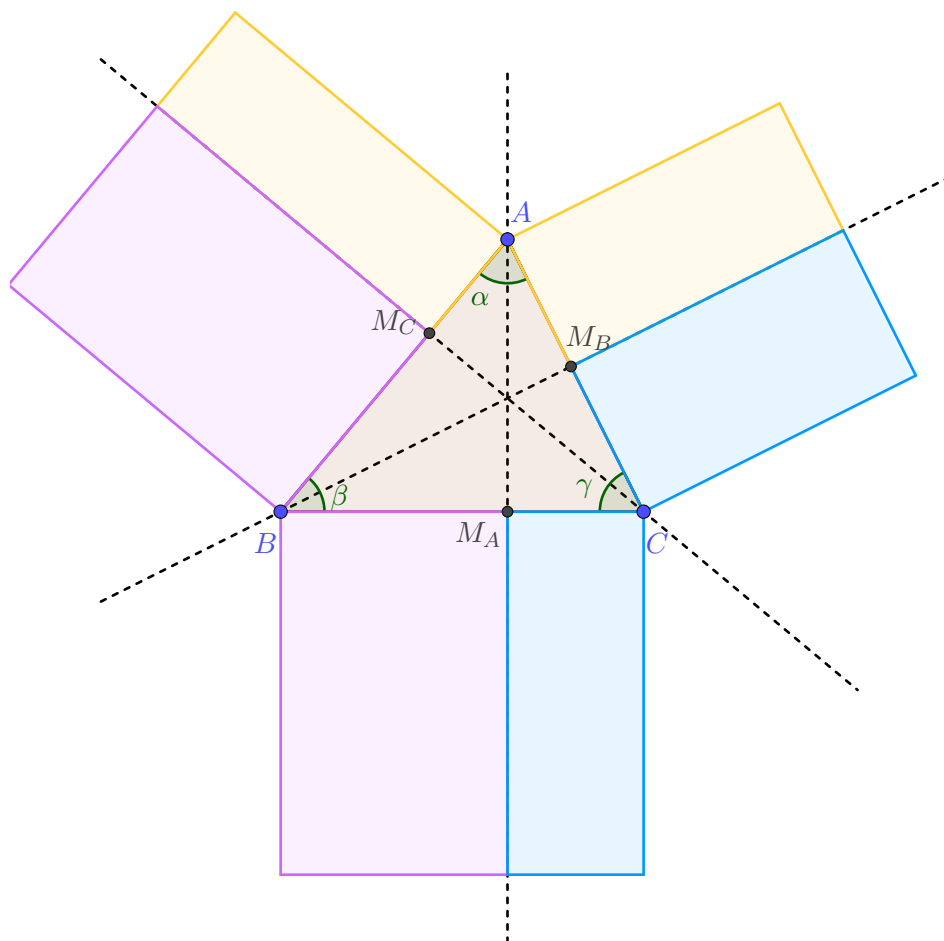
$$\cos(\beta) = \frac{\overline{BM_C}}{\overline{BC}},$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AM_C}}{\overline{AC}}.$$

Con estas notaciones, el teorema que queremos probar se lee

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos(\alpha).$$

Ahora, tal como suele hacerse en las clásicas demostraciones del Teorema de Pitágoras, dibujamos cuadrados exteriores sobre los lados del triángulo.



Resulta que los rectángulos del mismo color ¡tienen la misma área! Por ejemplo, el área del rectángulo amarillo de lado $\overline{AM_C}$ es

$$\overline{AB} \times \overline{AM_C} = \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos(\alpha)$$

mientras que el área del rectángulo amarillo de lado $\overline{AM_B}$ es

$$\overline{AC} \times \overline{AM_B} = \overline{AC} \times \overline{AB} \times \cos(\alpha).$$

Llamaremos $\mathcal{A}(R_a)$ a esta área. De manera análoga se ve que los rectángulos violetas tienen igual área $\mathcal{A}(R_v)$ y que los rectángulos celestes también tienen igual área $\mathcal{A}(R_c)$.

Ya estamos listos para la demostración del Teorema del Coseno, la cual sale comparando áreas de rectángulos. Tenemos:

$$\begin{aligned}
 \overline{BC}^2 &= \mathcal{A}(R_v) + \mathcal{A}(R_c) \\
 &= (\overline{AB}^2 - \mathcal{A}(R_a)) + (\overline{AC}^2 - \mathcal{A}(R_a)) \\
 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \mathcal{A}(R_a) \\
 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos(\alpha).
 \end{aligned}$$

La demostración que hicimos fue realizada sobre un triángulo acutángulo, dejamos a cargo del lector hacer las modificaciones necesarias para obtener una demostración análoga para triángulos obtusángulos.

Los griegos no usaban explícitamente senos y cosenos. Sin embargo, un resultado similar al Teorema del Coseno se encuentra en la Proposición 12 de los Elementos de Euclides. En el siglo XV, el matemático y astrónomo persa Jamshīd al-Kāshī (ca. 1380 – 22/6/1429), dió la primer versión explícita del teorema en una forma más trigonométrica. El teorema fue popularizado en occidente por el matemático francés François Viète (1540 – 23/2/1603) en el siglo XVI. En Francia aún suele referirse al Teorema del Coseno como el Teorema de al-Kāshī. A comienzos del siglo XIX el teorema tomó su forma actual.

EXTENSIONES DE LOS TEOREMAS DEL VALOR MEDIO DEL ANÁLISIS DE UNA VARIABLE

Ginés R. Pérez Teruel

RESUMEN. En este trabajo los teoremas del valor medio de Lagrange y Cauchy para funciones reales de variable real son extendidos, incluyendo el caso de la función compuesta. Para ello se sigue un razonamiento inductivo, partiendo de la exploración de casos particulares hasta llegar a una expresión general, procediendo por tanto de lo particular a lo general. El contenido del trabajo puede ser de utilidad para docentes de Matemática como material complementario y de ampliación en sus clases.

ABSTRACT. In this work Lagrange's and Cauchy's mean value theorems for real valued functions are extended, including the case of the composed function. For this purpose, we follow an inductive reasoning, starting from the exploration of some particular cases until obtaining a general expression, therefore we move from the particular to the general. The content of the work may be useful for math teachers as complementary and additional material for their lectures

§1. Introducción

Los teoremas del valor medio de Lagrange y de Cauchy son dos básicos teoremas del cálculo diferencial que todo estudiante del último curso de instituto o de primer año universitario debería conocer bien. Dichos teoremas pueden demostrarse usando el teorema de Rolle, otro teorema clásico que recientemente ha tenido un inusitado protagonismo en los medios de comunicación españoles a tenor de su aparición en un polémico examen de Matemática de la Prueba de Acceso a la Universidad (PAU) de 2019 en la Comunidad Valenciana (Borreguero, 2019; la Torre, 2019).

Palabras clave: teorema de Rolle, teoremas del valor medio, funciones de una variable.

Keywords: Rolle's theorem, mean value theorems, functions of one variable.

A pesar de ser un teorema bastante intuitivo y elemental, el hecho de que llevara varios años sin aparecer en la PAU hizo creer a muchos docentes que su enseñanza podía omitirse en clase, aunque este teorema se incluya en los currículos españoles de segundo de Bachillerato de manera explícita y su omisión, por tanto, resulte difícil de justificar (Molins y Bautista, 2019). Conviene aclarar a todos nuestros lectores que el segundo curso del Bachillerato español equivale al último curso de la Educación Secundaria en el sistema educativo argentino.

En este trabajo, mostraremos la riqueza del teorema de Rolle, y lo usaremos para extender y generalizar los teoremas del valor medio de Lagrange y Cauchy al caso de la función compuesta, que ilustraremos mediante algunos ejemplos sencillos. Además, Rolle también nos servirá para derivar otro teorema análogo a los teoremas del valor medio para una función construida como el producto de otras dos funciones, y en el que, como veremos, aparece explícitamente la media aritmética de los valores que estas funciones toman en los extremos de un intervalo.

Desde un punto de vista didáctico, el contenido de este trabajo puede ser utilizado por docentes de Matemática como material complementario de ampliación en sus clases, dado que las demostraciones y razonamientos presentados aquí pueden ser asimilados sin problemas por estudiantes que hayan superado con éxito un primer curso introductorio de análisis.

§2. Conceptos previos: el teorema de Rolle y los teoremas del valor medio de Lagrange y de Cauchy

En 1691, el matemático francés Michel Rolle (1652-1719) demostró que si f es una función continua que vale lo mismo en los extremos de un intervalo, entonces existe al menos un punto del interior del intervalo donde la derivada de la función se anula. En términos más precisos, si f es una función continua definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable sobre el abierto (a, b) , entonces existe al menos un punto c perteneciente al intervalo (a, b) tal que

$$f'(c) = 0.$$

Las demostraciones modernas de este teorema hacen uso del teorema de Weierstrass, que mencionamos pero no escribiremos aquí.

El hecho de que una curva tome el mismo valor en los extremos de un intervalo implique necesariamente que en el interior del mismo exista algún punto donde la tangente a la curva sea horizontal, ya era conocido mucho antes del cálculo diferencial y de Michel Rolle, pues se atribuye al matemático indio Bashkara Acharya

(1114–1185) una temprana versión de este teorema.

Una de las aplicaciones habituales del teorema de Rolle es la demostración de los teoremas del valor medio (Lagrange y Cauchy), por medio de la construcción de funciones auxiliares que sean continuas y tomen el mismo valor en los extremos de un intervalo determinado. Puesto que vamos a necesitarlo en lo sucesivo, enunciemos ahora brevemente el teorema del valor medio de Lagrange.

Teorema 2.1 (valor medio de Lagrange). *Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración. Se define la función auxiliar h de la forma

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Esta función cumple las condiciones del teorema de Rolle. Es continua (puesto que f lo es) y por sustitución directa puede comprobarse que

$$h(a) = h(b) = 0.$$

Por tanto debe haber algún punto $c \in (a, b)$ para el cual $h'(c) = 0$. Derivando e igualando a cero, obtenemos el resultado del teorema. \square

Teorema 2.2 (valor medio de Cauchy). *Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) . Entonces, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Demostración. Sea la función auxiliar H definida como:

$$H(x) = (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)).$$

Esta función cumple las condiciones del teorema de Rolle. En efecto, es continua (puesto que f y g lo son) y por sustitución directa puede comprobarse que

$$H(a) = H(b) = 0.$$

Por tanto, debe haber algún punto $c \in (a, b)$ para el cual $H'(c) = 0$. Derivando $H(x)$ e imponiendo que para algún $c \in (a, b)$, $H'(c) = 0$, obtenemos el resultado del teorema. \square

Resulta claro que el teorema del valor medio de Lagrange es un caso particular del teorema de Cauchy para $g(x) = x$. Una de las aplicaciones más conocidas de este teorema es la demostración de la regla de L'Hôpital-Bernoulli.

Por otra parte, es interesante observar que uno puede construir muchas funciones auxiliares análogas a las que se utilizan en estos teoremas que cumplen las condiciones del teorema de Rolle. Por ejemplo, sea $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces podemos definir una cierta función S como

$$S(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} - \frac{\frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)}}{b - a} \cdot (x - a).$$

Esta función verifica $S(b) = S(a) = 0$ y como hemos exigido $f(x) \neq 0$ en $[a, b]$, entonces todas las condiciones del teorema de Rolle se satisfacen.

La próxima sección versa sobre el estudio de algunas de estas funciones auxiliares que cumplen con las condiciones del teorema de Rolle y de sus aplicaciones para extender y generalizar los teoremas del valor medio.

§3. El teorema del valor medio de Lagrange para la función compuesta

Iniciemos esta sección enunciando un par de teoremas que nos permitirán aproximarnos poco a poco hacia otro resultado más general que contiene a los anteriores y al propio teorema del valor medio de Lagrange como casos particulares.

Teorema 3.1. *Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , y además $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)f(b)f(a)} \cdot (f(c))^2.$$

Demostración. Construyamos una función auxiliar S que se define como:

$$S(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} - \frac{\frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)}}{b - a} \cdot (x - a).$$

Esta función satisface las condiciones del teorema de Rolle. En efecto, es continua (puesto que f lo es y además $f \neq 0$ en $[a, b]$) y por sustitución directa puede comprobarse que $S(a) = S(b) = 0$. Por tanto, debe haber algún punto $c \in (a, b)$ para el cual $S'(c) = 0$. Derivando $S(x)$ e imponiendo que para algún $c \in (a, b)$, $S'(c) = 0$, encontramos:

$$0 = -\frac{1}{(f(c))^2} \cdot f'(c) - \frac{\frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)}}{b - a}.$$

Despejando $f'(c)$ en esta ecuación obtenemos el resultado del teorema. \square

Mostremos ahora algún ejemplo sencillo de aplicación de este teorema para funciones elementales.

Ejemplo 3.2. *Sea la función lineal genérica: $f(x) = mx + n$ con $m, n > 0$.*

(a) Determina, en función de m y n , para qué punto del intervalo $(0, 1)$ se cumple lo establecido por el Teorema 3.1.

(b) A continuación, particulariza la solución obtenida para la función $f(x) = x + 1$ y comprueba que el punto obtenido cae efectivamente dentro del intervalo $(0, 1)$

(a) El teorema anterior aplicado a la función del ejemplo nos asegura que debe existir algún $x \in (a, b)$ para el cual:

$$m = \frac{m}{(m+n)n} \cdot (mx+n)^2.$$

Hemos hecho uso de las identidades: $f(1) = m+n$, $f(0) = n$, $f'(x) = m$. Desarrollando el cuadrado y simplificando, llegamos a la ecuación de segundo grado:

$$m^2x^2 + 2mnx - mn = 0.$$

Esta ecuación de segundo grado tiene las soluciones siguientes:

$$x = \frac{-2mn \pm \sqrt{4m^2n^2 + 4m^3n}}{2m^2} = \frac{1}{m} \left(-n \pm \sqrt{n(n+m)} \right).$$

Y puesto que las condiciones del problema nos dicen que $m, n > 0$, la única solución que pertenece al intervalo $(0, 1)$ será por tanto:

$$x = \frac{1}{m} \left(-n + \sqrt{n(n+m)} \right).$$

(b) Sustituimos en esta última ecuación los valores $m = 1, n = 1$ que se corresponden con los valores de la pendiente y ordenada para la función $f(x) = x + 1$, y obtenemos:

$$x = -1 + \sqrt{2}.$$

Valor que efectivamente pertenece al intervalo $(0, 1)$.

Teorema 3.3. Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , y además $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$ entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{\ln \left(\frac{f(b)}{f(a)} \right)}{b-a} \cdot f(c).$$

Demostración. Sea la función auxiliar R definida de la siguiente forma:

$$R(x) = \ln \left(\frac{f(x)}{f(a)} \right) - \frac{\ln \left(\frac{f(b)}{f(a)} \right)}{b-a} \cdot (x-a).$$

La función R así definida verifica las condiciones del teorema de Rolle¹. Es continua (puesto que f lo es y además $f(x) \neq 0$ en $[a, b]$), y por sustitución directa puede comprobarse que $R(a) = R(b) = 0$. Por tanto, debe haber algún punto

¹Notemos que no hace falta ninguna hipótesis extra para evaluar la función \ln en $f(b)/f(a)$ y luego en $f(x)/f(a)$, pues al ser f no nula en $[a, b]$, los cocientes tienen signo positivo.

$c \in (a, b)$ para el cual $R'(c) = 0$. Derivando e igualando a cero encontramos:

$$0 = \frac{f'(c)}{f(c)} - \frac{\ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)}{b-a}. \quad \square$$

Es interesante advertir que este teorema es a las funciones exponenciales lo que el teorema del valor medio de Lagrange es a las funciones lineales y cuadráticas. En efecto, es sencillo demostrar que para una función cuadrática

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, continua en cualquier intervalo $[a, b]$ y derivable en el abierto, el teorema del valor medio de Lagrange se verifica justo para el punto medio del intervalo: $x = \frac{1}{2}(a + b)$.

Veamos un ejemplo para ilustrar que el Teorema 3.3 juega el mismo papel para las funciones exponenciales.

Ejemplo 3.4. *Sea la función exponencial $f(x) = e^{x^2}$ que es continua en todo intervalo $[a, b]$ y derivable en el abierto. Demuestra que un punto del intervalo donde se verifica el Teorema 3.3 es precisamente el punto medio de dicho intervalo.*

El Teorema 3.3 nos dice que debe existir algún $x \in (a, b)$ para el cual

$$\begin{aligned} 2x \cdot e^{x^2} &= \frac{\ln\left(\frac{e^{b^2}}{e^{a^2}}\right)}{b-a} \cdot e^{x^2} = \frac{\ln(e^{b^2}) - \ln(e^{a^2})}{b-a} \cdot e^{x^2} \\ &= \frac{b^2 - a^2}{b-a} \cdot e^{x^2} = (b+a) \cdot e^{x^2}. \end{aligned}$$

y de aquí se infiere que $x = \frac{1}{2}(a + b)$. Idéntico resultado se obtiene para la función más general

$$f(x) = \exp(\alpha x^2 + \beta x + \gamma),$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Es probable que el atento lector ya haya notado que los dos teoremas anteriores se construyen siguiendo la misma filosofía, pues ambos los hemos deducido utilizando funciones auxiliares que verifican las condiciones del teorema Rolle y que hacen uso de funciones de $f(x)$ como $1/f(x)$ y $\ln f(x)$. En efecto, los dos son casos particulares de un teorema más general que enunciaremos ahora.

Teorema 3.5 (valor medio de Lagrange de la función compuesta). *Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y sea h una función continua en $f([a, b])$ y derivable en $f([a, b])$, entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que*

$$h'(f(c)) \cdot f'(c) = \frac{h(f(b)) - h(f(a))}{b-a}.$$

Demostración. Construyamos una función auxiliar T definida como:

$$T(x) = h(f(x)) - h(f(a)) - \frac{h(f(b)) - h(f(a))}{b - a} \cdot (x - a).$$

La función T así definida satisface las condiciones del teorema de Rolle. Es continua (puesto que f y h lo son por hipótesis) y por sustitución directa puede comprobarse que $T(a) = T(b) = 0$. Por tanto, debe haber algún punto $c \in (a, b)$ para el cual $T'(c) = 0$. Derivando e igualando a cero, obtenemos el resultado del teorema. \square

Notemos que cuando

$$h(f(x)) = f(x)$$

recuperamos el teorema del valor medio de Lagrange. De la misma forma, cuando

$$h(f(x)) = \frac{1}{f(x)}, \quad f(x) \neq 0,$$

recuperamos el Teorema 3.1, mientras que si

$$h(f(x)) = \ln f(x), \quad f(x) > 0,$$

lo que obtenemos es el Teorema 3.3. Es por tanto posible obtener muchos otros teoremas del valor medio análogos a los anteriores utilizando funciones compuestas diferentes a estas. El lector puede comprobar por sí mismo que con

$$h(f(x)) = \sqrt{f(x)}, \quad f(x) > 0, \quad \text{ó} \quad h(f(x)) = e^{f(x)},$$

por ejemplo, se pueden obtener otros resultados interesantes. Veamos uno de estos casos como ejercicio de aplicación de este resultado.

Ejemplo 3.6. *Basándote en el Teorema 3.5:*

(a) *Deduce un "teorema del valor medio" para la función compuesta $h(f(x)) = \arctan(f(x))$.*

(b) *Encuentra el punto para el cual se verifica este teorema si $f(x) = \cos x$ en el intervalo $[0, \pi]$.*

(a) El teorema del valor medio de la función compuesta aplicado a la función $h(f(x)) = \arctan(f(x))$ nos dice que para algún $c \in [a, b]$ se tiene

$$f'(c) = \frac{\arctan(f(b)) - \arctan(f(a))}{b - a} \cdot (1 + (f(c))^2).$$

(b) Aplicando este teorema a nuestro caso: $f(x) = \cos x$ en $[0, \pi]$, tenemos:

$$-\sin x = \frac{\arctan(\cos(\pi)) - \arctan(\cos(0))}{\pi} \cdot (1 + \cos^2(x)) = -\frac{1}{2}(2 - \sin^2(x)).$$

Reagrupando, llegamos a la ecuación de segundo grado

$$\sin^2(x) + 2 \sin(x) - 2 = 0,$$

cuya única solución admisible viene dada por

$$\sin x = -1 + \sqrt{3},$$

es decir $x \simeq 0,82$, valor que efectivamente pertenece al intervalo $[0, \pi]$.

En la próxima sección mostraremos cómo puede seguirse la misma filosofía para generalizar el teorema del valor medio de Cauchy, y además enunciaremos otro teorema de valor medio que se construye siguiendo un enfoque un poco diferente.

§4. Otros teoremas del valor medio

En esta última parte del trabajo veremos que la misma estrategia funciona también para extender el teorema del valor medio de Cauchy para la función compuesta. De nuevo empezaremos por un teorema que, como el propio teorema de Cauchy, representa sólo un caso particular. Concluiremos la sección presentando otro teorema de valor medio un poco distinto a los anteriores, en el que demostraremos que para dos funciones continuas en un intervalo cerrado y derivable en el abierto, existe algún punto del interior del intervalo donde la derivada del producto de estas dos funciones coincide idénticamente con la suma de la derivada de cada función multiplicada por la media aritmética de la otra, evaluada en los extremos del intervalo.

Teorema 4.1. *Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) y además $f(x), g(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que*

$$(f(c))^2(f(b) - f(a))g'(c)g(b)g(a) = (g(c))^2(g(b) - g(a))f'(c)f(b)f(a).$$

En el caso en el que $g(b) \neq g(a)$ y además $g'(c) \neq 0$, podremos escribir

$$(4.1) \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{(f(c))^2}{(g(c))^2} \cdot \frac{g(b)g(a)}{f(b)f(a)} \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Demostración. Se construye una función auxiliar G de la forma:

$$(4.2) \quad G(x) = \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}\right)\left(\frac{1}{g(b)} - \frac{1}{g(a)}\right) - \left(\frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)}\right)\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right).$$

La función G verifica las condiciones del teorema de Rolle. En efecto, es continua (puesto que f y g lo son) y por sustitución directa puede comprobarse que $G(a) = G(b) = 0$. Por tanto, debe haber algún punto $c \in (a, b)$ para el cual $G'(c) = 0$. Derivando $G(x)$ e imponiendo que para algún $c \in (a, b)$, $G'(c) = 0$, obtenemos el resultado del teorema. \square

Vamos a conectar ahora este resultado con lo visto anteriormente. En particular, puede demostrarse que el Teorema 3.1 que vimos en la sección previa es a este Teorema 4.1, lo mismo que el teorema de Lagrange es al teorema de Cauchy, es decir, un caso particular. De hecho, tomando $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, en la ecuación (4.1),

para algún $c \in (a, b)$ tenemos que

$$\begin{aligned} -c^2 \cdot f'(c) &= (f(c))^2 c^2 \frac{1}{ba f(b) f(a)} \cdot \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} \\ &= (f(c))^2 c^2 \frac{1}{ba f(b) f(a)} \cdot \frac{(f(b) - f(a)) ba}{a - b}; \end{aligned}$$

es decir,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{(b - a) f(b) f(a)} \cdot (f(c))^2,$$

que es el Teorema 3.1, tal y como queríamos demostrar. Es interesante observar también que la función auxiliar $G(x)$ dada por la ecuación (4.2) puede expresarse como el determinante

$$G(x) = \begin{vmatrix} \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} & \frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)} \\ \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)} & \frac{1}{g(b)} - \frac{1}{g(a)} \end{vmatrix}.$$

Esta notación parece particularmente apropiada si uno quisiera extender estos resultados al caso de tres o más funciones.

Por otra parte, al igual que hicimos en la sección previa, podríamos continuar explorando casos particulares y presentar otro teorema reemplazando en la función auxiliar del Teorema 4.1 la función $\frac{1}{g(x)}$, $g \neq 0$, por cualquier otra función de $g(x)$, como por ejemplo $\ln(g(x))$, $g > 0$, el lector puede comprobar si lo desea cómo quedaría el resultado. Nosotros no nos detendremos a investigar más casos particulares, y enunciaremos a continuación el caso general de la función compuesta.

Teorema 4.2 (valor medio de Cauchy de la función compuesta). *Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) , h una función continua en $f([a, b])$ y derivable en $f([a, b])$ y J una función continua en $g([a, b])$ y derivable en $g([a, b])$. Entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que*

$$\left(h(f(b)) - h(f(a)) \right) J'(g(c)) g'(c) = \left(J(g(b)) - J(g(a)) \right) h'(f(c)) f'(c).$$

En el caso en el que $J(g(b)) \neq J(g(a))$ y además $J'(g(c)) g'(c) \neq 0$, podremos escribir:

$$\frac{h'(f(c)) f'(c)}{J'(g(c)) g'(c)} = \frac{h(f(b)) - h(f(a))}{J(g(b)) - J(g(a))}.$$

Demostración. Se construye una función auxiliar K definida como el determinante

$$(4.3) \quad K(x) = \begin{vmatrix} h(f(x)) - h(f(a)) & h(f(b)) - h(f(a)) \\ J(g(x)) - J(g(a)) & J(g(b)) - J(g(a)) \end{vmatrix}.$$

Este determinante cumple con las condiciones del Teorema de Rolle. Derivando e igualando a cero, obtenemos el resultado del teorema. \square

Notemos que el Teorema del valor medio de Cauchy es un caso particular de este Teorema 4.2 cuando $h(f(x)) = f(x)$ y $J(g(x)) = g(x)$. El teorema puede generalizarse al caso de tres o más funciones compuestas extendiendo de manera natural la dimensión del determinante que define la función auxiliar $K(x)$ de la ecuación (4.3), y que cumple con el Teorema de Rolle.

Vamos a concluir esta postrera sección del trabajo presentando un último teorema de valor medio en el que aparece de forma explícita la media aritmética de los valores de una función evaluada en los extremos de un intervalo.

Teorema 4.3. *Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) . Entonces, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que*

$$(f(x) \cdot g(x))' \Big|_{x=c} = \frac{1}{2} \{ f'(c) \cdot (g(a) + g(b)) + g'(c) \cdot (f(a) + f(b)) \}.$$

Demostración. Definimos una función auxiliar D de la forma:

$$D(x) = (f(x) - f(a))(g(x) - g(b)) + (g(x) - g(a))(f(x) - f(b)).$$

La función D verifica las condiciones del teorema de Rolle. En efecto, es continua (puesto que f y g lo son) y por sustitución directa puede comprobarse que $D(a) = D(b) = 0$. Por tanto, existe algún punto $c \in (a, b)$ para el cual $D'(c) = 0$. Derivando $D(x)$ e imponiendo que para algún $c \in (a, b)$, $D'(c) = 0$, obtenemos:

$$0 = 2(f'(c)g(c) + g'(c)f(c)) - f'(c)(g(a) + g(b)) - g'(c)(f(a) + f(b))$$

como se quería ver. □

§5. Comentarios finales

En este trabajo hemos hecho un uso extensivo del teorema de Rolle para generalizar los clásicos teoremas del valor medio de las funciones reales de una variable real. En efecto, parece muy natural investigar y preguntarse qué pasaría si se modifican las funciones auxiliares que usualmente se construyen para que cumplan consistentemente con las condiciones del teorema de Rolle (continuidad y que tengan el mismo valor en los extremos de un intervalo) por otras expresiones un poco más generales. Esto nos ha llevado a explorar en primer lugar algunos casos especiales, en los que hemos alterado ligeramente la estructura de estas funciones auxiliares reemplazando en ellas la función f por otras funciones de f como $1/f$ o el logaritmo de f . Hemos visto que se deducían así dos teoremas parecidos al teorema del valor medio de Lagrange. A continuación, presentamos el teorema del valor medio de Lagrange para la función compuesta, que contiene a todos los teoremas anteriores y al propio teorema del valor medio de Lagrange como casos particulares. La misma estrategia hemos visto que puede emplearse con éxito para

generalizar el teorema del valor medio de Cauchy.

En definitiva, el contenido de este trabajo puede ser útil para docentes y estudiantes que quieran tener una visión más amplia del tema e ir un poco más allá de los clásicos teoremas del valor medio que se imparten en los cursos introductorios del cálculo diferencial y análisis de una variable. El lector curioso o interesado por profundizar en estas cuestiones tiene a su disposición trabajos académicos como éste (Matkowsky, s.f.), en el que se investigan generalizaciones de los teoremas del valor medio de Lagrange y de Cauchy con un enfoque distinto al aquí expuesto, en conexión con los distintos promedios existentes, tales como la media geométrica, armónica, logarítmica y exponencial, entre otras.

Bibliografía

- Borreguero, M. (2019). *La pregunta que desata el caos en la polémica selectividad valenciana*. Descargado de <https://www.lainformacion.com/espana/polemica-examen-matematicas-selectividad-valencia-pregunta-clave/6503199/>
- la Torre, N. D. (2019). *El acta de la reunión previa a la pau sí recogía el polémico teorema*. Descargado de <https://www.elmundo.es/comunidad-valenciana/2019/06/21/5d0bb0ea21efa031608b463f.html>
- Matkowsky, J. (s.f.). Generalizations of lagrange and cauchy mean-value theorems, volume=XLIII year = 2010. *Demonstratio Mathematica*.
- Molins, J. ., y Bautista, J. . (2019). *El coordinador de las pau: el examen de matemáticas no se sale del currículum*. Descargado de <https://www.lasprovincias.es/comunitat/coordinador-pau-2019-comunidad-valenciana-examen-matematicas-20190605115559-nt.html>

GINÉS R. PÉREZ TERUEL

Departamento de Matemáticas, IES Victoria Kent, Elche-03203, Alicante, España

✉ gines.landau@gmail.com

Recibido: 5 de febrero de 2019.

Aceptado: 13 de noviembre de 2020.

Publicado en línea: 7 de diciembre de 2020.

EL CRECIMIENTO EXPONENCIAL: UN DESAFÍO A LA INTUICIÓN

Marilina Carena

RESUMEN. Este texto consiste en una recopilación de problemas, ya conocidos en la literatura, relacionados con el crecimiento exponencial: la leyenda de Sissa y los granos de trigo; contagio exponencial; cómo llegar a la Luna doblando papeles; el telar de la abundancia y la estafa piramidal; interés compuesto. El objetivo es mostrar cómo este tipo de crecimiento desafía a nuestro pensamiento lineal, y de qué manera las potencias hacen crecer los números de una forma difícil de imaginar e, incluso, de creer. Veremos cómo el crecimiento exponencial produce un aumento en las cantidades a una velocidad contraria a la intuición. Cada problema se abordará a un nivel que pueda ser comprendido por un estudiante de escuela secundaria, o por cualquier persona con conocimientos mínimos de matemática. Para ello, algunos modelos se simplificarán de modo que se adapten al nivel deseado.

Introducción

Desde chicos estamos familiarizados con procesos que involucran magnitudes que se relacionan proporcionalmente, ya sea forma en directa o inversa. Por ejemplo, si compramos 2 alfajores pagaremos el doble que si compramos uno, o si viajamos a una velocidad constante de 120 kilómetros por hora tardaremos la mitad de tiempo que si lo hacemos a 60 kilómetros por hora. En el primer caso, la cantidad de alfajores y el precio total son magnitudes directamente proporcionales, ya que si una aumenta la otra también, en igual proporción. En el segundo ejemplo, la velocidad y el tiempo que tardamos en hacer un recorrido son magnitudes inversamente proporcionales, ya que si una aumenta la otra disminuye en igual proporción.


A medida que comenzamos a entender procesos más complejos comprendemos que existen otros tipos de relaciones entre magnitudes. Si duplicamos cada lado de un cuadrado, el área del nuevo cuadrado también aumentará, pero no será el doble del área del primero, sino que será su cuádruple. Si subimos una foto a una red social y recibe muchos “Me gusta” durante el primer día, no significa que al segundo día habrá acumulado el doble.

Palabras clave: Educación Matemática, Escuela Secundaria, Crecimiento Exponencial.
Keywords: Mathematics Education, Secondary School, Exponential Growth.

Así, vemos que existen muchas formas de crecimiento. En este trabajo centraremos nuestra atención en un tipo particular: el exponencial. Veremos, mediante ejemplos concretos, cómo este tipo de aumento desafía a nuestra intuición y de qué manera las potencias hacen crecer los números de una forma difícil de dimensionar.

El primer ejemplo que veremos relata una historia que ilustra la velocidad de este tipo de crecimiento. Esta historia, con algunas variantes, es una leyenda clásica que puede encontrarse en varios textos o en Internet. Sin embargo, la idea de fondo es la misma en todas y la explicamos a continuación.

La leyenda cuenta que, hace muchos años, un rey se encontraba extremadamente triste por la muerte de su hijo en una batalla. Para lograr recuperarse necesitaba algo que ocupara su mente, lo distrajera y evitara que cayera en depresión. De esta forma podría, de a poco, salir adelante.

 Así fue que un buen día un sabio llamado Sissa, enterado de la situación, se presentó ante el rey y le ofreció un juego, asegurando que conseguiría entretenerlo: el ajedrez. Sissa le entregó un tablero, le explicó las reglas y el rey comenzó a jugar. Quedó maravillado con el juego, porque lo mantenía ocupado y entretenido. Entonces, como agradecimiento, le dijo a Sissa que pida lo que quisiera como recompensa. El rey era extremadamente rico, así que no tendría problemas en concederle a Sissa su deseo.

Sissa, que era muy sabio, pidió lo siguiente:

“Quiero un grano de trigo por la primera casilla del tablero, 2 granos por la segunda, 4 por la tercera, 8 por la cuarta, 16 por la quinta, y así sucesivamente hasta cubrir todo el tablero.”

En otras palabras, la cantidad de trigo equivaldría a dejar un grano en el primer cuadrado del tablero y, a partir de allí, ir dejando en cada uno el doble de granos de los colocados en el anterior. La recompensa solicitada por Sissa correspondería a la suma de lo acumulado en cada una de las casillas del tablero.

El rey estaba sorprendido por el pedido, porque consideraba que era poco premio por tan maravilloso juego. De todas formas, accedió a concederle la recompensa solicitada y ordenó a sus ayudantes que calcularan la cantidad total de granos y se la entregasen a Sissa.

Al otro día, sus ayudantes le informaron al rey que no podían entregarle a Sissa la cantidad de granos de trigo solicitada, pues no podrían llegar a ella ni siquiera consiguiendo el trigo disponible en todo el mundo.

¿De qué cantidad se trata? ¿Podemos imaginarla? Encontraremos la respuesta en la próxima sección.

§1. La leyenda de Sissa y los granos de trigo

Calcularemos ahora la cantidad de granos de trigo que Sissa pidió al rey, como recompensa por haberle dado el juego de ajedrez. Para esto no necesitamos conocer la reglas del ajedrez, sino simplemente saber que el tablero es un cuadrado de 8×8 casillas, es decir, un total de 64 cuadrados negros y blancos. En la Figura 1 se representa un tablero y la cantidad de granos pedidos por Sissa por cada una de las primeras 6 casillas.

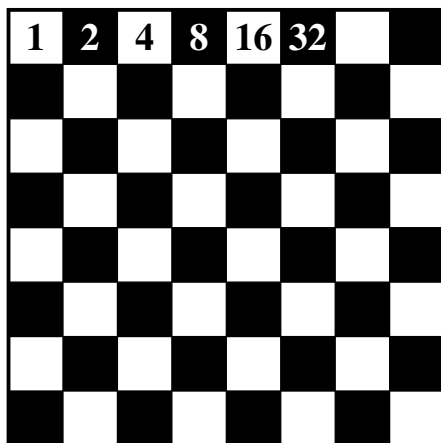


FIGURA 1. Cantidad de granos de trigo por cada una de las primeras 6 casillas.

En el siguiente cuadro iremos contando los granos de trigo por cada casilla, así como el total acumulado hasta ella, para observar si existe algún patrón. Para ello, numeramos las casillas del tablero con los números de 1 a 64.

Número de casilla	Granos por la casilla	Total de granos acumulados
1	1	1
2	2	$1 + 2$
3	4	$1 + 2 + 4$
4	8	$1 + 2 + 4 + 8$
5	16	$1 + 2 + 4 + 8 + 16$
6	32	$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$
⋮	⋮	⋮
64	2^{63}	$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots + 2^{63}$

CUADRO 1. Granos de trigo por casilla y acumulados.

En el cuadro anterior, para saber la cantidad de granos de trigo en la casilla número 64 hemos observado que, efectivamente, existe un patrón. Por ejemplo, la cantidad de granos

en la casilla número 4 es 8, que es igual a 2^3 . Lo mismo ocurre en cada una de las casillas: si tiene número n , la cantidad de granos correspondientes por ella es igual a 2^{n-1} . Así, en casilla número 64 habrá 2^{63} granos de trigo.

Por lo tanto, para calcular la cantidad total de granos que Sissa pidió de recompensa debemos obtener el resultado de la suma

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots + 2^{63}.$$

Como mencionamos al detectar el patrón, es posible reescribir cada uno de los términos de esta suma como

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{63}.$$

Podemos obtener el resultado de la suma con una calculadora pero, además, podemos utilizar una fórmula que resultará muy útil para todos los fenómenos que involucran crecimiento exponencial. Esta fórmula nos da el resultado de una suma de la forma

$$a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^n,$$

para cualquier número real a y cualquier número entero no negativo n . Si $a = 1$ entonces cada término es igual a 1 y el resultado es $n + 1$. Lo interesante es encontrar el resultado cuando a es distinto de 1. En este caso la suma recibe el nombre de *suma geométrica*, y su resultado se calcula fácilmente aplicando la siguiente fórmula:

$$a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

La igualdad anterior se obtiene de una forma tan simple como ingeniosa: llamemos S al resultado de la suma $a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^n$. Es decir,

$$S = 1 + a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^n.$$

Con el fin de encontrar el valor de S , multiplicamos por a ambos miembros de esta igualdad, obteniendo:

$$a \cdot S = a + a^2 + a^3 + a^3 + \dots + a^{n+1}.$$

Si a esta última expresión le restamos miembro a miembro la anterior, obtenemos

$$a \cdot S - S = a^{n+1} - 1,$$

puesto que todos los demás términos del lado derecho se cancelan. Extrayendo S como factor común del lado izquierdo, nos queda

$$(a - 1) \cdot S = a^{n+1} - 1.$$

La fórmula enunciada se obtiene al dividir cada miembro de la igualdad anterior por $a - 1$.

Esta fórmula es tan simple de demostrar como de aplicar. Para ilustrar su uso, calculemos la cantidad de granos de trigo acumulados hasta la casilla 4, inclusive. Es decir,

observando el Cuadro 1, debemos calcular el resultado de

$$1 + 2 + 4 + 8,$$

lo que se reescribe como

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3.$$

Para hallar el resultado mediante la fórmula, la aplicamos con $a = 2$ y $n = 3$ para obtener

$$\frac{2^{3+1} - 1}{2 - 1} = \frac{2^4 - 1}{1} = 16 - 1 = 15,$$

tal como puede verificarse realizando la suma directamente.

Volviendo al problema del total de granos pedidos por Sissa, en ese caso tenemos $a = 2$ y $n = 63$, por lo que el resultado de la suma es

$$\frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Esa es la cantidad total de granos que pidió Sissa como recompensa. Este número tan grande se lee como: *dieciocho trillones cuatrocientos cuarenta y seis mil setecientos cuarenta y cuatro billones setenta y tres mil setecientos nueve millones quinientos cincuenta y un mil seiscientos quince*.

Hemos hallado la cantidad de *granos* de trigo que pidió Sissa y vimos que es un número muy grande pero, quizás, sea una cantidad razonable si la expresamos en kilogramos. Para ello, usaremos que mil granos de trigo pesan 40 gramos, aproximadamente. Es claro que el peso depende de la variedad de trigo, pero este valor es un promedio entre las más conocidas.

La cantidad de granos y su peso son dos magnitudes que mantienen una relación de proporcionalidad directa. Esto significa que si duplicamos una, la otra también se duplica, si la triplicamos la otra se triplica, y si la reducimos a la mitad la otra también se reduce en la misma proporción.

Así, podemos estimar que 25 000 granos de trigo pesan aproximadamente un kilogramo, puesto que $25 \cdot 40 = 1\,000$. De igual forma podemos obtener el peso en kilogramos de la recompensa solicitada por Sissa:

$$\text{Peso de la recompensa} = \frac{18\,446\,744\,073\,709\,551\,615}{25\,000} \text{ kg.}$$

El resultado de esta división es, aproximadamente, 737 869 762 948 382 kilogramos, es decir, ¡poco más de

737 869 762 948 toneladas!

Otra vez, este número quizás no nos permite dimensionar la magnitud de la recompensa solicitada por Sissa, por lo que vamos a tener en cuenta la producción *mundial* de trigo por año, al igual que lo hicieron los ayudantes del rey. La misma varía año tras año, pero actualmente podemos considerar un promedio de 750 000 000 toneladas anuales. Entonces,

¿cuántos años de cosecha son necesarios para conseguir la recompensa de Sissa? Haciendo la división obtenemos que se necesitan las cosechas *mundiales* de casi 984 años para acumular la cantidad necesaria de granos de trigos que pidió Sissa.

El rey, quien primero se mostró sorprendido por el pedido de Sissa por considerarlo poco, tuvo que comunicarle que no podían entregarle su recompensa. Entonces, le preguntó por qué le había hecho esa petición si sabía que era imposible. Sissa, le respondió:

“A los seres humanos nos cuesta dimensionar los procesos exponenciales. Aunque sabía que la recompensa que pedí era imposible de conseguir, lo hice por si alguna vez ocurre una epidemia en tu reino. Bastaría con que llegue un solo infectado por una enfermedad desconocida, que este contagie a dos personas, que cada una de ellas contagie a otras dos, y así sucesivamente, para que todo el reino se enferme en pocos días. Debes recordar esto para tomar decisiones a tiempo.”

El contenido de la próxima sección nos permitirá comprender mejor la preocupación de Sissa ante una posible epidemia, y por qué le advierte al rey que, en tal caso, deberá tomar medidas a tiempo.

Una observación final: cada casilla contiene un grano más que el total acumulado en todas las casillas anteriores. Por ejemplo, el total de granos de trigo acumulados en las primeras 7 casillas es igual a

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127,$$

mientras que solamente por la casilla 8 corresponden 128 granos. Esto se verifica en cada casilla debido a la fórmula que otorga el resultado para esta suma geométrica. Así, la cantidad de granos de trigo correspondiente a la última casilla supera en una unidad lo acumulado hasta el momento por el resto del tablero. Este hecho ilustra la velocidad del crecimiento exponencial.

§2. Contagio exponencial

Durante la primera mitad del año 2020, cuando el mundo entero tuvo que hacer frente a la pandemia de COVID-19, una gran cantidad de información sobre el comportamiento del virus causante de dicha enfermedad circuló por todos los medios de información. Una palabra, en relación a la manera de propagación del coronavirus, comenzó a aparecer de modo recurrente: *exponencial*. Si uno comprende realmente el significado de un crecimiento exponencial, entiende también la importancia de detenerlo rápidamente mediante medidas de distanciamiento y desinfección.

Otra de las frases resonantes en medio de la pandemia fue la de “aplanar la curva” de contagios, para que no colapse el sistema de salud. Veremos con un ejemplo simple qué significa esta expresión y su relación con el crecimiento exponencial de los contagios. Este tipo de crecimiento ocurre cuando, por ejemplo, los contagios se duplican en relación al día anterior. Así, el número de contagios en un día dado se calcula multiplicando por una

constante mayor que 1 el número de contagios del día anterior, generando un crecimiento exponencial de los contagios diarios. En un crecimiento lineal, en cambio, el número de contagios por día es un valor fijo, por lo que el total de enfermos va aumentando sumando una cantidad constante de casos por día. Cuando hablamos de “número de contagios diarios” nos referimos, obviamente, a una aproximación o promedio.

Para poder visualizar el modo de propagación exponencial supondremos dos modelos de contagio. En el primero asumiremos que cada persona que contrae el virus contagia solamente a una persona por día, pero que continúa contagiando durante los 14 días posteriores a haberlo contraído. Esto ocurre, por ejemplo, si la persona continúa con su vida habitual, sin aislarse (como el caso de los asintomáticos). En el segundo modelo supondremos, en cambio, que cada persona se aísla inmediatamente al detectar su enfermedad, por lo que solamente contagia a dos personas. Si estas dos personas son desconocidos, es decir, si no puede establecerse una cadena de contactos del “paciente cero” como para aislar inmediatamente a todos ellos (por ejemplo, porque asistió a un bar), podemos asumir que cada una de estas dos personas puede contagiar a otras dos, y así sucesivamente.

En ambos casos, haremos un registro de la cantidad de contagios y enfermos totales originados por una sola persona, denominada “paciente cero”, durante los 14 días posteriores a haber contraído el virus.

Cabe señalar que ninguno de los modelos presentados sirve para describir el comportamiento real de la enfermedad, ya que no se tienen en cuenta las personas recuperadas ni una cantidad de factores que influyen en la realidad. Esta simplificación se debe a que solamente deseamos ilustrar el significado del crecimiento exponencial en los contagios, a un nivel accesible para escuela media. Para un modelo que resulte más real y contemple otros factores, así como para comprender cómo es posible aplanar la curva de contagios, se recomienda la lectura de (Amster, 2020) y (Pinasco, 2020).

Modelo 1: contagio continuo durante la enfermedad.

Supongamos el siguiente escenario: cada infectado contagia a una persona al día, y el período de contagio es durante los 14 días posteriores a haberlo contraído. Asumamos, para ilustrarlo, que en una determinada ciudad, un cierto día (denominado “día cero”) aparece una persona portadora del virus, que identificamos como P_0 (por persona o paciente cero). Haremos un seguimiento de los contagios nuevos y totales en cada día, durante los 14 días siguientes.

- ☑ **Día 1:** la persona P_0 contagia a una persona, a la que llamaremos P_1 . Luego, en este día hay un solo contagio nuevo, acumulando un total de 2 personas enfermas (el paciente cero P_0 que sigue enfermo más el contagio P_1).
- ☑ **Día 2:** según el supuesto, las personas enfermas, P_0 y P_1 , contagian hoy a una nueva persona cada una, denotadas por P_2 y P_3 , respectivamente. Por lo tanto, la

cantidad de nuevos contagiados es 2, mientras que la cantidad total de enfermos es 4.

📅 **Día 3:** siguiendo el razonamiento anterior, cada una de las 4 personas enfermas contagia a una persona, por lo que la cantidad de nuevos contagios es 4, mientras que la cantidad total de enfermos es 8.

📅 **Día 4:** hay 8 nuevos contagios, haciendo un total de 16 enfermos.

📅 **Día 5:** aparecen 16 nuevos contagios, acumulando un total de 32 enfermos.

Siguiendo de esta forma, se puede ver que el total de casos activos se duplica día tras día, pues cada persona enferma contagia a una persona por día. Lo mismo ocurre con la cantidad de nuevos contagios, que es igual a la mitad de los casos activos en ese día. Así, la cantidad de enfermos cada día es:

	Contagios nuevos	Total de enfermos
Día 1	1	$2 = 2^1$
Día 2	2	$4 = 2^2$
Día 3	4	$8 = 2^3$
Día 4	8	$16 = 2^4$
Día 5	16	$32 = 2^5$

Lo anterior se resume diciendo que la cantidad de enfermos, originados por la persona inicial P_0 , que habrá en el día n será igual a 2^n . De estos enfermos, la mitad son contagios nuevos producidos en ese día.

📅 **Día 14:** Así, por lo anterior, la cantidad de personas enfermas luego de 14 días será igual a $2^{14} = 16\,384$. Este número se alcanza en tan solo dos semanas asumiendo que haya una sola persona contagiada inicialmente y que, a su vez, cada persona contagie solamente a una más por día.

El gráfico en la Figura 2 ilustra la cantidad de contagios nuevos producidos en cada día a partir del modelo anterior, hasta el noveno día. Como puede observarse, este tipo de aumento es asombroso, ya que los casos se incrementan muy rápido aunque se parta de números bajos. Esta es, precisamente, la curva que se desea aplanar mediante las medidas de desinfección y distanciamiento.

Modelo 2: contagio a los cercanos y aislamiento.

Pensemos en un modelo diferente de contagios, en el que cada persona contagia solamente a dos más. Luego, se aísla y no contagia nuevamente. Sin embargo, cada una de

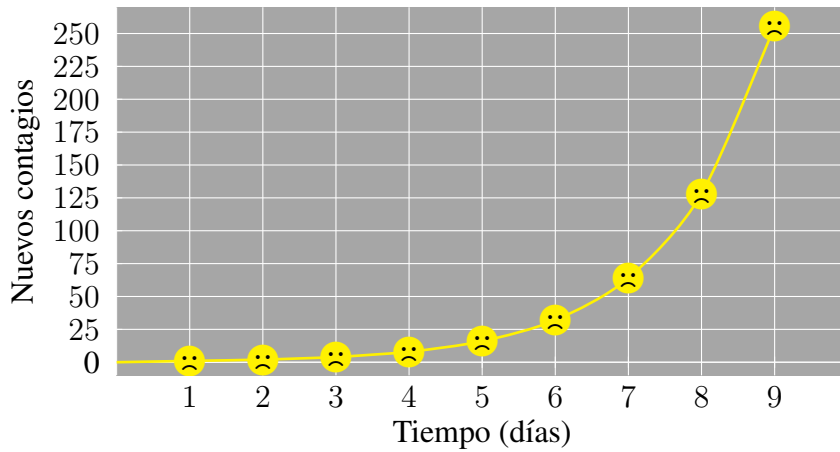
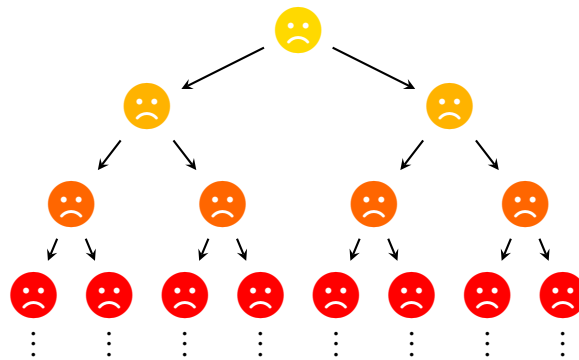


FIGURA 2. Cantidad de contagios producidos en cada día.

esas personas contagia, a su vez, a dos más. Y así sucesivamente. Como antes, supongamos que todo comienza con una persona P_0 que contrae el virus. Analizaremos todos los contagios nuevos que se originan a partir de ella, cuando la situación no logra controlarse. Esta persona, P_0 , contagia a 2 personas. Cada una de estas contagia a 2 más y, luego, estas 4 personas contagian a un total de 8. Esta cadena de contagios es muy clara si se representa gráficamente:



Nuevamente podemos observar que el crecimiento de los contagios es exponencial y que la cantidad de contagiados se va duplicando. Solo a modo de ilustrar la velocidad de este tipo de aumento, supongamos que cada persona demora un día en producir los dos contagios. Es decir, cada uno de los “niveles” representados en el gráfico anterior simbolizan los contagios producidos en cada día, a partir del primero (dado en el “día cero”). De este modo, en el primer día hay 2 nuevos contagios, en el segundo hay 4, en el tercero hay 8, y así.

Al igual que antes, lo anterior se resume diciendo que en el día n se producen 2^n contagios, por lo que durante el día 10 posterior a la aparición del primer caso se producirán $2^{10} = 1024$ infecciones. Sin embargo, si esto no se controla, solamente 14 días después del comienzo de la enfermedad en el lugar (es decir, luego de dos semanas), $2^{14} = 16\,384$ personas serán contagiadas durante ese día.

Estos 16 384 casos son solamente los producidos durante el día 14, y originados por el paciente cero. ¿Podemos calcular exactamente el total de personas que contrajeron el virus hasta ese día? Para ello, se deben sumar todas las personas que se contagiaron por día:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 16\,384,$$

lo que se escribe también como

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{14}.$$

Esto nos recuerda a la suma geométrica presentada previamente, cuyo resultado se calcula fácilmente como:

$$a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Así, para hallar la cantidad acumulada de personas infectadas luego de 14 días desde el primer caso, aplicamos la fórmula con $a = 2$ y $n = 14$, para obtener

$$\frac{2^{14+1} - 1}{2 - 1} = \frac{2^{15} - 1}{1} = 32\,767.$$

Así, luego de 14 días se habrán enfermado **32 767 personas**. Lo interesante de la fórmula es que permite, además, calcular la cantidad de días necesarios para que una determinada parte de la población se enferme, suponiendo que el virus se propaga de esta forma y a partir de una sola persona enferma. Por ejemplo, ¿cuántos días hacen falta para que toda una ciudad de 80 000 habitantes se enferme? ¿Y una de 500 000?

Para responder la primera pregunta simplemente debemos hallar un valor de n para el cual

$$\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 80\,000.$$

Es decir,

$$2^{n+1} = 80\,000 + 1,$$

o equivalentemente

$$2^n = \frac{80\,001}{2} = 40\,000.5.$$

Notemos que $2^{15} = 32\,768$ y $2^{16} = 65\,536$. Luego, la cantidad de días buscada está entre 15 y 16. Para redondear a un número entero, nos quedamos con 16. Así, sabemos que luego de **16 días** se habrán contagiado

$$2^{16+1} - 1 = 131\,071$$

personas, es decir, toda la ciudad y más. En el día anterior, luego de 15 días del primer caso, la cantidad de infectados en la ciudad es de

$$2^{15+1} - 1 = 65\,535$$

personas. Haciendo el mismo razonamiento, para que una población de 500 000 personas se contagie por completo a partir de un solo caso y mediante una propagación en la que los contagios se duplican día tras día, es suficiente con que transcurran tan solo **18 días.**

Bajo este modelo, la curva de nuevos contagios diarios tiene un aspecto similar a la bosquejada en el modelo previo. En ambos casos, como el crecimiento de los contagios es exponencial, se satura rápidamente el sistema de salud. Así, resulta de suma importancia lograr “aplanar” la curva tomando medidas adecuadas.

En el primer modelo supusimos que cada persona infectada por el virus contagia solamente a una persona más, pero durante 14 días. Esto se puede evitar si la persona no continúa con su rutina habitual luego de enfermarse, como sí suele hacerse con otro tipo de afecciones a la salud (como un resfrío). Para esto es fundamental detectar la enfermedad a tiempo, incluso en aquellas personas asintomáticas.

En el segundo modelo el problema que causó la propagación exponencial fue no poder “cerrar” la cadena de contagios. Para evitar esto, resulta fundamental no asistir a reuniones con personas fuera del círculo cercano apenas exista la sospecha de ser portador del virus. En este modelo supusimos que el promedio de personas contagiadas por cada portador es 2, pero puede ser mayor al asistir a lugares con mucha gente sin distanciamiento.

Aunque se espera que la ciencia encuentre vacunas o tratamientos que permitan recuperar la forma de vida previa a la pandemia, lo anterior explica por qué en todas partes del mundo se tomaron medidas para intentar aplanar la curva de contagios.

§3. Plegando papeles para llegar a la Luna

Es probable que todos, alguna vez, tomamos un papel de golosina o una servilleta de papel que teníamos cerca, y lo doblamos por la mitad tantas veces como pudimos. ¿Cuántas veces pudimos repetir ese doblez? ¿Cómo aumentó el grosor a medida que hicimos los dobleces? En esta sección nos ocuparemos de responder estas preguntas.

Supongamos que tenemos un papel, de cualquier tamaño, cuyo grosor es de 0.1 milímetros. Este es el grosor de una hoja de tamaño A4 clásica. Al doblar la hoja por la mitad la primera vez, el resultado tendrá un grosor de 0.2 mm. Al hacerlo por segunda vez este grosor se duplicará, obteniendo un resultado de 0.4 mm. Al doblar por tercera vez el papel por la mitad alcanzaremos un grosor de 0.8 mm, luego 1.6 mm, y así sucesivamente. Representamos estas cantidades en una tabla para organizar visualmente la información (ver Cuadro 2).

Resumiendo, cada vez que doblamos una hoja por la mitad, el grosor del resultado se duplica. Así, esta cantidad aumenta exponencialmente: luego de n dobleces habrán 2^n capas de papel, por lo que el grosor será igual a

$$2^n \cdot 0.1 \text{ mm.}$$

	Grosor en mm	Cantidad de capas de papel
1° dobléz	0.2	$2 = 2^1$
2° dobléz	0.4	$4 = 2^2$
3° dobléz	0.8	$8 = 2^3$
4° dobléz	1.6	$16 = 2^4$

CUADRO 2. Grosor del papel al ser doblado.

Para dimensionar la velocidad de este aumento en el grosor, tomemos como referencia la distancia de la Tierra a la Luna, que es de 384 400 km, aproximadamente. Esta distancia, expresada en mm, es igual a 384 400 000 000.

Entonces, si queremos calcular cuántas veces debemos doblar un papel de 0.1 mm de espesor para llegar a la Luna, debemos buscar un número n tal que

$$2^n \cdot 0.1 = 384\,400\,000\,000$$

Asombrosamente, con $n = 42$ alcanza (y sobra) pues:

$$2^{42} \cdot 0.1 = 439\,804\,651\,110.4.$$

Es decir, luego de doblar 42 veces el papel, el grosor superaría los 439 804 km, lo que supera la distancia de la Tierra a la Luna. Por lo tanto, con 42 pliegues llegaríamos más allá de la Luna.

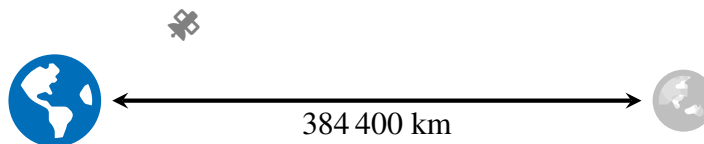


FIGURA 3. Distancia de la Tierra a la Luna.

De la misma forma podemos calcular los pliegues necesarios para alcanzar otras longitudes menores:

Longitud	Cantidad de dobleces
Largo de una cancha de fútbol	20
Distancia entre Tierra del Fuego y Jujuy	35
Altura aproximada de Lionel Messi	14

Estos resultados, que pueden resultar poco intuitivos, se deben la rapidez del crecimiento exponencial, que hace que las cantidades aumenten a una velocidad extraordinaria. Una

pregunta que nos hace dar cuenta de la magnitud de esta velocidad es la siguiente: si doblando el papel 42 veces llegamos a la Luna, ¿a dónde llegamos justo antes de realizar el último doblez? Puesto que duplicamos el grosor con cada doblez, antes de realizar el último estaríamos exactamente ¡a mitad de camino!

¿Cuántas veces es posible doblar un papel por la mitad? Ya vimos que doblando 42 veces un papel por la mitad podemos llegar más allá de la Luna, pero ¿es posible hacerlo?

La respuesta es no. Si tomamos una hoja de papel que tengamos a mano podemos comprobar que es posible doblarla por la mitad, como máximo, unas 7 veces. El récord fue conseguido en 2011 cuando unos estudiantes doblaron 13 veces un papel, superando a los 12 dobleces conseguidos en el año 2002. Se utilizó un rollo de papel higiénico, fabricado especialmente para este fin, de aproximadamente 16 km de longitud. Al doblarlo 13 veces la cantidad de capas obtenidas es igual a 2^{13} , lo que significa un total de 8 192 capas superpuestas. Puesto que el grosor del papel era de 0.1 mm, aproximadamente, la altura del resultado obtenido luego de 13 dobleces fue de $2^{13} \cdot 0.1$ mm, es decir, 81.92 cm. El proceso de doblar comienza a complicarse debido a las curvaturas laterales del plegado, que alcanzan un tamaño importante. La experiencia fue grabada y puede verse en <https://youtu.be/NNgxmyGPZls>.

Vimos que cuando multiplicamos por sí mismo un número mayor que 1 (en los ejemplos anteriores, ese número es 2) se produce un crecimiento exponencial. ¿Qué ocurre si dicho número es menor que 1? Similarmente, se producirá un *decrecimiento exponencial*.

Para ilustrarlo, observemos qué ocurre con el largo del papel a medida que se van produciendo los pliegues. No importa cuánto sea su largo, lo denotamos como ℓ , en alguna unidad de longitud establecida. Al doblar el papel por primera vez, el largo será igual a $\frac{\ell}{2}$. Luego del segundo doblez, y olvidando que las curvaturas laterales ocupan parte del papel, la longitud será igual a $\frac{\ell}{4}$. Siguiendo de esta forma, con el doblez número 3 obtendremos un largo de $\frac{\ell}{8}$ y, en general, en el doblez número n el largo del resultado será igual a $\frac{\ell}{2^n}$, pues en cada paso lo dividimos por la mitad.

Entonces, volviendo al récord de 13 dobleces conseguido en 2011, ya vimos que el alto del papel plegado resultante era de poco más de 80 cm. ¿Cuánto habrá medido de largo luego de los 13 dobleces? Según la fórmula anterior, en la que hemos ignorado el papel que se ocupa en las curvaturas laterales, partiendo de un largo igual a $\ell = 16\,000$ metros, luego de 13 dobleces la longitud será igual a

$$\frac{16\,000}{2^{13}} = 1.953125,$$

es decir, ¡menos de 2 metros de largo!

Lo anterior muestra, nuevamente, el poder de las potencias tanto en el crecimiento como en el decrecimiento. En este caso, partiendo de una longitud tan grande como 16 km, luego de tan solo 13 dobleces la misma se reduce a algo menos de 2 m.

§4. La estafa del telar de la abundancia

No es casualidad que, en medio del confinamiento a causa del COVID-19, haya resurgido un sistema que aparece cada un cierto tiempo. El motivo es simple: la pandemia produjo daños económicos en todo el mundo y este sistema se nutre, justamente, de la necesidad de la gente. El mismo se presenta (o se esconde) de diversas formas. Analizaremos una de las más evidentes: los telares de la abundancia, conocidos también como mandalas, flores o fractales de la abundancia.

Un telar está compuesto por 15 pétalos que forman una flor o mandala, que se agrupan en 4 categorías o niveles: un agua, dos tierras, cuatro aires y ocho fuegos (ver Figura 4).

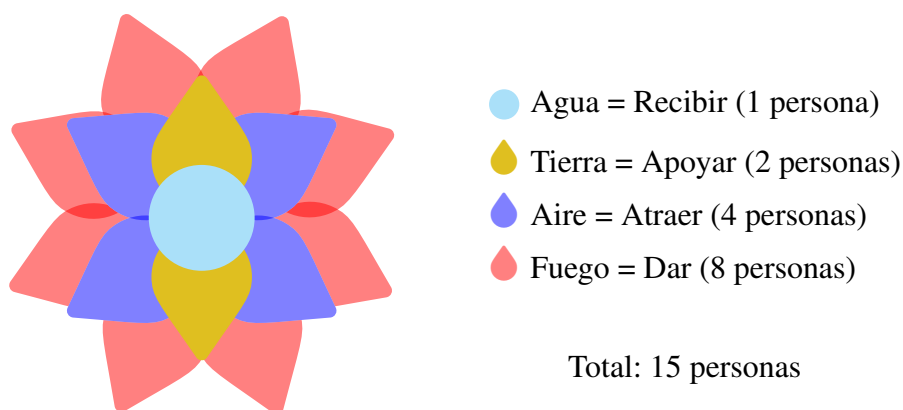


FIGURA 4. Composición de cada flor o mandala.

Cada pétalo representa a cada una de las 15 personas que integran el telar. En el centro de la flor está el “agua”, quien tiene que invitar a dos personas a entrar al telar, los “tierra”. Los elementos tierra invitan a dos personas cada uno, que forman parte de la categoría “aire”. Los elementos aire también invitan a dos personas cada uno, denominados “fuego”, que son quienes completan la flor. Los elementos fuego son siempre quienes hacen la inversión inicial (que suele ser alta, entre 1 000 y 1 500 dólares), y el agua es quien recibe la suma de todas ellas. Es decir, suponiendo que cada fuego ingrese con 1 000 dólares, el agua recibe 8 000 mil y sale del sistema. Los elementos tierra pasan entonces a ser agua y forman una nueva flor cada uno. Los demás elementos suben un nivel en la estructura pasando a ser tierra y aire en las nuevas flores. Los aire de las nuevas flores, que eran fuego en la anterior, son quienes ahora deben invitar cada uno a dos personas más, para que sean los nuevos fuegos (invirtiendo mil dólares al ingresar). Este ciclo se repite, y cada uno cobra 8 veces la inversión inicial cuando llega a ser agua de una nueva flor, y esa flor se completa con sus 8 fuegos.

Lo anterior se puede visualizar mejor como diagrama de árbol, como el de la Figura 5. Cuando el agua recibe el dinero y se retira, la rama izquierda del árbol forma una nueva

flor, ascendiendo cada uno de nivel. Así, los fuegos pasan a ser agua y cada uno de los 4 debe lograr ingresar a 2 personas cada uno, quienes serán los nuevos fuegos y deberán invertir. Lo mismo ocurre con la rama derecha.

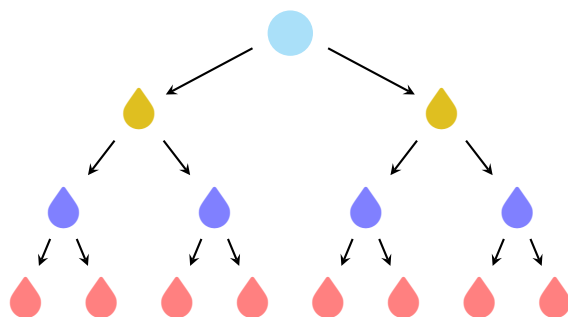







FIGURA 5. Representación del telar como árbol.

 **Resumiendo:** para que una persona reciba dinero debe llegar a ser agua, y luego 8 personas deben ingresar e invertir. Nadie recupera la inversión hasta llegar a liderar y completar una flor, en cuyo caso, la multiplica por 8. Si la cadena se corta, todos los que se encuentran participando pierden. Por lo tanto, el ganar depende solamente de la participación de nuevos miembros.

Así, a medida que se van creando nuevas flores se necesita más gente para completarlas, aumentando las posibilidades de que el proceso se detenga. Pero, ¿qué tan rápido es este aumento? Veamos qué cantidad de personas son necesarias para sostener el sistema.

-  **Fase 0:** Pensemos primero que existe una sola flor, la inicial. Se forma con un total de 15 personas, donde 8 invierten y 1 gana.
-  **Fase 1:** La flor se divide en 2 nuevas flores, y cada una de ellas necesita 8 inversionistas. Luego, en esta fase, $2 \cdot 8 = 16$ personas invierten y 2 ganan.
-  **Fase 2:** Cada una de las flores anteriores se divide en 2 nuevas flores, por lo que son un total de 4. Cada una necesita 8 inversionistas. Luego, ahora $4 \cdot 8 = 32$ personas invierten y 4 ganan.
-  **Fase 3:** Cada flor de la fase anterior se divide en 2 nuevas flores, formando un total de 8. Cada una necesita 8 inversionistas, es decir, $8 \cdot 8 = 64$ invierten y 8 ganan (que corresponden a los inversores de la Fase 0).

Continuando de la misma forma, a medida que las flores se subdividen para formar 2 nuevas, la cantidad de personas necesarias para que el sistema siga se va duplicando. En otras palabras, dicha cantidad aumenta de manera exponencial (ver Cuadro 3). Como vimos, este tipo de crecimiento es asombroso y difícil de asimilar. Por ejemplo, en la fase 25 se encuentran activas 2^{25} flores, por lo que el total de participantes es

$$15 \cdot 2^{25} = 503\,316\,480.$$

Este número representa más de 10 veces la población de Argentina.

	Flores creadas	Inversores
Fase 0	1	$8 = 8 \cdot 2^0$
Fase 1	2	$16 = 8 \cdot 2^1$
Fase 2	4	$32 = 8 \cdot 2^2$
Fase 3	8	$64 = 8 \cdot 2^3$
Fase 4	16	$128 = 8 \cdot 2^4$
Fase 5	32	$256 = 8 \cdot 2^5$
Fase 6	64	$512 = 8 \cdot 2^6$

CUADRO 3. Cantidad de inversores en cada fase.

En forma general, en la fase n hay 2^n flores (cada una formada por 15 personas). Como consecuencia, a medida que el juego avanza se hace más difícil conseguir gente dispuesta a ingresar. Debido a la velocidad del aumento exponencial ya analizada, esto ocurre rápidamente, por más esfuerzo y voluntad que uno le dedique. Así, la cadena se interrumpe haciendo que todos los que se encuentran participando pierdan su dinero.

Es verdad que las personas podrían participar más de una vez, y así el que “se termine la gente” no sería un problema (aunque tampoco pueden participar infinitas veces, que sería la única forma de que nadie pierda), pero lo cierto es que cada persona no forma parte de muchas flores a la vez, ni todo el mundo accede.

Aunque el crecimiento exponencial en la cantidad de participantes necesarios es lo que hace que la cadena tarde o temprano se corte, debemos observar que este no es el motivo por el que este tipo de mecanismo es inviable, como explicamos a continuación.

Es matemáticamente imposible que todos ganen. El hecho de involucrar dinero junto con una dinámica de funcionamiento que parece organizada y compleja produce la sensación de que puede funcionar. Sin embargo, el dinero que hay en juego no produce intereses, solamente circula de mano en mano. Para comprender por qué no puede funcionar reemplacemos el dinero por un objeto: supongamos que nos invitan a participar de un juego en el que cada persona dona un libro. Sin importar quién ni cómo se ganan los libros, si hay 100 personas participando, hay 100 libros en juego. Si hay 800 personas, hay 800 libros. Siempre habrá tantos libros en juego como personas participando, ya que cada una “donó” un libro para ingresar, y los libros no se reproducen (al igual que el dinero en este tipo de sistemas).

Entonces, ¿cómo sería posible que todos los participantes tengan más de un libro? La promesa en este tipo de juegos es multiplicar la inversión, por ejemplo, por 8. ¿Cómo

pueden estar jugando mil personas y que cada una reciba 8 libros, si hay mil libros en juego? Si alguna tiene 8 libros, entonces hay 7 personas que se quedaron sin el suyo. No existe otra forma, pues en el camino no se generaron libros, solamente pasaron de mano en mano.

Para solucionar esto, hay que agregar más gente al juego para que done un libro cada una. Pero no importa cuántas veces hagamos esto, porque siempre habrá la misma cantidad de libros que de personas. El problema es que el sistema tarde o temprano se cae y, cuando esto ocurre, por cada persona que gana hay 7 que pierden. Esto significa que las probabilidades de perder son altas, ya que el 87.5 % de los participantes pierden. Por otra parte, en caso de ganar, nos estaríamos quedando con los libros de otros.

Resumiendo: o somos estafados, o somos estafadores.

Todo lo anterior no es advertido cuando se intenta atraer a alguien a participar en uno de estos sistemas. Quizás la persona que invita a ingresar tampoco lo sabe pero, en algún nivel superior, se sabe. El discurso habla de “empoderamiento”, “solidaridad” y beneficios económicos muy tentadores. Pero nunca se advierte sobre el alto riesgo de perder lo invertido (tampoco se utiliza la palabra “inversión” sino “regalo”, ya que el lenguaje es la clave de este engaño). A diferencia de otros juegos de apuestas, en los que también solemos tener pocas chances de ganar, tampoco se menciona que pertenecer al grupo de quienes no pierden en este sistema equivale a quedarnos con plata ajena.

Si cada persona que ingresa a un sistema de este tipo estuviera al tanto de todo lo anterior, así como del orden de llegada al juego (mientras más flores haya en funcionamiento más difícil es conseguir gente), entonces no se hablaría de estafa.

Sistemas piramidales.

El telar de la abundancia es una adaptación de lo que se conoce en Economía como *sistema o estafa piramidal*: la gente que se encuentra en la parte inferior de la pirámide pone dinero, para que lo gane la que se encuentra en la cima. Muchas empresas funcionan bajo este mecanismo utilizando lemas del estilo “sé tu propio jefe”. En este tipo de trabajos el producto que se ofrece es solamente un pretexto. Cuando se habla de fraude se cuestiona el sistema de fondo, y no la eficiencia del producto. En esta metodología de trabajo el ingreso principal no proviene de la venta del producto en cuestión, sino de la gente que se capta para ingresar al sistema. De hecho, en muchos casos, la persona que invita a participar no puede explicar en detalle de qué se trata el trabajo al cual está invitando a ingresar, por lo que organiza una reunión para contar en persona a todo un grupo de gente.

Para ingresar es necesario realizar una inversión de dinero en productos y, luego, captar a un determinado número de personas para que también se incorporen. Digamos, 6 personas. ¿Cuántas veces puede hacerse eso? Supongamos que todo se inicia en la “generación 0” con una persona que invita a otras 6. Cada una de estas 6 debe ingresar a 6

personas más al sistema, es decir, 36 miembros conforman la segunda generación de incorporaciones. Luego, cada uno de estos 36 miembros debe ingresar a 6, dando un total de $36 \cdot 6 = 216$ nuevos integrantes en la generación número 3. Y así, siguiendo de esta forma, la generación n se compone por 6^n integrantes. Luego de 13 generaciones, la cantidad total de miembros del sistema será igual a

$$1 + 6 + 6^2 + 6^3 + \dots + 6^{13}.$$

Lo anterior es una suma geométrica como las presentadas anteriormente, con $a = 5$ y $n = 13$, por lo que su resultado es

$$\frac{6^{14} - 1}{6 - 1} = \frac{78\,364\,164\,095}{5} = 15\,672\,832\,819,$$

que es **más del doble de la población mundial**. Es decir, el ciclo no llegará a cumplirse 13 veces si ninguna persona reingresa. Los productos tampoco podrán venderse, porque cada uno dispone de la compra inicial para sí mismo. Por este motivo, los artículos de estas empresas se conocen como “productos de garage”, ya que muchos de los participantes terminarán con los productos guardados, habiendo perdido dinero. Lo anterior explica por qué estos sistemas son llamados *estafas piramidales*.

§5. Problemas de dinero: interés compuesto

Supongamos que alguien nos pide prestado dinero, digamos 1 000 pesos, y nos dice que nos los devolverá luego de un mes, con un 50 % de interés. Es decir, luego de un mes nos devuelve 1 500 pesos. Pero en ese momento, en lugar de devolvernos el dinero, nos pide que le prestemos ese nuevo monto por un mes más, y nos dice que lo devolverá aplicando el mismo interés. Entonces, ahora debemos sumarle a los 1 500 pesos el 50 % correspondiente al interés. ¿Cuánto nos devolverá luego de 2 meses según este mecanismo de intereses? ¿Y si pasan 8 meses bajo el mismo proceso?

Como siempre, para visualizar mejor el proceso, organizaremos los datos en una tabla.

% Antes de eso, es importante comprender lo siguiente: el símbolo % equivale a multiplicar por el factor 0.01 (que es lo mismo que dividir por 100). Así, “cincuenta por ciento” se representa como 50 % y significa multiplicar por 0.5, ya que $50 \cdot 0.01 = 0.5$. Entonces, para obtener el 50 % de 1 000 se multiplica

$$0.5 \cdot 1\,000 = 500.$$

Luego, para *agregarle* el interés al monto inicial hacemos:

$$\underbrace{1\,000}_{\text{monto inicial}} + \underbrace{0.5 \cdot 1\,000}_{\text{interés}} = 1.5 \cdot 1\,000.$$

👉 En términos generales, *agregarle* a una cantidad cualquiera el 50 % equivale a **multiplicar por 1.5** dicha cantidad. Entonces, para elaborar la tabla, cada mes deberemos

multiplicar por 1.5 el monto obtenido en el mes anterior. El resultado se muestra a continuación.

Mes	Dinero a recibir al final de cada mes
1	$1.5 \cdot 1\,000$
2	$1.5 (1.5 \cdot 1\,000) = (1.5)^2 \cdot 1\,000$
3	$1.5 ((1.5)^2 \cdot 1\,000) = (1.5)^3 \cdot 1\,000$
4	$1.5 ((1.5)^3 \cdot 1\,000) = (1.5)^4 \cdot 1\,000$

Así, de modo general, vemos que al final del mes número n el dinero a recibir será

$$(1.5)^n \cdot 1\,000.$$

Mediante esta fórmula podemos responder las preguntas iniciales, reemplazando n por 2 y por 8, respectivamente. Así, luego de 2 meses de repetir este procedimiento nos deberá devolver

$$(1.5)^2 \cdot 1\,000 = 2\,250$$

pesos, mientras que después de 8 meses serán

$$(1.5)^8 \cdot 1\,000 \approx 25\,629,$$

donde el símbolo \approx significa que se ha realizado una aproximación.

En el ejemplo anterior 1.5 es lo que se conoce como “base” de la potencia. En este caso no es un número entero, como cuando algo se duplica o triplica mes a mes, pero es un número mayor que 1, lo que hace que el monto aumente exponencialmente de todas formas.

El tipo de interés trabajado previamente es lo que se llama *interés compuesto*, y representa la acumulación de intereses que se generan en un determinado tiempo, por un capital inicial según la tasa de interés y la cantidad de períodos. A diferencia del interés simple, en el que la ganancia no se acumula hasta terminar el proceso, en el compuesto los intereses que se obtienen al final de cada período de inversión se añaden al capital inicial, es decir, se capitalizan, generando interés en el siguiente período de tiempo.

El interés compuesto se aplica en un plazo fijo que se renueva, por ejemplo, mes a mes. Por supuesto la tasa no será del 50 %, sino que suele ser bastante menor. Supongamos que un banco paga un interés del 3 % por cada mes que se deje depositado una cantidad de dinero. Estamos suponiendo un interés compuesto que se capitaliza mensualmente, como en el ejemplo previo. Entonces, con un monto inicial de \$20 000, luego de 4 meses el capital (en pesos) obtenido al aplicar interés compuesto será igual a

$$(1.03)^4 \cdot 20\,000 \approx 22\,510.$$

Agradecimientos. Se agradece a Estefanía Dalmasso y al editor por las observaciones realizadas. Un especial agradecimiento para el revisor/revisora de este artículo, por su minuciosa lectura y sus detalladas sugerencias y comentarios que, sin dudas, mejoraron la calidad del trabajo.

Bibliografía

- Amster, P. (2020). La matemática de las epidemias. *Rev. Educ. Mat*, 35(2), 5–20.
- Pinasco, J. P. (2020). Las simulaciones: otras herramientas para entender una epidemia. *Rev. Educ. Mat*, 35(2), 35–50.

MARILINA CARENA
CONICET - Facultad de Ingeniería Química (UNL)
✉ marilcarena@gmail.com

Recibido: 13 de julio de 2020.

Aceptado: 2 de noviembre de 2020.

Publicado en línea: 7 de diciembre de 2020.

LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN EL NIVEL PRIMARIO DE LA MODALIDAD DE EDUCACIÓN PERMANENTE DE JÓVENES Y ADULTOS: SABERES DOCENTES, PRÁCTICAS Y CONDICIONES INSTITUCIONALES

RESEÑA DE LA TESIS DOCTORAL DE NICOLÁS GEREZ CUEVAS

Alicia B. Acin y Mónica E. Villarreal

RESUMEN. El texto presenta una reseña de la Tesis Doctoral de Nicolás Gerez Cuevas. La misma fue realizada en el marco del Doctorado en Ciencias de la Educación de la Facultad de Filosofía y Humanidades de la Universidad Nacional de Córdoba, con la dirección de la Dra. Dilma Fregona y la codirección de la Dra. Fernanda Delprato. Su defensa se realizó el 22 de mayo de 2020.

ABSTRACT. El texto presenta una reseña de la Tesis Doctoral de Nicolás Gerez Cuevas. La misma fue realizada en el marco del Doctorado en Ciencias de la Educación de la Facultad de Filosofía y Humanidades de la Universidad Nacional de Córdoba, con la dirección de la Dra. Dilma Fregona y la codirección de la Dra. Fernanda Delprato. Su defensa se realizó el 22 de mayo de 2020.

La tesis que aquí reseñamos presenta un estudio en profundidad acerca de la enseñanza de la matemática en el nivel primario de la modalidad de educación de jóvenes y adultos (EDJA) en la provincia de Córdoba. La misma focaliza en los saberes docentes, en las prácticas de enseñanza y en las condiciones institucionales

Palabras clave: educación matemática de jóvenes y adultos, saberes docentes, prácticas de enseñanza.

Keywords: mathematics education for youth and adults, teaching knowledge, teaching practices.

que la hacen posible. En razón de ello, la problemática se inscribe en el entrecruzamiento entre dos campos académicos como son la educación matemática y la educación de jóvenes y adultos.

En el Capítulo 1 se efectúa un recorrido detallado del proceso de investigación que menciona los numerosos antecedentes consultados en torno a la modalidad EDJA, la educación matemática de jóvenes y adultos, los saberes y las prácticas docentes, y las prácticas de enseñanza de la matemática en lo que el autor denomina “otras primarias”, en alusión a escenarios que difieren de la educación primaria común. A continuación, se explicitan las perspectivas teóricas convergentes en la construcción del problema de investigación, del acontecer teórico-metodológico en esa construcción y del minucioso proceso analítico llevado a cabo.

Siguiendo una tradición investigativa en el campo de la educación matemática, se recuperan aportes de la teoría de las situaciones didácticas (TSD) y de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). Asimismo, se plantea la complejidad de las prácticas docentes y la necesidad de basarse en un enfoque multirreferencial, particularmente en los estudios sobre el trabajo y el saber docente procedentes de la etnografía educativa latinoamericana y, finalmente, remite a los estudios sobre prácticas de numeracidad.

En este capítulo se describe el devenir de la formulación del problema a investigar y se fundamentan las decisiones metodológicas y analíticas adoptadas a lo largo de la investigación. En particular, se justifica la decisión de realizar un estudio en casos, tomando como referente empírico el trabajo de tres docentes en el nivel primario de la modalidad EDJA, y se especifican las estrategias utilizadas para la recolección de datos: análisis documental, entrevistas semiestructuradas y observaciones y registros de clase.

El Capítulo 2 refiere a la reestructuración del sistema de enseñanza en EDJA y su proyección escolar de transposición de saberes matemáticos. En primer término, se sitúan las prácticas docentes en el marco de las condiciones que las atraen y dan forma, generando posibilidades, así como restricciones.

El autor entiende la reestructuración del sistema de enseñanza como aquellos cambios estructurales favorecidos por la definición de la EDJA como modalidad del sistema educativo que involucra la conformación de una noosfera distinta a la del sistema escolar regular y regulaciones sobre el trabajo docente también diferentes a las de aquel. Esto implica que esas transformaciones abarcan distintos niveles y producen efectos en las prácticas escolares. Asimismo, siguiendo a (Brousseau, 2007), destaca la importancia de la comprensión o la construcción de sentido en el aprendizaje, el cual no es independiente de la forma en que la enseñanza se lleva a cabo, a fin de propiciar la apropiación de los conocimientos,

asentada en “una posición de autonomía en la relación con el saber” (Gerez Cuevas, 2020, p. 46).

Con base en esas consideraciones, para identificar la orientación de la reestructuración del sistema de enseñanza en la modalidad, el autor efectúa análisis de distintos documentos, entre ellos, una Resolución del Consejo Federal de Educación que establece definiciones centrales de la EDJA acordes a la Ley de Educación Nacional, lineamientos para la elaboración de diseños curriculares, y el diseño curricular de nivel primario para la modalidad en la provincia de Córdoba. Dicho análisis le permite particularizar en el proyecto didáctico, esto es, qué parte de la cultura y del saber matemático se aprecia como deseable y socialmente relevante en la formación de jóvenes y adultos. Asimismo, a partir del análisis del cuadernillo Mejora de los aprendizajes de Lengua, Matemática y Ciencias, el autor plantea lo que considera limitaciones de la reestructuración del sistema de enseñanza bajo el fundamento de que se pretende dar respuesta al problema de la enseñanza desvinculada de la actividad matemática que le da sentido.

De lo anterior deriva que, en esas condiciones, el proyecto social de transposición de los saberes matemáticos no se formula acabadamente, delegando su instrumentalización en los docentes. Sostiene que el abordaje de una situación problemática requiere que el sentido de los saberes matemáticos integre aportes fundamentados en una problematización epistemológica, en lugar de reducirse solo a una relación con prácticas sociales, con el riesgo de una trivialización del saber específico.

Los Capítulos 3, 4 y 5 presentan resultados que provienen del análisis minucioso y vívido de los tres casos que conformaron el referente empírico. La densidad del análisis da cuenta de un proceso atento y cuidadoso y permite al lector vivir las clases relatadas y las conversaciones sostenidas con las docentes. Las afirmaciones e interpretaciones realizadas se sustentan en evidencias sólidas que provienen de las diferentes fuentes de datos y son interpretadas a la luz del instrumental teórico escogido.

En el Capítulo 3 se plantea un modo de abordar los saberes docentes, recuperando aportes teóricos que intentan comprenderlos en relación con las condiciones institucionales en que estos se producen. El mismo se organiza en torno a tres ejes: a) sentidos sobre la escuela en la modalidad EDJA; b) la enseñanza, el aprendizaje y sus condiciones; c) la matemática y su enseñanza, considerando de manera transversal los saberes puestos en juego por las docentes, en cada eje.

A partir del análisis e interpretación de entrevistas semiestructuradas, expone los saberes construidos por las docentes de los tres casos considerados: una escuela nocturna y un centro de nivel primario para adultos (CENPA), cuya dependencia es provincial, y un centro educativo de jóvenes y adultos (CEJA) de la

municipalidad de Córdoba. Con relación a los sentidos de la escuela construidos por las maestras, se identifican expresiones relacionadas con tradiciones arraigadas en la modalidad (compensatoria y prácticas infantilizadas), así como otras próximas a las teorías críticas. Respecto a la pregunta acerca de la enseñanza, el aprendizaje y sus condiciones, se visualiza una re-significación de la perspectiva dialógica, expresada en la valoración de las interacciones orales en detrimento del uso del soporte escrito, en la disposición de los bancos en la clase y en cierto cuestionamiento a la infantilización, por un lado; y, por el otro, saberes relacionados con perspectivas constructivistas que han circulado en la escuela primaria infantil. Se mencionan también coincidencia en los saberes de las docentes en la importancia de propiciar la autoconfianza de los estudiantes, aunque asentada en distintas ideas: destacar los logros y no los errores, reconocer la producción de los estudiantes y el intercambio con sus compañeros y favorecer la autoestima, junto a expresiones que atribuyen a los estudiantes ciertas dificultades en la comprensión. En cuanto al último eje, señala coincidencias en contextualizar las tareas matemáticas en las actividades cotidianas de los estudiantes, principalmente en las operaciones aritméticas; sin embargo, en la resolución de las operaciones predomina la transmisión directa de técnicas algorítmicas, matizadas en menor medida con la recuperación de saberes personales de cálculo de los estudiantes.

En el Capítulo 4, valiéndose de la TAD, se analizan dificultades del oficio docente en la modalidad EDJA que dan cuenta de debilidades detectadas en los modos en que se estructura la actividad matemática en las instituciones de esta modalidad. Tales dificultades son: la adaptación de la enseñanza a la diversidad de necesidades individuales de los estudiantes, la articulación entre prácticas de numeración de dominio escolar y de la vida cotidiana, la construcción de sentidos en la enseñanza de objetos matemáticos específicos (las fracciones) y la construcción de recorridos de estudio.

El Capítulo 5 particulariza en las interacciones, entre docente y alumnos, y las regulaciones didácticas en diferentes estrategias de enseñanza utilizadas por dos de las docentes con quienes se trabajó: el uso de fichas de actividades individuales y la clase dialogada. Haciendo uso de la noción de contrato didáctico, se describe la actividad del docente en el establecimiento de regulaciones en la relación de cada estudiante con el saber matemático en juego. A pesar de sus diferencias, se concluye que ambas estrategias generan condiciones escasamente favorables para construir una posición de autonomía de los estudiantes en la relación con el saber.

En las Conclusiones el autor sintetiza minuciosamente el proceso de investigación expuesto en los primeros capítulos y presenta los principales hallazgos de la tesis derivados del análisis documental y, principalmente, del análisis de las entrevistas y de los registros de las observaciones de clase. Finalmente, dedica un

apartado sobre los aportes que puede realizar la matemática escolar a las personas jóvenes y adultas en el cual expresa la apuesta fundamental de la tesis, esto es, “la potencialidad de una matemática escolar que habilite y autorice a las personas adultas en la participación en una cierta práctica intelectual” (Gerez Cuevas, 2020, p. 260), y la preocupación por propiciar espacios de trabajo colaborativo entre los docentes.

Consideramos que la tesis de Nicolás Gerez Cuevas representa una contribución de relevancia para el campo de las ciencias de la educación, en general, y de la educación matemática, en particular. Aborda una temática que cuenta con escasos estudios en el ámbito local. Asimismo, la tesis brinda insumos para el diseño de propuestas de formación de docentes en la modalidad EDJA y para la elaboración de materiales específicos para la enseñanza de la matemática en ese contexto. Además, deja interrogantes que pueden dar lugar a futuras investigaciones que profundicen la temática.

Bibliografía

- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Gerez Cuevas, N. (2020). *La enseñanza de la matemática en el nivel primario de la modalidad de Educación Permanente de Jóvenes y Adultos: saberes docentes, prácticas y condiciones institucionales*. (Tesis Doctoral). Universidad Nacional de Córdoba, Argentina: Facultad de Filosofía y Humanidades.

ALICIA B. ACIN

Docente de la Escuela de Ciencias de la Educación
e investigadora del Centro de Investigaciones María Saleme de Burnichon (CIFYH)
Facultad de Filosofía y Humanidades – Universidad Nacional de Córdoba
Argentina.
(✉) email alicia.acin@unc.edu.ar

MÓNICA E. VILLARREAL

Docente de la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación – Universidad Nacional de Córdoba
e investigadora del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
Argentina.
(✉) email mvilla@famaf.unc.edu.ar

Recibido: *15 de octubre de 2020.*

Aceptado: *25 de noviembre de 2020.*

Publicado en línea: *7 de diciembre de 2020.*

Sección de Problemas

✉ por Juan Pablo Rossetti

con la colaboración de Mateo Carranza Velez

Los siguientes problemas están pensados para un público amplio. Las soluciones se encuentran en la página siguiente.



Problema 1. (*Platos redondos en mesa cuadrada.*) En un bar con mesas cuadradas, dos mozos ponen platos redondos sin superponerse, ni sobresalir sobre una mesa. Se les ocurre un juego: el primer mozo debe poner un plato, el segundo poner otro, y así seguir alternadamente, hasta que alguno de los dos ya no pueda poner un nuevo plato sin superponerse ni sobresalir de la mesa.

Hay uno de los dos mozos que tiene una estrategia ganadora. Decir cuál de los dos es y explicar porqué.

Pregunta adicional: ¿Sirve la estrategia ganadora propuesta si las mesas fueran enormes? Por ejemplo, tan grande como toda la manzana (cuadrada) donde se encuentra el bar. ¿Hay una estrategia ganadora si las mesas fueran rectangulares?

Problema 2. (*Distribuir números cuyas sumas dan primos.*) Queremos distribuir los números $1, 2, \dots, n$, alrededor de una circunferencia de forma que la suma de cada par de números vecinos sea un número primo. ¿Es posible hacerlo para $n = 8$? ¿Para $n = 9$? ¿Para $n = 10$? ¿Para $n = 2021$?

¿Se sabrá la respuesta para todo $n \in \mathbb{N}$?

Ejemplo. Si $n = 6$, se puede, pues $(1, 6, 5, 2, 3, 4)$ forma los primos $7, 11, 7, 5, 7$ y 5 .

Problema 3. (*Descifrando un número irracional.*)

Hallar los primeros 2000 dígitos después de la coma del número $(8 + 3\sqrt{7})^{2000}$.

[Ayuda: a pesar de que se trata de un número irracional, que por lo tanto su desarrollo decimal no es periódico, en este caso, sí se pueden calcular las primeras cifras, por una razón particular. El $3\sqrt{7}$ es parecido a 8 y se puede trabajar con $8 - 3\sqrt{7}$]

SOLUCIONES

Solución 1. Respuesta: El primer mozo tiene una estrategia ganadora.

Es sorprendentemente simple: pone el primer plato en el centro de la mesa. Cuando el 2do mozo pone (si es que puede) un plato, entonces el 1er mozo pone otro en el lugar simétrico, es decir aplica una simetría central (con respecto al centro de la mesa) al plato que puso el 2do mozo y pone un plato en ese lugar. De esta manera, cada vez que el 2do mozo pueda poner un plato, el 1ero también podrá poner otro, en el lugar simétrico con respecto al centro de la mesa.

Solución 2. Respuesta: Para $n = 8$ se puede, por ejemplo poner (4, 3, 8, 5, 2, 1, 6, 7) para $n = 10$ también, por ejemplo (4, 3, 8, 5, 2, 1, 6, 7, 10, 9). En cambio para $n = 9$ no se puede, puesto que debería haber dos números impares juntos, que al sumarlos da un par distinto de 2, por lo tanto no es un primo. Esto mismo ocurre para cualquier n impar, no es posible.

Para n par, se sabe que siempre se puede para valores menores a cierta cota (como 10^{12}) y hay pruebas heurísticas y conjeturas que aseguran la validez para todo n par; siendo muy lindo el hecho que el problema involucra la *Conjetura de los 'primos gemelos'* y la *Conjetura de Goldbach*.

Vale la pena hacer notar que si se hace un grafo cuyos vértices son los números naturales de 1 a n y sus aristas las que unen dos números cuya suma es un primo, entonces el problema se traduce en hallar un *ciclo Hamiltoniano* en este grafo.

Solución 3. Respuesta: Son todos nuevos.

Lo que sucede es que son parecidos los números 8 y $3\sqrt{7}$ y cuando a un número pequeño, menor que uno, se lo eleva a una potencia grande, se va haciendo muy chiquito, y tendrá sus primeros dígitos iguales a cero. Antes, hay que hacer varias manipulaciones algebraicas con $8 - 3\sqrt{7}$ para llegar al resultado. Veamos que

$$(8 + 3\sqrt{7}) + (8 - 3\sqrt{7}) \text{ es entero, luego } (8 + 3\sqrt{7})^2 + (8 - 3\sqrt{7})^2 \text{ es entero, y}$$

$$(8 + 3\sqrt{7})^n + (8 - 3\sqrt{7})^n \text{ es entero}$$

Para ver esto, usamos el Teorema del binomio (de Newton), que es la generalización de las fórmulas $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Tenemos que

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

donde $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ y lo único que necesitamos saber es que este número es entero.

$$(8 + 3\sqrt{7})^n + (8 - 3\sqrt{7})^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 8^i (3\sqrt{7})^{n-i} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 8^i (-3\sqrt{7})^{n-i}$$

Los términos impares de esta sumas se cancelan y solo quedan los pares, en los que elevamos una raíz a una potencia par, por lo que esta suma da un número entero. Como

$$8 - 3\sqrt{7} < \frac{1}{10}, \quad \text{entonces} \quad (8 - 3\sqrt{7})^n < \frac{1}{10^n}.$$

Por lo tanto los primeros 2000 dígitos después de la coma de $(8 - 3\sqrt{7})^{2000}$ son ceros, y entonces los primeros 2000 dígitos después de la coma de $(8 + 3\sqrt{7})^{2000} =$ un entero $-(8 - 3\sqrt{7})^n$ son 999...99.

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones? ¿Y una fórmula general?

- $\{a_n\}$: 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, ...
- $\{b_n\}$: 2, 5, 10, 17, 28, 41, 58, 77, 100, 129, 160, ...
- $\{c_n\}$: Usamos una notación abreviada: 1^9 denota nueve unos, etc.
 $1^9, 2, 1, 2^{10}, 1, 2^{10}, 1, 2^{10}, 1, 2^{10}, 1, 2^{10}, 1, 2^{10}, 1, 2^{10}, 12^2, 3^8, 2, 1, 2^8, 3,$
 $2^2, 3^8, 2, 3, 2, 3^7, 2, 3^2, 2, 3^6, 2, 3^6, 2, \dots$
 $= 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,$
 $1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,$
 $1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,$
 $1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 2,$
 $3, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 3, \dots$
- $\{d_n\}$: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900,
2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, ...

Podés encontrar las soluciones en la página siguiente.



Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $a_{11} = 39916800$.
 $a_n = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$.
- $b_{12} = 197$.
Suma de los primeros primos.
- $c_{160} = 3$.
Cuenta la cantidad de dígitos distintos que tienen los números en la notación usual (decimal).
- $d_{20} = 1767263190$.
números de Catalan: $\frac{1}{n} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$.

Viene de la página anterior.