

Revista de Educación Matemática

Consejo Editorial

Editor Ejecutivo

Leandro Cagliero, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Editores Asociados

Juan Carlos Pedraza, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Mónica Villarreal, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Comité Editorial

Abraham Arcavi, Weizmann Institute of Science, Israel

Susana Paula Graça Carreira, Universidade do Algarve, Portugal

Carlos D'Andrea, Universitat de Barcelona, España

Cristina Esteley, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

Patricio Herbst, Universidad de Michigan, Estados Unidos

Teresa Krick, Universidad de Buenos Aires - CONICET, Argentina

Ricardo Podestá, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Nélia Maria Pontes Amado, Universidade do Algarve, Portugal

Juan Pablo Rossetti, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Jhony Alexander Villa-Ochoa, Universidad de Antioquia, Colombia

Registro Nacional de la Propiedad Intelectual N° 168024

ISSN 0326-8780 (versión impresa)

ISSN 1852-2890 (en línea)

Página web: <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index>

Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

Revista de Educación Matemática

Volumen 35, N° 2 – 2020

ÍNDICE

- Editorial 3

ARTÍCULOS

- **LA MATEMÁTICA DE LAS EPIDEMIAS**
Pablo Amster 5
 - **LA DOCENCIA EN LA UNIVERSIDAD: LA NECESIDAD DE UN NUEVO PARADIGMA**
Juan I. Ardenghi y Flavia E. Buffo 21
 - **LAS SIMULACIONES: OTRAS HERRAMIENTAS PARA ENTENDER UNA EPIDEMIA**
Juan Pablo Pinasco 35
 - **RECORTANDO POLÍGONOS, DE LAS TIJERAS A LA GENERALIZACIÓN**
Luis Agustín Cárdenas Pena 51
-
- ¿Sabías que...? 70
 - Sección de Problemas 75

También encontrarás al final las *¡Sucesiones al toque!*

Editorial

LA situación extraordinaria por la que estamos pasando ha permitido, con un alto costo, que gran parte de la sociedad revalorice muchas actividades a las que no se les daba la importancia que realmente tenían y tienen. Hacer una lista de ellas implica sin duda, olvidar injustamente a alguna que merece estar tanto cómo las otras. Pero hay dos que nos son cercanas: la investigación científica y la labor docente.

Tal vez como nunca antes, hemos tomado consciencia como sociedad, del impacto que puede tener en nuestra calidad de vida contar con un sólido sistema científico capaz de responder a las necesidades que se presentan. La educación, en todos sus niveles, tantas veces declamada como importante en los discursos y pocas veces apoyada en la práctica, pone de manifiesto en la obligada virtualidad, no sólo las desigualdades que nos atraviesan, sino que lo mejor de ella no ocurre dentro de las aulas sino puertas afuera, en el intercambio cotidiano entre estudiantes y docentes. Y esto sin menoscabo alguno ni de lo que sucede en las aulas ni de las herramientas tecnológicas que nos permiten mejorar el mágico proceso de enseñar y aprender. Nuevos desafíos nos esperan para no perder lo uno aprovechando lo otro.

Junto con esta revalorización del conocimiento, ha surgido con una fuerza nunca registrada hasta ahora, el valor que se le otorga a una buena comunicación del hecho científico. En particular la matemática, ha cobrado un protagonismo inusual a la hora de explicar esta pandemia. Ejemplos de ello son dos de los artículos que presenta este número en “el teclado” (decir la pluma sería anacrónico) de divulgadores de excepción.

Esta atención inesperada que tiene la matemática en estas circunstancias tan particulares, es también un tratamiento eficaz (no la panacea) contra otro mal que ataca a la humanidad desde siempre: el *analfabetismo matemático* o *anumerismo* como lo han dado en llamar algunos autores. De este mal no siempre los matemáticos nos ocupamos como debiéramos, a veces poco atentos a que se entienda lo que hacemos.

El que padece de *anumerismo* se suele jactar con el mismo orgullo de lo versado que es en fútbol, en cine o en política, que de lo negado que es para la matemática, reproduciendo así una suerte de atavismo cultural que refuerza con entusiasmo altos niveles de analfabetismo matemático. No se trata aquí de la ciencia especializada que se cultiva en los ámbitos académicos o de desarrollo tecnológico, sino de la matemática cotidiana que nos permite entender el mundo que nos rodea. En el contexto actual, entender lo que quiere decir *crecimiento exponencial* o lo que implica el *contagio de rebaño*, puede ser la diferencia entre la enfermedad o la salud a la hora de tomar los cuidados y decisiones que ese entendimiento sugiere.

El analfabetismo matemático es una forma de incultura que no sufre el reproche social que provocan otras ignorancias. Una mayor cultura matemática nos hace más críticos y atentos a lo que nos circunda. Debemos contribuir a que nuestros jóvenes se asomen a ella y valoren la importancia que tiene para nuestro progreso colectivo. Se trata de ejercer el bello hábito de pensar y el placer intransferible de entender.

Los invitamos pues, a disfrutar los artículos de Juan Pablo Pinasco y Pablo Amster que constituyen una contribución inestimable en esta línea. Además en este número podrán ver, de la mano de Luis Agustín Cardenas Pena, cómo de un problema geométrico podemos ser llevados a interesantes y bellas generalizaciones y un artículo de Juan Ardenghi y Flavia Buffo que aborda la cuestión siempre vigente de la formación en la docencia universitaria.

Esperamos que el próximo número nos encuentre en una mejor situación.

Juan Carlos Pedraza

NOTA: Es muy importante para la RevEM contar con la colaboración de ustedes a través del envío de contribuciones de calidad para publicar. Solicitamos enviar los artículos preferentemente a través del sistema en la página web, pero si tienen inconvenientes pueden hacerlo a la dirección de correo electrónico que figura abajo.

Página web: <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index>

Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

LA MATEMÁTICA DE LAS EPIDEMIAS

Pablo Amster

RESUMEN. En este artículo se presentan las ideas principales de la versión discreta del modelo SIR (Susceptibles, Infectados, Recuperados), que se emplea para describir las epidemias y se ha convertido en protagonista impensado en los tiempos actuales. Se muestran las propiedades básicas que rigen el comportamiento de las curvas de susceptibles e infectados y algunos ejemplos numéricos elementales.

ABSTRACT. This article introduces the main aspects of a discrete version of the SIR model, which is employed to describe the propagation of infectious diseases and has become an unexpected protagonist of the present times. The basic properties that rule the behaviour of the curves of susceptible and infected individuals are shown, and elementary numerical examples are given.

§1. Introducción: ¿Qué curva hay que aplanar?

A lo largo de esta pandemia hemos escuchado, cada vez con más frecuencia, consignas como ‘Hay que aplanar la curva’ o incluso otras más específicas: ‘Tenemos que bajar el R' ’. Es claro que esto no es un pedido directo a la población, pero se traduce en acciones concretas que afectan nuestras vidas: aislamiento social, uso de barbijos, etc. En este artículo veremos las nociones básicas de la herramienta matemática más conocida para estudiar la propagación de enfermedades infecciosas: el modelo SIR.

La versión habitual de este modelo consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales, aunque por simplicidad nos ocuparemos aquí únicamente de la versión discreta, vale decir, de un sistema de *ecuaciones en diferencias*. En el fondo, esta simplificación es razonable si se piensa que los datos no nos llegan de manera

Palabras clave: Modelo SIR, modelos discretos, curva de infectados, ecuaciones en diferencias.

Keywords: SIR model, discrete models, infection curve, difference equations.

continua sino espaciada: por ejemplo, los informes diarios del ministerio de salud. Por otra parte, la versión discreta es suficiente para capturar las propiedades esenciales del modelo y nos permitirán entender en qué consiste ese dichoso (al menos cuando es bajo) valor llamado R . Finalmente, un detalle que no es menor: para plantear las ecuaciones en diferencias solo se requiere matemática elemental y, en consecuencia, el modelo SIR discreto puede ser una excelente motivación para trabajar con los estudiantes y procesar mejor toda la información que nos llega sobre estos temas. En lo que sigue, para referirnos al modelo original de ecuaciones diferenciales, emplearemos la expresión 'modelo continuo'.

El SIR es un modelo de los llamados *compartimentales*, pues supone que la población se divide en compartimentos, que en este caso son tres: *Susceptibles*, *Infectados* y *Recuperados*. Pero no se trata –por emplear un lugar común– de compartimentos estancos, sino que los individuos se mueven de un grupo a otro, generando una dinámica que nos interesa analizar, ya que determina cuántos infectados habrá, cuándo se produce el famoso "pico", etc.

El artículo está organizado de la siguiente manera. En la próxima sección se presentan algunas generalidades y una breve reseña histórica de los modelos matemáticos para la propagación de enfermedades infecciosas. Los fundamentos específicos del modelo SIR se describen en las secciones §3 y §4. Las tres secciones siguientes están dedicadas a las propiedades básicas del sistema, la exponencialidad inicial y el comportamiento asintótico de las curvas de susceptibles e infectados. En la sección §8 se muestran algunos ejemplos numéricos elementales y finalmente, en la última sección, se brindan estimaciones del número máximo y el número total de infectados a lo largo de la epidemia.

§2. Modelos matemáticos para las epidemias

El estudio de las epidemias es casi tan antiguo como la civilización. Se suele hacer mención del Papiro de Ebers (aproximadamente 1500 a.C.) como el primer documento médico referido a enfermedades infecciosas; más específicamente, a unas fiebres pestilentes que –según se cree– eran de malaria. A lo largo de los siglos, fueron apareciendo estudios más o menos sistemáticos sobre las distintas epidemias, aunque el desarrollo e implementación de modelos matemáticos rigurosos comenzaría recién en el siglo XX. Un antecedente notable del modelo SIR es el trabajo sobre la viruela que en 1760 presentó Daniel Bernoulli ante la Academia de Ciencias (Bernoulli, 1766) y discutido por algunos matemáticos célebres como d'Alembert, que sin embargo no fue adoptado oficialmente: una prueba de ello es que el mismísimo rey Luis XV de Francia murió unos años después: ¡de

viruela! Esto deja una moraleja bastante clara: no estaría mal que todos los gobernantes prestaran mayor atención al consejo de los científicos.¹ Pero fue Ronald Ross, un médico nacido en la India quien, después de años de investigar precisamente sobre la malaria y nombrado –también precisamente– Sir en 1911, habría de destacar la importancia de los modelos matemáticos según se cita por ejemplo en (Martcheva, 2015; Weiss, 2013):

En rigor toda la epidemiología, relacionada como está con la variación de una enfermedad en el tiempo y de un lugar a otro, debe ser considerada matemáticamente, sin importar cuántas variables implicadas haya, si es que se la quiere considerar de manera científica."

Pero dicha importancia va más allá de una mera descripción: como se afirma en (Weiss, 2013), muchos aspectos fundamentales en la evolución de los procesos epidémicos no se deducen directamente de los datos y requieren modelos matemáticos para entenderlos y actuar en consecuencia. Por tal motivo, como punto crucial en esta historia podemos situar el año 1927, cuando William Kermack y Anderson McKendrick (Kermack & McKendrick, 1927) introdujeron el primer modelo matemático completo en epidemiología, con el que analizaron una epidemia de peste en India de 1906. Se trata, ni más ni menos, del modelo SIR, que se apoya en trabajos previos de Ross y William Hamer.

La idea principal es tan sencilla que parece tautológica: las enfermedades infecciosas se transmiten por el contacto entre un individuo infectado y otro susceptible. La clave, por supuesto, se encuentra en la forma precisa en que esto ocurre e involucra varios factores, ya que no solo importa la cantidad promedio de contactos de cada individuo (por unidad de tiempo) sino también la proporción, en cada momento, de individuos susceptibles de ser contagiados. Pero además hay que tener en cuenta que no todo contacto implica necesariamente un contagio: a esto se le asigna una probabilidad, que varía sustancialmente de una enfermedad a otra. Finalmente, se tiene en cuenta también el tiempo que dura la enfermedad, pues alguien que está infectado durante muchos días potencialmente va a contagiar un número mayor de individuos. Estos factores a veces se compensan: por ejemplo, para un virus como el HIV la probabilidad de

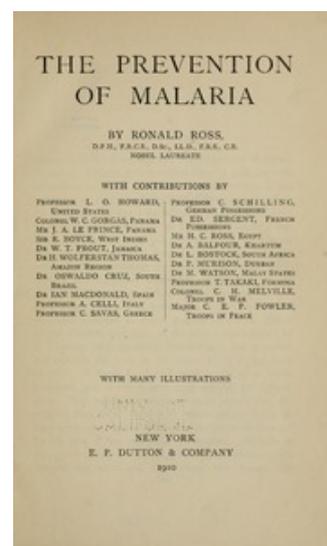


FIGURA 1. Portada original de (Ross, 1910)

¹A modo de curiosidad, cabe mencionar que los rumores (o acaso *fake news*) de la época eran que Luis XV murió de sífilis. Como se menciona en (Serra, 2015), "Su ajetreada vida sexual y el nombre similar de ambas enfermedades en francés (*petite vérole* = viruela; *grande vérole* = sífilis) dieron pie al malentendido".

contagio es baja, pero una persona infectada puede contagiar a lo largo de varios años.

El modelo SIR básico supone, como dijimos, tres grupos: susceptibles, infectados y recuperados. Se asume que la población es constante, es decir, no se producen nacimientos o muertes. Esto puede parecer una simplificación exagerada, al estilo de los célebres caballos esféricos, especialmente cuando se trata de una enfermedad que se lleva cada día la vida de miles de personas. Sin embargo, lo que significa es que se trata de un sistema *cerrado*, en el que no se suman ni se restan individuos a la población. Tanto los infectados que se curan como los que se mueren pasan del grupo **I** al grupo **R**. Esta forma de plantearlo dio lugar, en los últimos tiempos, a algunos comentarios poco felices; por eso hay quienes prefieren resignificar la letra inicial del grupo y hablar de *removidos* en vez de recuperados. Desde el punto de vista del modelo, la cuestión no cambia, pues lo que importa es que se trata de individuos que dejaron de estar infectados y, en consecuencia, ya no contagian. Y además, detalle importante, también se asume que adquieren inmunidad, al menos temporaria, es decir: *no pueden volver a contagiarse*. Esto diferencia el SIR de otros modelos como el SIS, en el que la segunda S vuelve a significar "susceptibles": por ejemplo, esto ocurre en enfermedades como el resfrío o la gripe común.²

En resumen, la dinámica de esta población se resume en dos clases de desplazamiento, del primer grupo al segundo y de este al tercero, lo que se puede representar así:

$$\mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{R}$$

En las próximas secciones veremos los supuestos según los cuales se producen los desplazamientos de un grupo al otro y las ecuaciones que se deducen de ellos. Esto nos permitirá estudiar por fin la cuestión que más nos interesa: la curva de infectados.

§3. La ley de acción de masas

En esta sección veremos cómo el modelo plantea el pasaje del primer grupo al segundo, de acuerdo con el esquema

$$S \xrightarrow{\beta SI} I.$$

Esto responde a la llamada *ley de masas*, un concepto proveniente de la química que en 1906 reformuló Hamer en el contexto de la epidemiología (Hamer, 1906).

²Existen muchos otros modelos que incluyen más compartimentos, todos basados en el modelo original de 1927: SEIR (E=expuestos), SIQR (Q=cuarentena), SEIHR (H=hospitalizados), MSEIR (M=inmunidad materna), etc. Para una descripción de estos modelos, ver por ejemplo (Muñoz, 2020).

Se trata, simplemente, de suponer que los contagios son directamente proporcionales tanto a la cantidad de infectados como a la de susceptibles; por otra parte, se asume que la población es *homogénea*: todos se contactan más o menos con la misma cantidad de individuos y contagian en la misma medida. Es claro que en general esto no se cumple: al fin y al cabo, un conjunto de personas no se comporta como las moléculas de una solución ideal. Sin embargo, para la mayoría de las enfermedades comunes el supuesto funciona muy bien y por eso el modelo SIR y sus variantes siguen siendo la herramienta más utilizada.

El parámetro $\beta > 0$ se conoce como la *velocidad de infección* y viene dado por la relación

$$\beta = \frac{p\kappa}{N},$$

donde κ es el promedio de contactos per cápita (por unidad de tiempo), p es la probabilidad de contagio y N es la población total. Esto se explica de la siguiente forma: en promedio, cada infectado se contacta, por unidad de tiempo (por ejemplo, un día), con κ individuos, pero de ellos, solo una fracción $\frac{S}{N}$ está en riesgo de contagiarse:

$$\kappa \frac{S}{N} = \text{contactos per cápita con susceptibles por unidad de tiempo.}$$

Pero, además, el contagio no ocurre de manera inexorable sino con probabilidad p , de modo que

$$p\kappa \frac{S}{N} = \text{contagios que produce un infectado por unidad de tiempo.}$$

Finalmente, si multiplicamos por la cantidad total de infectados, obtenemos:

$$p\kappa \frac{S}{N} I = \text{cantidad de nuevos infectados por unidad de tiempo.}$$

En otras palabras, la cantidad de individuos que pasa del grupo **S** al grupo **I** en el instante n es $\beta S(n)I(n)$, de donde se deduce la recurrencia:

$$S(n+1) = S(n) - \beta S(n)I(n).$$

Los valores de p y κ (y en consecuencia de β) se suponen constantes, aunque en modelos más generales se puede suponer que varían en función del tiempo. Observemos también que β es un número real, de modo que los valores sucesivos de $S(n)$, $I(n)$ y $R(n)$ no tienen por qué ser números naturales, como correspondería si se tratase de cantidades *exactas* de personas. Esto es claro por la forma en que está planteado el modelo y dichas funciones deben entenderse como un número *aproximado* de tales cantidades a lo largo del tiempo. Aunque, bien mirado, también podría ser una manera de darle sentido a expresiones tales como "hoy me siento medio enfermo". Es razonable también suponer que β es pequeño, de modo tal que la cantidad $\beta I(n)$ sea siempre menor que 1 y evitar que la población se

quede sin susceptibles. Para asegurar que esto es así, cualquiera sea el número de infectados, impondremos la condición $\beta N < 1$.³

§4. Yendo del grupo I al grupo R

Al igual que en la sección previa, el desplazamiento de individuos del grupo I al grupo R también se rige por una ley, que en este caso es más sencilla: los infectados abandonan el segundo grupo a medida que... dejan de serlo.

$$I \xrightarrow{\gamma I} R$$

En otras palabras, hay un *tiempo de recuperación* o, si se prefiere, *velocidad de remoción*, habitualmente denotada con la letra γ , que se interpreta como el inverso de la duración media D de la enfermedad e indica la proporción de infectados que pasan (como siempre, por unidad de tiempo) al tercer grupo:

$$\gamma = \frac{1}{D}.$$

Al igual que β , supondremos que γ es constante y, además, es claro que debe ser un número entre 0 y 1, porque γI debe ser menor que I . De esta forma, el grupo R aumenta por unidad de tiempo según la regla

$$R(n+1) = R(n) + \gamma I(n).$$

Todo esto nos permite calcular cómo se va modificando la cantidad de infectados, que por unidad de tiempo pierde una cantidad $\gamma I(n)$ de individuos y, a su vez, recibe una cantidad $\beta S(n)I(n)$ proveniente del primer grupo:

$$I(n+1) = I(n) + \beta S(n)I(n) - \gamma I(n).$$

Esta ecuación es la que determina el comportamiento de la curva de infectados; sin embargo, esto no depende solo de $I(n)$ sino también de las otras variables desconocidas. Por eso, lo que debemos estudiar no es una única ecuación sino un *sistema*.

§5. El juego de las 3 diferencias

De acuerdo con lo desarrollado en las últimas dos secciones, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias

$$(5.1) \quad \begin{cases} S(n+1) - S(n) &= -\beta I(n)S(n) \\ I(n+1) - I(n) &= (\beta S(n) - \gamma)I(n) \\ R(n+1) - R(n) &= \gamma I(n) \end{cases}$$

³Esta restricción no es necesaria en el modelo continuo, en el que es fácil probar que $S > 0$. De todas formas, un valor muy grande de β hace que la cantidad de susceptibles decrezca muy rápidamente.

para el que se suponen las condiciones iniciales:

$$S(0) = S_0 > 0, \quad I(0) = I_0 > 0, \quad R(0) = 0.$$

Esto es bastante claro: por un lado, es lógico suponer que al comienzo de la enfermedad todavía no hay individuos recuperados; por otro lado, si la cantidad inicial de infectados fuera nula, entonces seguiríamos yendo a clase y compartiendo el mate con total tranquilidad, ya que nadie podría contagiarse. Cabe mencionar que justamente las soluciones con $I(0) = 0$ corresponden a los únicos *equilibrios* del sistema, vale decir, las soluciones constantes.

Veamos ahora algunas propiedades básicas:

- (1) La población total $N = S + I + R$ permanece constante. Esto se corresponde con el supuesto inicial de que no hay nacimientos ni muertes y, por cierto, se deduce a partir de las ecuaciones: si sumamos las tres igualdades de (5.1) nos queda, para todo n ,

$$N(n+1) - N(n) = 0,$$

de modo que $N(n+1) = N(n) \equiv S_0 + I_0$. Sabiendo esto, se puede prescindir de la tercera ecuación del sistema, ya que el comportamiento de R se deduce a partir de la igualdad $R = N - I - S$.

- (2) Los valores $S(n)$, $I(n)$ y $R(n)$ son positivos para todo $n > 0$ (y, en particular, son menores que N). En efecto, podemos tomar como hipótesis inductiva que $I(n), S(n) > 0$ y $R(n) \geq 0$, que obviamente se cumple para $n = 0$. A partir de allí resulta claro que $R(n+1) = R(n) + \gamma I(n) > R(n) \geq 0$. Por otra parte, $\beta I(n) < \beta N < 1$, de donde

$$S(n+1) = [1 - \beta I(n)]S(n) > 0$$

mientras que

$$I(n+1) = \underbrace{[1 - \gamma]}_{>0} + \underbrace{\beta S(n)}_{>0} I(n) > 0.$$

- (3) Las sucesiones $\{S(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{R(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ son estrictamente monótonas y acotadas; por lo tanto, convergen. En efecto, como $I(n)$ es positivo, ya vimos en (2) que $R(n)$ es creciente; por otra parte,

$$S(n+1) - S(n) = -\beta I(n)S(n) < 0,$$

de modo que $S(n)$ es decreciente.

El comportamiento de $I(n)$ es el que más nos interesa y merece que lo analicemos aparte. Aquí está entonces, con todos ustedes:

§6. La famosa 'curva'

Cabe empezar esta sección con una aclaración, que justifica las comillas del título: en el sistema discreto, las funciones S, I, R son en realidad sucesiones y, como tales, no definen auténticas curvas. Sin embargo, a los fines prácticos siempre se puede suponer que interpolamos los puntos de manera razonable y las graficamos como funciones continuas para $t \geq 0$. De todas formas, se puede estudiar directamente el crecimiento o decrecimiento de la sucesión $\{I(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ dada, como dijimos, a partir de la fórmula:

$$I(n+1) - I(n) = (\beta S(n) - \gamma)I(n).$$

Como se trata de una recurrencia, conviene ver primero lo que ocurre al comienzo, cuando $n = 0$. Esto nos lleva a considerar dos casos:

Caso 1. $\beta S_0 - \gamma \leq 0$. Entonces, como $S(n)$ es decreciente, vale $\beta S(n) - \gamma < 0$ para todo $n > 0$. A su vez, esto implica que $I(n+1) - I(n) < 0$, es decir: $I(n)$ es siempre decreciente. Gran noticia, porque entonces no hay epidemia.

Pero, infelizmente, las epidemias ocurren, así que es mejor echar una mirada también a la otra situación posible:

Caso 2. $\beta S_0 - \gamma > 0$. Esto significa que, al comienzo, $I(n)$ crece. Veamos que lo hace hasta cierto valor n_{max} y luego decrece. En efecto, al igual que en el caso anterior se verifica que si $\beta S(n) - \gamma \leq 0$ para cierto n , a partir de entonces la cantidad de infectados es decreciente; luego, alcanza con probar que $I(n)$ no puede ser creciente para todo n . Pero esto puede verse como consecuencia inmediata de un hecho fundamental, que merece que lo demostremos de manera separada:

Teorema 6.1. *Dados $\beta \in (0, \frac{1}{N})$, $\gamma \in (0, 1)$, $S_0, I_0 > 0$, vale:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(n) = 0.$$

Demostración. Ya vimos que $0 < I(n), R(n) < N$ para todo $n > 0$. Por otra parte, dada la igualdad

$$R(n+1) - R(n) = \gamma I(n),$$

podemos sumar de manera telescópica hasta cierto valor m , de donde (recordando que $R(0) = 0$) resulta:

$$R(m+1) = \gamma \sum_{n=0}^m I(n).$$

Solo resta observar que, como $R(m)$ se mantiene acotado y además $I(n) > 0$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} I(n)$ converge y, en consecuencia, $I(n) \rightarrow 0$. \square

En definitiva, el comportamiento de la curva de infectados depende de manera esencial de un valor que permite de antemano saber si habrá o no epidemia:

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} S_0.$$

Este es otro de los "famosos" que aparecen seguido en las noticias; su denominación es algo confusa, pero no se refiere al valor inicial del número de recuperados (que es 0) sino que la letra R proviene aquí de otro lado. Se trata del llamado *número de reproducción efectiva*, que determina, como dijimos, la forma de la curva: el caso 1 corresponde a la situación $R_0 \leq 1$, mientras que el caso 2 se da cuando $R_0 > 1$. En resumen, se trata de un parámetro fundamental y por eso es tan importante conocerlo, pues indica lo que ocurriría con la epidemia en caso de que no se tome ninguna medida para contenerla.⁴ Por supuesto, no se trata de un valor directamente observable sino que se estima; para ello, existen diversas técnicas como las que se mencionan por ejemplo en (Martcheva, 2015). En general, tampoco es claro cuántos infectados hay al comienzo del proceso; por tal motivo, a menudo también se tiene en cuenta el llamado *número de reproducción básica*, definido como $R_b = \frac{\beta}{\gamma} N$, que esencialmente es igual al anterior mientras la proporción de infectados es pequeña. Una vez que la epidemia está avanzada, la cantidad $\frac{\beta}{\gamma} S(n)$ sigue siendo un indicador importante, pues permite saber si la curva de infectados crece o decrece, según su valor sea mayor o menor que 1. Ese es precisamente el llamado R ; las políticas de salud pública están orientadas a lograr que se mantenga lo más bajo posible. Pero, ¿qué se puede hacer? Teniendo en cuenta lo anterior, vale

$$R = \frac{\beta}{\gamma} S(n) = \frac{p\kappa}{N} DS(n),$$

de modo que los caminos posibles son:

- Reducir D , mediante el hallazgo y producción de antivirales efectivos.
- Reducir p (transmisibilidad): medidas de higiene, barbijos.
- Reducir κ : medidas de aislamiento.

Volviendo a las ecuaciones, cabe observar que la anterior cuenta "telescópica" del Teorema 6.1 dice que la sucesión $\{I(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ siempre converge a 0, sea cual sea el valor de R_0 . Esto nos brinda el pequeño alivio de comprobar que, al fin y al cabo, los infectados tienden a desaparecer: ¡victoria! Esto puede parecer una obviedad, porque estamos suponiendo que la población es constante y que todo infectado, tarde o temprano, pasa al grupo \mathbf{R} . Pero, en principio podría tratarse de una victoria pírrica: ¿no será que ya se enfermó todo el mundo y no quedan más susceptibles por contagiar? Felizmente, esto no ocurre: para cualquier R_0 , la cantidad de susceptibles siempre tiende a un número estrictamente positivo, lo que equivale a decir que *no toda* la población se enferma. La explicación es muy sencilla en el modelo continuo, cuyas ecuaciones diferenciales son análogas al sistema (5.1); sin embargo, el caso discreto requiere algo más de cuidado y lo veremos en el siguiente resultado.

⁴En muchos textos, el R_0 se define directamente como el número promedio de individuos que cada infectado contagia a lo largo de su enfermedad. El lector puede analizar esta interpretación a partir de las definiciones de β y γ de las secciones previas.

Teorema 6.2. Dados $\beta \in (0, \frac{1}{N})$, $\gamma \in (0, 1)$, $S_0, I_0 > 0$, vale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) > 0.$$

Demostración. Por lo visto en la sección previa, ya sabemos que el límite existe, pues $\{S(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ y es decreciente. Por otra parte, veamos que, al igual que en la suma, tiene sentido plantear un "producto telescópico". En efecto, dado que

$$\frac{S(n+1)}{S(n)} = 1 - \beta I(n),$$

entonces para $m > n$ tenemos:

$$\frac{S(m+1)}{S(m)} \frac{S(m)}{S(m-1)} \dots \frac{S(n+1)}{S(n)} = \prod_{j=n}^m (1 - \beta I(j)),$$

es decir,

$$\frac{S(m+1)}{S(n)} = \prod_{j=n}^m (1 - \beta I(j)).$$

Ahora una idea habitual en el estudio de los *productos infinitos* acude en nuestra ayuda. Comencemos rescribiendo la igualdad anterior en la forma

$$\ln \left(\frac{S(m+1)}{S(n)} \right) = \sum_{j=n}^m \ln(1 - \beta I(j))$$

y observemos que, para cualquier $x > 0$ suficientemente chico, vale por ejemplo que $\ln(1 - x) > -2x$. Como $I(j) \rightarrow 0$, podemos elegir un valor grande de n (que a partir de ahora dejamos **fijo**) tal que la desigualdad anterior se cumple para $I(j)$ con $j \geq n$ y luego

$$\ln \left(\frac{S(m+1)}{S(n)} \right) \geq \sum_{j=n}^m [-2\beta I(j)] = -2\beta \sum_{j=n}^m I(j).$$

Pero recordemos que $R(j+1) - R(j) = \gamma I(j)$, de modo que (¡otra vez la suma telescópica!) vale, para todo $m > n$,

$$\ln \left(\frac{S(m+1)}{S(n)} \right) \geq -\frac{2\beta}{\gamma} \sum_{j=n}^m \gamma I(j) = -2\beta [R(m+1) - R(n)]$$

y, en definitiva:

$$S(m+1) \geq S(n) e^{-2\beta [R(m+1) - R(n)]} \geq S(n) e^{-2\beta [N - R(n)]},$$

que es una constante positiva. □

§7. El corto plazo: la exponencialidad tan temida

Ya sabemos, a grandes rasgos, lo que ocurre a largo plazo. Ahora nos interesa analizar brevemente cuál es la situación al comienzo, cuando la epidemia recién está en sus inicios y todavía hay muy pocos individuos infectados. Si la población

es bastante grande, el número de susceptibles es aproximadamente igual a N y se puede asumir que se comporta casi como una constante: en el fondo, ¿qué diferencia hay entre tener 10, 20 o 60 infectados en una población de unos cuantos millones? En otras palabras, para n pequeño podemos asumir que

$$\frac{I(n+1)}{I(n)} \sim 1 + \beta S_0 - \gamma = 1 + \gamma(R_0 - 1)$$

o, si se prefiere,

$$I(n+1) \sim I(n)[1 + \gamma(R_0 - 1)]$$

e inductivamente

$$I(n+k) \sim I(n)[1 + \gamma(R_0 - 1)]^k.$$

Esto quiere decir que al comienzo la curva tiene un comportamiento tipo exponencial: a intervalos regulares, la curva avanza (casi) en progresión geométrica. Por ejemplo, un parámetro muy tenido en cuenta es el *tiempo de duplicación*; si es muy corto, significa que el R_0 es grande y la epidemia avanza muy rápido. Si la duración promedio D es, pongamos por caso, de unos 15 días (es decir, $\gamma = \frac{1}{15}$) y $R_0 = 2$, entonces el tiempo de duplicación, al comienzo, se puede aproximar de la siguiente forma:

$$\frac{I(n+k)}{I(n)} = 2 \Rightarrow k \sim \frac{\ln(2)}{\ln[1 + \gamma(R_0 - 1)]} = \frac{\ln(2)}{\ln(\frac{16}{15})} = 10,740053 \dots$$

Es claro que se trata de una estimación muy “a ojo”, aunque sirve para tener una idea de dónde estamos parados. Y, fundamentalmente, sirve también al revés: conociendo el tiempo de duplicación y el valor de γ se puede estimar (a ojo, como siempre) el valor de R_0 .⁵

§8. Algunos ejemplos

Una de las ventajas del modelo discreto es que se pueden mostrar ejemplos numéricos a partir de una simple planilla de cálculo y, jugando con los parámetros, analizar los distintos resultados que se producen.

Supongamos para empezar una población de 100000 personas, entre las que un buen día (mejor dicho, uno malo) aparece un infectado. Para valores $\beta = 0,000004$ y $\gamma = 0,08$, las primeras dos filas de nuestra planilla van a decir algo así:

S	I	R	N	β	γ
99999	1	0	100000	0,000004	0,08

⁵Estas aproximaciones son ligeramente diferentes en el modelo continuo, para el cual se tiene, si n es pequeño:

$$\frac{I(n+1)}{I(n)} \sim e^{\beta S_0 - \gamma}.$$

Como se puede observar, los resultados no son tan diferentes a los del modelo discreto ya que, cuando x es chico, vale $e^x \sim 1 + x$.

La cuarta columna no es otra cosa que la suma de las tres primeras y da por resultado la población total, que es constante; conviene ponerla, solo para verificar que no metimos la pata con los cálculos. Escribimos entonces las fórmulas para las primeras cuatro columnas,

$$= A2 * (1 - B2 * E2) = B2 * (1 + A2 * E2 - F2) = C2 + F2 * B2 = A3 + B3 + C3$$

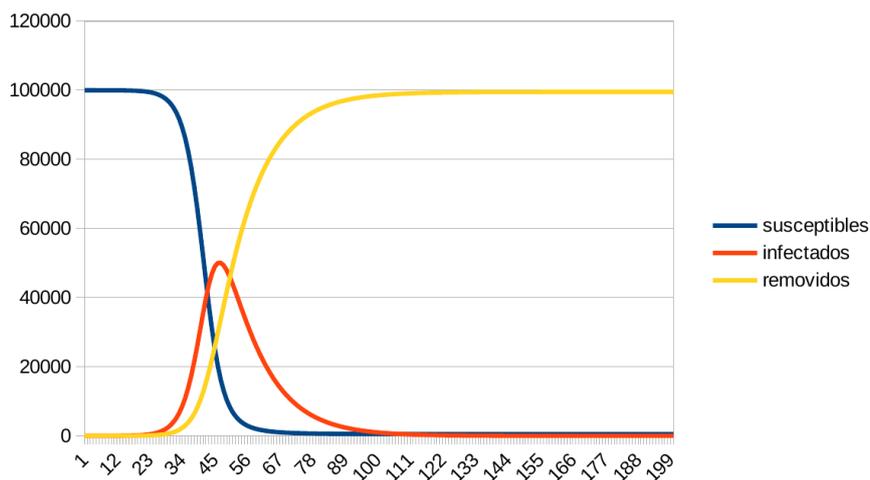
mientras que las dos últimas mantienen siempre los valores de la primera fila. Por ejemplo, los valores de S , I y R en la tercera fila van a ser

$$99999 * (1 - 1 * 0,000004) = 99998,600004$$

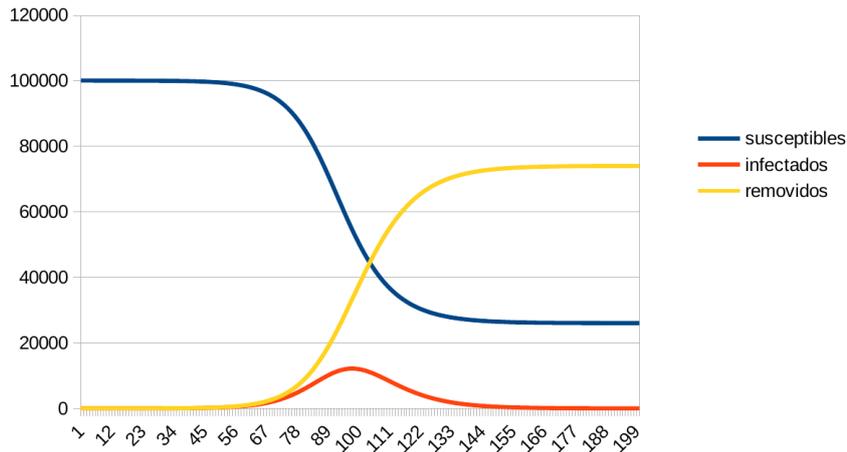
$$1 * (1 + 99999 * 0,000004 - 0,08) = 1,31996$$

$$0 + 0,08 * 1 = 0,08.$$

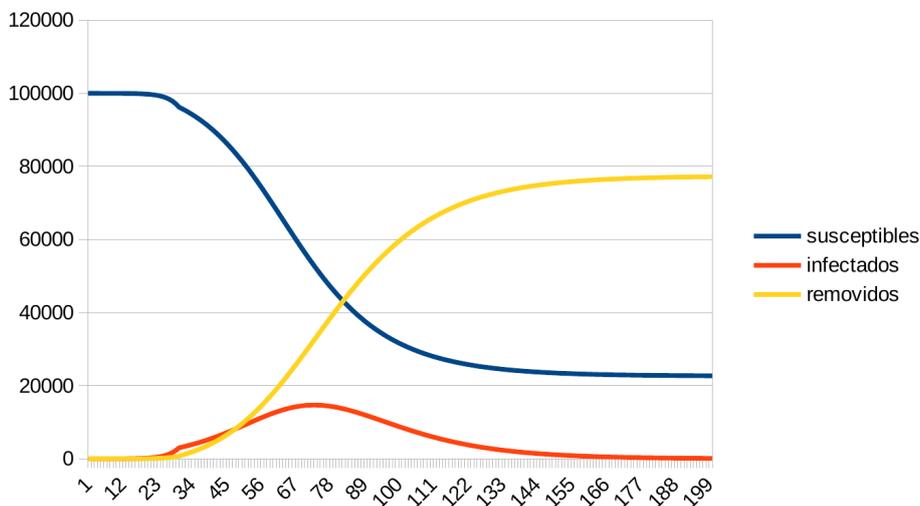
El resultado hasta $n = 200$ es el siguiente:



A pesar de ser un modelo "de juguete", se llega a ver aquí el comportamiento típico de los sistemas SIR: la curva de infectados al comienzo crece rápidamente, hasta que alcanza un pico I_{max} y luego baja. Observamos, con cierta preocupación, que en este caso la curva de susceptibles llega a tomar valores muy bajos (y, en consecuencia, la de removidos se acerca al valor total N). La explicación, claro está, es que el valor $R_0 = \frac{0,000004}{0,08} \cdot 99999 = 4,99995$ es grande y, en consecuencia, casi toda la población resulta infectada. Si lo bajamos un poco modificando β y γ , el panorama debería ser más alentador; por ejemplo, para $\beta = 0,0000027$ y $\gamma = 0,15$ (es decir, $R_0 = 1,799982$) se tiene:



El objetivo fundamental (al menos el más urgente) de “aplanar la curva” consiste en lograr que el número de infectados permanezca en un nivel tal que evite el colapso de los servicios de salud. Por ejemplo, si el número de camas disponibles es cierta cantidad C y se estima que una determinada fracción α de los infectados va a requerir hospitalización, entonces se debe procurar que $\alpha I_{max} < C$. Por eso, más allá del R_0 inicial interesa analizar los efectos de una *intervención*, entendida como una acción que se lleva a cabo en cierto momento para modificar los parámetros originales. El siguiente ejemplo comienza con los mismos parámetros que el primero, pero a partir del día 30 el valor de β baja drásticamente a 0,0000015:



A veces, tales intervenciones pueden durar un tiempo limitado: por ejemplo, la cuarentena reduce los contactos pero no se puede mantener indefinidamente. Por eso es tan importante estudiar el mejor momento para aplicarla y cómo salir de ella de forma paulatina. El lector puede probar los resultados de distintas intervenciones a partir de nuestro ejemplo de juguete o algún otro que quiera inventar.

§9. Lo que queda (al final) del día

De acuerdo con nuestro análisis y los ejemplos de la sección previa, en el modelo SIR la curva de infectados siempre alcanza un valor máximo que, por razones bastante obvias, resulta importante poder estimar. Esto no es fácil si se lo pretende ajustar a un proceso epidémico en curso, a partir de los datos concretos que surgen de los informes diarios, ya que los parámetros varían en realidad todo el tiempo; sin embargo, si se fuerza un poquito esa realidad y se supone que se rige por un modelo SIR para ciertos β y γ fijos, entonces el máximo se puede calcular. Esto no es tan fácil en el caso discreto, aunque para las ecuaciones diferenciales del modelo continuo se obtiene una fórmula bien precisa, cuya deducción puede verse por ejemplo en (Martcheva, 2015; Pedersen, 2015):

$$I_{max} = N - \frac{S_0}{R_0} (\ln(R_0) + 1).$$

Si además tenemos en cuenta que al comienzo el número de infectados es muy bajo (es decir, $S_0 \sim N$), entonces la fórmula anterior se traduce a otra más sencilla, que es aproximada pero solo depende de R_0 (y de N , claro):

$$I_{max} \sim N \left(1 - \frac{\ln(R_0) + 1}{R_0} \right).$$

Conviene advertir que aplicar esta fórmula de manera directa puede resultar algo escalofriante: por ejemplo, para $R_0 = 2$ nos dice que, si nadie hace nada para evitarlo, en algún momento más del 15% de la población va a estar infectada. Este valor indica, debemos recordarlo, personas infectadas *al mismo tiempo*, dato que en general resulta más difícil encontrar en las noticias, que suelen enfatizar el *número total* de casos confirmados desde el comienzo. Pero si se mira con más detalle, en muchos medios se discrimina con mayor cuidado y se habla de *casos activos*, que se obtienen restando del número total, la cantidad de removidos (recuperados y fallecidos).

De todos modos, ese número total es algo que también importa: entre otras cosas, podemos preguntarnos cómo será la situación una vez que todo pase: ¿cuál será el número I_{total} de personas infectadas a lo largo de toda la epidemia? Como antes, se trata de una cuenta mucho más fácil de hacer en el caso continuo, para el que se obtiene la fórmula:

$$S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} I_{total}} + I_{total} = N$$

Observemos que, a diferencia del cálculo de I_{max} , no tenemos aquí de una expresión explícita sino una ecuación *trascendente* para I_{total} , que no podemos despejar de manera directa y, gracias a eso, los escalofríos tardan un poco más en llegar. Pero es fácil encontrar una solución aproximada, tarea que puede quedar para el

lector. Otra cosa que podemos hacer es tratar de entender cómo varía este número total en función de R_0 . Para eso conviene, como antes, suponer que la cantidad inicial de infectados es muy pequeña, de modo que $S_0 \sim N$ y $R_0 \sim \frac{\beta}{\gamma} N$. Escribiendo $x = \frac{I_{total}}{N}$, la ecuación anterior se transforma en

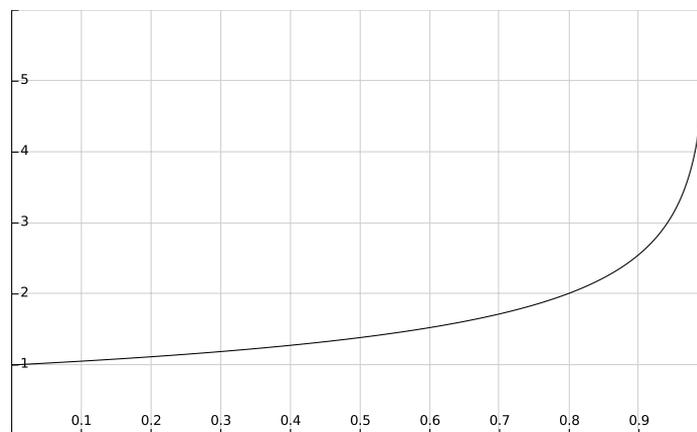
$$\frac{S_0}{N} e^{-\frac{\beta}{\gamma} N x} + x = 1$$

y luego en la aproximación

$$e^{-R_0 x} + x \sim 1.$$

Esto permite pensar al revés: el valor R_0 como función de la fracción total de infectados, es decir:

$$R_0 \sim -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$



Esta función es fácil de graficar y muestra algunas cosas importantes. Por ejemplo, si tomamos como antes $R_0 = 2$, entonces el 80% de la población va a resultar infectada. Pero observemos además, que el número total de infectados es bastante poco sensible a las variaciones de R_0 : como se ve en la gráfica, si fuera dos o tres décimas menor, de todas formas se infectaría una porción muy grande de la población. Por eso hay quienes dicen que no se debe actuar, sino simplemente dejar que la gente se contagie y gane inmunidad. Pero este argumento es engañoso por varios motivos: por un lado, porque si la curva de infectados se reparte mejor en el tiempo, se evita que el pico sea demasiado abrupto y -como dijimos- colapsen los servicios de salud. Y por otro, porque se habrá ganado justamente eso: *tiempo*, para fortalecer el sistema sanitario y confiar en que un día llegará, finalmente, la tan esperada vacuna.

Agradecimientos: A Carlos D'Andrea, Leandro Cagliero y Juan Carlos Pedraza, por la invitación a escribir este artículo y sus amables sugerencias. A Luis Cappozzo, Gonzalo Robledo y Alicia Dickenstein, por animarse a leer un primer borrador y hacerme valiosos comentarios. A Sebastián Pedersen e Iván Muñoz, por las conversaciones que mantuvimos sobre el SIR y otros modelos durante la escritura

de sus respectivas tesis. A Jorge Aliaga, por los cambios de ideas que cruzamos por email y su esfuerzo cotidiano de analizar y explicar los datos, desde el primer día. A todos: los muchísimos amigos y colegas que vienen trabajando para que podamos superar este momento tan difícil; a los profes, que a la distancia siguen ayudando y acompañando a los chicos como siempre. Y a los chicos, que todos los días nos enseñan algo nuevo.

Bibliografía

- Bernoulli, D. (1766). Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir. *Mém. Math. Phys. Acad. Roy.Sci. Paris*. Retrieved from <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3558n/f220.image.r=daniel%20bernoulli>
- Hamer, W. (1906). The milroy lectures on epidemic disease in england—the evidence of variability and persistence of type. *Lancet*, 1, 733–739.
- Kermack, W., & McKendrick, A. (1927). Contributions to the mathematical theory of epidemics i. *Proceedings of the Royal Society London A*, 115, 700–721.
- Martcheva, M. (2015). *An introduction to mathematical epidemiology*. Springer, US.
- Muñoz, I. (2020). Estrategias de control óptimo para contener un brote de ébola en áfrica occidental. *Tesis de licenciatura. Depto. de Matemática, FCEyN-UBA*. Retrieved from <http://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/2020/>
- Pedersen, S. (2015). (algunos) modelos matemáticos para (algunas) enfermedades contagiosas: transmisión, infección, tratamiento. *Tesis de licenciatura. Depto. de Matemática, FCEyN-UBA*. Retrieved from <http://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/2015/>
- Ross, R. (1910). *The prevention of malaria*. New York, E.P. Dutton & Company.
- Serra, X. (2015). La mortal viruela de luis xv. *Un dermatólogo en el museo*. Retrieved from <http://xsierrav.blogspot.com/2015/09/la-mortal-viruela-de-luis-xv.html>
- Weiss, H. (2013). The sir model and the foundations of public health. *MATerials MATematics, treball no. 3, 1*.

PABLO AMSTER

Departamento de Matemática – Facultad de Cs. Exactas y Naturales – Universidad de Buenos Aires & IMAS-CONICET Argentina.

✉ pamster@dm.uba.ar

Recibido: 20 de mayo de 2020.

Aceptado: 10 de junio de 2020.

Publicado en línea: 29 de julio de 2020.

LA DOCENCIA EN LA UNIVERSIDAD: LA NECESIDAD DE UN NUEVO PARADIGMA

Juan I. Ardenghi y Flavia E. Buffo

RESUMEN. Entrevistas con alumnos de primer año de la universidad en carreras de ingeniería, acerca del proceso de adaptación a la vida universitaria, dejan en descubierto cómo se siguen sosteniendo, por parte de los docentes, ciertos mecanismos tradicionales de enseñanza que empiezan a ser extemporáneos. Por otro lado, es claro, desde la visión que tiene el profesor universitario de sí mismo, y desde la letra de los reglamentos de ingreso a la docencia universitaria, que no hay exigencia de formación docente para ocupar dichos cargos. La pregunta que surge es si ante los cambios en el perfil del sujeto universitario se puede seguir sosteniendo esta postura de que el profesor universitario no necesita tener ningún tipo de formación en lo que concierne al oficio de enseñar y transmitir una disciplina. La formación docente nunca será definitiva, lo que entra en juego es la posición subjetiva de este enseñante que queda desdibujada en medio de los polos opuestos que representan, por un lado, el a-didactismo, aquella corriente en la que las condiciones para el aprendizaje no constituyen una acción a considerar por parte del docente dado que la buena docencia deviene directamente de sus saberes científicos y, por otro lado, la educación como un conjunto de normas prescriptivas y normativas. Estas posiciones polarizadas no parecen dar respuesta ante este cambio en el perfil del estudiantado, y sugerimos que esto tiene impacto en el desempeño de los cursantes de los primeros años. Esto nos lleva a pensar si la enseñanza en la universidad, al menos en nuestras materias de Matemática iniciáticas, no necesita un paradigma de docente diferente.

Palabras clave: Formación docente, subjetividad, a-didactismo, estilo docente.

Keywords: Teacher training, subjectivity, a-didacticism, teaching style.

ABSTRACT. Interviews with first year students of the university in engineering careers, about the process of adaptation to university life reveal how teachers continue to maintain certain traditional teaching mechanisms that are becoming extemporaneous. On the other hand, it is clear, from the vision that the university professor has of himself, and from the content of the entrance regulations to the university teaching, that there is no requirement of teacher training to occupy such positions. The question that arises is whether, in view of the changes in the profile of the university subject, it can continue be maintained this viewpoint that the university professor does not need to have any type of training in the field of teaching and transmitting a discipline. The teacher training will never be definitive, what it displayed is the subjective position of this teacher that is blurred between opposite poles that represent, on the one hand the a-didacticism, that tendency in which the conditions for learning do not constitute an action to consider since good teaching comes directly from the teacher's scientific knowledge, and on the other hand, education as a set of prescriptive and normative norms. These polarized positions do not seem to respond to this change in the profile of the students, and we suggest that this has an impact on the performance of the students of the first years. This leads us to think whether teaching at university, at least in our initiatory Mathematics subjects, does not need a different teaching paradigm.

§1. Introducción

La problemática del desgranamiento y la deserción de alumnos en ingenierías y carreras científicas y tecnológicas es una preocupación que comenzó a cobrar relevancia por su paulatino incremento a la luz de las estadísticas, considerando que nos encontramos en el marco de una política de promoción de las ingenierías a nivel nacional. El promedio de alumnos que logran aprobar el cursado del primer año apenas alcanza el 30 % de los ingresantes, y el promedio de graduados en ingenierías no supera el 29,5 % de los alumnos inscriptos (Cura y cols., 2010; *Plan estratégico de formación de ingenieros*, 2012). El abandono se produce principalmente en el primer año y va disminuyendo progresivamente, aunque en muchos casos solo se trata de la postergación de una decisión que se yergue como destino inevitable (de Estudios de Educación Argentina (CEA), 2016). Las cuestiones afectivas, sociales y culturales son factores influyentes en esta adaptación a la vida universitaria y esto ha sido motivo de gran número de estudios al respecto. Muchas de estas investigaciones apuntan a la brecha que se produce entre la escuela secundaria y la universidad, brecha que es real y está causada por múltiples factores entre los cuales encontramos las nuevas formas de adolescencia y la relación con las nuevas tecnologías (Gandulfo, Benitez, Musto, Taborda, y Gemignani, 2010; Lager, Donet, Gimenez Uribe, y Samoluk, 2008; Dujet, 2005; Bruno, 2005). Del mismo modo existen estudios que describen las concepciones que poseen los docentes universitarios sobre su propia actuación profesional. Estos estudios establecen clasificaciones y categorías sobre la mirada de los docentes, y tienen el valor de dar cuenta de la posición en que éstos se ubican frente a la enseñanza, siendo la

concepción tradicional, aquella centrada en el profesor, la que mayoritariamente se manifiesta, y la creencia de la no imprescindibilidad de formación pedagógica para atender su función como tales (Moreno, González, Celis, y Colicoy, 2014; Buffa, Moro, Massa, García, y Fanovich, 2018). Pero ¿qué dicen nuestros alumnos respecto a esta situación que los atraviesa? La Universidad Tecnológica Nacional tiene un sistema estructurado y periódico de encuestas cuatrimestrales acerca de ciertos aspectos de las cursadas. En este trabajo nos propusimos ir más allá de las encuestas formales y estandarizadas, y desde una escucha atenta en entrevistas desestructuradas con alumnos de materias básicas, poder captar su mirada acerca de estos asuntos que les competen directamente.

Para ejercer el oficio de educar hay que conocer al destinatario, y a este sujeto universitario se lo conoce a través del discurso (Antelo, 2009). Desde el relato de las vivencias áulicas de nuestros alumnos en cursos de Análisis Matemático y Álgebra y Geometría surgen fragmentos de discursos que dibujan escenarios que, en muchos aspectos, no responden a los supuestos de los docentes e investigadores del caso. “Prefiero buscar la explicación en internet...” o “No entiendo por qué me dan pautas para resolver...” son algunos de los recortes que, en su contexto, cuestionan el estilo de las clases a las que asisten. La realidad que viven los estudiantes en la actualidad dista mucho del estudiantado que vivimos quienes hoy somos sus docentes, y la relación con las nuevas tecnologías, el acceso a la información y las transformaciones en diversos órdenes de la vida social fueron creando nuevas subjetividades que conllevan inevitables variaciones en las coordenadas básicas de la acción educativa. Sin ir más lejos, hoy en cada teléfono celular podemos contar con aplicaciones como *PhotoMath* donde el software reconoce patrones matemáticos, interpreta el ejercicio y arroja una solución. Esto produce naturalmente que el alumno no oriente su esfuerzo a resolver algo que es resuelto por el aparato electrónico. La falta de práctica inevitable por contar con semejante herramienta, impensada años atrás, termina dificultando la cursada dado que esta tecnología no está permitida a la hora de rendir exámenes. Más allá de estas puntuaciones, es posible argumentar acerca de la responsabilidad de los alumnos en sus propias desavenencias, de las deficiencias de la escuela secundaria, primaria, etc., pero los profesores, especialmente aquellos correspondientes a los primeros años de carrera y en materias de ciencias exactas ¿estamos realmente preparados para ocupar el lugar y la función ante estas nuevas relaciones con la información y las nuevas subjetividades? De hecho ¿qué pasa con la subjetividad del propio docente, también atravesada por esta modernidad? La realidad es que la formación acerca de enseñar y transmitir un saber en el nivel universitario está claramente relegada frente a las especializaciones de cada disciplina. No existe obligatoriedad alguna de que en el curriculum educativo del docente universitario exista algún tipo de formación que constate su competencia en este campo. Esto se ve plasmado en

la letra de los reglamentos que regulan el ingreso a los cargos de investigación y docencia: para esta última no se necesita más que una licenciatura. De hecho, un licenciado en Matemática cuenta con más antecedentes frente a un profesor de Matemática graduado en la misma universidad ante un concurso por un cargo docente (UNS, 2017). Nos encontramos entonces con profesores altamente calificados en los contenidos de su área, pero a quienes las casas de altos estudios no les han exigido ninguna formación pedagógica previa al desarrollo de dicha función docente, y tampoco estos han sentido esta necesidad formativa (Mas Torelló, 2011). Esta metodología que se apoya en la necesidad de rigurosidad en el manejo de los contenidos curriculares, es denominada didáctica del sentido común y está fuertemente arraigada como enseñanza tradicional en nuestras universidades (A. de Camilloni y cols., 1996). Entonces, la problemática tan estudiada de los alumnos de los primeros años en las carreras científicas ¿no tiene un correlato con la falta de formación de los docentes de esos niveles? El propósito de este trabajo es poner en discusión el supuesto de que la formación pedagógica no es indispensable en la docencia universitaria, al menos en las materias correspondientes a la formación matemática inicial, siendo que, desde el relato de nuestros propios alumnos, esta falta de formación se pone en evidencia en formas de enseñanza centradas en el profesor, que privilegian los modos expositivos y un limitado empleo de tecnologías. Y desde esta perspectiva, fundamentar por qué los docentes universitarios deberíamos empezar a cuestionarnos el lugar que ocupamos como actores en la educación superior.

§2. Marco conceptual

La formación en didáctica y pedagogía de los docentes universitarios es un tema que se ha vuelto un foco de atención para muchos educadores e investigadores dado que cambiaron muchas variables en el mundo académico. Diversos autores vienen anticipando la necesidad de reformular el rol del docente universitario a partir de este mundo de internet y redes sociales.

Por empezar, la identidad profesional del profesor universitario está más ligada a su área de conocimiento que a su enseñanza (de la Cruz Tomé, 2003). El profesor se define antes como ingeniero, médico, economista o psicólogo, que como profesor de esas disciplinas. Y el punto enfático es que, al oficio de profesor universitario, como a la mayoría de los oficios, también le ha llegado el momento de su profesionalización. Esta docencia profesionalizada dista de aquella que realiza el profesor a golpe de intuición y buena voluntad, es decir, para enseñar eficazmente, el dominio de la asignatura es una condición necesaria pero no suficiente. Y esta demanda de cambios se fundamenta en que la universidad hoy se enfrenta a matrículas más grandes y al desafío de qué enseñar en un mundo en que la información prolifera. Trabajamos con grupos heterogéneos con muchos alumnos y esta diversidad exige

la adaptación a ese contexto de métodos de enseñanza diversos, estrategias didácticas diferentes y recursos alternativos (A. R. W. de Camilloni, 2012). El contexto en que se encuentran los profesores tiene un tinte paradójico: éstos deben valorar su carrera académica y no su carrera docente para ser promocionados en cargos docentes (De Ketele, 2003). La rigurosidad necesaria en los contenidos curriculares universitarios exige docentes especialistas en cada una de las áreas. Pero las instituciones universitarias no prevén ningún tipo de formación o supervisión pedagógica formalizadas, o bien porque la juzgan inútil, no se estima prioritaria, o es juzgada importante pero considerada como asunto personal de cada profesor. Este punto está basado en una serie de ideas tradicionales en la enseñanza universitaria, no hay un compromiso metodológico ya que la enseñanza en el nivel superior no es una acción problemática en sí misma. Pero hacer matemática, e incluso saber matemática difiere mucho de enseñar la matemática. Según (A. R. W. de Camilloni, 1995)

Es un hacer que se realiza sin obstáculos internos para el docente, más allá de los riesgos que, por características personales de éste, podrían surgir en razón de la situación de exposición que es propia del acto de enseñar. Las decisiones que hay que adoptar cuando se enseña no son, por lo tanto, materia de dificultad. A ese respecto, no hay opciones de índole muy variada; a lo más podrían hallarse problemas cuantitativos relativos a contenidos, tiempos y ejercitación. No existen, en consecuencia, alternativas metodológicas sustantivas entre las que es imprescindible elegir (p. 6).

En cursos de Cálculo en carreras de ingeniería es tradicional el sistema didáctico en que el profesor tiene el rol principal en el proceso de enseñanza-aprendizaje mientras que los estudiantes asumen una actitud pasiva (Zuñiga, 2007). El aprendizaje sucede principalmente por repetición, no por descubrimiento, lo cual conduce a un aprendizaje producto del énfasis en la mecanización del saber. Esto no significa que el aprendizaje por repetición sea erróneo o inadecuado, el arte de la matemática también implica internalizar movimientos que adquieran cierta naturalidad, la visión es que este aprendizaje resulta insuficiente. A esto se agrega que la didáctica empleada está determinada por el discurso de los libros de texto. Las sesiones de clase se diseñan para el cumplimiento de los programas de estudio que en muchos casos están elaborados en función a la estructura de contenidos de estos libros. Si la tarea académica en la que los profesores suelen ubicar a los alumnos en clase es la de escuchar sus explicaciones, tomar apuntes y leer la bibliografía proporcionada fuera de esta, entonces el rol del docente está establecido como el del transmisor de información y el rol de los alumnos como receptores de conocimientos. En esta configuración de la enseñanza el que más aprende es el profesor ya que es el que investiga y lee para preparar la clase (Carlino, 2005).

En buena medida tales situaciones se deben a que los profesores no tienen una capacitación profesional en docencia (mucho menos en didáctica de su materia) lo cual provoca que su trabajo como docentes se guíe casi exclusivamente por las experiencias vividas como estudiantes, su percepción de lo que significa ser un buen profesor y lo que dictan los programas y libros de texto oficiales. Pero el conocimiento intuitivo y el aprendizaje basado en la imitación de nuestros maestros ya no son suficientes. El conocimiento de la matemática implica un saber hacer, hoy la información está disponible prácticamente para todos, pero no así su utilización (de la Cruz Tomé, 2003). Se puede acceder a cientos de textos de matemática en formato pdf, a páginas dedicadas a temas específicos (Análisis Matemático, Geometría, Estadística, etc.) o a videos de clases magistrales desde cualquier lugar con conexión a internet. Luego el enseñar hoy debe ser otra cosa que transmitir información. Vivimos en la sociedad de la información y la comunicación y el alumno tiene acceso directo a una información sobreabundante. Pero la facilidad de acceso a esta no garantiza la asimilación y construcción en conocimiento por parte del alumno y su uso pertinente, la información no constituye ni saber, ni experiencia (Skliar y Larrosa, 2011).

§3. Metodología

En un núcleo de materias de primer año (Análisis Matemático 1 y Álgebra y Geometría) de la UTN se realizan periódicamente encuestas acerca de la percepción de la cátedra por parte de los alumnos. Son encuestas gestionadas por la facultad que permanecen anónimas para los docentes, y son respondidas en promedio por un 70 % del alumnado. En estas encuestas se realiza una serie de preguntas acerca del dictado de clases y su propio rendimiento (las preguntas realizadas se pueden ver en el Anexo). La modalidad de la encuesta es autoadministrada mediante la plataforma del aula virtual y se solicita a los estudiantes enfáticamente que la completen para lograr una tasa de respuesta alta, aunque la encuesta no reviste carácter obligatorio. Las respuestas están preestablecidas (SÍ, NO, No Sé, No Contesta) y no cuentan con espacio para comentarios. Es por esto que durante el segundo semestre de 2017 y los dos semestres de 2018 realizamos la tarea de complementar estas encuestas institucionales con entrevistas informales, entendiendo este tipo de entrevistas como despojadas lo más posible de lineamientos pre establecidos e intentando que las palabras del entrevistado marquen el rumbo de las preguntas. La entrevista informal busca captar aquello que está más allá de la estructura de las encuestas, lo que se desprende de la expresión espontánea y asociativa del alumno y que al mismo tiempo resuena en el entrevistador (cuya subjetividad en la escucha también juega un papel fundamental). Los alumnos invitados a las entrevistas fueron de primer año de Análisis Matemático 1 y Álgebra y Geometría

correspondientes a las carreras de Ingeniería Civil, Ingeniería Electrónica e Ingeniería Eléctrica. Las entrevistas fueron realizadas por los autores de este trabajo, y el detalle es que, al contar con la colaboración de docentes de otras comisiones que nos permitieron hacer esta actividad con sus alumnos, tuvimos entrevistas con alumnos que no cursaron sus materias con nosotros. Esto implicó en algunos casos una mayor inhibición a la hora de responder, y en otros casos todo lo contrario. La modalidad fue la siguiente: en su último día de práctica, en cada uno de los semestres mencionados, se invitó a los estudiantes a responder por escrito cuatro preguntas básicas:

- *¿Qué considerás que te sirve para aprender?*
- *¿Qué considerás que no te sirve para aprender y constituye una dificultad en clase?*
- *Cuando no te sale un ejercicio, o no entendés algún punto teórico ¿qué hacés?*
- *¿Qué te parece que deberíamos hacer (los docentes) para mejorar las clases, las prácticas, o lo que se te ocurra?*

Luego se convocó en un espacio individual a aquellos que quisieran explicar sus respuestas oralmente, siendo éstas el puntapié para la entrevista. Estas entrevistas se realizaron luego de concluido el periodo de cursada, intentando evitar cualquier condicionamiento en las respuestas dado que estas no son anónimas y en algunos casos conllevan una crítica hacia el docente entrevistador. El número total de entrevistas realizadas, de las que se desprende el material analizado, fue de 93, teniendo en cuenta que no todos los alumnos convocados aceptaron la propuesta. Estas entrevistas, informales e individuales, fueron realizadas en el aula donde se dictó clase, teniendo siempre en cuenta que, más allá de asistir a la convocatoria, no todos los alumnos tienen la disposición a ser entrevistados y las respuestas muchas veces apuntan a lo que suponen que uno quiere escuchar.

§4. Resultados y discusión

Desde el marco conceptual establecido analizamos el contenido de expresiones desprendidas de las entrevistas cuyo contenido denuncia falencias que, desde nuestra visión, competen a la labor del docente. Las expresiones puntuadas están ligadas a la única consigna del análisis: que no tenga consignas previas. Analizar aquello que emerja sin esperar nada en particular (que pueda actuar como prejuicio), y lo emergente es aquello que por algún motivo resuena en la escucha del entrevistador y al mismo tiempo insiste en repetirse parafraseándose en otros intérpretes.

4.1. “Cuando no entiendo algo busco videos en internet.” Internet nos acerca a la información, a través de la red uno puede descargar libros, apuntes, y ver videos explicativos sobre temas diversos. Pero cuando internet es el sustituto de la

consulta o la clase (sea expositiva o funcional, no importa el paradigma) entonces el profesor debe ubicarse en el centro del cuestionamiento.

Si el profesor no tiene algo más para ofrecer, si el contenido de su discurso es lo que el alumno antes encontraba en un libro y hoy encuentra en Wikipedia o en videos de youtube¹, entonces el encuentro en el aula comienza a perder su valor. Que los alumnos opten por videos de extraños, a los que nunca van a conocer, por el simple hecho de que sienten que entienden mejor es una convocatoria a los docentes a una imperiosa reflexión sobre los métodos de enseñanza y sobre la dinámica de sus clases. Esta situación no es comparable con la asistencia a un profesor particular, donde sigue habiendo un encuentro real con otro con el que quizás se tenga una mayor empatía, además de ser una clase personalizada en contraposición con las clases masivas de la facultad. Si la función del profesor se limita a repetir un desarrollo promoviendo el espectáculo de su saber sin interacción con quienes lo escuchan entonces no hay gran diferencia con lo que se puede ver en un video, que puede contar con otro tipo de animaciones o contenido audiovisual. En este punto, el avance de las nuevas tecnologías sobre la educación ya había sido observado por Piaget (Piaget, 1969) en relación con los medios audiovisuales y las llamadas “máquinas de enseñar”:

Los espíritus sentimentales o pesarosos se han entristecido de que se pueda sustituir a los maestros por máquinas; sin embargo, estas máquinas nos parece que prestan el gran servicio de demostrar sin posible réplica el carácter mecánico de la función del maestro, tal como la concibe la enseñanza tradicional: si esta enseñanza no tiene más ideal que hacer repetir correctamente lo que ha sido correctamente expuesto, está claro que la máquina puede cumplir correctamente estas condiciones (p. 90).

Si el docente es un repetidor entonces es intercambiable por cualquier repetidor. La pregunta que el profesor tendría que elaborar para intentar responder es aquella acerca de su propia singularidad: ¿Qué puede encontrar el alumno en mí que no va a encontrar en otro?

4.2. “Van muy rápido, especialmente cuando usan el cañón”. En el grupo de materias analizadas el ritmo de las clases siempre fue vertiginoso por la extensión de los contenidos en un tiempo muchas veces insuficiente. El uso de diapositivas agrega un supuesto dinamismo que no es funcional a la enseñanza. La metodología para la enseñanza de la ciencia no está sometida a las mismas reglas que la metodología para hacer ciencia. Y del mismo modo, la comunicación de resultados científicos tiene características diferentes a una exposición áulica que persigue un acto de enseñanza. En matemática es importante el desarrollo “en vivo”, haciendo

¹JulioProfe y Profe Alex son dos ejemplos de youtubers muy populares que enseñan matemática avanzada a través de videos con una alta calidad de edición de forma totalmente autónoma, es decir, son videos que no forman parte de ninguna plataforma universitaria.

en clase lo que el alumno después hará de manera individual. La mano que escribe el ejercicio y desde la lectura de la propia escritura va creando, deduciendo un camino hacia una posible solución.

La incorporación de las nuevas tecnologías de información y comunicación (NTIC) implica tanto nuevas metodologías como el análisis crítico de estas. El uso de tecnologías en las clases de matemática no solo ha generado novedosas formas de transmitir e ilustrar los contenidos a partir de nuevas alternativas audiovisuales e interactivas, sino que permite experimentaciones y actividades de los alumnos en sus propios dispositivos, y todo esto dentro de las aulas. Y fuera de estas, las aulas virtuales permiten la comunicación y la transferencia de material de estudio en cualquier momento y hacia cualquier lugar con conectividad. Las NTIC ofrecen nuevas oportunidades como herramientas para pensar. Pero, no podemos perder de vista que ninguna NTIC modifica por sí misma la forma de aprender, no dejan de ser un medio que acerca y facilita el aprendizaje. Batista et al. (Batista, Celso, y Usubiaga, 2007) lo expresan diciendo que la inclusión de nuevas tecnologías logra una innovación si es acompañada de cambios conceptuales en la concepción de su uso y de la reflexión sobre por qué y para qué utilizarlas, cuáles son los aportes y qué tipo de aprendizaje se puede promover con ellas (p. 40). Lo nuevo se puede pensar a partir de lo heredado del pasado, y es entendible que los cambios sean graduales. Los mismos autores nos llevan a pensar en la historia del cine y la televisión: los productores y realizadores tuvieron que aprender y experimentar con los nuevos códigos y posibilidades de expresión, y el público tuvo que, paulatinamente, aprender a ver. “Las primeras películas se parecían al teatro, los primeros programas de televisión eran como la radio, etc. En esta línea de razonamiento es lógico pensar que los usos iniciales de las NTIC giren en torno a formas pedagógicas más conocidas” (Batista y cols., 2007, p. 43). Si no hay un cambio conceptual, la dinámica de las diapositivas en clase puede ofrecer una estética interesante para el ojo observador externo y puede resultar una comodidad para el profesor, pero es evidente que no lo es para el alumno.

4.3. “Para aprender necesitamos que se corrijan los ejercicios entre todos”. Más del 90 % de los alumnos encuestados afirma que las correcciones generales les sirven para aprender. Esta demanda, a pesar de ser satisfecha en las clases prácticas, no tiene correlato en el porcentaje de alumnos que finalmente aprueba la cursada, que no supera el 30 %. La creencia de que con estar en clase y ver cómo se hacen los ejercicios alcanza pareciera equivalente a creer que con obtener información es suficiente. En este caso la información es acerca de las respuestas e inclusive los procedimientos. Pero ver cómo otro hizo el ejercicio dista mucho de la experiencia que representa el realizarlo uno mismo. Asimilar y hacer propias ciertas ideas y mecanismos matemáticos exige un recorrido individual en el que cada experiencia tendrá un resonar diferente desde la singularidad subjetiva. Esta deficiencia en la

preparación para un examen ¿es responsabilidad exclusiva del alumno? Responder que sí es insistir en que la docencia poco puede aportar de nuevo a lo que el alumno ya no posea en motivación, expectativas personales, conocimientos previos, capacidad de esfuerzo y trabajo. Existe el concepto de alumno como adulto joven maduro, cuyo aprendizaje depende de su responsabilidad y de las posibilidades que tiene para desarrollar las competencias que la sociedad y la profesión exigen de él como graduado universitario (A. R. W. de Camilloni, 1995, p. 7). Pero este conjunto universal que implica el concepto de alumno es necesario segmentarlo: no es lo mismo el alumno que alcanzó cierta madurez en lo respectivo a la dinámica universitaria que aquel que está realizando sus primeros pasos. Este es uno de los puntos por los que hacemos hincapié en la formación de los docentes en las materias iniciales.

4.4. “Sería aconsejable que el profesor busque otra manera para que razonemos los ejercicios y no los copiemos con un método de pautas a seguir”. Esta opinión sorprendentemente repetida, da cuenta de esta didáctica del sentido común. El profesor transmite un método de resolución convencido de su utilidad por el sólo hecho de que le fue útil a él para aprender. Desde una lectura de (A. R. W. de Camilloni, 1995), el docente representa un modelo científico y profesional para el alumno porque enseñar implica, fundamentalmente, la transmisión de un conocimiento científico determinado. Es una convicción muy extendida entre el profesorado universitario que la buena docencia proviene del saber disciplinar del profesor y de sus cualidades particulares, y que es posible enseñar a partir de la propia experiencia de la enseñanza. A enseñar, dicen, se aprende enseñando, no se trata de una actividad científica. Es una negación de la didáctica al inferir que no existen pautas acerca del cómo enseñar. Es necesario un cuestionamiento de las propias prácticas ya que es evidente que estos supuestos de a-didactismo comienzan a mostrar grandes flaquezas. El alumno hace el cuestionamiento del método de enseñanza que debería hacer el propio docente. Estas puntuaciones del discurso dan cuenta de pequeñas situaciones en la dinámica de las clases que podrían considerarse detalles y, por ende, desatenderse con alumnos avanzados. Pero en los años iniciales estos detalles pueden afectar directamente a la adaptación de los estudiantes al sistema y a la vida universitaria. La prueba de esto es que estas situaciones aparecen insistentemente en su discurso. Los primeros años, especialmente en los cursos duros de cálculo avanzado, los docentes debemos reconocernos en un espacio de transición, y para esta transición debemos estar preparados.

4.5. Dos posiciones polarizadas. La enseñanza a golpe de intuición es un polo cuyo contrario es el de la búsqueda del manual para enseñar. En esta polarización, la posición de muchos de los educadores con los que tenemos intercambio de

opiniones suele ubicarse en uno simplemente por oponerse al otro, y está fuertemente ligada al nivel en el que se ejerce la enseñanza (nivel secundario, terciario o universitario).

Que la enseñanza esté totalmente subordinada al discurso de la ciencia equivale a la búsqueda de las normas que prescriban cómo enseñar. Es como buscar un manual de procedimientos. Ese manual no solo es un imposible, sino que representa el peligro de converger a un método hegemónico de enseñanza donde lo que es bueno enseñar está ligado a la ideología de turno. Freud (Freud, 1937) ubica a la educación como una de las profesiones imposibles (junto con gobernar y psicoanalizar) por la injerencia subjetiva de los actores de la educación: “todo progreso nunca es sino la mitad de grande que de lo que al comienzo se esperaba” (p. 231), expresa Freud en referencia a la imposibilidad de garantizar el resultado buscado. Lacan (Lacan, 1970) enfatiza esta idea al sostener que la ciencia forcluye² la subjetividad por la naturaleza intrínseca de su propio discurso.

Por otro lado, el corpus teórico que constituye el saber disciplinar ordenado sobre el que el docente descansa su oficio, aunque aparente no tener grietas se encuentra con un punto ciego: un no saber sobre el otro. La alteridad pone al docente en un estado de ignorancia inevitable, que este intenta obturar imponiendo su ideología académica. Cuando la tendencia es a ubicar el problema fuera de su alcance aparece la posición de alma bella descrita por Hegel: el docente no es responsable de nada, es el mundo que está contra él: los alumnos, el sistema educativo, el ministro de educación, etc. (Hegel, 2006). Mientras tanto se sostienen tradiciones de enseñanza que en muchos aspectos empiezan a no dar respuestas. Esta resistencia a no saber podría tener una explicación desde lo que implica el esfuerzo de haber estudiado durante mucho tiempo para tener que asumir que en una función que hace años realiza (porque llegar a profesor implica años de ayudante y/o jefe de trabajos prácticos), hay un saber que no se puede alcanzar.

En medio de ambos polos nos encontramos con que la formación docente es esencial pero nunca será definitiva y completa. El reconocimiento de esta condición, de formación permanente y nunca acabada, obliga al docente a asumir una posición subjetiva y hacer algo al respecto. Asumir que somos parte del problema y crear un estilo para enseñar. Desde la universalidad científica queda negado el gesto singular de cuño personal y auténtico, que nos elimina como sujetos y nos convierte en repetidores. El estilo es la contracara. “El estilo es el hombre” escribió Leclerc (Leclerc, 2014), expresando que no hay un estilo de hombre, sino que cada hombre es un estilo en sí mismo, y cada profesor determinará un estilo desde su singularidad. La Figura 1 esquematiza esa posición subjetiva, que no

²Término tomado por Lacan del ámbito del derecho, compuesto por las palabras latinas foris (foro: jurisdicción para sentenciar causas) y claudere (acto de cerrar). En este sentido forclusión posee el significado de excluir y rechazar de un modo concluyente.

desconoce los puntales que proponen estas posiciones polarizadas entre docencia no profesionalizada y reglas para enseñar, pero al mismo tiempo está más allá de ellas.

Formarse, entonces, no para obtener un saber concluyente sobre el oficio de enseñar, sino para crear un estilo de docente, sabiendo que no habrá más posibilidades que un único estilo posible: el propio.

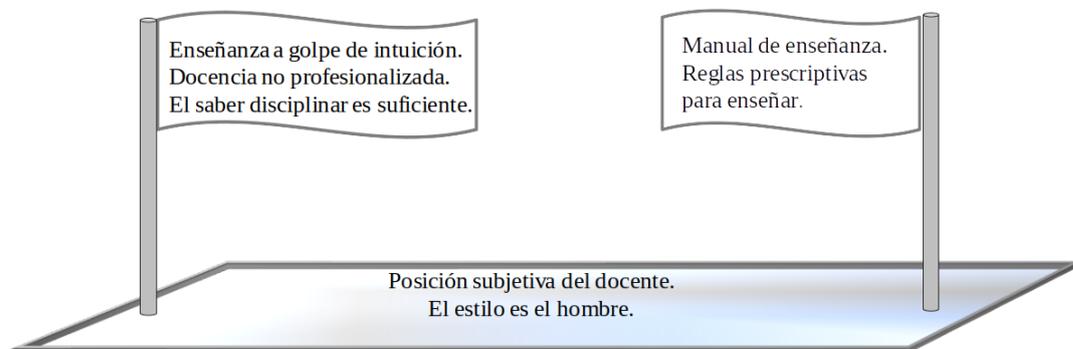


FIGURA 1. Posición subjetiva entre dos posiciones polarizadas.

§5. Conclusiones

La formación de los profesores en el nivel universitario está claramente circunscrita a las especializaciones de cada disciplina. No existe ninguna obligatoriedad de que en el currículum formativo del profesor universitario exista una formación en el oficio de enseñar. Pero ante los cambios en las vicisitudes del llamado sujeto universitario, evidenciados a partir del discurso de los propios alumnos, es menester preguntarse si no habrá llegado la hora de rever esta postura, si al menos en los primeros años puede ser este nuestro perfil como docentes. Es preguntarse si el paradigma del docente universitario no debiera mudarse a una posición donde la formación docente ocupe un lugar tan importante como el saber disciplinar, aunque no sea para seguir reglas de carácter universal acerca de cómo transmitir una teoría sino todo lo contrario, desde la universalidad de lo que podamos conocer crear un estilo singular que favorezca un encuentro diferente con nuestros estudiantes. Es al menos abrir la pregunta acerca de nuestro grado de responsabilidad en los inconvenientes que se observan en los alumnos que inician sus carreras y, de alguna forma, empezar a asumir acciones concretas que vayan más allá de datos estadísticos.

Bibliografía

Antelo, E. (2009). *¿Qué tipo de compromiso es el compromiso docente?* Río Gallegos: A.D.O.S.A.C. Descargado de http://www.estanislaooantelo.com.ar/files/compromisodocente_v2.pdf

- Batista, M. A., Celso, V. E., y Usubiaga, G. G. (2007). *Tecnologías de la información y la comunicación en la escuela: trazos, claves y oportunidades para su integración pedagógica*. Buenos Aires: Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación.
- Bruno, O. R. (2005). Análisis de la percepción de los alumnos y de los docentes para la incorporación de un sistema tutor inteligente como facilitador del aprendizaje de algoritmia. *Revista de Informática Educativa y Medios Audiovisuales*, 2(4), 1–31.
- Buffa, F., Moro, L., Massa, P., García, M., y Fanovich, M. (2018). Las concepciones sobre la enseñanza en docentes universitarios de Ingeniería. *Revista de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 5(2), 123–130.
- Carlino, P. (2005). *Escribir, leer y aprender en la universidad. Una introducción a la alfabetización académica*. Buenos Aires, Argentina: Fondo de Cultura Económica.
- Cura, R. O., Achilli, G., Amado, L., Ardissono, M., Azzurro, A., Baunaly, M., ... Verna, M. (2010). *Evolución y mejora en la formación inicial en Ingenierías en la Facultad Regional Bahía Blanca de la Universidad Tecnológica Nacional*. Buenos Aires.
- de Camilloni, A., Davini, M., Edelstein, G., Litwin, E., Souto, M., y y Barco, S. (1996). *Corrientes didácticas contemporáneas*. Buenos Aires: Paidós.
- de Camilloni, A. R. W. (1995). *Reflexiones para la construcción de una Didáctica para la Educación Superior*. Valparaíso, Chile: Universidad Católica de Valparaíso.
- de Camilloni, A. R. W. (2012). *Entrevista a la prof. Alicia Camilloni – parte 1*. Descargado de <https://www.youtube.com/watch?v=D5pg9vfVmSkBosch>
- de Estudios de Educación Argentina (CEA), C. (2016). Nuestra graduación universitaria es escasa. *Universidad de Belgrano*, 5(46). Descargado de http://repositorio.ub.edu.ar/bitstream/handle/123456789/7186/cea_numero_46.pdf
- De Ketele, J. M. (2003). La formación didáctica y pedagógica de los profesores universitarios: luces y sombras. *Revista de educación*, 131, 143–169.
- de la Cruz Tomé, M. A. (2003). Necesidad y objetivos de la formación pedagógica del profesor universitario. *La formación del profesorado universitario*, 331, 35–66.
- Dujet, C. (2005). *Matemáticas para ingenieros*. Lyon, Francia: Conferencia Amerinsa.
- Freud, S. (1937). *XXIII. Análisis terminable e interminable*. Buenos Aires, Argentina: Amorrortu.
- Gandulfo, M., Benitez, I., Musto, D., Taborda, L., y Gemignani, M. (2010). *Ingreso y permanencia. Innovación y desafíos*. Buenos Aires, Argentina: WFEO, CONFEDI.
- Hegel, G. (2006). *Fenomenología del espíritu*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Lacan, J. (1970). *El reverso del psicoanálisis*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Lagger, J., Donet, E., Gimenez Uribe, A., y Samoluk, M. (2008). *La deserción de los alumnos universitarios, sus causas y los factores (pedagógicos, psicopedagógicos,*

- sociales y económicos) que están condicionando el normal desarrollo de la carrera de Ingeniería Industrial. Salta: Eunsa.
- Leclerc, G. L. (2014). Discurso sobre el estilo. *Revista de Economía Institucional*, 16(31), 333–339.
- Mas Torelló, O. (2011). El Profesor Universitario: sus competencias y formación. *Revista de curriculum y formación del profesorado*, 15(3), 195–211.
- Moreno, E., González, J., Celis, L., y Colicoy, N. (2014). ¿Qué dicen los profesores universitarios de ciencias sobre el contenido, metodología y evaluación? Análisis desde la acción educativa. *REDU, Revista de educación universitaria*, 12(1), 307–335.
- Piaget, J. (1969). *Psicología y Pedagogía*. Barcelona, España: Ariel (Paidós).
- Plan estratégico de formación de ingenieros. (2012). Descargado de http://pefi.siu.edu.ar/calidad_ing/temp/archivo/PlanEstrategicoFormacionIngenieros2012-2016.pdf
- Skliar, C., y Larrosa, J. (2011). *Experiencia y alteridad en educación*. Rosario, Argentina: Homo Sapiens/Flacso.
- UNS. (2017). *Departamento de Matemática. Incumbencias del Profesorado*. Descargado de <https://servicios.uns.edu.ar/grado/carreraplan.asp?dependen=00011&carrera=00110> (Accedido el 1-10-2017)
- Zuñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Relime*, 10(1), 145–175.

JUAN I. ARDENGHI

Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina.

Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica Nacional (FRBB), Bahía Blanca, Argentina.

✉ ardenghi@criba.edu.ar

FLAVIA E. BUFFO

Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina.

Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica Nacional (FRBB), Bahía Blanca, Argentina.

✉ fbuffo@uns.edu.ar

Recibido: 15 de junio de 2019.

Aceptado: 14 de marzo de 2020.

Publicado en línea: 29 de julio de 2020.

LAS SIMULACIONES: OTRAS HERRAMIENTAS PARA ENTENDER UNA EPIDEMIA

Juan Pablo Pinasco

RESUMEN. En este artículo contamos cómo las simulaciones nos ayudan a explicar la difusión de una epidemia, a evaluar las medidas que se toman, y a intentar predecir cómo evolucionará.

ABSTRACT. In this article, we show how simulations help us to explain the spread of an epidemic, evaluate the measures taken, and predict its evolution.

§1. Conozco gente que soluciona problemas

Disculpe, ¿podría hablar unas palabritas con usted? No soy médico, ni epidemiólogo, ni Máximo Cossetti,¹ lo cual me autorizaría a decir esta frase, pero de algún modo tenemos que empezar. Soy matemático, y trabajé mucho tiempo en problemas de ecuaciones diferenciales, hasta que en cierto momento me encontré con problemas en teoría de juegos donde las técnicas de ecuaciones diferenciales no me servían ni para empezar a explorar las distintas preguntas que me hacía. Y la difusión de una epidemia en una población, aunque no sea un juego, también es un ejemplo de este fenómeno.

Esto me llevó a contactar un grupo de gente muy extraño, que incluía matemáticos, físicos, computadores, biólogos, químicos -incluso economistas e ingenieros-, que aplicaban técnicas de simulación para enfrentar problemas que tenían en sus disciplinas. Para un matemático teórico, que viene de usar herramientas deterministas, es un mundo completamente nuevo, donde los resultados *se ven*, pero son

Palabras clave: simulaciones, epidemias, ecuaciones diferenciales ordinarias, SIR.

Keywords: simulations, epidemics, ordinary differential equations, SIR.

¹*Nom de guerre* de uno de los personajes de la serie *Los Simuladores*, emitida por Telefe en Argentina entre marzo de 2002 y enero de 2004 (D'Elía, Fiore, Peretti, Seefeld, & Szifron, 2002).

difíciles de justificar teóricamente, de *demostrar*. El resultado de una simulación depende de sucesos aleatorios tales como tirar una moneda, un dado, o sacar un número de un bolillero. Demostrar todo lo que observa es difícil hasta para la gente de probabilidades o de estadística, pero es un trabajo que de a poco se está haciendo.

En un artículo compañero de éste, Pablo Amster ([Amster, 2020b](#)) seguramente describirá sistemas de ecuaciones diferenciales de tipo SIR, SEIR, y similares; si no lo hace, le recomiendo este otro artículo suyo ([Amster, 2020a](#)). Así que en este artículo le voy a describir algunos modelos basados en simulaciones, y cómo se relacionan con la difusión de una epidemia en una población. Por último, voy a intentar mostrarle las ventajas de este enfoque cuando se aplican medidas tales como el asilamiento, la cuarentena, el distanciamiento social, o el uso de barbijos.

Una última cuestión: espero que no le moleste el tono del artículo. Me puede decir que no hay nada gracioso en una epidemia, y coincidiremos: entiendo bien la gravedad de este momento y, como muchos, temo por mi familia y amigos, y por el mundo que nos espera cuando esto pase. Si le saca una sonrisa en medio de esta situación, o aunque sea lo distrae por un instante de las preocupaciones, voy a sentirme más que satisfecho.

§2. Disculpe, ¿fuego, tiene?

Si bien Santos terminaba así sus misiones, en nuestro caso el fuego será un buen punto para empezar. Quiero contarle un modelo de incendio de bosques de Bak, Chen, y Tang ([Bak, Chen, & Tang, 1990](#)), en la versión de Drossel y Schwabl ([Drossel & Schwabl, 1992](#)).

El modelo describe un proceso dinámico que ocurre en dos escalas temporales. Hay una escala temporal corta -digamos un año-, en la cual brotan árboles, caen rayos que los incendian, y el fuego se propaga hasta que se detiene. Esto luego se repite una y otra vez a lo largo del tiempo, durante décadas. Esta dinámica es aleatoria, hay probabilidades involucradas que deciden si un árbol crece, o no, y si se incendia.

Para explicarla, imagínese una hilera donde hemos plantado 100 árboles. Por ahora son apenas gajos, brotes que deben crecer. Nuestro modelo tendrá dos parámetros p y q , y ambos serán números entre 0 y 1. El primero, p , representa la probabilidad de que el gajo crezca. El segundo, q , es la probabilidad de que le caiga un rayo a un árbol que creció y que lo incendie. Fijemos $p = 0,5$ y $q = 0,002$ para desarrollar parcialmente el ejemplo.

- (1) El primer paso de nuestra simulación es decidir cuáles de los 100 árboles crecieron y cuáles no. Para decidir si un árbol crece o no podemos tomar una calculadora científica (o bajar una para el celular) y generar, para cada

árbol, un número aleatorio con la tecla RND. Si el número es menor a p , diremos que el árbol creció. Por ejemplo, obtengo los números 0,325; 0,219; 0,937; 0,493; 0,001 . . . , lo cual significa que el primer árbol creció, el segundo también, el tercero no, el cuarto y el quinto sí, etcétera. Si escribimos A para indicar que hay un árbol, y 0 para indicar que el árbol no creció, tenemos una cadena de árboles que empieza

$$A \ A \ 0 \ A \ A \ \dots$$

- (2) El segundo paso de la simulación es incluir una tormenta, con rayos que caen y pueden incendiar los árboles. Aquí entra el segundo parámetro de nuestro modelo, q . Recorremos nuestra hilera y para cada uno de los árboles que se desarrolló, generamos un nuevo número aleatorio. Si el número es menor a q , diremos que el árbol se incendió. Por ejemplo, para la cadena de árboles que teníamos, supongamos que salieron los números 0,8407; 0,0015 . . . y que todos los demás son mayores a 0,002. Esto significa que el segundo árbol es el único que se incendió. La cadena nos queda, indicando con una F que el árbol se prendió fuego,

$$A \ F \ 0 \ A \ A \ \dots$$

- (3) El tercer paso en la simulación es propagar el fuego. Si un árbol está incendiado, miramos qué ocurre a su derecha y a su izquierda: si en alguno de esos lugares también había crecido un árbol, se incendiará también. El fuego se propaga entonces por la hilera de árboles, pero se frena cuando llega a un lugar donde no hay un árbol. En nuestro ejemplo, el bosque queda

$$F \ F \ 0 \ A \ A \ \dots,$$

ya que los árboles de la derecha se salvan porque no les cayeron rayos, y el fuego no puede propagarse a través del tercer lugar que está vacío.

- (4) Finalmente, el fuego se extingue, remueva los árboles que se quemaron y anote cuántos fueron. En el ejemplo, nos quedaría una hilera de la forma

$$0 \ 0 \ 0 \ A \ A \ \dots,$$

y se quemaron sólo dos. Observemos que ahora nos quedan huecos adicionales: aquellos donde el árbol no se desarrolló, y se agregan los que corresponden a un árbol quemado.

Como le decía al principio, hay una escala temporal corta, que son estos cuatro pasos, y nos devuelve el número de árboles quemados. Ahora, repetimos el ciclo poniendo nuevos brotes en los lugares vacíos, y repetimos todos los pasos de sortear si crecen o no, ver si se incendian (también pueden incendiarse los árboles que quedaron del período anterior), propagamos el fuego en la hilera de árboles, y anotamos cuántos se quemaron esta vez.

Un detalle interesante sobre el que le quiero llamar la atención es que si pasan un par de estos períodos donde no han caído rayos, los que se agregan empiezan a rellenar los huecos, y ahora cuando caiga un rayo provocará mucho daño, ya que los árboles están más conectados.

Observación 2.1. Este modelo lo planteamos en una línea por simplicidad, pero puede hacerlo usando un tablero de ajedrez. La diferencia es que ahora cuando un árbol se prende fuego se incendian los que están al costado, y también los que están delante y detrás.

Esta versión parece más realista para simular el incendio de un bosque. Créame que hay modelos más sofisticados, con datos reales de crecimiento de árboles y de probabilidades de incendios, con distribuciones más arbitrarias en el terreno, y detalles naturales que pueden frenar (zonas rocosas, ríos) o favorecer (vientos, temperatura, vegetación más baja) la propagación del fuego.

Ninguno de estos modelos describe, ni de cerca, las estadísticas que se tienen sobre incendios de bosques.

§3. Una persecución aleatoria

Bien, para nuestro próximo ejemplo necesito un tigre y un helicóptero, ¿me los podrá conseguir? Vamos a simular una persecución, y será en la misma hilera de casilleros del problema anterior, numerados del 1 al 100.

Comenzaremos con el tigre ubicado en alguno de los números y el helicóptero en un número más bajo, o incluso fuera de la hilera. Mientras el tigre trata de llegar al final de la fila, el helicóptero lo persigue, atrapándolo si cae en el mismo casillero.

Como usted está del otro lado, no puede elegir. Seamos honestos: no sé si sabe manejar un helicóptero, así que le pido que sea el tigre. Yo me ocupo del helicóptero, no necesitamos mucho más.

Ah, sí, necesitamos elegir al azar números entre 1 y 100: puede usar un bolillero, o un dado con cien caras. Si no tiene, la misma tecla RND de la calculadora de antes le puede servir, y si sale un número de la forma 0,391, diremos que salió el 40. Este es un detalle mínimo pero importante, porque si no, nunca sorteará el número 100; y si obtiene el número 0,004, se corresponderá al cero, que no es una casilla de nuestra hilera.

El próximo paso es describir dónde están el tigre y el helicóptero en cada turno. Vamos a llamar $x(t)$ a la posición que ocupa el tigre en el turno t . Al principio, $x(0)$ será el número de la casilla de donde partió, y a medida que avance el tiempo sólo puede crecer. De manera similar, llamaremos $y(t)$ a la posición que ocupa el

helicóptero en el turno t . La carrera termina si $x(t) = 100$ (el tigre se escapa), ó si $y(t) = x(t)$ (el helicóptero lo alcanza).

La forma de avanzar que tiene el tigre y la que tiene el helicóptero son diferentes. Vamos a aclararlas en detalle, parecen complicadas pero no lo son. En cada turno comenzará moviendo el tigre, que está en la posición $x(t)$ mientras que el helicóptero está en la $y(t)$.

- **El tigre.** Usted comienza sacando un número al azar entre 1 y 100, que llamaremos j . Si $y(t) < j \leq x(t)$, entonces saca un segundo número al azar, sea k . Si $x(t) < k$, entonces el tigre avanza tres casillas. Si el j no cumple la primera condición, o el k no cumple la segunda, el tigre no avanzará.
- **El helicóptero.** Me toca a mí, saco un número al azar entre 1 y 100, que llamaremos i . Si $y(t) < i \leq x(t)$, entonces avanzo el helicóptero una casilla. Si no se cumple la condición, el helicóptero queda donde está.

Antes de seguir, ¿quién le parece que ganará? Relea con cuidado las reglas, un rápido análisis le permitirá arriesgar una respuesta:

- Si el tigre avanza, avanza tres casillas, mientras que el helicóptero avanza una sola. No se me distraiga argumentando que los helicópteros son más rápidos, yo estoy tratando de verlo, y tampoco puedo ir más rápido, a ver si lo paso de largo.
- En muchos casos el tigre no avanza, porque los números que salen no cumplen las condiciones.
- Tampoco avanza el helicóptero en muchas ocasiones.

Una pregunta clave para ayudarnos a comprender las reglas es la siguiente: ¿qué es más frecuente: que el tigre avance, o que el helicóptero lo haga? Observemos que para avanzar tanto el tigre como el helicóptero deben cumplir una primera condición: que salga un número entre $y(t)$ y $x(t)$. Pero el tigre tiene una segunda condición, y a medida que avanza, es cada vez más difícil de cumplir. Por ejemplo, si le falta una casilla y está en $x(t) = 99$, para dar el paso definitivo tiene que sacar el número 100.

El tigre llegará lejos, pero cuanto más avanza, más fácil resulta alcanzarlo.

Ejemplo: tenemos el tigre en $x(t) = 99$, y el helicóptero en $y(t) = 97$. La primera condición, para ambos, es que salga el número 99 ($97 < j \leq 99$, y $97 < i \leq 99$). Si se cumple para el helicóptero, avanza un paso; pero si se cumple para el tigre, hace falta que ahora salga un segundo número k mayor a 99. La probabilidad de que salga es 1 en 100, así que lo más probable es que el helicóptero llegue a 98. Ahora, el que logre avanzar gana. El helicóptero la tiene más fácil.

Le voy a pedir que no se enoje: elegí el helicóptero porque sabía que era más probable que le ganara. Salvo que el tigre comience muy cerca de la meta, o que tenga mucha suerte al sortear los números, el helicóptero tiene ventaja y lo alcanza.

Le muestro algunos ejemplos en la Figura 1. En la izquierda hay una carrera típica entre el tigre y el helicóptero, mientras que a la derecha están superpuestas cinco carreras distintas. Como puede observar, entre esas cinco una termina pronto, y en otra estuvo a punto de ganarme!

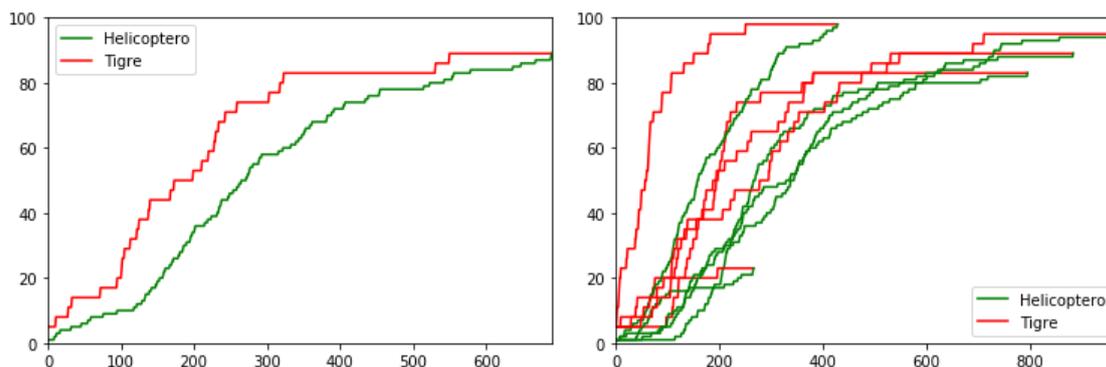


FIGURA 1. Izquierda: trayectorias del tigre (rojo) y del helicóptero (verde). Derecha: trayectorias de cinco carreras distintas.

Algunas observaciones:

- Cuando uno simula esta persecución, muchas veces acelera la dinámica: hacemos de cuenta que la primera condición se cumplió, así que el helicóptero avanzará seguro; y para ver si el tigre avanza, sólo verificamos la segunda condición. Se puede demostrar que no cambia nada, y tiene la ventaja de que nos evitamos un montón de sorteos innecesarios donde el primer resultado cae entre 1 e $y(t)$, o es mayor que $x(t)$.
- En general, el tigre avanzará $\hat{\beta}$ casillas en vez de tres, y el helicóptero avanzará $\hat{\gamma}$ casillas en lugar de una sola, pero no nos preocupemos por ahora por las generalizaciones.

§4. Dígame algo que le dé lógica a su presencia aquí

Bien, está acá todavía. Parece que va a seguir leyendo, así que me ha disculpado que le prometiera hablar de epidemias y le terminara contando un modelo de incendio de bosques completamente inútil, y que luego me aprovechara para ganarle una carrera.

Posiblemente es porque intuye la relación: los árboles son personas, los vecinos que tiene cada uno son aquellos con los que se contacta, el fuego es una enfermedad, y la misma se propaga por contagios. Incluso los huecos vacíos simbolizan el distanciamiento social, tan mencionado últimamente.

En (Rhodes & Anderson, 1996), los autores estudiaron los casos de sarampión de las Islas Faroe, Bornholm e Islandia entre 1910 y 1970. Las tres islas, relativamente aisladas, se comportan como nuestra fila de árboles, y un visitante infectado desencadena una epidemia; su severidad varía según el tiempo que transcurrió desde la última, y de la cantidad de infectados que hubo en el pasado. Los gráficos de los casos son similares a los que mostramos en la Figura 2, con oleadas muy dañinas, y muchos infectados, seguidas de años más tranquilos sin casos, o pequeños brotes cada pocos años. Los autores comparan sus datos con los resultados de las simulaciones de incendios de bosques en una grilla de dos dimensiones, y observan una gran similitud entre ambas dinámicas.

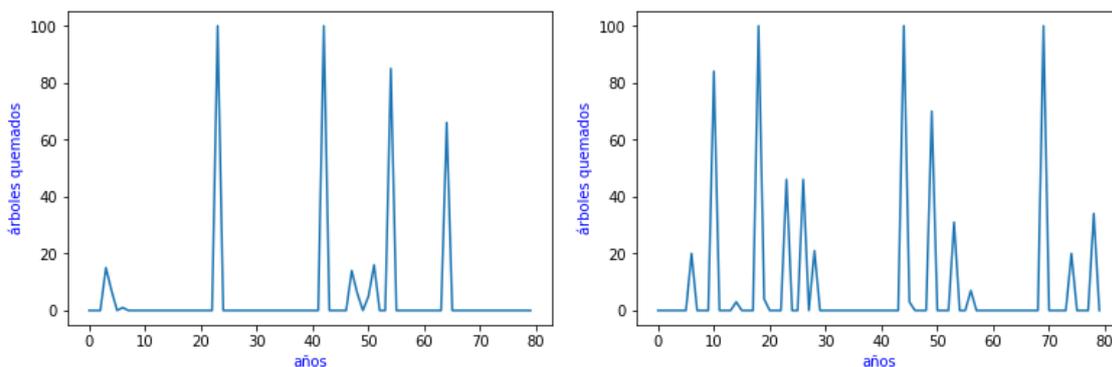


FIGURA 2. Número de árboles quemados cada año, para una fila de 100 árboles, y $q = 0,002$. Izquierda: $p = 0,3$. Derecha: $p = 0,4$.

¿Y qué pasa con el segundo ejemplo, la persecución? Acá tengo que agradecerle a Monia Capanna (o más precisamente, a Pablo Ferrari, que fue quien me lo contó), porque ella analizó de esta manera un clásico modelo SIR, susceptible-infectado-removido, en su tesis doctoral. Para ver sus resultados, le recomiendo (Capanna, 2019).

Voy a plantear nuevamente la persecución, cambiándole el nombre a las cosas. Las 100 casillas pueden ser cien personas, y ahora:

- $x(t)$ (la posición del tigre) es el número de personas que se infectó hasta tiempo t ;
- $\hat{\beta}$, que tomamos como 3, es el número de contagios promedio que realiza un infectado; puede entenderse como la velocidad a la que avanza la enfermedad en una población sana.

- $y(t)$ (la posición del helicóptero) es el número de removidos a tiempo t ;
- $\hat{\gamma}$, que tomamos como 1, es el tiempo promedio que permanece infectada una persona antes de recuperarse o de fallecer; podemos entenderla como la velocidad a la que se remueven los infectados.

Que el helicóptero alcance al tigre es una muy buena noticia: la epidemia termina porque no hay más infectados. El problema, claro, es cuánto logra avanzar.

Podemos deducir las ecuaciones diferenciales de un modelo SIR sin mucha dificultad a partir del ejemplo de la persecución.

Llamemos $R(t) = y(t)$ a la cantidad de recuperados de la enfermedad, y llamemos $I(t) = x(t) - y(t)$ a la cantidad de infectados. Podemos llamar $S(t)$ a los susceptibles, aquellos que aún no se han enfermado, y si la población total tiene N individuos, será

$$S(t) = N - R(t) - I(t) = N - x(t).$$

Observemos que $R(t) + I(t) + S(t) = N$, así que sólo nos interesa conseguir una ecuación diferencial para R y otra para I , la de S se obtiene gratis pues $S'(t) = -I'(t) - R'(t)$.

Si derivamos R respecto de t , tenemos

$$R'(t) = y'(t),$$

¿Cómo varía y , cuál es su velocidad? Recuerde que el helicóptero avanzaba con velocidad $\hat{\gamma}$, pero no siempre lo hacía: necesitaba sacar un número mayor a $y(t)$, pero menor a $x(t)$, de lo contrario su velocidad era cero. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{velocidad de } y(t) &= \hat{\gamma} \cdot \left(\frac{x(t) - y(t)}{N} \right) + 0 \cdot \left(1 - \frac{x(t) - y(t)}{N} \right) \\ &= \frac{\hat{\gamma}}{N} I(t). \end{aligned}$$

Luego, llamando $\gamma = \hat{\gamma}/N$, tenemos

$$R'(t) = \gamma I(t).$$

Para calcular la derivada de $I(t)$ tenemos

$$I'(t) = x'(t) - y'(t).$$

La derivada de $y(t)$ ya la conseguimos, pero nos falta conocer la derivada de $x(t)$. De la misma manera, el tigre se movía con velocidad $\hat{\beta}$ si lograba avanzar, y si no, se quedaba quieto, así que tenemos

$$\begin{aligned} \text{velocidad de } x(t) &= \hat{\beta} \cdot \left(\frac{x(t) - y(t)}{N} \right) \left(\frac{N - x(t)}{N} \right) + 0 \cdot \left(1 - \left(\frac{x(t) - y(t)}{N} \right) \left(\frac{N - x(t)}{N} \right) \right) \\ &= \frac{\hat{\beta}}{N} I(t) S(t). \end{aligned}$$

Si llamamos $\beta = \hat{\beta}/N$, tenemos

$$I'(t) = \beta I(t)S(t) - \gamma I(t).$$

Usando las derivadas de $x(t)$ e $y(t)$, como $S = N - x(t)$, podemos calcular directamente

$$S'(t) = -\beta I(t)S(t)$$

Hemos conseguido las ecuaciones de un modelo SIR:

$$(4.1) \quad \begin{cases} S'(t) = -\beta I(t)S(t), \\ I'(t) = \beta I(t)S(t) - \gamma I(t), \\ R'(t) = \gamma I(t). \end{cases}$$

Esta no es la derivación original de A. G. McKendrick y W. O. Kermack ([Kermack & McKendrick, 1927](#)), pero se basa en la misma idea: cada vez que hay un contacto entre alguien susceptible y alguien infectado, hay cierta probabilidad β de que la enfermedad se transmita, con lo cual S decrece de manera proporcional al producto de la fracción de susceptibles y la de infectados. En el caso de los infectados, crece con los que se enfermaron, y decrece con los que se curan. El término γI controla esa parte, y γ se relaciona con el tiempo τ que dura en promedio la enfermedad hasta que la persona deja de contagiar; más precisamente, $\gamma = 1/\tau$.

¿Jugamos a la persecución otra vez? Mire, lo voy a dejar ser el helicóptero, si quiere. Juguemos otra vez, y otra. ¿Vio que logro llegar a distintos números antes de que me atrape? ¡Y en esta le gané!

Podemos simularlo, para ver qué pasa en general: después de 100000 carreras, partiendo el tigre del 5 y el helicóptero del 1, tenemos que 15588 las ganó el tigre, que llegó a la casilla 100. Desde ya, muchas veces el helicóptero lo alcanza en las primeras casillas, en 10120 carreras no pudo llegar siquiera a la casilla 20. En la [Figura 3](#) podemos ver un histograma de los valores alcanzados.

Otra cosa que podemos hacer es comparar con el modelo SIR. Habíamos dicho que los infectados se obtenían como la resta entre la ubicación del tigre y la del helicóptero; y que los removidos eran la posición del helicóptero. Si graficamos $I(t) = x(t) - y(t)$, y $R(t) = y(t)$, obtenemos las curvas en el lado izquierdo de la [Figura 4](#), mientras que a la derecha tenemos la solución numérica de las ecuaciones diferenciales.

Podemos ver que una curva es más rugosa e irregular que la otra. Tampoco crecen a la misma velocidad, una se adelanta y llega antes al máximo, aunque en otras simulaciones no crece tanto y se extiende más en el tiempo. La diferencia

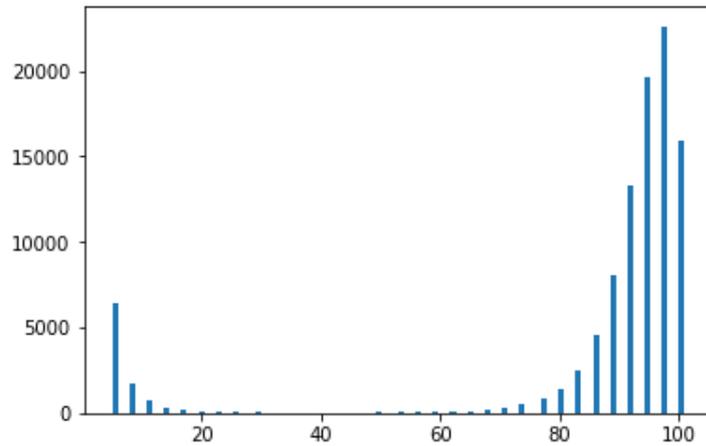


FIGURA 3. Histograma de la posición final del tigre para 100000 carreras.

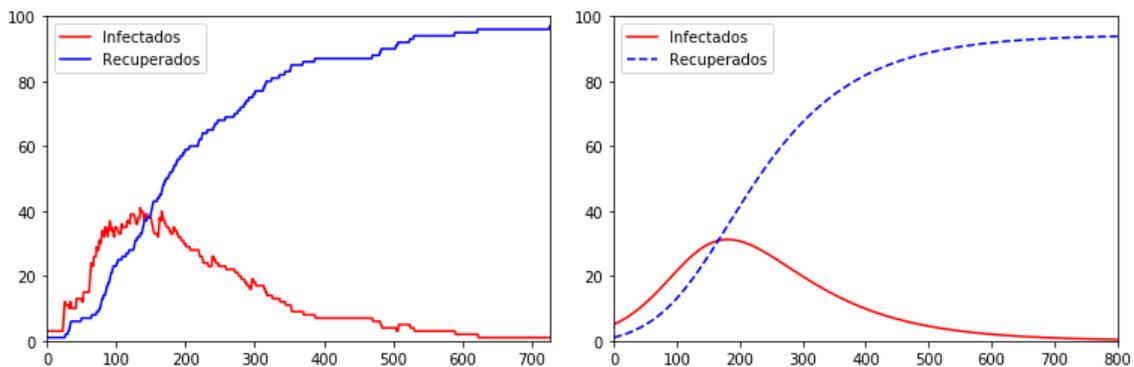


FIGURA 4. Curvas de removidos (azul) e infectados (rojo). Izquierda: obtenidas a partir de una carrera entre el tigre y el helicóptero. Derecha: solución numérica del modelo SIR.

viene del factor aleatorio, esa tirada de un dado para decidir si se produce el contagio o no, mientras que el SIR es un sistema determinístico, las probabilidades de avanzar ya están calculadas e incluidas en los coeficientes.

Los modelos SIR pueden modificarse y nos permiten hacer simulaciones rápidas, variando los parámetros, para predecir la evolución de la epidemia. Nos dan una idea de la gravedad que tiene y de su duración si no se toman medidas, y nos permiten analizar algunas de las medidas que se toman. Las simulaciones, en cambio, nos permiten ver distintos escenarios, fluctuaciones, anomalías; y repitiendo muchas veces, uno puede asignarle probabilidades a casos extremos donde la epidemia se extingue en poco tiempo, o termina afectando a toda la población.

Desde ya, β , γ y τ son parámetros que dependen de la unidad de tiempo elegida, y nos obligaría a meternos en detalles específicos sobre el funcionamiento de cada enfermedad, sus particularidades, y formas de transmisión. ¿Son horas, días, o meses los que aparecen en el eje temporal? ¿Es tan grande la pendiente con la

que crece? ¿El máximo de infectados simultáneamente supera o no la capacidad hospitalaria?

Todas estas cuestiones pueden responderse afinando la dinámica de la enfermedad, estudiando las tasas con mayor precisión. Pero existe un parámetro adimensional importante, que es el llamado R_0 , y que se define como el cociente entre β y γ . Si pensamos en nuestra interpretación en términos del tigre y el helicóptero, es el cociente de sus velocidades, y esto nos confirma algo intuitivo en la carrera pero no tanto en una epidemia:

Teorema 4.1. *Si $R_0 < 1$, la epidemia no se propaga.*

No nos hace falta demostrarlo, ¿verdad? Recordará que el helicóptero tenía ventaja, era más fácil que avanzara. Si además su velocidad es mayor, alcanzará al tigre: por cada casilla que el tigre avance, el helicóptero avanzará más, así que es sólo cuestión de cerrar la brecha inicial.

¿Qué ocurre si $R_0 > 1$? Bueno..., mejor dicho, malo: la epidemia se propaga. En algún momento la cantidad de susceptibles habrá disminuido, y en ese tiempo t tendremos

$$\gamma I(t) \sim \beta I(t)S(t),$$

o simplificando el $I(t)$, $\gamma \sim \beta S(t)$. Recién ahí el helicóptero empieza a ganar terreno y alcanzará al tigre.

Esta es la llamada *inmunidad de rebaño*, hay tantos contagiados que el número de susceptibles desciende y luego la epidemia se extingue sola. Nuevamente, sin meternos en los detalles técnicos, las estimaciones para el Covid-19 hablan de un 66% – 80% de infectados para que se consiga esta inmunidad de rebaño.

Observación 4.2. Al sistema de ecuaciones 4.1 le siguieron muchos más, incorporando factores cada vez más realistas. La persona puede pasar de S a un compartimento E , por haber estado expuesto a la enfermedad. Los infectados pueden pasar a otras categorías, tales como hospitalizados (con distintos grados de gravedad, y de los que salen a distintas tasas), aislados, vacunados, advertidos... entre muchas otras, incluyendo fallecidos. En cada una las tasas de entrada y salida, o la posibilidad de contagiar o ser contagiado varía. Incluso hay modelos donde es posible pasar de R a S : la inmunidad obtenida tras la enfermedad se pierde, y la persona puede contraer nuevamente la enfermedad.

También hay modelos donde la enfermedad no se transmite directamente por contactos entre personas, o sí lo hace, pero a través de un intermediario. El ejemplo concreto más importante hoy tal vez sea el dengue, con el mosquito como transmisor. Pero también el Covid-19 actúa de esa manera indirecta, cuando el virus queda en una superficie, ya que permanece vivo muchas horas.

§5. Despreocupate, mi trabajo es abstracto

Ya le mencioné una pequeña ventaja de las simulaciones sobre los sistemas de ecuaciones, el estudio de las fluctuaciones. Pero hay otras, más interesantes, aunque nos obligan a abandonar la persecución, o mejor aún, a generalizarla.

Imagínese que el tigre no avanza por una línea de 100 casilleros, sino que en cada casillero se abren distintos caminos, cada uno con su propia longitud, que pueden terminar o volver sobre sí mismos, y en cada casilla pueden ramificarse otra vez. Ahora, cuando el tigre está por avanzar tres casillas, puede hacerlas todas en uno solo de estos caminos, o puede generar copias de sí mismo, y avanzar la misma cantidad de casillas pero repartidas entre algunos de los caminos posibles.

Acá el helicóptero también se va a comportar de manera extraña: cada vez que llega a una bifurcación, si el tigre siguió varios de los caminos, el helicóptero también se multiplica y avanza una casilla en cada uno. Y en cada turno, todos los fantasmas del tigre juegan a ver si avanzan o no, y lo mismo hacen las copias de los helicópteros.

¿Completamente irreal, verdad? Una versión abstracta, casi borgeana, de una persecución de tigres por caminos que se bifurcan.

Sí, me dirá, pero no lo es tanto: imagine por un momento que se contagian tres personas, una se queda, otra se toma un avión y aterriza en otra ciudad, y la tercera se muda a un pequeño pueblo de pocos habitantes. Tenemos dos brotes nuevos de la epidemia en lugares diferentes, con diferentes perspectivas de contagio, y nuestro modelo SIR ya no sirve, pues las proporciones de susceptibles e infectados en cada lugar varían. Las ecuaciones del SIR asumen que sorteo dos personas al azar, y que la probabilidad de un contacto es proporcional a la cantidad de susceptibles y de infectados en la población, actuamos como si pudiéramos sacar uno cualquiera de la bolsa, y todos tuviesen la misma chance de ser elegidos, lo cual dejó de ser cierto.

Esto nos sugiere introducir grafos o redes, y analizar el contagio en ellas pensando cada persona como un nodo, y vía las aristas o links tenemos los contactos efectivos que un infectado puede contagiar. Si desea, podemos hacer que estas aristas entre dos nodos no sean permanentes, y que se activen de vez en cuando, o desaparezcan con el transcurso del tiempo, se ha hecho, y permiten modelar contactos casuales, como el vecino de asiento en el tren, o las personas que están comprando a la vez en un mismo comercio. El problema es que acá no podemos definir buenas ecuaciones, y todo el análisis viene de simulaciones.

Este enfoque es particularmente útil cuando se introducen medidas:

- **Mire aquí nadie lo retiene, la puerta está abierta. En realidad esta cerrada, pero si quiere se la abro.**

El *aislamiento social obligatorio*, mal llamado cuarentena, produce grandes cambios en los contactos. Nadie está impedido de salir de la casa, y si tiene una excusa válida -comprar alimentos o remedios, pasear el perro, ir a trabajar porque no está exceptuado- sale.

- **¿No hay un piquito para mí?**

El *distanciamiento social* es otro concepto que se puso de moda. Entre los argentinos hay un montón de conductas típicas que el distanciamiento modificó: saludarse con un beso, los abrazos, compartir el mate. Cambiarlas altera la probabilidad de contagio, había un β que era la tasa a la que nos contagiábamos antes, y ahora hay otra diferente. Y tampoco son costumbres que desaparecen de un momento a otro, seguimos compartiendo el mate pero con muchas menos personas, se nos escapa un beso, etcétera.

- **José, ¿por qué usa un solo guante?**²

Otra de las medidas que se ha impuesto, obligatoria en algunos lugares, es el uso de barbijos. Pero repartidores, choferes, y personal de atención al público en comercios, utiliza también guantes. Y si no hay guantes, se usa mucho alcohol en gel y sus variantes. Nuevamente, esto modifica el resultado de una interacción, ya que reducen la chance de contagio.

En definitiva, se modifica el contagio por medidas individuales o colectivas que afectan el término $\beta S(t)I(t)$:

- Deja de ser cierto que dos personas se contacten de manera proporcional al número de susceptibles y de infectados.

Si bien hay individuos que siguen interactuando con normalidad con sus contactos habituales -con sus parientes, o sus clientes-, hay gente que cambió y redujo mucho sus interacciones. El ejemplo principal son los chicos y los adolescentes, casi un tercio de la población total, que hasta hace poco veía más de cuarenta personas al día, y hoy apenas ve a un par, y siempre las mismas: sus padres.

Podríamos decir que los contactos ya perdieron la homogeneidad que tenían antes, y cada individuo posee su propia red de relaciones.

- Cuando dos personas están en contacto, la probabilidad de contagio ya no es β .

El uso de barbijos, guantes, y el cambio de costumbres reduce la chance de contagio. Y nuevamente nos chocamos con la heterogeneidad pero en los comportamientos: no todos tienen el mismo parámetro β . Peor aún, cada agente tiene un parámetro de contagio β diferente que depende de con quién interactúa.

²Si no conoce la respuesta a esta pregunta, le recomiendo el capítulo final de la serie.

Con las simulaciones sobre grafos es posible seguir estudiando el comportamiento de una epidemia. Cada nodo está conectado sólo con los que puede contagiar porque efectivamente se contacta, y cada arista tiene su propia probabilidad de contagio. En (Kivela et al., 2014) puede ver la multitud de modelos de redes que pueden considerarse, las dificultades asociadas a sus tamaños, y cómo se implementan dinámicas y se analizan los resultados.

Para encontrar la distribución de contactos se necesitan datos, pero en general no son tan difíciles de conseguir. Una cajera de supermercado, un repositor, o un repartidor están en contacto cada día con muchas personas, y se puede estimar el número si se desea. Las líneas de colectivos saben cuántos pasajeros transportaron, y eso da información sobre los choferes. Un chico en su casa tiene pocos contactos, y los censos nos dan la proporción de hogares con una, dos, tres,... personas. Todo esto puede utilizarse para definir el grafo.

Respecto a la efectividad de las medidas para evitar el contagio, esto ya no es tan sencillo, sobre todo para enfermedades poco conocidas como el Covid-19. Exige un conocimiento mucho más profundo de cómo se producen los contagios, y cómo cambia la probabilidad de un contagio dada las medidas que se toman. Para la batería de medidas implementadas, uno de los mejores trabajos que estima estas probabilidades a partir de los datos de los últimos meses es el de Chen y Qiu (Chen & Qiu, 2020). En (Yabe et al., 2020) pueden verse las estimaciones obtenidas en Japón, si bien no es sencillo extrapolarlas de una sociedad que saluda con una reverencia, a otra donde la gente se da un abrazo y uno o dos besos.

Finalmente, para un ejemplo reciente de estos modelos sobre redes le recomiendo (Scabini et al., 2020), con el nivel de detalle que consideran, y en (Zhang et al., 2020) se consideran modelos SIR donde se consideran grupos etarios con parámetros de contacto estimados en Wuhan y Shangai. Todos estos artículos están disponibles libremente en la web, y le garantizarán unas cuantas horas de entretenimiento si decide explorar este universo de las simulaciones.

Agradecimientos: En primer lugar, le quiero agradecer a usted si me acompañó hasta acá, espero que la haya pasado bien. También a Los Simuladores (D'Elía et al., 2002), y confío en que no nos demanden por las frases utilizadas, no creo que se las imaginaran dentro de un artículo como este. Nos quedó sin usar una línea clásica, del archienemigo Franco Milazo cuando no lo seleccionan: *¡Saquen al chino!*, porque claramente no es esa la solución al Covid-19 (ya han salido trabajos respecto a la discriminación, vea por ejemplo (Pei & Mehta, 2020; Ziems, He, Soni, & Kumar, 2020)).

Quiero agradecerle a todos los simuladores con los que he trabajado en Exactas Programa, en especial a J. Crespo (B), E. Mocskos (C) e I. Caridi (F); también a mis alumnos y coautores con los cuales hemos estudiado diferentes modelos.

Por último, quiero agradecerle a Leandro Cagliero, Carlos D'Andrea, Juan Carlos Pedraza y Ricardo Podestá por sus comentarios.

Bibliografía

- Amster, P. (2020a). Qué modelo hay que tomar para seguir. *Medium*. Retrieved from <https://medium.com/@amster.pablo/qu%C3%A9-modelo-hay-que-tomar-para-seguir-2f9fd777c028>
- Amster, P. (2020b). Sobre modelos sir, o algo por el estilo. *Revista de Educación Matemática*, XXX.
- Bak, P., Chen, K., & Tang, C. (1990). A forest-fire model and some thoughts on turbulence. *Physics letters A*, 147(5-6), 297–300.
- Capanna, M. (2019). Critical asymptotic behaviour in the sir model. *Markov Processes and Related Fields*, 25(5), 763–796.
- Chen, X., & Qiu, Z. (2020). Scenario analysis of non-pharmaceutical interventions on global covid-19 transmissions. *Covid Economics: Vetted and Real-Time Papers, Centre for Economic Policy Research (CEPR)*, 46-47(7).
- D'Elía, F., Fiore, A., Peretti, D., Seefeld, M., & Szifron, D. (2002). *Los simuladores*. Retrieved from <https://telefe.com/los-simuladores> (Telefe)
- Drossel, B., & Schwabl, F. (1992). Self-organized critical forest-fire model. *Physical review letters*, 69(11), 1629.
- Kermack, W. O., & McKendrick, A. G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the royal society of london. Series A*, 115(772), 700–721.
- Kivela, M., Arenas, A., Barthelemy, M., Gleeson, J. P., Moreno, Y., & Porter, M. A. (2014, 07). Multilayer networks. *Journal of Complex Networks*, 2(3), 203-271. Retrieved from <https://doi.org/10.1093/comnet/cnu016> doi: 10.1093/comnet/cnu016
- Pei, X., & Mehta, D. (2020). #Coronavirus or #Chinesevirus?!: Understanding the negative sentiment reflected in tweets with racist hashtags across the development of covid-19. *arXiv preprint arXiv:2005.08224*.
- Rhodes, C., & Anderson, R. (1996). Power laws governing epidemics in isolated populations. *NATURE*, 381, 13.
- Scabini, L. F., Ribas, L. C., Neiva, M. B., Junior, A. G., Farfán, A. J., & Bruno, O. M. (2020). Social interaction layers in complex networks for the dynamical epidemic modeling of covid-19 in brazil. *arXiv preprint arXiv:2005.08125*.
- Yabe, T., Tsubouchi, K., Fujiwara, N., Wada, T., Sekimoto, Y., & Ukkusuri, S. V. (2020). Non-compulsory measures sufficiently reduced human mobility in japan during the covid-19 epidemic. *arXiv preprint arXiv:2005.09423*.
- Zhang, J., Litvinova, M., Liang, Y., Wang, Y., Wang, W., Zhao, S., ... Yu, H. (2020). Changes in contact patterns shape the dynamics of the covid-19 outbreak in

china. *Science*. Retrieved from <https://science.sciencemag.org/content/early/2020/05/04/science.abb8001> doi: 10.1126/science.abb8001

Ziems, C., He, B., Soni, S., & Kumar, S. (2020). Racism is a virus: Anti-asian hate and counterhate in social media during the covid-19 crisis. *arXiv preprint arXiv:2005.12423*.

JUAN PABLO PINASCO

Departamento de Matemática e IMAS, UBA-CONICET

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – Universidad de Buenos Aires

✉ jpinasco@dm.uba.ar

Recibido: 23 de mayo de 2020.

Aceptado: 12 de junio de 2020.

Publicado en línea: 29 de julio de 2020.

RECORTANDO POLÍGONOS, DE LAS TIJERAS A LA GENERALIZACIÓN

Luis Agustín Cárdenas Pena

RESUMEN. En este artículo se ilustra que un problema surgido en el Certamen “*El Número de Oro*” puede impulsar el entusiasmo matemático y llevar de forma natural a generalizaciones. Se investiga el problema, lo cual culmina redescubriendo un teorema de cierta generalidad con un atractivo estético, siempre manteniendo el tratamiento geométrico elemental.

ABSTRACT. This article illustrates how a problem posed in the contest “*El Número de Oro*” might impulse mathematical enthusiasm and induce addressing a more general question in a natural way. Studying the problem culminates on the rediscover of a general theorem with an aesthetically appealing, always keeping the geometric treatment elementary.

§1. De lo particular a lo general, el sendero dado por la curiosidad

La materia prima para estudiar matemáticas es la curiosidad, puesto que esta guía el descubrimiento. En este pequeño artículo queremos ejemplificar cómo una semilla de curiosidad en forma de problema, en este caso un desafío del Certamen “*El Número de Oro*”, motiva la deducción de proposiciones más generales. Tras resolver un problema particular muchas veces las incógnitas que surgen son ¿qué tan general fue el método? ¿qué tiene y qué falta para poder atacar un abanico más amplio de problemas? La enseñanza de matemáticas, tradicionalmente, pide respuestas. Pero creemos que tan importante como las respuestas, son las preguntas. Hacerse preguntas y cultivar la curiosidad es una parte fundamental del proceso de aprendizaje matemático. Las preguntas adecuadas son más iluminadoras que hallar respuestas a preguntas no tan adecuadas, y juegan un rol fundamental

Palabras claves: Disecciones, polígonos, número áureo, Wallace–Bolyai–Gerwien.

Keywords: Dissections, polygons, golden-ratio, Wallace–Bolyai–Gerwien.

en la creación de teorías. Finalmente, al examinar las respuestas halladas se pueden plantear nuevas preguntas, formándose así el círculo virtuoso que estimula la actividad matemática desde sus mismos orígenes.

1.1. La Olimpiada Matemática Argentina. La matemática es una disciplina que solo se entiende a través de su práctica, y la forma más pura de practicar matemáticas es resolver problemas matemáticos. Con el fin de aumentar la presencia de ésta en la sociedad se creó la Fundación Olimpiada Matemática Argentina, una entidad que organiza distintas competencias de matemática a través del país. Entre estas competencias, están la Olimpiada Matemática Ñandú, orientada a alumnos de educación primaria, la Olimpiada Matemática Argentina para alumnos de educación secundaria, y el certamen “*El Número de Oro*” el cual realiza dos competencias paralelas, una orientada a alumnos de educación universitaria de carreras relacionadas con la matemática, y la otra orientada a profesores de educación secundaria.

Estas competencias tienen una o más instancias en las cuales a cada participante se le da una lista de problemas y se evalúa el mérito de las soluciones para decidir quiénes pasan a la siguiente instancia, o en caso de ser la última, quiénes integran el podio y quiénes adquieren las menciones de honor.

Los problemas de estas competencias tienen como objetivo difundir matemáticas e intentar ser plurales no requiriendo conocimiento demasiado técnico. Lo que sí se requiere, es mucho entusiasmo y ganas de resolver, emplear pensamiento creativo y, como toda competencia, mucha práctica y entrenamiento.

Podemos comparar “*El Número de Oro*” con la Competencia Interuniversitaria Matemática Argentina (CIMA). La primera está organizada por la Fundación OMA y la segunda por la Unión Matemática Argentina. Ambas están dirigidas a alumnos universitarios de carreras afines a la matemática, la segunda más específicamente a alumnos de licenciatura en matemática, aunque no en forma excluyente. Ambas requieren pensamiento creativo, y en la CIMA más conocimiento del cuerpo teórico matemático. Cada año “*El Número de Oro*” es de una única instancia, donde se presentan diez problemas, de los cuales cada participante debe elegir tres para resolver.

1.2. Un problema particular. El siguiente problema fue el número 10 del Certamen “*Número de Oro*” para estudiantes del año 2016.

Problema 1.2.1. *Sea $ABCD$ un cuadrado de lado $1 + \varphi$, siendo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ el Número de Oro (también conocido como número áureo). Dividir el cuadrado en piezas que reacomodadas permitan obtener un rectángulo tal que uno de sus lados mida φ .*

Intentemos resolver el problema. Primero podemos cortar el cuadrado en un rectángulo de $\varphi \times (\varphi + 1)$, y un segundo rectángulo de $1 \times (\varphi + 1)$. Luego, para

continuar podemos recortar el segundo rectángulo en un rectángulo de $1 \times \varphi$ y un cuadrado de 1×1 . Luego se pueden pegar los rectángulos como indica la Figura 1.

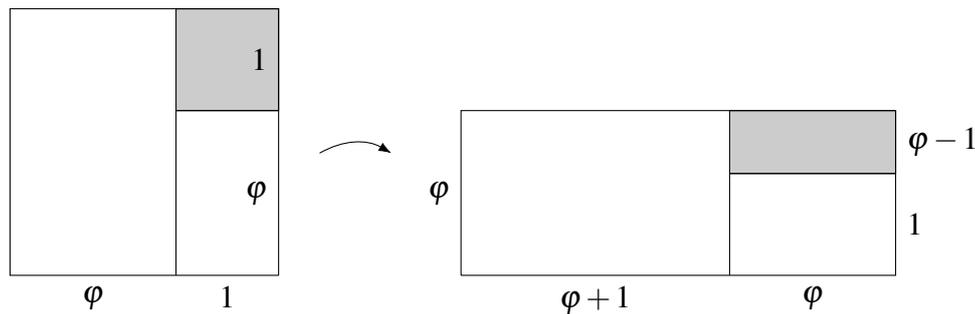


FIGURA 1. Primer paso.

El área gris del cuadrado indica el cuadradito que nos sobra para ensamblar, y el área gris del rectángulo indica el rectángulito el cual nos falta llenar.

Ahora, podemos partir el cuadrado de 1×1 en un rectángulito de $1 \times (\varphi - 1)$ y otro de $1 \times (2 - \varphi)$ (ya que $2 - \varphi + \varphi - 1 = 1$), luego se recorta el rectángulito de $1 \times (2 - \varphi)$ en un cuadradito de lado $2 - \varphi$ y un rectángulito de $(2 - \varphi) \times (\varphi - 1)$. Indicamos este segundo paso en la Figura 2.

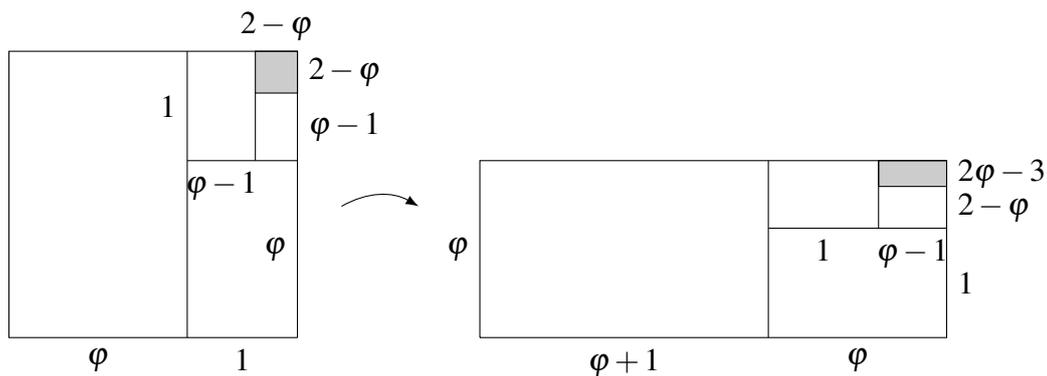


FIGURA 2. Segundo paso.

Podríamos llevar a cabo un tercer paso, pero esto está empezando a lucir mal, al parecer estamos repitiendo el mismo paso, de forma tal que estamos logrando reducir el problema en tamaño sin reducirlo en dificultad. Si pudiésemos partir el cuadrado en infinitas piezas, este proceso serviría, pero no es lo que nos pide el enunciado del problema.

Si retrocedemos al primer paso, el problema radica en que convertir un cuadrado de 1×1 a un rectángulo de $\varphi \times \varphi - 1$ es equivalente al problema original ya que $\frac{\varphi}{\varphi+1} = \varphi^{-1}$ y $\frac{1}{\varphi+1} = \varphi - 1$ como podemos verificar a continuación:

$$\varphi^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \varphi + 1$$

y de forma similar

$$\varphi^{-1} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \frac{1 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \varphi - 1.$$

Como en el fondo se trata de un problema de proporciones, resolver el problema con el cuadrado pequeño es exactamente igual de difícil que con el cuadrado original. En vista de esto, tendremos que ser un poco más metódicos con el fin de resolver este problema.

1.3. Un primer ataque al problema inspirado en una demostración geométrica del teorema de Pitágoras. Como ya vimos en la discusión anterior, éste realmente se trata de un problema de proporciones. Así que para facilitar los cálculos, vamos a resolverlo partiendo de un cuadrado de lado 1, en cuyo caso el problema correspondiente es hallar un rectángulo de dimensiones $\varphi^{-1} \times \varphi$, donde el φ que buscábamos originalmente se corresponde con el lado de longitud φ^{-1} , y el lado de longitud $\frac{(\varphi+1)^2}{\varphi}$ con el de longitud φ .

Marcando un punto a distancia a de cada vértice respetando orientación, y luego uniéndolos, se corta el cuadrado original en cinco piezas; un cuadrado de lado $\sqrt{(1-a)^2 + a^2}$, y cuatro triángulos con hipotenusa $\sqrt{(1-a)^2 + a^2}$ y catetos $1-a$ y a , como se ve en la Figura 3.

La función $\sqrt{(1-x)^2 + x^2}$ siempre es menor que 1 debido a que si x está en el intervalo $(0, 1)$ se tiene que x es positivo y $1-x$ es negativo, por lo que

$$(1-x)^2 + x^2 = 1 - 2x + 2x^2 = 1 - 2x(1-x)$$

es menor o igual que 1. Por ende los puntos $x = 0$ y $x = 1$ son máximos ya que la función vale 1 en estos puntos. El único punto en el que la derivada de la función es 0 es $x = 1/2$, luego este ha de ser un mínimo puesto que se encuentra ubicado entre dos máximos. La función evaluada en este mínimo vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Como la función es continua en $[0, 1]$ y vale 1 en los extremos de dicho intervalo, su imagen es $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$. Dicho mínimo puede calcularse por medios más elementales siendo que \sqrt{x} es una función creciente, y calculando el vértice de la parábola. Este proceso puede observarse en la Figura 3.

Podemos cortar dos de estos triángulos, para así poder formar rectángulos con un lado de longitud h , por lo que con los cuatro triángulos obtenemos dos rectángulos. Describimos el proceso más detalladamente y apoyándonos en la Figura 4: Tomamos un par de triángulos, y cortamos el primer triángulo por la perpendicular a su lado más largo que pasa por el vértice opuesto a ésta, indicada en rojo. Luego pegamos el triangulito cuya hipotenusa está marcada en azul con el cateto en azul del segundo triángulo, y el triangulito cuya hipotenusa está marcada en verde con el cateto marcado en verde del segundo triángulo. Resultando así un

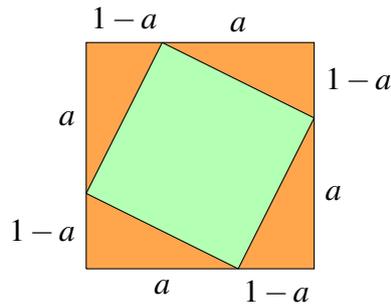


FIGURA 3. Corte Pitágoras

rectángulo con un lado de la misma longitud que la hipotenusa de los triángulos, es decir, de $\sqrt{(1-a)^2 + a^2}$.

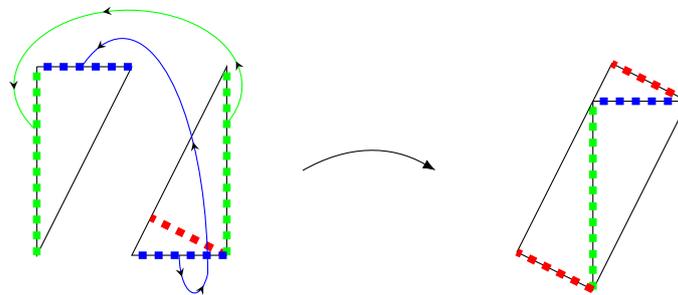


FIGURA 4. De dos triángulos a un rectángulo

A continuación se ensamblan los dos rectángulitos y el cuadrado para obtener el rectángulo de las dimensiones buscadas. Nuestro rectángulo queda como en la Figura 5

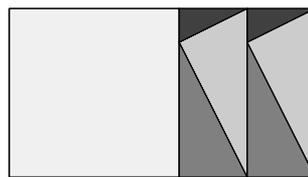


FIGURA 5. Rectángulo ensamblado.

Dado que la hipotenusa del triángulo se convierte en el lado de nuestro rectángulo, se tiene $l = h = \sqrt{(1-a)^2 + a^2}$, luego $l \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ para todo $a \in (0, 1)$. Este método solo sirve para los casos en los que l está contenido en tal intervalo, no nos sirve para nuestro problema ya que re-escalando el cuadrado de lado $\varphi + 1$ a uno de lado 1, obtener un rectángulo de lado φ se corresponde con obtener un lado de longitud

$$0,618 \approx \frac{\varphi}{\varphi+1} < \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707,$$

por lo que la longitud de nuestro problema no está en el intervalo y no podemos generarla con este método. Sin embargo esta idea nos servirá en un contexto más general. En el resto del artículo llamaremos “corte Pitágoras” a la descomposición del cuadrado original en un cuadrado y cuatro triángulos rectángulos según la Figura 3.

Como siguiente paso, analizamos las dimensiones de nuestro cuadrado y el rectángulo objetivo en busca de pistas, por lo que volveremos a pensar en un cuadrado de lado ϕ .

Tenemos un cuadrado de $\phi + 1$ de lado y queremos partirlo en piezas de modo que reacomodadas formen un rectángulo con uno de los lados igual a ϕ .

A continuación calculamos el otro lado del rectángulo deseado. Cuando se recortan y reacomodan piezas sin superponerlas el área se conserva, tenemos que el otro lado es igual a $\frac{(\phi+1)^2}{\phi}$. Considerando que $\phi^2 = \phi + 1$, obtenemos

$$(1.1) \quad (\phi + 1)^2 = \phi^4 = \phi^3 \cdot \phi.$$

Por lo que si queremos que un lado del rectángulo mida ϕ el otro ha de medir $\phi^3 = 2 + \sqrt{5}$.

Queremos hallar un rectángulo de dimensiones $(2 + \sqrt{5}) \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})$.

Busquemos los cuatro rectángulos correspondientes al desarrollo de tal producto. Es decir, un rectángulo A de $2 \times \frac{1}{2}$, un rectángulo B de $\sqrt{5} \times \frac{1}{2}$, un rectángulo C de $2 \times \frac{\sqrt{5}}{2}$ y un rectángulo D de $\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{2}$. Esta división se puede ilustrar en la Figura 6.

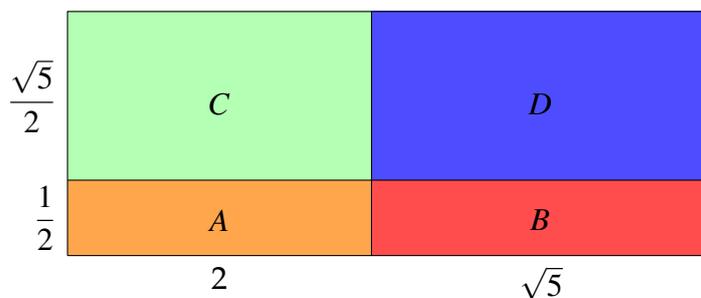


FIGURA 6. El rectángulo al cual queremos llegar.

Podemos dividir nuestro cuadrado de partida, de lado $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, de la siguiente forma: lo cortamos a $\frac{3}{2}$ de cada lado en las dos direcciones paralelas a sus lados. Con lo cual nos quedan cuatro trozos, un cuadrado E de $\frac{3}{2}$ de lado, dos rectángulos congruentes F y G de dimensiones $\frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{3}{2}$ y $\frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2}$ respectivamente y un cuadrado H de $\frac{\sqrt{5}}{2}$ de lado. Se ilustra en la Figura 7.

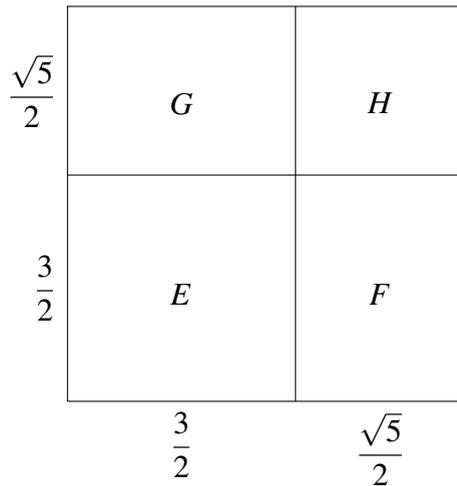
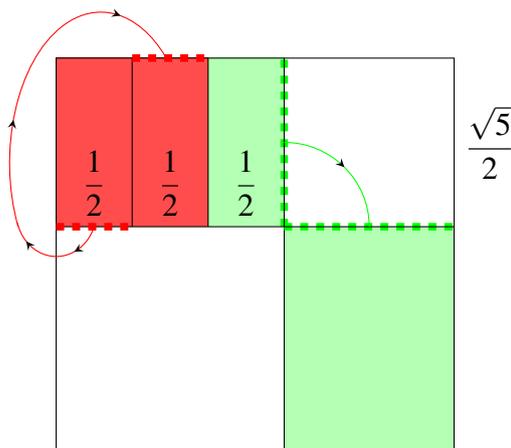


FIGURA 7. Rectángulo de partida.

Usando F y un tercio de G podemos obtener fácilmente el rectángulo C . El resto de G es un rectángulo de $1 \times \frac{\sqrt{5}}{2}$ el cual partido a la mitad y acomodado nos sirve para formar el rectángulo B .



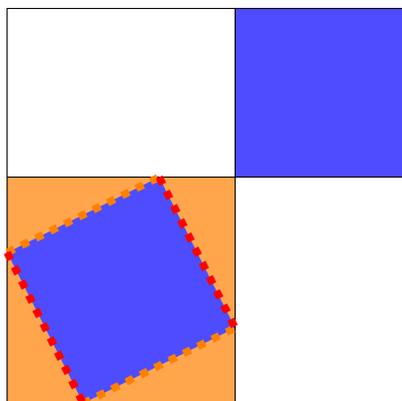
Las líneas punteadas del mismo color corresponden a los lados sobre los cuales se pegan los polígonos para obtener el rectángulo B en rojo y el rectángulo C en azul.

FIGURA 8. Corte sobre los dos rectángulos obtenidos del cuadrado original.

Del cuadrado H obtenemos la mitad del rectángulo D . Falta la otra mitad, otro cuadrado de $\frac{\sqrt{5}}{2}$ de lado. Lo obtendremos del cuadrado E .

Al cuadrado E le hacemos 4 cortes, dividiéndolo en 5 piezas empleando el primer paso del método del corte Pitágoras. Marcando sus lados en los tercios, obtenemos un cuadrículado, luego partimos del tercio de cada lado a los dos tercios del lado siguiente, en sentido horario (o antihorario). Como le sustrajimos cuatro triángulos rectángulos de lados $\frac{1}{2}$ y 1 , cuyas hipotenusas son $\frac{\sqrt{5}}{2}$, nos queda un

cuadrado de lado $\frac{\sqrt{5}}{2}$ en el centro con lo que completamos D . Los cuatro triángulos que tenemos son de lados 1 y $\frac{1}{2}$ por lo cual es fácil reacomodarlos para obtener nuestro rectángulo de 2×1 . El proceso se ilustra en las figuras 9 y 10.



Los triángulos naranjas se unen de a pares mediante los pares de líneas naranjas/rojos respectivamente, es decir se unen los pares de triángulos opuestos. Los cuadrados azules se unen en los bordes.

FIGURA 9. Corte sobre los dos cuadrados obtenidos del cuadrado original.

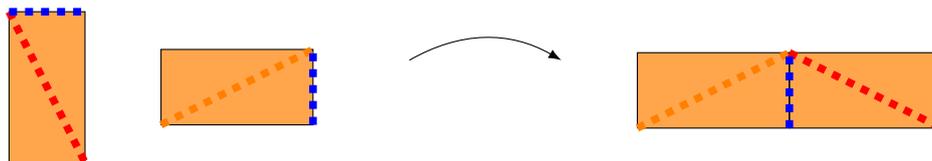


FIGURA 10. Unión de los dos rectángulos naranjas en un rectángulo de dimensiones 2×1 .

Pintamos los polígonos E, F, G y H con los colores rojo, azul, verde y naranja, respectivamente. Luego, cuando ensamblamos el rectángulo objetivo, el resultado luce como se ve en la Figura 11.

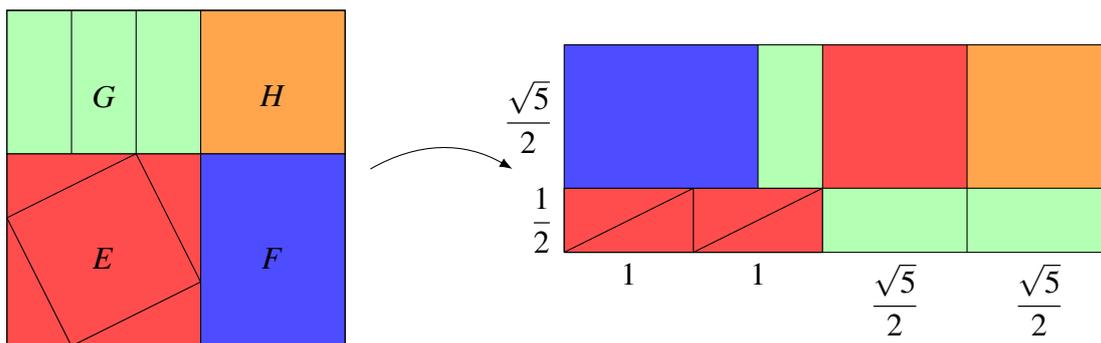


FIGURA 11. Solución propuesta al problema planteado.

De esta manera hemos resuelto el problema original del certamen, y además ilustramos una idea a la cual aún no le sacamos mucho provecho, el método del corte Pitágoras el cual nos permite transformar o 'estirar' hasta cierto punto un

cuadrado en un rectángulo. Para la generalización necesitaremos el concepto de figuras equidescomponibles.

1.4. Una primera generalización. El método del corte Pitágoras no bastó para solucionar el problema original puesto que utilizamos también piezas rectangulares para exhibir la solución. Para esto nos apoyamos fuertemente en la expresión algebraica de φ , y no se ve una clara generalización de este método ni siquiera para números muy cercanos a φ . ¿Qué pasaría con un número trascendente?¹

Claramente, para generalizar el problema de transformar un cuadrado en un rectángulo de la misma área pero con un lado arbitrario a , hay que buscar una forma más sistemática, la cual no haga uso de la expresión algebraica de las proporciones. Con fin de facilitar tal empresa, introducimos la siguiente definición.

Definición 1.4.1 (Polígonos equidescomponibles). Dos polígonos A y B se dicen *equidescomponibles*, si A se puede cortar, con cortes rectos y en finitas piezas, y luego reacomodarlas de forma tal que formen B , sin que en este proceso ninguna de las piezas formadas se superponga.

La relación dada por “ P y Q son equidescomponibles” es una relación de equivalencia, es decir:

- La relación es reflexiva, ya que todo polígono es sí mismo con 0 cortes (y si esto no convence al lector, basta con cortar a un polígono en dos trozos y volverlos a unir de la misma forma en la que se los recortó para recuperar el polígono).
- La relación es simétrica. Si de P se puede armar Q , entonces de Q se puede armar P . Basta con recortar P , armar Q a partir de éste, y revertir el proceso (por donde se pegaron las piezas de P , se lo corta a Q , y luego por donde se cortaron las piezas de Q se lo pega a P).
- La relación es transitiva. Si de P se puede armar Q , y de Q se puede armar R , entonces de P se puede armar R . Basta con armar Q desde P , y luego cortarlo nuevamente para armar R . Las piezas de Q estaban formadas por piezas de P , por lo que cuando con piezas de Q armemos R , estaremos armando R con piezas de P .

El método del corte Pitágoras fue, en cierto sentido, un método local. Ya que nos da soluciones para el intervalo $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$.

¹Un número trascendente es un número el cual no es raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros. Esto implica, entre otras cosas, que el número no puede expresarse mediante sumas, productos y raíces a partir de los números racionales. Debido a que estos son difíciles de escribir, el lector puede estar familiarizado con pocos de estos números. Dos ejemplos famosos son e y π , pero también sucede con los logaritmos naturales de los números enteros mayores que 2.

Un método “global”² pero impreciso, podría ser partir un rectángulo de dimensiones $a \times b$ en dos rectángulos de dimensiones $a \times \frac{b}{2}$ y unirlos de forma tal que el rectángulo resultante tenga dimensiones $2a \times \frac{b}{2}$. Iterando ese proceso, de un cuadrado de 1×1 podemos obtener rectángulos de dimensiones $\frac{1}{2^n} \times 2^n$. Deseamos combinar este método global aproximado. Si aplicamos el método del corte Pitágoras y luego aplicamos el proceso de partir a la mitad n veces, entonces llegamos a un rectángulo de dimensiones

$$\frac{a}{2^n} \times \frac{2^n}{a},$$

con $a \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$. Por ende este método solo nos sirve para hallar rectángulos con un lado ℓ en el conjunto

$$(1.1) \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right]$$

Es así que, si deseamos generalizar el problema a un ℓ cualquiera en $(0, 1]$, hace falta refinar el método global, o refinar el método local. Elegiremos refinar el método global (cualquiera de las dos cosas es posible, solo ilustramos un posible camino de deducción).

Lema 1.4.1. *Dado un cuadrado de lado 1 y un rectángulo de lados ℓ y $\frac{1}{\ell}$, estos son equidescomponibles.*

Discusión de ideas.

Para orientarnos en el problema, como primer paso, podemos notar que el rectángulo ha de tener área 1 y lados ℓ y $\frac{1}{\ell}$, por lo que con solucionar el problema para $\ell < 1$ éste ya estará resuelto para $\ell > 1$ ya que en ese caso $\frac{1}{\ell} < 1$. El caso $\ell = 1$ es altamente trivial (nos quedamos con el cuadrado original).

Caso $\ell \in (0, 1)$. La idea que usaremos para completar al método Pitágoras, es la de realizar $n - 1$ cortes equidistantes horizontales y $n - 1$ cortes equidistantes verticales al cuadrado original, de forma tal que nos queden n^2 cuadraditos de dimensiones $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n}$. Luego reacomodar estos n^2 cuadraditos en k filas y m columnas para formar un rectángulo cuyas dimensiones sean $\frac{m}{n} \times \frac{k}{n}$. Como la cantidad total de cuadraditos se mantiene invariante, para esto necesitamos que se cumpla la igualdad $n^2 = k \cdot m$.

Por simplicidad buscamos un n pequeño para el cual esto suceda, se tiene que si k y m tienen un factor primo en común p , entonces existen naturales k', m' tales que $k = p \cdot k'$ y $m = p \cdot m'$, por lo que $n^2 = k' \cdot m' p^2$, luego $p|n$ por lo que existe n' tal

²Global en el sentido de que nos permite acercarnos a cualquier número del intervalo achicando el error relativo debajo de cierta cota, pero no nos permite terminar de acercarnos al número una vez que estemos en dicho entorno.

que $n = p \cdot n'$ y $(n')^2 = k' \cdot m'$. Por ende, para hallar los números lo más pequeños posibles los buscamos coprimos, es decir, sin factores primos en común.

En vistas de esto, veamos que si $n^2 = k \cdot m$ se tiene que tanto k como m han de ser cuadrados de algún número natural. Sea p un número primo que cumpla $p \mid k$ es decir existe k' natural tal que $k = p \cdot k'$. Como $n^2 = k \cdot m$ se tiene que $p \mid n^2$ por ser p número primo. Luego, como $p \mid n^2 = n \cdot n$, se tiene que $p \mid n$. Luego $n = p \cdot n'$ y por ende $p^2 \cdot (n')^2 = p \cdot k' \cdot m$, tras dividir por p obtenemos $p \cdot (n')^2 = k' \cdot m$. Luego, como p es primo o bien $p \mid k'$ o bien $p \mid m$. Si $p \mid m$ contradecimos que k y m no sean coprimos, ha de ser $p \mid k'$, es decir $k' = p \cdot k''$ para algún k'' número natural. Por lo tanto $k = p^2 \cdot k''$ por lo que $p^2 \mid k$. Con esto demostramos que todos los factores primos de k aparecen elevados al cuadrado, lo cual implica que k es un cuadrado.

Nuestra estrategia tiene como segundo paso, convertir cada uno de estos $k \cdot m$ cuadraditos en rectángulos deformándolos por un factor $c \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ como se ilustra en el método de Pitágoras. Luego estos $k \cdot m$ rectangulitos formarán un rectángulo de lados

$$\frac{k}{n} \cdot c \times \frac{m}{nc} \quad \text{o} \quad \frac{k}{nc} \times \frac{m}{n} \cdot c$$

según en qué dirección se realice. Por ende, si para cualquier $\ell \in (0, 1)$ logramos hallar una terna (n, k, m) tal que $n^2 = k \cdot m$ y $\ell = \frac{k}{n}c$ habremos complementado el método de Pitágoras para poder lidiar con un ℓ cualquiera.

Si tuviésemos $\ell = \frac{3}{5}$ podríamos usar $n = 6, k = 4, m = 9$, dado que tomando $c = \frac{9}{10}$ obtendríamos un rectángulo de dimensiones $(\frac{4}{6} \cdot \frac{9}{10}) \times (\frac{9}{6} \cdot \frac{10}{9}) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{3}$.

Pero si $\ell = \frac{7}{10}$ entonces con la misma elección de n, k y m tendríamos que no podemos reacomodarlo de forma completamente análoga ya que no existe $c \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ tal que $\frac{7}{10} = \frac{4}{6}c$. Por ende, necesitamos mostrar que existe una forma sistemática de hallar n, k, m .

Si hallamos números n, m, k tales que $n^2 = m \cdot k$, con el método ya ilustrado podemos resolver el problema para todo $\ell \in [\frac{k}{m} \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{k}{n}]$. Por ende, una posible solución es hallar una familia de ternas tales que para todo $\ell \in (0, 1)$ existan números n, m, k en tal familia tales que $\ell \in [\frac{k}{m} \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{k}{n}]$.

Para simplificar tal trabajo, hallaremos números s, t, u tales que $s^2 = t \cdot u$ de forma tal que nuestra familia de ternas sea el conjunto $\{(s^i, t^i, u^i) : i \in \mathbb{N}\}$, es decir el conjunto formado por las ternas correspondientes a las i -ésimas potencias de s, t y u . Como $s^2 = t \cdot u$ implica que $(s^i)^2 = (s^2)^i = (t \cdot u)^i = t^i \cdot u^i$, la relación entre s, t y u sigue cumpliéndose para s^i, t^i y u^i .

Como si $t < s$ se tiene que $\frac{t^i}{s^i}$ puede estar tan cerca del cero como queramos, entonces nuestro método sirve para números arbitrariamente cercanos al 0, ya

que cubrimos los intervalos

$$(1.2) \quad \bigcup_{i=0}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{2} t^i}{2 s^i}, \frac{t^i}{s^i} \right]$$

Pero esto podría no bastar ya que estos intervalos podrían contener huecos en el medio, por ejemplo, un ℓ muy grande para estar en el segundo intervalo y muy pequeño para estar en el primero, es decir $\ell \in (\frac{t}{s}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Ya presentadas las ideas, el procedimiento entero luce como sigue.

Demostración.

Emplearemos intervalos que se solapan, para esto basta con que $\frac{t}{s} > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Como también necesitamos que t, u sean cuadrados podemos elegir a $s = 6^2 = 36$ y $t = 7^2 = 49$ los cuales cumplen con esto.

Sea $\ell \in (0, 1)$. Existe un número natural $m \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{6^2}{7^2})^m = (\frac{36}{49})^m < \ell$, ya que como $0 < \frac{36}{49} < 1$, $(\frac{36}{49})^m$ se puede hacer tan chico como se quiera elevándolo a un número lo suficientemente grande (en el lenguaje del cálculo infinitesimal, se dice que la sucesión $(\frac{36}{49})^m$ converge a 0 conforme m tiende a infinito). Además, existe un primer número natural que cumple esto (pues el conjunto de los números naturales es bien ordenado). Luego, existe un m natural para el cual

$$(\frac{36}{49})^m < \ell < (\frac{36}{49})^{m-1}$$

Llamamos $n = m - 1$ para facilitar la notación. Como $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{36}{49}$, se tiene que si

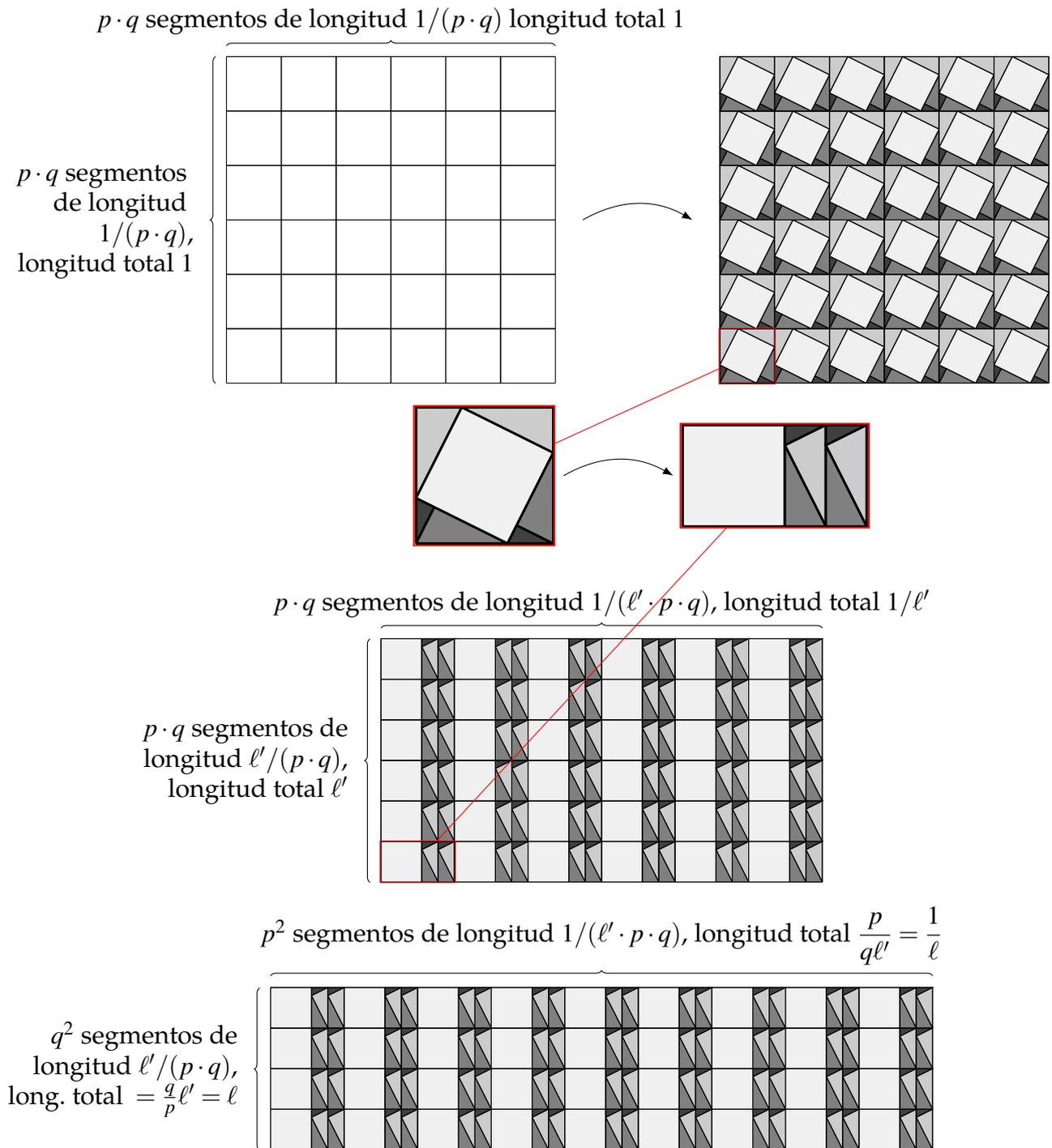
$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{36}{49})^n < (\frac{36}{49})^{n+1} < \ell < (\frac{36}{49})^n,$$

luego $\ell \in [\frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{36}{49})^n, (\frac{36}{49})^n]$; por lo que $\ell (\frac{49}{36})^n \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$. Llamaremos $\ell' = \ell (\frac{49}{36})^n$.

Para armar un rectángulo de lado ℓ llevaremos a cabo el siguiente procedimiento: Primero partiremos nuestro cuadrado en $(36 \cdot 49)^n$ cuadraditos de lado $\frac{1}{(6 \cdot 7)^n}$. Una vez hecho esto, por el procedimiento que usamos para el cuadrado de lado uno, escalado a estos cuadraditos, podemos hacer rectángulitos de lados $\frac{1}{\ell' \cdot (6 \cdot 7)^n}$ y $\frac{\ell'}{(6 \cdot 7)^n}$, a los cuales llamaremos base y altura respectivamente para distinguirlos y orientarnos geoméricamente. Una vez hecho esto, ordenamos los $(6 \cdot 7)^{2n}$ rectángulitos en 7^{2n} columnas y 6^{2n} filas, por lo que la base quedará de $\frac{1}{\ell'} \frac{1}{(6 \cdot 7)^n} \cdot 7^{2n} = \frac{1}{\ell'} (\frac{7}{6})^{2n} = \frac{1}{\ell'}$ y la altura de dimensiones $\ell' (\frac{7}{6})^{2n} \cdot 6^{2n} = \ell' (\frac{36}{49})^n = \ell$.

El procedimiento se ilustra en la Figura 12. Para simplificar el esquema, ilustramos el caso en el cual $\ell \in [\frac{2}{3} \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2}{3}]$ para necesitar solo 36 cuadraditos, correspondiéndose a $q = 2$ y $p = 3$.

Corolario 1.4.2. *Dado un cuadrado de lado a , se puede formar un rectángulo de lados ℓ y $\frac{a^2}{\ell}$. Basta con escalar los ejes por un factor de a y llevar a cabo el procedimiento empleado en la demostración del lema.*



Se divide el cuadrado en n^2 cuadraditos. Luego, se emplea el procedimiento ilustrando en las figuras 3 y 4 para transformar cada cuadradito en un rectángulito de ciertas proporciones. Finalmente se puede ensamblar un rectángulo de $p^2 \times q^2$ rectangulitos.

FIGURA 12. Resumen visual de todos los pasos del proceso.

Ya casi estamos en condiciones de generalizar la idea del problema a su máxima expresión, este resultado se conoce como teorema Wallace–Bolyai–Gerwien.

1.5. La última generalización, el Teorema de Wallace Bolyai–Gerwien. Está claro que si dos polígonos son equidescomposables, entonces estos poseen la misma área ya que las operaciones de recortar y re-ensamblar sin superposiciones conservan el área. Resulta ser, que el hecho de que dos polígonos posean la misma área es una condición necesaria y suficiente para que estos sean equidescomposables.

Teorema 1.5.1 (Wallace–Bolyai–Gerwien). *Dados dos polígonos convexos A y B ambos de igual área, se tiene que A y B son equidescomponibles.*

Demostración. Primero, comprobemos que todo polígono convexo se puede triangular, es decir, se puede descomponer en triángulos.

Demostrémoslo por inducción sobre n . Si $n = 3$ tenemos un triángulo el cual claramente es una triangulación.

Sea C un polígono de n lados. Veamos que podemos descomponerlo en un triángulo y un polígono de $n - 1$ lados en el cual emplearemos el paso inductivo. Dado un vértice v , éste pertenece a dos aristas. Estas dos aristas han de tener otro vértice cada una, llamémoslos u y w . Como el polígono C es convexo, este contiene al triángulo uvw y se puede remover el triángulo uvw del polígono C de la siguiente forma seleccionando los dos vértices adyacentes a v y cortando al polígono mediante la línea que los une, obteniendo así un polígono cuyos vértices son los mismos que el inicial, pero sin v , este proceso se ilustra en la Figura 13.

De esta forma obtenemos un nuevo polígono el cual tiene todos los vértices del anterior salvo v y cuyo conjunto de aristas está formado por la arista con uw y todas las aristas del polígono anterior que no son adyacentes a v , es decir agregamos la arista uv y sustraemos las aristas uv y vw al conjunto de aristas de nuestro polígono original. De esta forma ahora tenemos un triángulo y un polígono de $n - 1$ lados, de forma que empleando el método sucesivamente triangulamos el polígono tras $n - 3$ pasos.

El teorema se puede generalizar fácilmente a polígonos no convexos, basta con demostrar que todo polígono tiene al menos un vértice en común con su cápsula convexa (es decir, el menor polígono convexo que lo envuelve, el que se formaría si rodeamos nuestro polígono con una bandita elástica), y el paso inductivo lo llevamos a cabo eligiendo un vértice v que esté tanto en el polígono dado como en su cápsula convexa. Se deja de ejercicio para el lector verificar que todo polígono tiene un vértice en común con su cápsula convexa.

A partir de un triángulo cualquiera se pueden obtener dos triángulos rectángulos, el procedimiento es simple, basta con partir al triángulo original en dos mediante un corte perpendicular a un lado el cual pase por el vértice opuesto a éste,

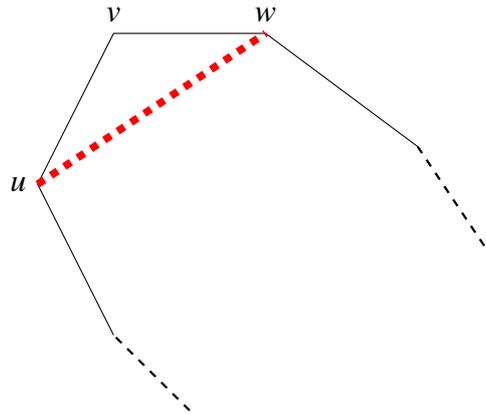


FIGURA 13. Paso inductivo de triangulación en polígono convexo.

este corte pasará por la línea que suele definirse como altura del triángulo respecto de ese lado. Para un triángulo agudo, puede elegirse cualquier lado. El lector escéptico puede notar que en el caso de los triángulos obtusos este método puede fallar al quedar la línea de corte fuera del triángulo, por lo cual hay que tener cuidado a la hora de elegir el lado. En este caso se emplea la altura del lado opuesto al ángulo obtuso, de forma tal que la altura queda dentro del triángulo. Una vez obtenidos los dos triángulos rectángulos, se procede a construir un rectángulo mediante los siguientes pasos. Se emplea de base del triángulo el lado opuesto a su mayor lado (para evitar que nuestra base forme parte de un ángulo obtuso y el corte quede fuera del triángulo). Luego, se parte el triángulo mediante una paralela a la base, a la mitad de la altura, marcada en azul. Una vez partido en un trapecoide y un triángulo, se parte al triángulo por una perpendicular a su base que pasa por el vértice opuesto. Finalmente se unen estos dos triángulos al trapecoide para así obtener un rectángulo.

La construcción ilustrada en la Figura 14.

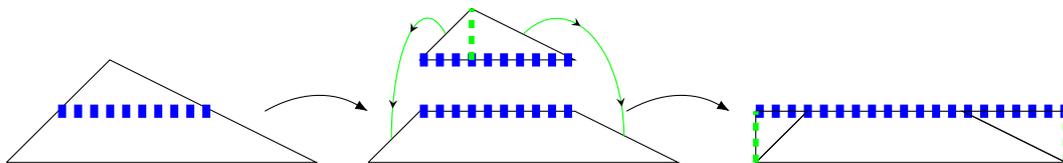


FIGURA 14. Construcción de un rectángulo a partir de un triángulo arbitrario.

Finalmente, a cada uno de los rectángulos obtenidos lo convertimos en un rectángulo de la misma área con un lado de longitud 1 (cualquier longitud fija sirve, elegimos 1 por conveniencia). Luego, podemos unir todos los rectángulos obtenidos dejando a los lados de longitud 1 paralelos para obtener un rectángulo cuyos lados son de longitudes 1 y a . Como el proceso puedo aplicarlo tanto con A como

con B , y señalamos que la relación ‘puede descomponerse en la forma indicada para formar el otro polígono’ es de equivalencia, concluimos la demostración. \square

§2. Incógnitas adicionales

Como planteamos inicialmente, al encontrar una respuesta, ésta es tan emocionante como las preguntas que sugiere. Ya sabemos que dados dos polígonos P y Q , P se puede descomponer con finitos cortes para formar Q si y solo si el área de P es igual al área de Q . El Teorema 1.5.1 nos asegura que si los dos polígonos tienen la misma área, esto puede realizarse. Por otro lado el área de un polígono no cambia si se lo recorta en varios polígonos y se lo vuelve a pegar sin superposiciones, por esta razón si a partir de un polígono P puede obtenerse un polígono Q , entonces P y Q han de tener la misma área.

Ahora, con solo observar la Figura 13, queda claro que el procedimiento empleado en la demostración está lejos de ser óptimo, pues se requieren muchísimos cortes. Sería entonces interesante dar con una fórmula o un algoritmo que, dados dos polígonos P y Q de igual área, nos diga cuál es la mínima cantidad de cortes que se necesitan para obtener uno a partir del otro. Esta es una incógnita que aún no tiene respuesta.

Para obtener mejores cotas, se necesita encontrar procedimientos metódicos para descomponer polígonos, los cuales empleen una menor cantidad de polígonos.

En 1924, el matemático polaco-americano Alfred Tarski atacó este problema y dio una cota inferior para el número de cortes necesarios cuando P y Q son polígonos convexos. Si llamamos $\sigma(P, Q)$ a la cantidad de triángulos en las que hemos de descomponer P para formar Q , se tiene que

$$\sigma(P, Q) \geq \frac{d(P)}{d(Q)}$$

donde $d(X)$ nota al diámetro del polígono X .

En el caso de que P_x sea un rectángulo cuyos lados sean $a \cdot x$ el mayor y $a \cdot \frac{1}{x}$ el menor, y Q un cuadrado de lado a , el teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien nos dice que los polígonos son equidescomponibles, y Tarski halló una cota superior para $\sigma(P_x, Q)$ la cual está dada por

$$\sigma(P_x, Q) \leq 2 + \left\lceil \sqrt{x^2 - 1} \right\rceil$$

Dado que P_x es congruente con $P_{\frac{1}{x}}$, se tiene que $\sigma(P_x, Q) = \sigma(P_{\frac{1}{x}}, Q)$, luego reemplazando x por $\frac{1}{x}$ se obtiene

$$\sigma(P_{\frac{1}{x}}, Q) \leq 2 + \left\lceil \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \right\rceil$$

Una anécdota interesante sobre el tema, que no podemos dejar de mencionar, es que Tarski publicó estos resultados en revistas orientadas hacia profesores de secundario, en un esfuerzo por mejorar la instrucción de matemáticas en Polonia, e invitaba a los alumnos a participar en la resolución de problemas. El profesor de secundario Henryk Moeseen publicó en 1932 un artículo en el cual se mejoraba la cota dada por Tarski.

La cota dada por Henryk Moeseen es

$$\sigma(P_x, Q) \leq \lceil x \rceil + 1$$

De hecho, Henryk demostró que $\sigma(P_x, Q)$ es igual a $\lceil x \rceil + 1$ o a $\lceil x \rceil$ cuando $x \geq 1$, y demostró un caso específico para el cual $\sigma(P_x, Q) = \lceil x \rceil + 1$.

Finalmente, Tarski halló el valor exacto de $\sigma(P_x, Q)$ para $1 \leq x \leq 2$. El autor de este artículo desconoce si se han logrado mayores progresos en este aspecto.

Esta apasionante historia puede hallarse con mayor detalle en el libro sobre Tarski (McFarland, McFarland, Smith, y Grattan-Guinness, 2014).

Todas estas preguntas y resultados van en la dirección de contar la cantidad de piezas, pero también podríamos buscar generalizar el resultado a más dimensiones ¿Dados dos poliedros P y Q del mismo volumen, se puede descomponer P en Q con finitos cortes?

Este problema fue el tercer problema de Hilbert, y fue respondido negativamente por Max Dehn en 1900.

La respuesta es negativa, pero es muy interesante y profunda. Como es usual con los problemas de imposibilidad geométrica, la demostración fue realizada empleando el álgebra; Dehn definió una propiedad de los poliedros, la cual es invariante mediante estas descomposiciones. Es decir, si dos poliedros P y Q son equivalentes, entonces tienen el mismo invariante de Dehn. Finalmente, mostró que el cubo y el tetraedro poseen distintos invariantes de Dehn, por lo cual es imposible descomponer uno y con esas piezas recomponer el otro.

Como comentario adicional orientado hacia aquellos cuya curiosidad geométrica excede el mundo euclídeo, el problema de equidescomposición tridimensional sigue abierto para las geometrías elípticas e hiperbólica, pero comentar sobre éstas está fuera del alcance de este artículo.

§3. Comentarios finales

En este artículo intentamos ilustrar el proceso de descubrimiento matemático manteniéndonos fieles al espíritu del Certamen “El Número de Oro”. Si bien el autor no tuvo la restricción de tiempo propia del examen, decidió no consultar bibliografía durante la re-deducción del Teorema WBG.

Ya sea por valor estético o pedagógico, la bibliografía matemática muchas veces expone argumentos elegantes que pueden esconder la intuición detrás del descubrimiento. Consideramos que es educativo mostrar una obra con los andamios aún colocados. Consideramos que así se puede recrear la sensación de cuarto oscuro que se tiene cuando se ataca un problema en solitario, por supuesto siempre se invita al lector a intentar crear sus propios argumentos ya que esto es esencial para aprender matemáticas. Estas últimas dos secciones fueron elaboradas consultando bibliografía.

En (Hartshorne, 2000), se emplea un mejor método local por lo cual no hace falta refinar el método global. La proposición 24.4 de tal libro dice:

Proposición 3.0.1. *Dado un rectángulo $ABCD$, y dado un segmento AE tal que $AB < AE < 2AB$, el rectángulo $ABCD$ es equidescomponible a un rectángulo con lado AE .*

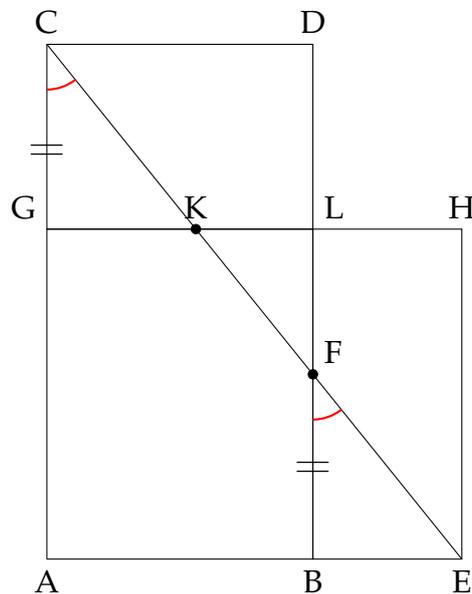


FIGURA 15. Ilustración del método 'local' más amplio para rectángulos.

En la Figura 15 se ilustra el procedimiento, sobre el rectángulo $ABCD$ se ilustra el rectángulo $AEHG$ con E en la dirección AB y G en la dirección AC . Del rectángulo $ABCD$ se corta el triángulo CGK y se lo pega sobre el lado BD de forma tal que G coincida con B y E este en la semirrecta AB . Luego se traslada el triángulo FDC de forma tal que F coincida con E y C quede en la semirrecta que originalmente era EC .

Después de conocer estos resultados, se puede pensar en modificar nuestra demostración mejorando el método local en lugar del global. Para lograr cubrir todo el intervalo $(0, 1]$ en lugar de $(1, 1)$, basta con notar que mientras que si bien estábamos pensando en el lado menor cuando enunciamos el método del corte Pitágoras, si pensamos en el lado más grande, éste está en $[0, \sqrt{2}]$. Por ende, si repetimos el

procedimiento empleado para llegar a (1.1), pudiendo elegir $a \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}]$, cubrimos

$$(3.1) \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}, \frac{\sqrt{2}}{2^n} \right] = (0, \sqrt{2}] \supset (0, 1]$$

Este método sigue teniendo la desventaja de que solo sirve con cuadrados por lo cual ha de aplicarse dos veces para llegar de un rectángulo arbitrario a otro, pero la transitividad nos garantiza que es posible.

Cerramos el artículo queriendo poner énfasis en que muchas veces, para poder obtener el mayor fruto, se necesita dejar crecer libremente las ideas, ya que solo después de que éstas crezcan se hace evidente cuales han de ser podadas y cuales son esenciales para nuestro jardín.

Referencias

- Hartshorne, R. (2000). *Geometry: Euclid and beyond* (1. A., korr. Nachdruck 2002. ed.). Springer.
- McFarland, A., McFarland, J., Smith, J., y Grattan-Guinness, I. (2014). *Alfred tarski: Early work in poland - geometry and teaching*. Birkhäuser.

LUIS AGUSTÍN CÁRDENAS PENA
 Universidad de Talca, Talca, Chile.
 (✉) cardenaspenaluisa@gmail.com

Recibido: 4 de noviembre de 2018.
 Aceptado: 11 de febrero de 2020.
 Publicado en línea: 29 de julio 2020.

dado un triángulo ABC y cualquier punto P en la circunferencia que los circunscribe, los 3 puntos más cercanos a P en la líneas AB , AC y BC son colineales?

En efecto, este es el *Teorema de Simson* (aparentemente mal atribuido a él) y la recta que une a dichos puntos se llama la recta de Simson.

Como suele pasar, existen varias pruebas de este resultado. Veamos una demostración sintética (es decir, geométrica) del teorema, que utiliza el *Teorema del arco capaz* y algunas de sus consecuencias.

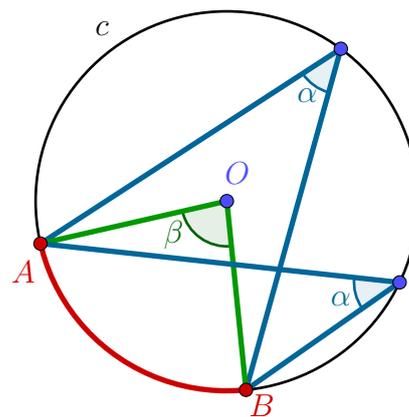
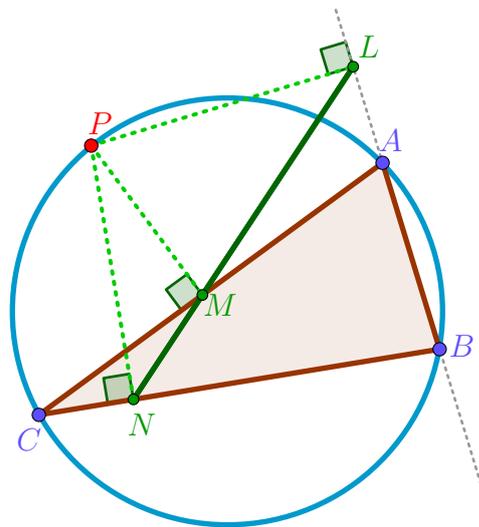
Sean L , M y N los puntos pedales de las rectas respecto de P , es decir, los pies de las perpendiculares desde P a los rectas AB , AC y BC que contienen a los lados del triángulo.

La idea es muy sencilla: para ver que L , M y N son colineales, mostraremos que los ángulos $\angle CMN$ y $\angle AML$ son congruentes.

Comencemos recordando el Teorema del arco capaz y algunas de sus consecuencias.

(1) **Teorema.** Dada una circunferencia c , todo ángulo α inscrito en c que subtiende un arco dado \widehat{AB} es congruente a la mitad del ángulo central β correspondiente al arco \widehat{AB} , es decir $\beta = 2\alpha$.

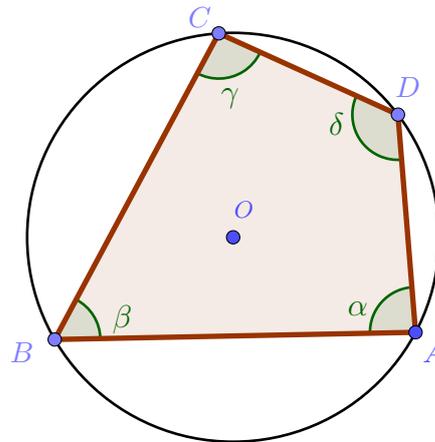
(2) En particular, si α está inscrito en c , entonces α es recto si y solo si subtiende media circunferencia. Esto es lo mismo que decir que dado un triángulo, uno de los ángulos es recto si y solo si el lado opuesto es el diámetro de la circunferencia que circunscribe al triángulo.



Una consecuencia de este teorema es el siguiente resultado:

(3) Cada uno de los pares de ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en un círculo suman 2 rectos, es decir $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$.

Los cuadriláteros inscritos en un círculo reciben el nombre de cuadriláteros *cíclicos* y tienen propiedades muy interesantes. El lector curioso sabrá buscarlas por su cuenta.



Veamos la demostración del Teorema de Simson, recordemos que debemos demostrar que $\mu = \mu'$.

Primero, notemos que si P fuera uno de los vértices del triángulo el resultado resulta trivial (¿por qué?). Luego, podemos suponer que $P \neq A, B, C$. Por el resultado (3), los lados opuestos del cuadrilátero $PABC$ suman 2 rectos, de donde

$$\beta + (\theta + \gamma) = \pi.$$

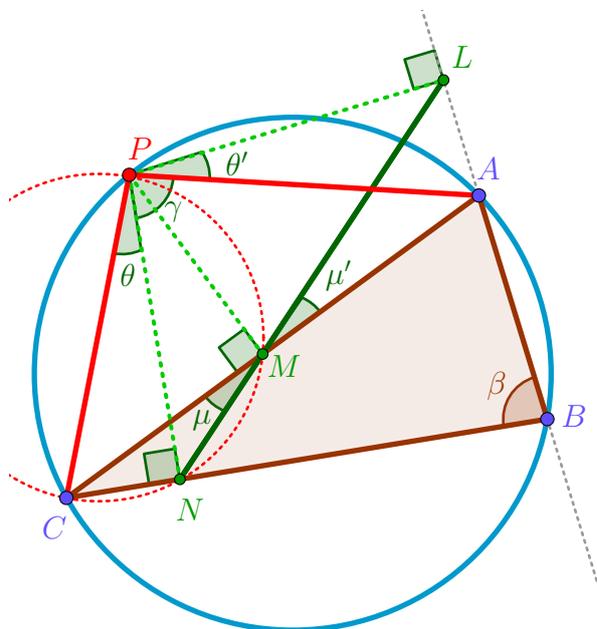
Ahora, como los ángulos de cualquier cuadrilátero suman

2π y los ángulos $\angle PLB$ y $\angle PNB$ son rectos por construcción, mirando el cuadrilátero $BNPL$, obtenemos que

$$\beta + (\theta' + \gamma) = \pi.$$

De estas dos igualdades, deducimos que $\theta = \theta'$. Nuestro objetivo ahora es demostrar que $\theta = \mu$ y $\theta' = \mu'$.

Los ángulos $\angle PMC$ y $\angle PNC$ son rectos por construcción. Luego, por el resultado (2), obtenemos que los puntos P, C, M y N están en una misma circunferencia (de diámetro PC) que llamamos c (es decir que $PMNC$ es un cuadrilátero cíclico). Luego, como θ y μ subtenden el mismo arco \widehat{CN}



en c obtenemos $\theta = \mu$. Del mismo modo, pero usando el cuadrilátero cíclico $PLAM$ sale que $\theta' = \mu'$.

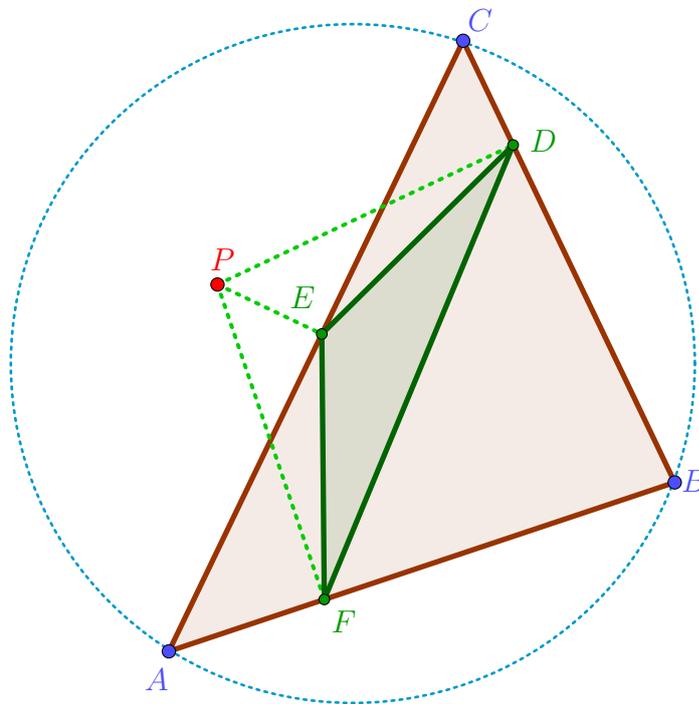
De todo lo dicho, se deduce que $\mu = \mu'$ como queríamos demostrar.

Comentarios finales: para concluir, dejamos unos comentarios sobre el teorema en cuestión que nos parecen sumamente interesantes.

- (a) Es verdadera la recíproca del Teorema de Simson. Es decir, si los 3 puntos más cercanos a un punto P en 3 rectas son colineales y ningún par de éstas son colineales, entonces P yace en la circunferencia que inscribe al triángulo formado por las 3 rectas.
- (b) Segundo, que dado un triángulo cualquiera $T = \triangle ABC$ y un punto P del plano, uno puede construir el *triángulo pedal*

$$\text{Pedal}(T, P) = \triangle DEF$$

asociado a T y P donde D, E, F son los pies de las perpendiculares a los lados de T por P . El Teorema de Simson y su recíproca dicen simplemente que el triángulo pedal $\text{Pedal}(T, P)$ degenera en una recta si y solo si el punto P yace en la circunferencia que inscribe a T .



- (c) El resultado solo vale en la geometría Euclídea, ya que hace uso (aunque enmascaradamente) del postulado de las paralelas. Por ejemplo,

el lector puede intentar algunos triángulos en la esfera o en el plano hiperbólico y ver qué pasa.

Robert Simson (14/10/1687 – 1/10/1768) fue un matemático escocés, profesor de matemáticas en la Universidad de Glasgow. Sus contribuciones principales fueron las recopilaciones y traducciones al inglés de 'Los Elementos' de Euclides y reconstrucciones de trabajos perdidos de Euclides y Apolonio. Algunos estudios sugieren que en realidad el teorema en cuestión se debe a William Wallace (23/9/1768 – 28/4/1843) matemático y astrónomo escocés, inventor del eidógrafo (pantógrafo mejorado).

Sección de Problemas

✉ por Juan Pablo Rossetti

Los siguientes problemas están pensados para un público amplio. Las soluciones se encuentran en la página siguiente.

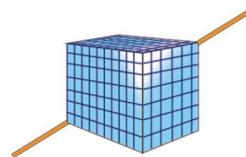


Problema 1. Una profesora escribe en el pizarrón un número grande y pide a sus 30 alumnos que vayan diciendo, uno por uno, distintos divisores de ese número. Los alumnos responden ordenadamente; el primero dice que “el 1 es un divisor del número escrito en el pizarrón”, el segundo alumno dice “el 2 es un divisor”, el tercer alumno dice “el 3 es un divisor”, el cuarto dice “el 4 es un divisor”, y así, sucesivamente, hasta que el trigésimo alumno dice “el 30 es un divisor”.

La profesora dice que hay solo dos alumnos que se equivocaron y lo hicieron en forma consecutiva. ¿Cuáles son los dos alumnos que se equivocaron?

Para quienes resolvieron el problema, hay una segunda pregunta: ¿cuál es el menor número que pudo haber escrito la profesora en el pizarrón?

Problema 2. (*Cubitos atravesados en un cuboide*). Tenemos un cuboide –llamado también ortoedro, prisma rectangular ortogonal, paralelepípedo rectangular– que podría medir $11\text{cm} \times 20\text{cm} \times 32\text{cm}$. Pensemos que está formado por cubitos de 1cm de lado cada uno y que lo atraviesa una recta que pasa por un vértice y el vértice diametralmente opuesto. ¿Cuántos cubitos son atravesados en su interior por la recta? No se cuentan los cubitos que fueron tocados solo en un vértice o una arista.



Algunos problemas son más interesantes por sus soluciones que por sus planteos. Este es el caso del siguiente problema, por lo que sugerimos intentar resolverlo y luego leer la solución dada.

Problema 3. (*Comparando cantidades de soluciones*). Sean x, y, z, w enteros positivos menores que algún número fijo, por ejemplo que un millón. Consideramos las ecuaciones $x^2 - y^3 = z^2 - t^3 + 1$ y $x^2 - y^3 = z^2 - t^3$. Probar que la segunda tiene más soluciones que la primera.

SOLUCIONES

Solución 1. Respuesta: el 16 y el 17.

Podemos analizarlo así: si un número m tiene en su factorización en primos al menos dos primos distintos, digamos p y q , y no fuera divisor, entonces p y q tampoco sería divisores, y como no son consecutivos con m , contradiría a la profesora. También, si $m \leq 15$, entonces m es divisor, pues si no lo fuera, tampoco lo sería $2m$, contradiciendo a la profesora. Por lo tanto, las únicas opciones son números que tengan en su factorización a lo sumo a un primo (elevado a alguna potencia). Vemos que la única posibilidad es un primo y la mayor potencia de 2, es decir 17, que es primo, y $16 = 2^4$.

El menor número posible es el mínimo común múltiplo de 2, 3, 4, ..., 14, 15, 18, 19, ..., 29, 30, es decir

$$2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 19 \times 23 \times 29 = 68.502.634.200.$$

Solución 2. Respuesta: 58 cubitos.

En el recorrido de la recta desde un vértice al opuesto notamos que va pasando de un cubito a otro contiguo al mismo, es decir, que comparten una cara. Como la dirección y el sentido son siempre los mismos, se ve a priori, que la cantidad de cubitos que atraviesa en un cuboide de $a \times b \times c$ cubitos es

$$1 + (a - 1) + (b - 1) + (c - 1) = a + b + c - 2,$$

puesto que podemos pensar que comienza en el cubito $(1, 1, 1)$, de ahí pasa a un cubito con dos unos y un dos, y así, en cada paso, vamos sumando un uno a alguna de las tres coordenadas, hasta llegar al cubito del extremo opuesto que es el etiquetado (a, b, c) . Esto ocurre siempre y cuando la recta atraviese por caras contiguas y no por aristas o vértices. Si pasa por un vértice, ya no sumamos un uno a una sola coordenada sino que pasa del cubito

$$(i, j, k) \quad \text{al} \quad (i + 1, j + 1, k + 1);$$

mientras que si atraviesa una arista, sumaríamos uno a dos de las tres coordenadas. Esto resta el número de total de cubitos atravesados en su interior que calculamos a priori. El pasar por una arista de (i, j, k) a $(i + 1, j + 1, k)$ significa que los números a y b no son coprimos, y la cantidad de aristas de este tipo que se atravesarán es igual al máximo común divisor (a, b) . Así, el número exacto de cubitos

atravesados por su interior será

$$a + b + c - (a, b) - (a, c) - (b, c) + (a, b, c).$$

En el caso particular del problema tenemos $11 + 20 + 32 - 1 - 1 - 4 + 1 = 58$ cubitos.

Solución 3. Respuesta: se podría hacer un análisis cualitativo de la situación para darnos cuenta que es así, que la segunda ecuación tiene más soluciones, puesto que aparecen *soluciones triviales* donde $x = z, y = t$, que no aparecen en la primera, y no podrán ser compensadas.

Sin embargo, haremos otra demostración, porque vale la pena ver cómo se puede aplicar aquí el llamado *principio o desigualdad del reordenamiento*.

La primera ecuación es equivalente a

$$x^2 + t^3 = z^2 + y^3 + 1$$

y la segunda es equivalente a

$$x^2 + t^3 = z^2 + y^3.$$

Sea m el mayor número que se puede escribir de la forma $x^2 + t^3$. Sea c_k la cantidad de formas de expresar k como suma de un cuadrado y un cubo, es decir, c_k es la cantidad de soluciones de $k = x^2 + t^3$. Notemos que $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = c_4 = 0, c_5 = 1$, etc.

La segunda ecuación tiene $c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_m^2$ soluciones, mientras que la primera tiene $c_1c_2 + c_2c_3 + \dots + c_{m-1}c_m$ soluciones. Por lo tanto, basta ver que

$$\sum_{k=1}^m c_k^2 > \sum_{k=1}^{m-1} c_k c_{k+1}$$

lo cual, luego de agregar el producto c_1c_m al miembro derecho, se verifica por la mencionada *desigualdad de reordenamiento*. Ésta afirma que si $x_1 \leq \dots \leq x_n$ e $y_1 \leq \dots \leq y_n$ son números reales y σ es una permutación de $\{1, 2, \dots, n\}$ entonces

$$x_n y_1 + \dots + x_1 y_n \leq x_{\sigma(1)} y_1 + \dots + x_{\sigma(n)} y_n \leq x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

y puede ser demostrada de manera elemental.

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones? ¿Y una fórmula general?

- $\{a_n\}$: 1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, 257, 511, ...
- $\{b_n\}$: 6, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 28, 30, 33, ...
- $\{c_n\}$: 12, 23, 35, 47, 511, 613, 717, 819, 923, 1029, ...
- $\{d_n\}$: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 21, 30, 31, 32, 40, 41, 42, 43, 50, 51, 52, 53, 54, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 210, 310, 320, 321, 410, 420, 421, ...

Podés encontrar las soluciones en la página siguiente.



Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $a_{10} = 1025$.

La fórmula general es $a_n = 2 a_{n-1} + (-1)^n 3$.

- $b_{15} = 34$.

Son los números ordenados con al menos dos factores primos distintos.

- $c_{11} = 1131$.

Sucesiones yuxtapuestas; a la izquierda la de los naturales, a la derecha la de los primos.

- $d_{62} = 430$.

Son los números ordenados donde cada dígito es mayor al siguiente.

Viene de la página anterior.

INFORMACIÓN PARA AUTORES

La *Revista de Educación Matemática* recibe artículos en cualquiera sus secciones que no hayan sido ya publicados. Se espera que tengan excelente nivel de redacción, claridad en la exposición de las ideas, coherencia y cohesión.

Los autores que deseen publicar sus artículos en la *Revista de Educación Matemática* deberán enviar un archivo LibreOffice, Word o Latex a la dirección **revm@famaf.unc.edu.ar** de correo electrónico.

El archivo deberá estar escrito en hoja tamaño A4, con sus cuatro márgenes de 2,5 cm, interlineado sencillo y letra Times New Roman de 11 pt. En la medida de lo posible evitar el uso de notas al pie. En la primera página se informará:

- Título del trabajo.
- Nombre, filiación académica y correo electrónico de todos los autores.
- Categoría propuesta (Matemática, Aportes para la Enseñanza de la Matemática, Investigación en Educación Matemática, Reseña).
- Resumen en español y en inglés con una extensión máxima de 200 palabras. No incluir referencias bibliográficas.
- Palabras-clave en español e inglés. No más de cuatro.

Los artículos de *Matemática* y *Aportes para la enseñanza* pueden ser de hasta 12 páginas (excepcionalmente se aceptarán artículos más extensos), incluida bibliografía, tablas y figuras.

Los artículos de *Investigación* pueden ser de hasta 20 páginas, incluida bibliografía, tablas y figuras. Deben incluir: resumen (en español e inglés), problemática investigada, preguntas u objetivos de investigación, referentes teóricos y antecedentes, metodología de investigación, resultados, análisis, conclusiones y bibliografía. El resumen, tanto en español como en inglés, puede tener una extensión máxima de 200 palabras y no incluir referencias bibliográficas.

Las *Reseñas* pueden ser de hasta 4 páginas.

Para la publicación de Anuncios enviar la información completa al correo electrónico de la revista.

Más información en la página <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/information/authors>.