Revista de Educación Matemática

Registro Nacional de la Propiedad Intelectual N° 168024

ISSN 0326-8780 (versión impresa)

ISSN 1852-2890 (en línea)

Página web: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index
Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

Revista de Educación Matemática

Volumen 34, N° 3 – 2019

ÍNDICE

También encontrarás curiosidades bajo los títulos *¿Sabías que...?* y *¡Sucesiones al toque!*

Editorial

Con este número se cierra el volumen 34 de la *Revista de Educación Matemática* en el año 2019. En el mismo podrán encontrar el relato de una experiencia con modelización matemática en la escuela secundaria, algunos desafíos y resultados relacionados con la teoría de nudos y un interesante análisis epistemológico y didáctico en torno a una afirmación matemática que surgió en una clase con estudiantes de entre 13 y 14 años.

La modelización matemática permite vincular el "mundo real" con el dominio matemático y es un proceso de gran relevancia en la actividad científica. Cuando se pone en juego como abordaje para la enseñanza de la matemática ofrece escenarios de aprendizaje que permiten crear nuevos sentidos para la actividad matemática. El artículo *Una experiencia de modelización matemática en la escuela secundaria: el problema del bebedero* relata detalles de las actividades matemáticas desarrolladas por un grupo de estudiantes del último año de una escuela secundaria en Neuquén (Argentina). El problema pide diseñar una regla graduada para incorporar sobre la pared vertical de un bebedero para animales, con la intención de poder determinar la cantidad de agua ingresada en el mismo. A partir de este problema se propuso la realización de un taller que se desarrolló de manera extracurricular. El artículo muestra la riqueza de las producciones de los estudiantes y la diversidad de contenidos que se ponen en juego para la resolución de la situación planteada.

Según el diccionario de la Real Academia Española un nudo es un "lazo que se estrecha y cierra de modo que con dificultad se pueda soltar por sí solo, y que cuanto más se tira de cualquiera de los dos cabos, más se aprieta", pero, ¿qué ocurre cuando los dos cabos del hilo o soga con el cual hicimos el nudo se unen? Una mirada geométrica permite ver al nudo como una curva simple y cerrada en $\mathbb{R}^3$. La teoría de nudos se dedica al estudio geométrico de estas configuraciones. El artículo *Los nudos, una divertida forma de hacer matemática* invita a conocer algunos resultados de esta teoría y, al mismo tiempo, tomar una cuerda para jugar con el armado… y desarmado de nudos.

El artículo *Perspectivas matemáticas y pedagógicas de la justificación: aproximando la raíz de 18* fue publicado originalmente en la revista canadiense *For the learning of mathematics* (FLM) en 2017. La traducción al español fue autorizada por los autores y los editores de la revista FLM, y realizada por Abraham Arcavi, profesor titular de la Cátedra Lester B. Pearson en el Departamento de Enseñanza de las Ciencias del Weizmann Institute of Science (Israel) y, además, miembro del Comité Editorial de nuestra revista. Se trata de un estudio matemático que se originó a partir de la siguiente afirmación: "la raíz cuadrada de 18 está más cerca de 4 que de 5, porque 18 está más cerca de 16 que de 25". Este enunciado surgió en una clase de octavo grado de una escuela en Israel (alumnos de entre 13 y 14 años). Los autores proponen argumentos hipotéticos que podrían sustentar esta afirmación y los analizan desde dos perspectivas que se complementan: la epistémica y la pedagógica. El trabajo ofrece un ejemplo del tipo de investigación en que pueden involucrarse los profesores de matemática en cursos de formación docente y desarrollo profesional.

Llamamos la atención del lector hacia la nota editorial titulada El día internacional de la matemática y la cuadratura del círculo. A partir de la presentación del día de la matemática, el relato entreteje su trama con el número pi, la cuadratura del círculo y un bizarro proyecto de ley presentado en la Asamblea General de Indiana (Estados Unidos) en 1897. Hacia el final, nos invita a reflexionar sobre el importante papel que puede protagonizar la ciencia en la toma de decisiones políticas.

Como siempre, la revista cuenta con un *¿Sabías que...?*, que en esta ocasión trata sobre el área de un círculo, y con la *Sección de problemas* que vienen acompañados por sus soluciones.

Finalmente, consideramos relevante mencionar que en 2020 tendrá lugar un importante evento para la comunidad internacional de educadores matemáticos. Entre el 12 y el 19 de julio se llevará a cabo en Shangai (China) la 14ª Conferencia International de Educación Matemática, ICME 14, según la sigla en inglés para *International Conference in Matematical Education 14*. Esta conferencia es la más importante y masiva en el campo de la Educación Matemática, reúne a educadores matemáticos de todo el mundo, incluyendo profesores, futuros profesores e investigadores en educación matemática o matemática. Se realiza cada cuatro años y es organizada por la *Comisión Internacional de Instrucción Matemática*, ICMI (*International Commission on Mathematical Instruction*), que es una comisión de la *Unión Matemática Internacional*, IMU (*International Mathematical Union*). Esta comisión fue creada en 1908 durante la realización del 4º Congreso Internacional de Matemáticos (ICM 4) en Roma y su primer presidente fue el matemático alemán Félix Klein. La grilla de actividades, conferencias, grupos de estudio, etc.

es extensa y variada y abarca diversas problemáticas asociadas con la enseñanza y aprendizaje de la matemática en todos los niveles de la educación, así como el abordaje de tópicos de Filosofía de la Matemática, Epistemología de la Matemática, Historia de la Matemática, por mencionar solo algunos. En el siguiente link podrán encontrar toda la información del congreso https://www.icme14.org.

Para terminar, invitamos a los lectores a realizar nuevas contribuciones para cualquiera de las secciones de la revista y así nos acompañen también como autores en 2020.

Mónica Villarreal

Nota: Es muy importante para la RevEM contar con la colaboración de ustedes a través del envío de contribuciones de calidad para publicar. Solicitamos enviar los artículos preferentemente a través del sistema en la página web, pero si tienen inconvenientes pueden hacerlo a la dirección de correo electrónico que figura abajo.

Página web: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index

Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

Revista de Educación Matemática
Volumen 34, N° 3 (2019), páginas 7 – 25
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Aportes para la Enseñanza de la Matemática

UNA EXPERIENCIA DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA ESCUELA SECUNDARIA: EL PROBLEMA DEL BEBEDERO

Mayra Muñoz Venegas, María Laura Santori y M. del Carmen Díaz de Quintana

Resumen. En este trabajo vamos a describir y analizar una actividad de modelización matemática realizada con alumnos del último año de una escuela secundaria de la ciudad de Neuquén, Argentina. El objetivo principal de esta actividad es ofrecer a los alumnos un espacio en el que puedan tener la experiencia de producir conocimiento matemático a partir de una cuestión inicial planteada en forma abierta, en este caso extra-matemática. Este tipo de actividades en donde la modelización matemática cobra un rol protagónico, proveen una visión integrada de la matemática y permiten reconstruir en el aula una parte esencial del "quehacer" de la disciplina.

Abstract. In this paper we will describe and analyze a mathematical modeling activity carried out with students from the last year of a secondary school in the city of Neuquén, Argentina. The main objective of this activity is to offer students a space in which they can have the experience of producing mathematical knowledge from an initial open question raised in an open form, in this case extra mathematical. This type of activities in which mathematical modeling takes a leading role, provide an integrated view of mathematics and allow to reconstruct in the classroom an essential part of the "task" of discipline.

§1. Introducción

Uno de los problemas más resonantes en la educación actual, en la escuela secundaria, es la *pérdida de sentido del estudio de la matemática*. Este fenómeno se manifiesta de múltiples maneras que van desde la falta de motivación de los alumnos para estudiar matemática hasta la invisibilidad de la matemática escolar en la sociedad (Fonseca, 2004); (Otero et al., 2013).

Palabras clave: Educación Matemática, Modelización, Escuela Secundaria.
Keywords: Mathematics Education, Modeling, Secondary School.

En la enseñanza actual predomina un modelo didáctico en el cual los estudiantes se han convertido en receptores de un discurso expositor del profesor, que tienen que repetir de manera automatizada. En la clase de matemática es muy común que el estudiante solo se limite a dar respuestas a preguntas que él no se ha planteado, y además estas respuestas suelen ser acotadas y sin demasiada complejidad. Por otro lado, muchos de los objetos que se estudian en la escuela actual, hace tiempo que han perdido su razón de ser como objeto de estudio para dicha institución. Ante la crisis del modelo mencionado y convencidos del poder que le otorga a cualquier grupo de estudiantes realizar una construcción colectiva del saber a partir de la problematización, es que proponemos esta actividad, cuyo objetivo principal es ofrecer a los estudiantes un espacio en el que puedan tener la experiencia de producir conocimiento matemático a partir de un proceso de modelización. Esta propuesta surge de la certeza que es posible "hacer matemática" en el aula, y que esto es mucho más que resolver problemas, como lo expresan (Segal & Giuliani, 2008):

> *También es encontrar buenas preguntas, buscar medios para responderlas, desarrollar nuevos métodos, conjeturar propiedades, validar soluciones, interactuar con otros miembros de la comunidad matemática de pertenencia, confrontar resultados, técnicas, validaciones. Teoremas y definiciones son a la vez productos y herramientas de todo este trabajo de construcción de conocimiento matemático. (p.7)*

Para integrar la actividad de modelización en la enseñanza matemática, la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) propone un dispositivo denominado recorridos de estudio e investigación (REI) (Chevallard, 2004; Gascón, 2010; Otero et al., 2013), estructurado esencialmente para hacer posible una enseñanza funcional de las matemáticas y para posibilitar su enseñanza como una actividad de modelización.

§2. Marco teórico

Aspectos generales de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. El marco teórico adoptado para el desarrollo y análisis de esta actividad es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999, 2001, 2013; Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997). Para la TAD, la modelización no es únicamente un aspecto de las matemáticas sino que toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización. Como lo afirman (Chevallard et al., 1997):

> *Un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo matemático de la realidad que se quiere estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos en ese trabajo para contestar a las cuestiones planteadas inicialmente. Gran parte de la actividad matemática puede identificarse con una actividad de modelización matemática. (p. 51)*

Desde esta perspectiva, la modelización matemática debe formar parte integrante de cualquier proceso de estudio de las matemáticas.

Por otra parte la TAD propone describir el hacer matemático en términos de organizaciones matemáticas relativamente estructuradas llamadas praxeologías (Chevallard, 1999). Estas entidades están compuestas por cuatro elementos distintivos que se articulan permitiendo emerger el saber como fruto de la actividad realizada. Es decir, hay un tipo de tarea o problema que se quiere realizar o resolver para la cual existe alguna técnica disponible en la Institución, que permite realizarla o resolver el citado problema de manera inteligible, explicable y validada por medio de una tecnología en el marco de una teoría que fundamenta y organiza los discursos tecnológicos.

Según (Chevallard, 2013), los saberes son obras (u organizaciones matemáticas). Una obra tiene siempre una o varias razones de ser, que motivaron su creación y que motivan su empleo y manifiesta que el problema en la enseñanza de la matemática actual es debido a que la epistemología escolar dominante elimina las "razones de ser" de las obras que se proponen estudiar en una institución. Este fenómeno lo relaciona con otro al que denomina monumentalización del saber, caracterizado por presentar a los objetos de estudio como obras terminadas (monumentos), como objetos ya creados, que a lo sumo se pueden visitar.

La TAD propugna la necesidad de superar el paradigma escolar de la visita de las obras, por medio de un nuevo paradigma, el del *cuestionamiento del mundo*, centrado en la necesidad de aportar respuestas a cuestiones problemáticas que surgen en la vida en sociedad y que se necesitan abordar para mejorar tanto nuestra comprensión del mundo como las formas de vivir colectivamente. En este nuevo paradigma, el estudio de obras preestablecidas no desaparece pero sí queda condicionado a la necesidad de utilizarlas para resolver problemas y cuestionar el mundo que nos rodea.

A fin de avanzar hacia el paradigma del cuestionamiento del mundo, en el marco de la TAD se propuso un nuevo dispositivo didáctico, los recorridos de estudio e investigación (REI), que integra la razón de ser de los saberes escolares en el corazón del proceso de estudio (Chevallard, 2013; Barquero, Bosch, & Gascón, 2011) y favorece el desarrollo de las condiciones que se requieren para hacer posible una actividad matemática funcional. Diversos trabajos dan muestra de la investigación realizada en este sentido (Barquero, 2009; Ruiz-Munzón, 2010; Licera, 2017; Lucas, 2015).

Un REI parte de una cuestión Q_0 "viva" para la comunidad de estudio, que guiará el trabajo durante todo el recorrido y oficiará de motor para la búsqueda de respuestas y nuevas cuestiones. Esta "cuestión generatriz" Q_0 debe ser considerada por la comunidad de estudio como una cuestión a resolver, en un sentido fuerte y debe ser lo suficientemente problematizadora para demandar la puesta en marcha de una verdadera investigación por parte de los estudiantes (Chevallard, 2001, 2013)).

La cuestión Q_0, junto con las diversas cuestiones que se derivarán de su estudio, van a ser en realidad el origen, motor y razón de ser de todo el proceso de estudio. Esto no significa que Q_0 sea inmutable sino que, al contrario Q_0 evoluciona y se desarrolla a lo largo del proceso de estudio.

El proceso de modelización. Las actividades de modelización proveen una visión integrada de la matemática y permiten reconstruir en el aula una parte esencial del "quehacer" de la disciplina. Hay ciertos aspectos esenciales en un proceso de modelización que se desarrollarán de acuerdo a cuatro estadios (Bolea, 2003):

(1) Planteamiento de la situación problema y delimitación de las cuestiones a estudiar.
(2) Construcción del modelo, determinación de las variables, planteamiento de hipótesis, relaciones y formalización de dichas relaciones.
(3) Trabajo con el modelo para dar respuesta a las cuestiones planteadas.
(4) Interpretación de los resultados y planteamiento de nuevas cuestiones.

En todo el proceso, que acabamos de describir, los saberes no aparecen aislados, sino relacionados a través de una problemática, por lo tanto, la actividad de modelización permite realizar en el aula un trabajo análogo a la actividad científica, centrado en la producción matemática de los alumnos. Además, al requerir que los alumnos tomen decisiones sobre la pertinencia de los recursos que ponen en juego y se hagan responsables de sus resultados, validándolos y confrontándolos con sus pares, es decir, que realicen un trabajo de reflexión sobre los problemas le imprime a la clase de matemática un valor formativo que va más allá de la matemática.

Los momentos didácticos. La consideración de diversos procesos de construcción matemática permite detectar aspectos invariantes presentes en todos ellos, esto es, dimensiones o *momentos* que estructuran cualquier proceso de elaboración matemática, independientemente de sus características culturales, sociales, individuales o de otra índole.

La noción de *momento didáctico* fue introducida por (Chevallard, 1999) y se utiliza no tanto en el sentido cronológico como en el sentido de *dimensión* de la actividad. Así, el proceso de estudio se sitúa en un espacio determinado por seis momentos didácticos: *1) el momento del primer encuentro* con un determinado tipo de tareas; *2) el momento exploratorio* del tipo de tareas y la elaboración de una técnica; *3) el momento de construcción de un entorno tecnológico- teórico* (que explique y justifique las técnicas puestas en funcionamiento, así como que permita la construcción de nuevas técnicas); *4) el momento de trabajo de la técnica* (que provoca la evolución de las técnicas existentes y la construcción de nuevas técnicas); *5) el momento de la institucionalización* (que delimita y precisa aquellos elementos constituyentes de la organización matemática construida) y *6) el momento de la evaluación* de la praxeología construida. Ahora bien, la estructura del proceso de estudio no es lineal.

Cada momento puede ser vivido con distintas intensidades, en diversos tiempos, tantas veces como sea necesario a lo largo del proceso de estudio, e incluso es habitual que algunos de ellos aparezcan simultáneamente. Lo que sí es importante destacar es que cada uno de los seis momentos del estudio desempeña una función específica necesaria para llevar a buen término el proceso y existe una dinámica interna global que se manifiesta en el carácter invariante de ciertas relaciones entre dichos momentos.

§3. Metodología y desarrollo del taller

El diseño, desarrollo y análisis de esta actividad se realizó en el marco del proyecto de investigación titulado “La modelización matemática en la formación del profesorado”, financiado por la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional del Comahue, Neuquén, Argentina. El objetivo general de este proyecto de investigación es el de avanzar en la elaboración y difusión de nuevas propuestas didácticas, tanto para la enseñanza de la matemática como para la formación del profesorado, que permitan integrar la actividad de modelización y potenciar una enseñanza funcional de las matemáticas.

El taller fue pensado como una actividad de extensión del proyecto, para ser desarrollada con estudiantes del último año de la escuela secundaria. En él se aborda la resolución de un problema que surge de una situación real que los estudiantes deberán afrontar con los conocimientos que posean y crean convenientes. Para su desarrollo es primordial encontrar un modelo matemático que permita, a través de su análisis, dar respuesta a la cuestión planteada.

La cuestión generatriz que guió el recorrido realizado en el taller fue seleccionada del libro *La Modelización Matemática en el Aula. Posibilidades y Necesidades*, de Silvia Segal y Diana Giuliani (Segal & Giuliani, 2008) y rediseñada e implementada por integrantes el grupo de investigación. El problema consiste en buscar la manera de graduar una varilla que permita medir el nivel de agua en un bebedero correspondiente a un determinado volumen.

Relato de la experiencia. La experiencia del taller que desarrollamos en este trabajo se llevó a cabo con estudiantes que estaban cursando el último año (6º año) de la Escuela Provincial de Educación Técnica Nº 7 (EPET 7) de la ciudad de Neuquén. La elección del lugar para llevar a cabo el taller se debió a una solicitud realizada por una docente de Matemática de dicha institución al grupo de investigación.

Es importante destacar que debido a la modalidad de escuela técnica, durante el ciclo superior (5º y 6º año) los estudiantes no tienen ninguna materia específica de matemática. Ellos cursan su última materia con contenido matemático específico en 4º año, la materia se denomina Análisis Matemático.

La docente que nos propuso realizar el taller en la EPET 7 es Profesora en Matemática y es docente de esta institución en 1º y 3° año. Su interés estaba puesto en poder brindar a los estudiantes del último año un espacio de encuentro con miembros de la comunidad Universitaria que ayudara, de alguna manera, a retomar los contenidos matemáticos estudiados en años anteriores y a la vez sirviera de incentivo a los estudiantes para seguir estudios universitarios particularmente relacionados con las ciencias exactas, ya que muchos de ellos sentían temor e inseguridad de tomar esa decisión.

La propuesta del taller realizada desde el proyecto de investigación fue aceptada por las autoridades de la EPET 7, pero debido a lo mencionado anteriormente, los estudiantes no contaban con horas de matemática donde pueda ser desarrollado el taller, por lo que los encuentros se realizaron dentro de espacios curriculares cedidos por docentes de otras asignaturas de la escuela. Fueron cuatro encuentros, uno por semana, y el tiempo de duración de cada uno fue de 80 minutos aproximadamente. Asistieron a los encuentros entre 15 y 20 alumnos de un total de 25 alumnos que estaban cursando 6º año.

Las coordinadoras del taller fueron una docente del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Comahue y una estudiante del último año del Profesorado en Matemática de la misma Universidad, ambas integrantes del grupo de investigación antes mencionado.

Algunas características generales del taller son:

- El trabajo se realiza en grupos de 2 o 3 integrantes.
- Luego de cada encuentro, los estudiantes entregan en forma escrita todo lo desarrollado por el grupo durante ese día.
- La asistencia al taller no es obligatoria, es un taller dictado en forma extracurricular, aunque en horario de clases.

- El taller no cuenta con una instancia de acreditación pero sí se les otorga a los estudiantes un certificado de asistencia expedido por la Universidad Nacional del Comahue.

A continuación describiremos en forma resumida los cuatro encuentros realizados.

§4. Primer encuentro

En el primer encuentro se les pidió a los alumnos que armaran grupos de dos o tres integrantes, los cuales se mantendrían durante los demás encuentros. Se conformaron siete grupos, se le entregó a cada uno un folio con el problema a resolver y hojas en blanco en las cuales debían desarrollar su trabajo, luego esas hojas debían ser entregadas a las coordinadoras del taller al finalizar cada encuentro. Esto nos permitió realizar un análisis detallado de sus producciones.

El problema, al que denominamos **"El problema del bebedero"** se planteó de la siguiente manera:

En el campo, algunos bebederos para animales tienen una forma como la que se muestra en la imagen (Figura 1). *Necesitamos incorporar sobre una de las caras del bebedero, en forma vertical, una varilla graduada que indique el nivel de agua correspondiente a 100, 200, 300,... litros. ¿Cómo podríamos hacer para graduar la varilla si no tenemos la posibilidad de incorporar agua al bebedero?*

Figura 1. Bebederos.

Una vez presentado el problema, los grupos comenzaron a debatir y analizar la situación planteada. En este momento del "primer encuentro" con el problema, lo que surgió como propuesta inicial es hacer un dibujo del bebedero, a continuación los grupos plantearon la necesidad de conocer las medidas por lo que las

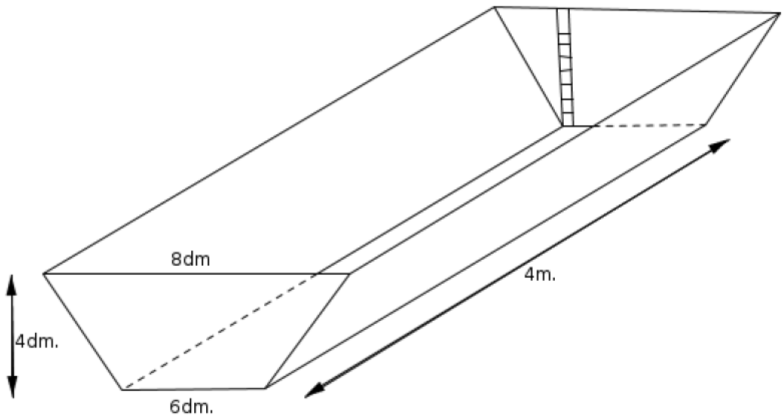

Figura 2. Dibujo del bebedero.

coordinadoras les facilitamos las medidas internas del bebedero. El dibujo con el que finalmente se trabajó en el taller se muestra en la Figura 2:

Este momento del "primer encuentro" con la cuestión a estudiar, es muy importante para que los alumnos se apropien de la situación, busquen herramientas que les permitan dar algún tipo de respuesta, se hagan nuevas preguntas y comiencen a elaborar estrategias de resolución. Es un momento de mucha libertad en el cual ponen en juego sus conocimientos y hacen uso de las diferentes herramientas matemáticas y tecnológicas que dispone cada uno de ellos.

Luego de un tiempo de exploración por parte de los estudiantes, las coordinadoras intervenimos con preguntas estratégicas para ayudar a la indagación del problema:

Si tuviéramos la posibilidad de verter 100 litros de agua y hacer una marca en la varilla, ¿dónde pondrían la marca de los 200 litros?

La respuesta de varios de los alumnos fue que pondrían la marca de los 200 litros repitiendo la marca de los 100 litros dos veces. Esto da cuenta de lo arraigada que está en los estudiantes la técnica de resolución de un problema con magnitudes a partir de la proporcionalidad. En este sentido, la investigación desarrollada por (García, 2005) permite entender esto como un claro fenómeno de desarticulación en la escuela secundaria entre el estudio de la relación de proporcionalidad y el resto de las relaciones funcionales.

Unos pocos alumnos detectaron que, por la forma del bebedero, no era correcto repetir la misma marca dos veces. Luego de debatir esta situación con toda la clase, se llegó a la conclusión de que la graduación de la varilla no sería en forma proporcional.

Para continuar, se les preguntó qué otras cuestiones habían surgido en los grupos y una de ella fue:

¿Cuántos litros de agua tiene el bebedero cuando está lleno?

A partir de esta cuestión los grupos comenzaron un trabajo exploratorio para poder hallar la capacidad del bebedero en litros. Algunos alumnos inmediatamente comenzaron a calcular el volumen del bebedero, sin embargo esta relación entre la cantidad de litros y el volumen de la figura no fue obvia para todos.

Este trabajo fue muy interesante ya que en los grupos emergieron diferentes técnicas para hallar el volumen, que fueron discutidas y validadas entre ellos. Cabe destacar que los alumnos no recordaban cómo determinar el área de la cara trapezoidal, sin embargo para sortear este obstáculo, transformaron el trapecio en figuras de área conocida como triángulos o rectángulos.

Una de las técnicas desarrolladas por uno de los grupos consistió en dividir la cara trapezoidal del prisma en dos figuras, un trapecio rectangular y un triángulo rectángulo, luego desplazaron el triángulo rectángulo completando un rectángulo de base 0,7 metros y altura 0,4 metros, así mantuvieron la misma profundidad del prisma original pero su cara pasó a ser un rectángulo. Finalmente, como se muestra en la Figura 3, calcularon el volumen del bebedero como

$$V = 0{,}4 \times 0{,}7 \times 4 = 1{,}12\, m^3.$$

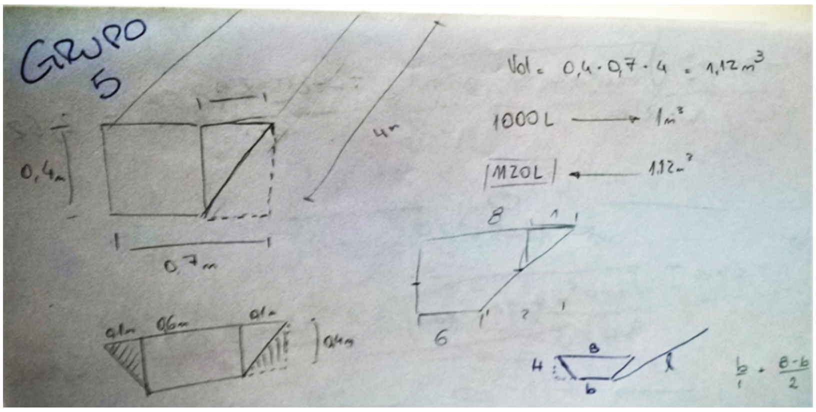

FIGURA 3. Técnica para calcular el volumen.

Otra técnica desarrollada por uno de los grupos consistió en dividir el trapecio en tres partes, en un rectángulo y en dos triángulos rectángulos. Calcularon el volumen de cada cuerpo: un prisma de base rectangular y dos prismas de base triangular, manteniendo la profundidad, finalmente sumaron los resultados obtenidos (Figura 4).

Mientras los alumnos buscaban estrategias para calcular el volumen, surgieron cuestiones en los grupos como por ejemplo: *¿Cómo calcular los litros a partir del volumen? ¿En qué unidad de medida conviene trabajar?*

Se les propuso entonces que hicieran uso de internet o que consultaran en algún libro las respuestas a esas cuestiones. Algunos grupos recordaban la equivalencia

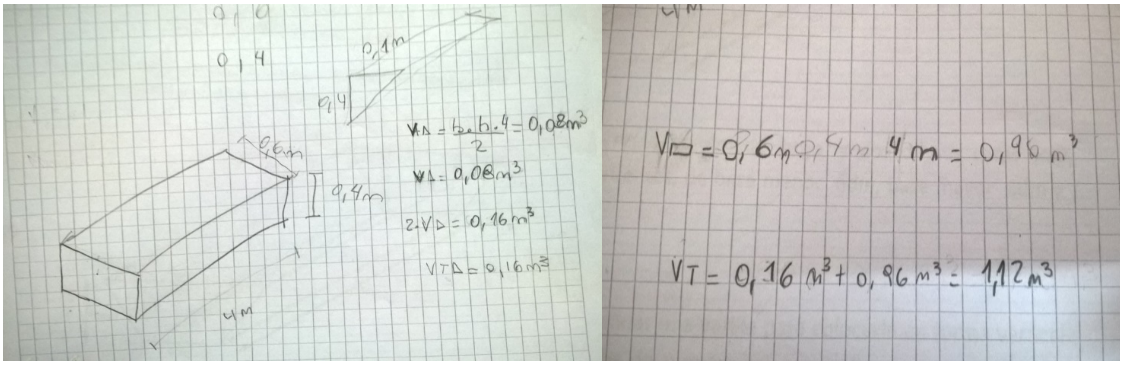

Figura 4. Técnica para calcular el volumen.

1 dm^3 = 1 litro, por lo cual pasaron todas las medidas a decímetros, otros grupos decidieron trabajar en centímetros ya que recordaban las unidades que tienen los envases de gaseosa (1/2 litro = 500 cm^3). Dando como resultado final que la cantidad de litros que puede contener el bebedero cuando está lleno es de 1120 litros.

En la puesta en común, al finalizar esta primera actividad, cada grupo expuso la técnica desarrollada para determinar el volumen del bebedero. Luego se buscaron similitudes y diferencias entre las distintas propuestas.

A continuación se realizó una actividad que consistió en que cada grupo determinara, con la técnica que había desarrollado anteriormente, una fórmula del volumen de un bebedero similar pero de altura H, base mayor B, base menor b. Así en la pizarra se fueron escribiendo las distintas fórmulas, dando cuenta de los diferentes modelos utilizados por cada grupo y los parámetros que determinan dicho modelo. (Figura 5)

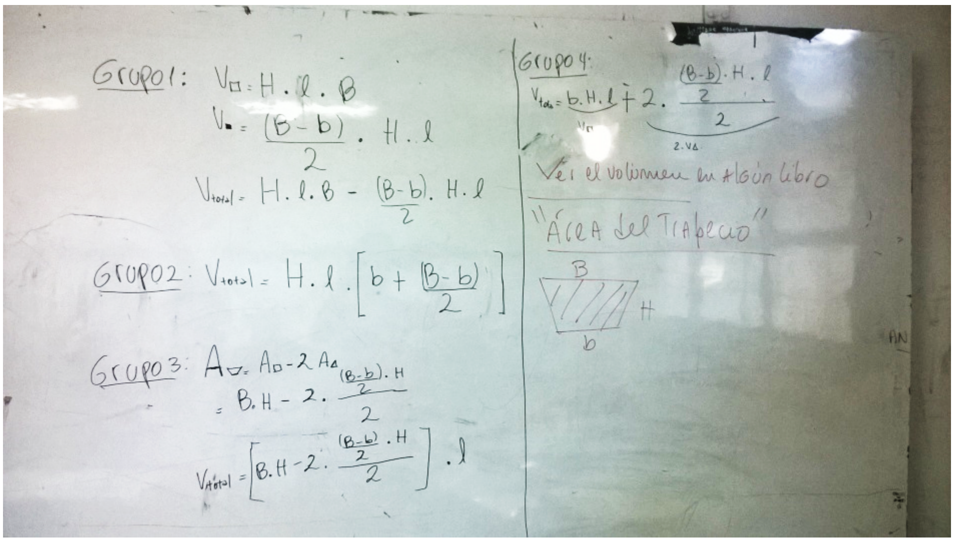

Figura 5. Fórmulas para el cálculo del volumen

La escritura del volumen por medio de parámetros dio lugar a la siguiente cuestión planteada a los alumnos: *¿Para determinar el volumen de un prisma rectangular con la forma del bebedero, se puede usar cualquiera de las fórmulas desarrolladas en el pizarrón? ¿Son fórmulas equivalentes?*

Esta actividad tenía como objetivo que los alumnos realicen un trabajo algebraico. El trabajo realizado por los grupos fue un trabajo muy rico en cuanto a validación de fórmulas y equivalencia entre las mismas, lo que llevó a un trabajo algebraico intenso, que dejó en evidencia las dificultades de los alumnos en este tipo de tareas.

El empleo de parámetros da al álgebra elemental su pleno alcance y pone de manifiesto la función de las expresiones algebraicas, sin embargo, en la escuela las letras juegan únicamente el papel de incógnitas, los *parámetros están ausentes* (Bolea, 2003).

§5. Segundo encuentro

Como se incorporaron algunos estudiantes que no participaron del encuentro anterior, se retomaron cuestiones puntuales y estos nuevos alumnos se integraron a los grupos ya formados. Para continuar les preguntamos:

¿Será posible graduar la varilla ahora que conocemos la cantidad total de litros del bebedero?

En general los grupos que llegaron a responder esta pregunta lo hicieron por medio de la regla de tres simple, es decir plantearon la cantidad total de 1120 litros a una altura de 40 cm y de manera proporcional calcularon la altura correspondiente para los 100 litros, 200 litros, etc. Aquí nuevamente nos volvimos a encontrar con este obstáculo didáctico que tiene que ver con el tipo de tareas que se resuelven habitualmente en la escuela, en este caso relacionando magnitudes en forma proporcional o inversamente proporcional, y dejando de lado aquellas que tienen que ver con relaciones funcionales más complejas (García, 2005).

Es por esto que se les propone a los grupos pensar en cuántos litros de agua habría en el bebedero si el nivel de agua llega hasta la mitad. Algunos respondieron rápidamente que habría 560 litros, es decir, la mitad de la cantidad total. Sin embargo esta conjetura fue refutada por otros compañeros que daban cuenta de la forma del bebedero y la no proporcionalidad. Algunas de sus expresiones fueron: "la parte de abajo es más chica que la de arriba", "abajo se llena más rápido que arriba, por lo tanto tiene menor cantidad de agua".

Para tratar de responder la cuestión planteada, emergió entre los alumnos la pregunta "*¿cuál es la medida de la base mayor del trapecio isósceles que forma el agua dentro del bebedero*?", así el problema derivó en la resolución de esta nueva cuestión.

Algunos grupos la respondieron en forma intuitiva de la siguiente manera: "si dividimos a la mitad la altura del triángulo de base 1dm y altura 4dm, aparece otro triángulo cuyas medidas son la mitad del triángulo anterior, entonces la base mide un medio, por lo que la base mayor del trapecio medirá 0,7 dm" sin poder justificarla ni dar cuenta que lo que estaban utilizando era semejanza de triángulos; otro grupo usó como técnica de resolución relaciones trigonométricas (ver Figura 6).

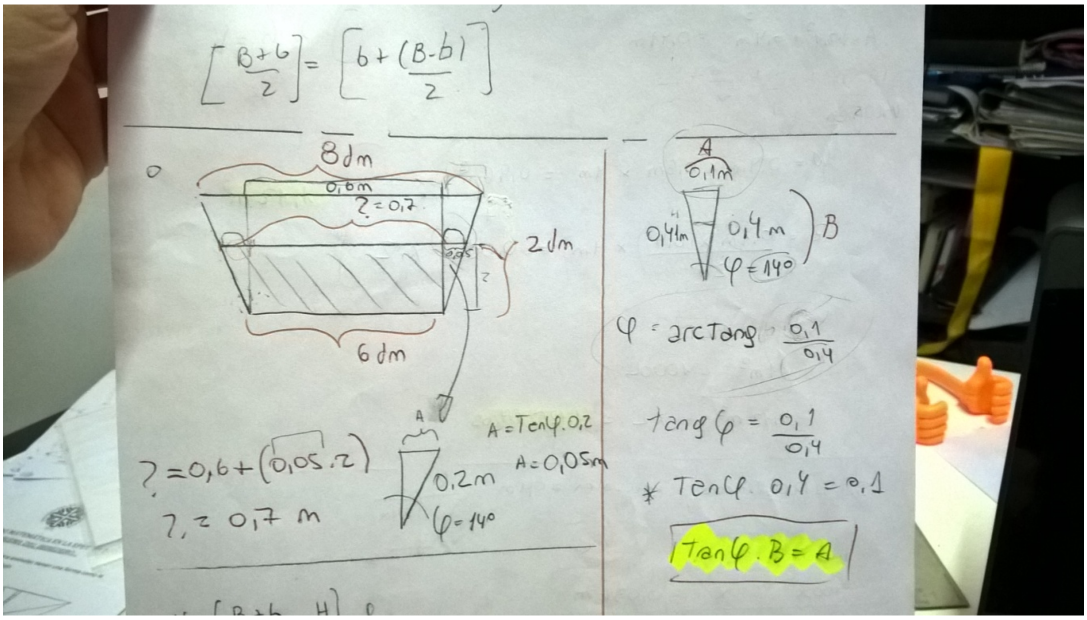

Figura 6. Uso de la tangente como herramienta.

Continuamos el recorrido con las siguientes preguntas: *¿Cuántos litros de agua habría si el nivel del agua llegara a los 10 cm? , ¿ a los 12 cm? y ¿a los 7 cm?*

Únicamente los grupos que habían llegado a justificar la respuesta anterior utilizando la tangente o semejanza de triángulos pudieron responder estas nuevas preguntas.

Luego de compartir el trabajo realizado por todos los grupos llegamos a la conjetura de que **hay una relación entre la altura del nivel de agua que hay en el bebedero y el volumen que determina la misma**.

Se les propone buscar dicha relación, esta es una parte del proceso de modelización a la cual los alumnos no están habituados, ya que tienen que identificar las medidas que permanecen fijas y las que no. La siguiente figura muestra como se identificaron las variables. (Figura 7)

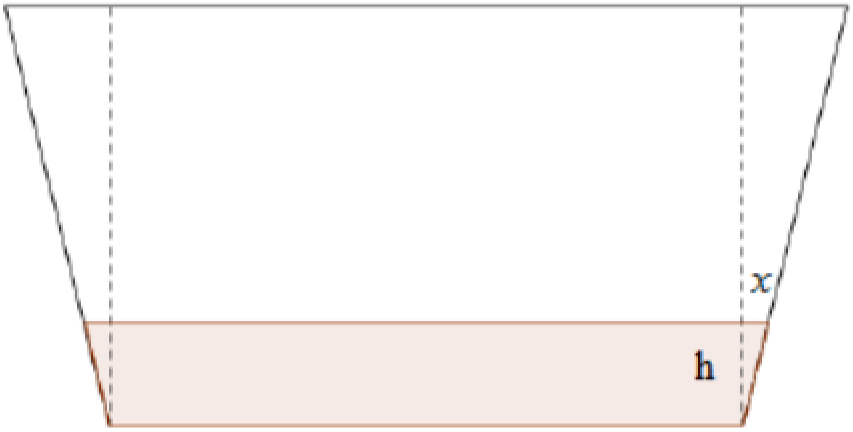

FIGURA 7. Identificación de variables.

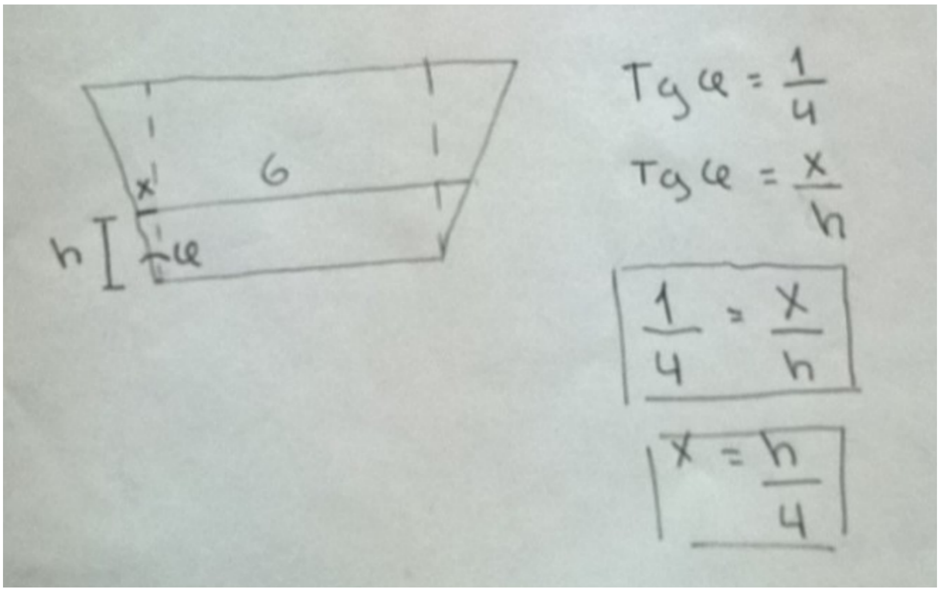

FIGURA 8. Relación entre x y h.

Si bien, en este encuentro no se llegó a justificar completamente la conjetura planteada, algunos grupos lograron determinar la relación entre h y x: $x = \frac{h}{4}$. En la Figura 8 se muestra lo desarrollado por uno de los grupos.

Este segundo encuentro finalizó con la puesta en común de lo desarrollado por cada grupo en la búsqueda de la relación entre h y x.

§6. Tercer encuentro

En este encuentro se trabajó en la búsqueda de la relación **entre el volumen y la altura del nivel de agua** a partir de la relación hallada en el encuentro anterior.

Para establecer dicha relación, cada grupo persistió en la utilización del modelo para el cálculo del volumen que habían propuesto en el comienzo del recorrido (a pesar de haber compartido con otros grupos fórmulas más simples). Esto llevó a que en algunos grupos la fórmula final a la que llegaban fuera muy extensa, y complicada de manipular, por lo que las coordinadoras les sugerimos que intentaran llegar a una fórmula simplificada. Esta tarea no fue fácil para ellos ya que nuevamente el obstáculo del trabajo algebraico se hizo presente.

En la Figura 9 se muestra como un grupo utiliza la fórmula del volumen que hallaron en el primer encuentro y la relación establecida entre x y h para escribir el volumen en función de la altura del nivel de agua. Luego por medio de un trabajo algebraico logran llegar a una fórmula simplificada.

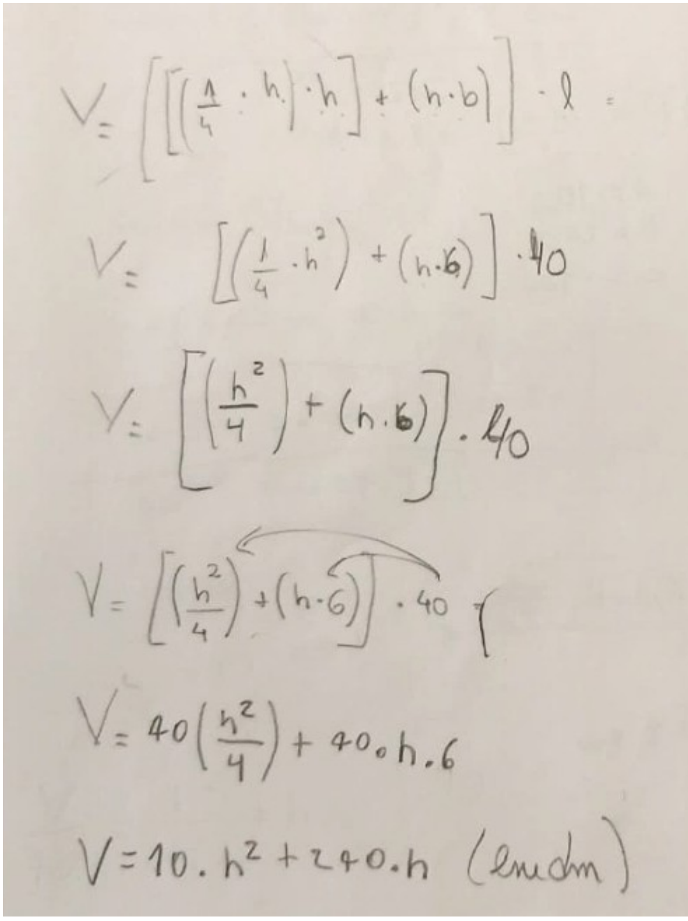

Figura 9. Volumen en función de la altura del agua.

Finalmente se realizó una puesta en común de las fórmulas que había obtenido cada grupo, y concluimos el tercer encuentro institucionalizando una fórmula simplificada que permite expresar el volumen (en dm^3) en función de la altura del agua: $v(h) = 10h^2 + 240h$.

§7. Cuarto encuentro

En el cuarto y último encuentro debíamos dar cuenta de la respuesta que daríamos a la pregunta inicial *¿Cómo graduamos la varilla*?. Luego de realizar entre todos un repaso de todo el recorrido realizado hasta el momento, se les propuso a los grupos que completaran la siguiente tabla:

litros	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1120	v
altura del agua													

Como ya habían trabajado con la equivalencia entre un litro de agua y un decímetro cúbico, los alumnos relacionaron en forma inmediata los litros con el volumen y usaron la fórmula de volumen en función de la altura del agua institucionalizada en el encuentro anterior para completar la tabla. Primero reemplazaron, en la fórmula mencionada, el volumen por los litros establecidos en la tabla, y a continuación el objetivo era determinar la incógnita h de la ecuación cuadrática obtenida.

La mayoría de los grupos aplicaron la técnica de "Baskara" para resolver la ecuación cuadrática, descartando uno de los resultados por ser negativo. (Figura 10)

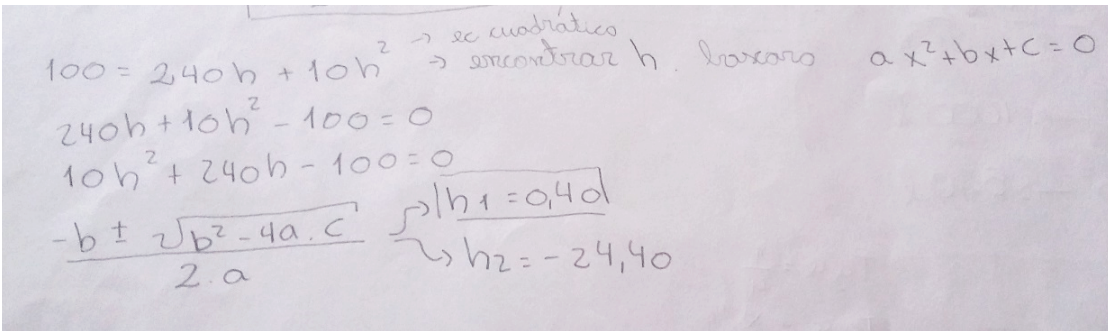

Figura 10. Resolución correcta de ecuación cuadrática.

Dos de los grupos intentaron despejar h cometiendo errores algebraicos y llegando a resultados absurdos, como lo muestra la Figura 11.

Los integrantes de estos dos grupos llegaron a observar que el resultado obtenido no era correcto, pero no supieron cómo abordar la resolución de la ecuación cuadrática de otra manera. Finalmente los demás grupos compartieron sus resoluciones y entre todos los alumnos completaron la tabla, logrando así graduar la varilla. De esta manera se dio por finalizado el recorrido.

Con respecto a la última columna de la tabla, la intención de las coordinadoras era aproximarse al estudio de la función inversa, pero por falta de tiempo no se

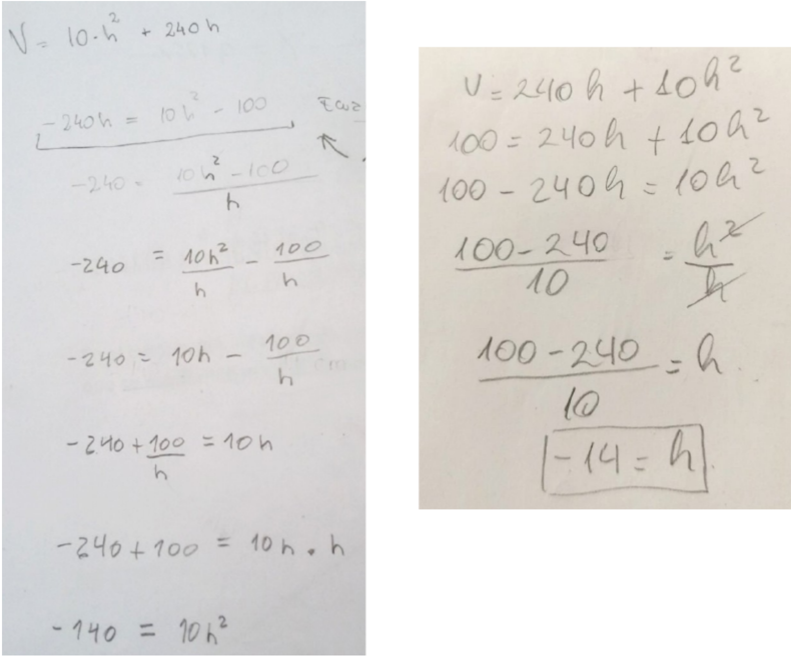

Figura 11. Resolución errónea de ecuación cuadrática.

logró este objetivo. Otra parte de la actividad que no pudo ser realizada es un trabajo con el software Excel. Se había pensado que podría surgir del propio grupo de estudiantes, como esto no fue así, simplemente al finalizar el recorrido se les mostró cómo se podría haber completado la tabla de manera muy rápida a partir de este medio tecnológico.

§8. Reflexiones finales

Mediante el desarrollo de este taller los estudiantes pusieron en juego conocimientos relacionados con la manipulación de expresiones algebraicas, con el sistema métrico decimal, con el cálculo de áreas, con la noción de semejanza de triángulos, tangente y dependencia funcional entre variables. Si bien no fue llevado a cabo en esta oportunidad, también se podría haber indagado y profundizado sobre el modelo cuadrático y sobre nuevos modelos en función de la forma del bebedero.

La elección de las herramientas necesarias para abordar la cuestión recayó en todo momento sobre los alumnos, esta actividad, realizada en grupos, los llevó a buscar diferentes estrategias de resolución, validar los resultados y reflexionar sobre lo que cada grupo desarrollaba, y a la vez les permitió descubrir algunos errores que habitualmente se cometen al realizar operaciones algebraicas.

Como también se afirma en (Barquero, 2009), destacamos la importancia que ha tenido el momento exploratorio y el del trabajo de la técnica en la evolución del taller. Potenciar la "vivencia" de estos momentos permitió a los alumnos responsabilizarse de muchas tareas que en la cultura más "tradicional" están completamente ausentes, como son la formulación de hipótesis, el planteo de cuestiones problemáticas a tratar, la elección de las herramientas matemáticas adecuadas, etc.

La mayoría de los alumnos demostró muchísimo interés por llegar a resolver los diferentes desafíos que les fueron propuestos en cada encuentro, y a pesar de que no todos pudieron estar en los cuatro encuentros realizados, ante la ausencia intentaban acoplarse a la actividad que se estaba realizando y así poder trabajar junto a los demás compañeros, esto dejó en claro el interés que generó la actividad planteada.

En la elaboración de secuencias de enseñanza y aprendizaje a partir de REI, aparece en todo momento la necesidad de elaborar un nuevo contrato didáctico, que provoca cambios en las responsabilidades del profesor y el alumno y también en el modelo epistemológico actual de la actividad matemática. Si bien esta no es una tarea sencilla dentro de una institución escolar, en este caso no se tuvo mayores dificultades por tratarse de un taller extra curricular y con docentes ajenos a la institución.

Un aspecto negativo que se destaca en esta implementación se refiere al poco tiempo del que se dispuso para realizar el recorrido. Al no conformar parte de ningún espacio curricular, las horas debían ser cedidas por los docentes y esto no fue bien recibido por algunos colegas de otras disciplinas.

Para finalizar, queremos agregar que estamos convencidos de que la manera de aprender matemática es "haciendo matemática", que debemos darle a los estudiantes esta oportunidad maravillosa de descubrir el potencial del saber matemático, sin embargo sabemos que llevar este tipo de dispositivos al aula conlleva un proceso de cambio en las diferentes concepciones de la matemática que puedan tener los docentes, por esto es fundamental contar con espacios y tiempo para que los docentes puedan interactuar entre pares y con colegas de otras disciplinas para repensar sus proyectos de enseñanza.

Bibliografía

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas (Tesis doctoral)*. España: Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona.

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las ciencias, Revista de investigación y experiencias didácticas*, *29*(3), 339-352.

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares (Tesis doctoral)*. España: Monografías del Seminario Matemático 'García de

Galdeano’ nº 29. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente [en linea]. *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Huesca*. Retrieved from http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. *Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. Retrieved from http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2013). *La matemática en la escuela: Por una revolución epistemológica y didáctica*. Buenos Aires. Argentina: Libros del Zorzal.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemática: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE. Horsori.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad (Tesis doctoral)*. España: Universidad de Vigo.

García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. de la proporcionalidad a las relaciones funcionales (Tesis doctoral)*. España: Universidad de Jaen.

Gascón, J. (2010). Del Problem Solving a los Recorridos de Estudio e Investigación: Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica. *Unión. Revista Iberoamericana de educación Matemática*, *22*, 9-35.

Licera, M. (2017). *Economía y ecología de los números reales en la Enseñanza Secundaria y la Formación del Profesorado (Tesis doctoral)*. Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Facultad de Ciencias. Instituto de Matemáticas.

Lucas, C. (2015). *Una posible razón de ser del cálculo diferencial y elemental en el ámbito de la modelización funcional (Tesis doctoral)*. España: Universidad de Vigo.

Otero, M., Fanaro, M., Córica, A., Llanos, V., Sureda, P., & Parra, V. (2013). *La teoría antropológica de lo didáctico en el aula de matemática*. Buenos Aires: Editorial Dunken.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional. (Tesis doctoral)*. Barcelona. España: Departamento de Matemática, Universidad Autónoma de Barcelona.

Segal, S., & Giuliani, D. (2008). *La Modelización Matemática en el Aula. Posibilidades y Necesidades*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

MAYRA MUÑOZ VENEGAS
Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Comahue, Argentina.
(✉) *mayramuoz@hotmail.com*

María Laura Santori
Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Comahue, Argentina.
(✉) *mlausantori@yahoo.com.ar*
M. del Carmen Díaz de Quintana
Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Comahue, Argentina.
(✉) *diazdequintana@yahoo.com.ar*

Recibido: *18 de diciembre de 2018*.
Aceptado: *18 de agosto de 2019*.
Publicado en línea: *14 de dciembre de 2019*.

Revista de Educación Matemática
Volumen 34, N° 3 (2019), páginas 27 – 35
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículo de Matemática

LOS NUDOS, UNA DIVERTIDA FORMA DE HACER MATEMÁTICA

Gerson Gutierrez

Resumen. Los nudos son un apasionante tema dentro de la investigación matemática, y más precisamente dentro del área de la Topología. Siendo los nudos algo tan cercano a nuestro día a día, resulta ser un tema curioso e interesante. En este artículo se muestran algunos tópicos interesantes y divertidos de la teoría de nudos y que tranquilamente pueden llegar a ser un tema a estudiar en una clase de secundario.

Abstract. The knots are an exciting topic in mathematical research, and more precisely in the area of Topology. The knots being something so close to our day to day, it turns out to be a curious and interesting topic. This article shows some interesting and fun topics of knot theory and that can quietly become a subject to study in a high school class.

§1. Introducción

En este trabajo presentamos algunos problemas muy entretenidos que pueden estar presentes en un aula de secundario y que muestran una manera amena y divertida de hacer matemática. Estos problemas tratan sobre los nudos.

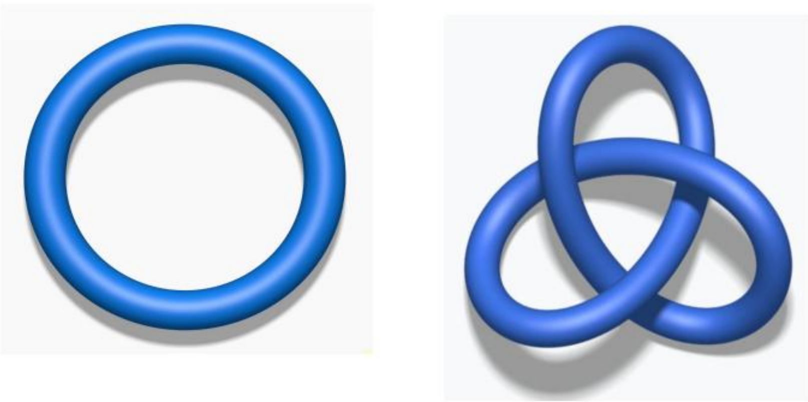

Figura 1. El nudo desanudado y el nudo trébol.

Palabras clave: Nudos, coloreo, movimientos de Reidemeister.
Keywords: Knots, coloring, Reidemeister moves.

Estos nudos pueden ser por ejemplo los que obtenemos al atar los cordones de nuestros zapatos. El problema principal de este artículo es saber si un nudo dado está desanudado o no. Este problema entre otros son abordados en matemática dentro del área *Teoría de Nudos* que es, a su vez, una subárea de la geometría y la topología.

Cabe destacar que en la actualidad la Teoría de Nudos tiene muchas relaciones con varias áreas de estudio. Dentro de la matemática misma juega un rol importante en el estudio topológico y geométrico de las dimensiones 3 y 4; por otro lado tiene influencias en otras ciencias, en la física tiene aplicaciones en la computación cuántica, en la biología es de relevancia en el estudio del ADN, entre otros.

Por último se recomienda al lector tener a mano una cuerda y tener a disposición varios colores, ya que ese es el tipo de matemática que haremos. El lector encontrará mucha más información en el libro de Livingston (Livingston, 1993).

§2. Los nudos matemáticos

Un nudo matemático se puede obtener de la siguiente forma: Tómese una cuerda y haga algún amarre con ella, luego pegue los extremos de la cuerda. Este último es lo que llamaremos un *nudo matemático* o simplemente *nudo*.

Por ejemplo, si uno hace el amarre usual que suele hacer con los cordones de los zapatos y pega los extremos obtiene un nudo bien conocido, el llamado *nudo trébol*. Por supuesto también podríamos no hacer ningún amarre y simplemente pegar los extremos, obteniéndose una circunferencia, este nudo es conocido como el *nudo desanudado*, ambos nudos se pueden ver en la Figura 1. El lector seguramente puede hacer un nudo muchísimo más complicado que estos dos, se invita a que así lo haga.

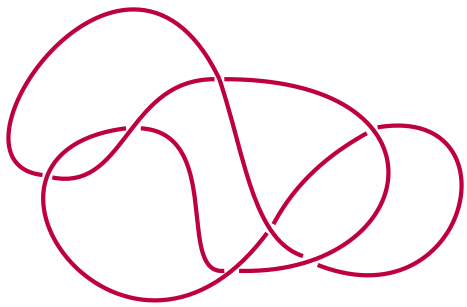

Figura 2. Un nudo en apariencia distinto pero equivalente al nudo desanudado.

El nudo mostrado en la Figura 2 es en realidad el nudo desanudado, aunque en apariencia no parezca así. ¿Cómo sabemos que es el nudo desanudado? pues simplemente podemos deformarlo con las manos (sin romper la cuerda) y llegar así al nudo desanudado. Se invita al lector a que reproduzca este nudo con su cuerda y que luego logré desanudarlo con las manos.

La pregunta que nos haremos constantemente en este artículo es:

Dado un nudo ¿es este nudo desanudado?

Diremos que dos nudos son *equivalentes* si puedo llegar del uno al otro por medio de hacer deformaciones con las manos sin romper la cuerda. Notar que esto da una relación de equivalencia entre todos los nudos. Con esta definición el problema que nos planteamos se puede traducir como:

Dado un nudo ¿es este nudo equivalente al nudo desanudado?

Y podemos generalizar el problema de la siguiente forma:

Dados dos nudos ¿son estos equivalentes?

El lector puede armar un nudo con la cuerda que tiene y entonces preguntarse si ese nudo esta desanudado o no. Si deformando con las manos pudo llegar al nudo desanudado, entonces efectivamente el nudo que tenía es un nudo desanudado (o dicho más formalmente, equivalente al nudo desanudado). Si no puede obtener el nudo desanudado ¿puede afirmar que el nudo no es desanudado?. Puede pasar que otra persona (con más suerte) sí pueda obtener el nudo desanudado. Que no pueda hacerlo con las manos no implica que el nudo no sea desanudado. Por ejemplo el nudo trébol no lo puedo desanudar con las manos, pero por ello no podemos asegurar que este no sea desanudado.

Con el objetivo de distinguir dos nudos y más precisamente, de distinguir un nudo del nudo desanudado, como es usual en matemáticas, daremos un *invariante de nudos*. Un invariante de nudos consiste en una propiedad de nudos que se preserva para nudos equivalentes, por lo que si dos nudos tienen esa propiedad distinta entonces los dos nudos no pueden ser equivalentes.

Un invariante de nudos divertido es el de *ser coloreable*. Nosotros daremos con este invariante. Pero para ello antes debemos introducir una herramienta muy importante (pero no por ello difícil) dentro de la teoría de nudos, que son los *diagramas de nudos*.

§3. El diagrama de un nudo

Consideremos el nudo trébol mostrada en la Figura 1 y considere la sombra que hace este sobre un plano inferior (puede ser por ejemplo el piso), la sombra obtenida será parecida a la Figura 3. La sombra que se obtiene al hacer esto para un nudo general es lo que se llama *la sombra del nudo*.

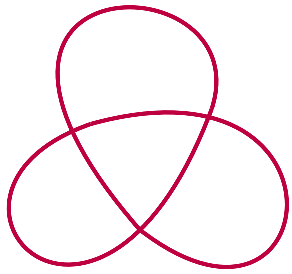

Figura 3. La sombra del nudo trébol.

Notemos además que podemos obtener siempre una sombra del nudo donde a lo más dos puntos del nudo caen al mismo punto de la proyección (a un punto así del diagrama le llamamos punto doble). Si además en estos puntos de la proyección indico quien pasa por arriba y quien por debajo, obtengo lo que es conocido como un *diagrama de nudo*, en la Figura 4 se ve el diagrama de nudo para el nudo trébol mostrada en la Figura 1. Llamamos *arco* a una curva conexa del diagrama, y *cruce* a los puntos dobles del diagrama.

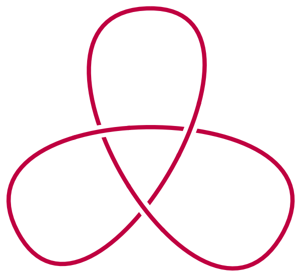

Figura 4. El diagrama del nudo trébol.

Por ejemplo en el diagrama del trébol se ve que este tiene tres cruces y tiene tres arcos. El diagrama del nudo desanudado mostrado en la Figura 1, tiene un solo arco y ningún cruce.

Lo bueno de los diagramas de nudos es que son más fáciles de trabajar que los nudos en sí. Y como veremos a continuación la equivalencia de nudos se corresponde con una equivalencia en los diagramas, por lo que uno puede trabajar directamente con diagramas y definir los invariantes de nudos sobre los diagramas.

Uno podría modificar un diagrama de nudo haciendo ciertos movimientos en el diagrama, por ejemplo en la Figura 5 se ve un diagrama obtenido de modificar el diagrama del nudo trébol. Se ve que ambos diagramas dan el mismo nudo (el nudo trébol) en el espacio.

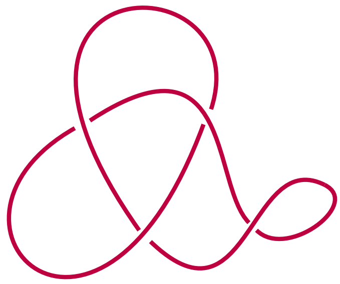

FIGURA 5. El diagrama del nudo trébol modificado.

El lector puede verificar que lo mismo ocurre para los seis movimientos que se muestran en la Figura 6 (con tres movimientos de ida y tres movimientos de vuelta, estos últimos son los movimientos inversos de los tres movimientos de ida).

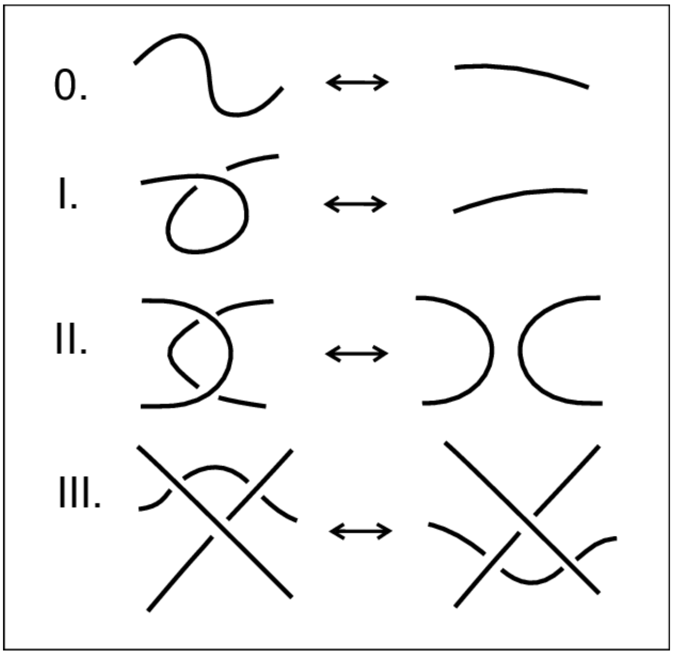

FIGURA 6. Los movimientos de Reidemeister son los numerados (I), (II) y (III). El movimiento (0) muestra como se puede deformar un arco cuando no interactua con otros arcos.

Estos movimientos son conocidos como *los movimientos de Reidemeister*, en honor al matemático Kurt Reidemeister (1893-1971) quien aportó mucho a la matemática y en especial a la teoría de nudos y la topología. Notar además que los movimientos de Reidemeister dan una relación de equivalencia en los diagramas de nudos.

Entonces si a un diagrama de nudo le aplicamos una sucesión finita de estos seis movimientos, obtenemos un nuevo diagrama de nudo, cuyo nudo en el espacio es equivalente al nudo obtenido del diagrama inicial.

Figura 7. Kurt Reidemeister.

Surge entonces la pregunta: ¿Si dos nudos son equivalentes, sus diagramas correspondientes son equivalentes por los movimientos de Reidemeister?. Reidemeister respondió afirmativamente a esta pregunta, y así lo enunciamos a continuación.

Teorema 3.1. *(Reidemeister) Si dos nudos son equivalentes entonces sus diagramas son equivalentes por los movimientos de Reidemeister.*

Gracias al Teorema de Reidemeister podemos trabajar con diagramas de nudos con la equivalencia dada por los movimientos de Reidemeister, en lugar de trabajar con nudos y la equivalencia de nudos. Los invariantes de nudos vienen definidos, en general, en los diagramas de nudos más que en los nudos en el espacio. En la próxima sección daremos un invariante de nudos definido en los diagramas de nudos.

A modo de ejercicio, el lector puede verificar que el diagrama mostrado en la Figura 2 es un diagrama equivalente al diagrama del nudo desanudado, usando los movimientos de Reidemeister.

§4. El coloreo, un invariante divertido de nudos

Lo que haremos ahora es dar un invariante de nudos, definido en los diagramas de nudos, es decir, una propiedad que se preserva en los diagramas cuando le aplicamos los movimientos de Reidemeister.

Supóngase que se tiene un diagrama de nudo, lo que se quiere es colorear cada arco del diagrama con los colores Rojo, Azul, Verde, de manera que se cumplan dos condiciones. La primera condición es que se usen al menos dos colores en colorear todo el diagrama de nudo, esto quiere decir que no vale colorear todos los arcos con el mismo color, ya que al menos debo usar dos colores. La segunda condición es que en cada cruce, o bien los tres arcos en cuestión estén pintados del mismo color, o bien los tres arcos tengan colores distintos. Si un diagrama de nudo puede colorearse de esta forma decimos que el diagrama es *coloreable*.

Por ejemplo, el diagrama del nudo trébol mostrado en la Figura 4 sí es coloreable como se ve en la Figura 8. En efecto, se usaron al menos dos colores para colorear tal diagrama, cumpliéndose la primera condición; y además en cada cruce se usan los tres colores, cumpliéndose la segunda condición. Sin embargo el diagrama canónico del nudo desanudado no es coloreable, pues tiene un solo arco y este necesariamente está pintado de un solo color, por lo cual no cumple la primera condición, pues deberían usarse al menos dos colores.

En principio podría pasar que otro diagrama del nudo desanudado sea coloreable, pero este no es el caso. Esto vale en general para todos los nudos y se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Si un diagrama de nudo es coloreable, entonces todo otro diagrama equivalente a este es también coloreable.*

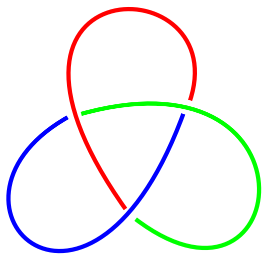

FIGURA 8. El nudo trébol coloreado.

Este teorema nos dice que el ser coloreable, es un invariante de nudos. Luego podemos decir si un nudo es coloreable o no (recién lo podemos decir, pues recordemos que la definición está dada sobre los diagramas de nudos, y no sobre los nudos en sí). Así entonces el nudo desanudado no es coloreable, y el nudo trébol sí lo es, ya que el nudo trébol admite un diagrama coloreable y el nudo desanudado admite un diagrama que no es coloreable.

Aquí tenemos una herramienta que nos puede ayudar a decidir si un nudo dado es desanudado o no. Dado que el nudo desanudado no es coloreable, si tengo un nudo que es coloreable, puedo deducir que este nudo no es desanudado. Entonces si quiero ver que un nudo no es desanudado, una forma posible es coloreando; y si quiero ver que es desanudado, puedo simplemente tratar de llevarlo al diagrama canónico del nudo desanudado con los movimientos de Reidemeister o bien desanudar el nudo en el espacio con las manos.

El nudo mostrado en la Figura 9 no es coloreable. Esto lo podemos ver mediante el siguiente razonamiento: Supongamos que pintamos de color rojo el arco superior, entonces el arco derecho tiene dos opciones, o es rojo o es otro color distinto, si es rojo se puede ver que esto implica que los otros arcos necesariamente deben estar pintados de color rojo; esto es gracias a la segunda condición de coloreo aplicado a los cruces. Si no es rojo, digamos verde (si es azul pasa lo mismo), entonces el arco inferior a este arco debe estar pintado de color azul y el arco izquierdo inferior debe estar pintado con color rojo. Entonces resulta que el arco izquierdo superior debe estar pintado, por un lado con color azul debido al cruce superior de este, y por otro lado debe estar pintado con color verde debido al cruce inferior de este. Luego tal nudo no es coloreable.

Cabe recalcar que este nudo no es desanudado, esto se lo puede comprobar por otros invariantes de nudos, como por ejemplo con *el polinomio de Conway* (a cada nudo, módulo equivalencia de nudos, se le puede asociar un polinomio de Conway, y entonces si dos nudos tienen distintos polinomios de Conway, estos nudos deben ser necesariamente distintos, es decir no equivalentes), que dicho sea de paso, este polinomio puede ser calculado a partir de diagramas de nudos de manera algorítmica muy sencilla. Este ejemplo muestra que, si un nudo no es coloreable, no implica que sea equivalente al nudo desanudado.

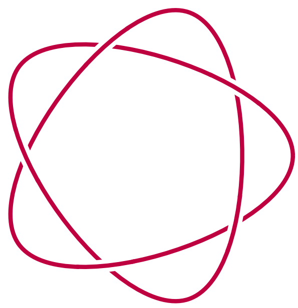

FIGURA 9. Este nudo ni es desanudado, ni es coloreable.

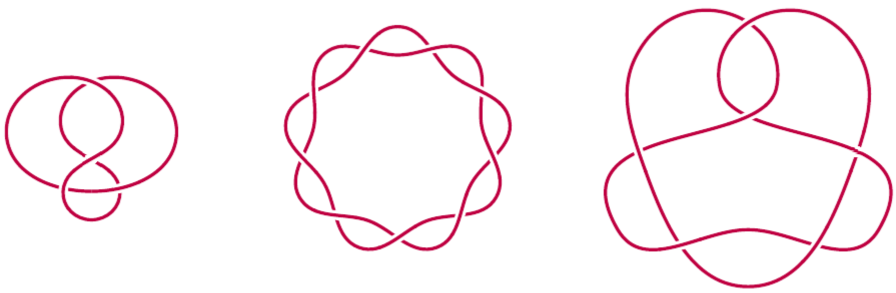

FIGURA 10. Cada uno de estos nudos, o se puede colorear, o se puede desanudar.

Por último dejamos los diagramas de nudos mostrados en la Figura 10, para que el lector pueda decidir si están anudados o no. Cada uno de los cuales o bien es desanuado o bien es coloreable.

Bibliografía

Livingston, C. (1993). *Knot theory*. Cambridge University Press.

Gerson Gutierrez
FAMAF-Universidad Nacional de Córdoba
(✉) *gersonhdd@gmail.com*

Recibido: *22 de noviembre de 2019*.
Aceptado: *8 de diciembre 2019*.
Publicado en línea: *14 de diciembre de 2019*.

El día internacional de la matemática y la cuadratura del círculo

Nota editorial por Juan Carlos Pedraza

El pasado 26 de noviembre, la 40ª Conferencia General de la UNESCO aprobó la Proclamación del 14 de marzo como *Día Internacional de las Matemáticas* (IDM). Esta iniciativa que fue liderada e impulsada por la *Unión Internacional de Matemáticas* (IMU) tiene una componente local que nos llena de satisfacción. En 2016, la *Unión Matemática Argentina* (UMA), creó la *Comisión de Visibilidad de la Matemática* con el objetivo de estrechar el vínculo de nuestra ciencia con la sociedad. Una de sus primeras iniciativas, fue la de instaurar un día de la matemática a nivel nacional. La idea fue tomando cuerpo y durante 2017 se realizó una consulta a nivel nacional en la que la comunidad matemática propuso varias alternativas para establecer el día más adecuado. Mientras esto ocurría, nos enteramos de que la idea no era solo local y había despertado interés a nivel regional a la vez que tomábamos conocimiento de la iniciativa de la IMU, razón por la cual la UMA, integrante de estas asociaciones regionales e internacionales, postergó la decisión a la espera de que se plasmara el proyecto a nivel mundial.

El primer IDM será el próximo año 2020 y caerá un sábado. Los lanzamientos oficiales se llevarán a cabo en la víspera. Uno será en París en la sede de la UNESCO y otro, como un evento plenario, dentro el próximo Foro Einstein 2020 en Nairobi, Kenia. Además más de 75 países y 150 organizaciones como sociedades matemáticas, institutos de investigación, museos, escuelas y universidades ya están anunciando sus celebraciones, y se espera que sigan muchos más.

Cada año se establecerá un tema para dar sabor a la celebración, despertar la creatividad y dar luz a las conexiones entre las matemáticas y todo tipo de campos, conceptos e ideas. El tema para 2020 será *Las matemáticas están en todas partes*. Hay un sitio donde se irá albergando toda la información de IDM (*IDM314*, s.f.).

El 14 de marzo es conocido como el *Día de Pi* (Pi day) por la forma que tiene el hemisferio norte para indicar las fechas, colocando el mes antes que el día (3/14) y es celebrado ya en varios países. En relación con este número, tal vez el más famoso de la matemática, comparto con ustedes una historia increíble y una reflexión personal.

La cuadratura del círculo. *"Más difícil que la cuadratura del círculo"* es una expresión que se suele usar en sentido figurado. En realidad no es cierto que sea difícil. Sencillamente es imposible.

La matemática como ciencia comienza a tomar forma entre los siglos V y II antes de nuestra era, a la luz de un puñado de problemas que sirvieron de estímulo para su desarrollo. Tales, Pitágoras, Apolonio, Arquímedes... son algunos de los nombres de esa era heroica del pensamiento humano. Paradójicamente, los problemas más emblemáticos de entonces: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección de un ángulo, resultaron ser imposibles de resolver. Pero hubo que esperar más de dos mil años antes de que esto fuera establecido. Nunca la matemática avanzó tanto en pos de lo imposible.

Nos vamos a detener en el primero de los problemas mencionados, la cuadratura del círculo y de cómo casi llega a ser ley un verdadero absurdo. Pero para poder llegar a este hecho, conviene recordar brevemente en qué consiste el famoso problema.

El problema planteado por los sabios griegos consistía en construir un cuadrado equivalente (de igual área) a un círculo dado. Había una razón práctica, pues medir un área cuadrada es sencillo y elemental y la de un círculo mucho más complejo e impreciso. Pero el pensamiento griego preponderante añadió la exigencia de hallar tal equivalencia por un procedimiento puro y limpio, casi divino, muy alineado con la filosofía de entonces. Para construir el cuadrado equivalente al círculo, solo se admitía el uso de la regla (para trazar líneas) y el compás (para trazar círculos o puntos a igual distancia que a uno dado). Es decir que cuadrar el círculo, consiste en construir un cuadrado de igual área que un círculo dado, solo usando regla y compás.

Aquí entra en escena el número más famoso y esquivo de la matemática: el número pi, relación que hay entre el perímetro de un círculo y su diámetro, cualquiera sea su tamaño. Las civilizaciones anteriores a la griega ya sabían que esta relación era constante y usaban distintas aproximaciones para hacer los cálculos. Así la Biblia le da a π el valor de 3 cuando describe el arca de la alianza aunque tal vez la grosería de la aproximación no se deba a la ignorancia del cronista sino a un intento didáctico para que el lector entienda rápidamente. El documento más antiguo del que se dispone es el papiro de Rhind (que contiene problemas de unos 4 mil años de antigüedad). Es egipcio y en él π vale 3,16. Arquímedes, 200 años antes de nuestra era, obtuvo el conocido 3,14 (una aproximación notable para la época y la capacidad de cálculo de entonces). Esta aproximación fue mejorada por Ptolomeo, cuatrocientos años después, siguiendo las mismas técnicas de Arquímedes, por el más preciso 3,1416.

El problema de la cuadratura del círculo se traduce en la necesidad de construir una longitud exactamente igual a π, con regla y compás. Los intentos de

Arquímedes, Ptolomeo y los cientos de matemáticos que los siguieron durante mil quinientos años, se los puede ver como intentos fallidos de cuadrar el círculo, aunque ninguno de ellos puede ser visto como un fracaso sino, como suele ocurrir en las ciencias, una paulatina construcción colectiva del conocimiento que nos distingue como especie.

En 1882, el matemático alemán Carl Lindemann, echó un balde de agua fría sobre los optimistas que pensaban encontrar una solución positiva al ya por entonces, milenario problema. Demostró que era imposible construir el número π con regla y compás y con ello demostró que la cuadratura del círculo era imposible en los términos planteados por los griegos. Las técnicas usadas por Lindemann para demostrar este resultado – que π era un número trascendente – fueron similares a los que, casi una década antes, había usado Charles Hermite para demostrar que el número e, base de los logaritmos naturales, también era trascendente, es decir, no era raíz de ningún polinomio de coeficientes enteros.

Esta introducción histórica, que es mucho más extensa e interesante, viene a cuento de lo que ocurrió en 1897 en el Estado de Indiana, Estados Unidos, quince años después de que Lindemann demostrara que la cuadratura del círculo era imposible de resolver.

Un excéntrico médico, llamado Edward Goodwin proclamó en 1888 que había encontrado un método para cuadrar el círculo. Hasta aquí no hubiese sido noticia y solo sería uno más de los fallidos intentos de cuadrar el círculo. Tampoco era el primero (ni sería el último) en proclamar tal hazaña después del trabajo de Lindemann. Eso es frecuente en la ciencia, en la historia de cada problema famoso.

Pero una década más tarde, el Dr. Goodwin decidió que su descubrimiento sería un regalo para su patria chica.

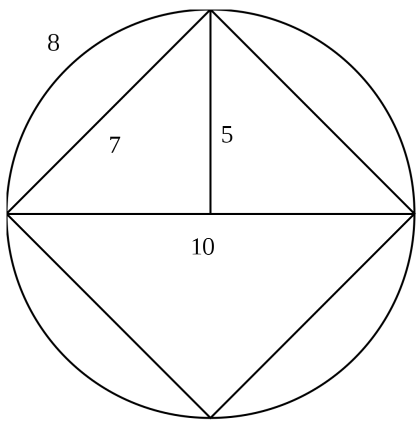

Figura 1. Figura presentada en el proyecto.

Tomó contacto con el representante de su condado en la Asamblea General de Indiana y le presentó un proyecto de ley con una nueva verdad matemática que era ofrecida como una contribución gratuita a la educación del estado de Indiana, sin necesidad de pagar derechos de autor como sí lo tendrían que hacer por su uso, fuera de Indiana. El Estado solo debía aceptarla y adoptarla oficialmente en la legislatura. Era todo a favor con solo levantar la mano.

En su modelo, la longitud de la circunferencia y la del diámetro estaban en relación 32 a 10. En otras palabras, Goodwin venía a decirnos que π valía exactamente 3,2 (y de paso, que la raíz cuadrada de 2 era $10/7 = 1{,}4285\ldots$ una buena aproximación después de todo). La figura, presentada en el proyecto de ley, muestra las medidas por él establecidas sin dar mayores explicaciones. Ni siquiera describe un método donde intervengan la regla y el compás y más bien trata de "corregir" la clásica fórmula de Arquímedes para el cálculo del área del círculo como igual al área de un triángulo rectángulo cuyos catetos fueran el radio y la longitud de la circunferencia (Fabreti, s.f.).

El 18 de enero de 1897 Taylor Record, así se llamaba el asambleísta, presentó el proyecto. Goodwin había patentado su método en Estados Unidos y en varios países de Europa. Todos deberían pagar royalty, excepto el Estado de Indiana.

El 5 de febrero, con la opinión favorable del comité de Educación (!), una de las dos cámaras de representantes votó el proyecto por unanimidad: 67 votos a favor, ninguno en contra. Los legisladores no solo estaban echando por tierra la demostración de Lindemann, sino las excelentes aproximaciones de π realizadas por los egipcios, Arquímedes y todas las que le siguieron, miles de años antes...

El proyecto de ley sobre la cuadratura del círculo solo necesitaba la aprobación de la otra cámara de la Asamblea. Por esos días dijo Goodwin a un diario local: "mi descubrimiento revolucionará las matemáticas. Los astrónomos estaban equivocados". Cuando el debate estaba concluyendo, llegó a Indiana el profesor Clarence Waldo, matemático de la Universidad de Purdue, para gestionar el presupuesto anual para la Academia de Ciencias de Indiana. Un asambleísta le dio una copia del proyecto y le ofreció presentarle a la nueva celebridad de Indiana. Waldo rechazó la invitación, con solo ver el título del proyecto. No obstante ello, se preocupó mucho cuando leyó lo que la Asamblea estaba por aprobar: un verdadero papelón del que se reiría todo el mundo. De modo que postergó sus urgencias presupuestarias y convenció a un buen número de representantes para que no votaran tremenda locura. El tratamiento del proyecto quedó postergado en forma indefinida por falta de consenso en la segunda cámara y así Indiana evitó ser el hazmerreír del mundo. Para más detalles del caso y el de su protagonista, ver (Ansede, s.f.; Hallerberg, 1975).

Por suerte estas cosas ya no suceden... ¿O sí? Escuchamos a líderes del mundo negar los efectos del cambio climático a pesar de los estudios científicos que dan cuenta de ellos. Temas tales como el voto electrónico, la regulación de agrotóxicos, los programas de vacunación – la lista podría seguir – no son siempre tratados con el rigor que se merecen y no siempre se consulta a los especialistas para que aporten sus conocimientos.

Decía el maestro Luis Santaló que en las sociedades bien organizadas no es necesario que todos lo sepan todo, sino que entre todos, abarquemos todo el conocimiento posible. No es obligación de nuestros representantes saber de todo. Eso es tan imposible como lo es cuadrar el círculo. Lo que sí deberíamos pedirles como sociedad, además de los valores básicos de honestidad, pasión y vocación de servicio, es la de tener la sabiduría de asesorarse en cada tema con los que sí saben de cada asunto. Y es allí donde los científicos, que tenemos la vocación natural (o así debería ser) y la responsabilidad de aplicar nuestros conocimientos, deberíamos comprometernos para que la población que hizo el esfuerzo de formarnos y de la cual formamos parte, viva en mejores condiciones. No es cuestión de abogar por una suerte de tecnocracia que reemplace a la política a la hora de tomar decisiones, sino la de usar el conocimiento humano acumulado, en forma inteligente.

Volviendo al Día Internacional de las Matemáticas, la UNESCO dice en sus considerandos que este día es para celebrar la belleza y la importancia de las matemáticas y su papel esencial en la vida de todos. Pues que así sea.

Bibliografía

Ansede, M. (s.f.). *Diario el país.* España. Descargado 2017-02-12, de https://elpais.com/elpais/2017/02/10/ciencia/1486759726_219935.html

Fabreti, C. (s.f.). *Diario el país.* España. Descargado 2019-03-26, de https://elpais.com/elpais/2019/03/04/ciencia/1551686906_351630.html#:~:targetText=r%2F2%20%3D%20%CF%80r2.,la%20longitud%20de%20su%20circunferencia.

Hallerberg, A. (1975). House Bill no. 246 revisited. *Proc. Indiana Acad. Sci.*, *84*.

Idm314. (s.f.). Descargado 2019-12-03, de https://www.idm314.org

Revista de Educación Matemática
Volumen 34, N° 3 (2019), páginas 41 – 57
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículo Científico [1]

PERSPECTIVAS MATEMÁTICAS Y PEDAGÓGICAS DE LA JUSTIFICACIÓN: APROXIMANDO LA RAÍZ DE 18 [1]

Jason Cooper y Alon Pinto

Resumen. “La raíz cuadrada de 18 está más cerca de 4 que de 5, porque 18 está más cerca de 16 que de 25”. ¿Será válida esta afirmación, escuchada en una clase de un octavo grado? Proponemos argumentos hipotéticos sobre los cuales esta afirmación estaría basada y los analizamos desde dos perspectivas complementarias – epistémica y pedagógica – apoyándonos en la noción de Toulmin sobre dependencia de campo en la argumentación y en la clasificación de Freeman de la justificación basada en el tipo de intuición, creencia o comprensión subyacentes. Proponemos que nuestro análisis de esta proposición puede ser un modelo de investigación en cursos de formación docente.

Abstract. “The square root of 18 is closer to 4 than it is to 5 because 18 is closer to 16 than it is to 25”. Is this statement, voiced in an 8th grade class, valid? We suggest hypothetical arguments upon which this statement might be based, and analyze them from two complementary perspectives – epistemic and pedagogical – drawing on Toulmin’s notion of field-dependence in argumentation and on Freeman’s classification of warrants based on the type of underlying intuition, belief or prior understanding. We propose that our investigation of this statement may serve as a model for inquiry in teacher preparation.

[1] Originalmente publicado en inglés en *For the Learning of Mathematics*, https://flm-journal.org como: Cooper, J. & Pinto, A. (2017). Mathematical and pedagogical perspectives on warranting: approximating the root of 18. *For the Learning of Mathematics*, 37(2), 8–13.
Traducido por: Abraham Arcavi (con autorización de los autores y los editores).
N. de E.: a lo largo de todo el artículo, siempre que aparezca “raíz”, “raíz de...” o “función raíz”, se refiere a raíz cuadrada.

Palabras clave: Justificación matemática, validez matemática, perspectivas interactuantes.
Keywords: Mathematical warranting, mathematical validity, interacting perspectives.

Profesora: ¿Qué número es raíz de 18?

Alumnos: Entre 4 y 5.

Profesor: ¿Quién quiere explicar?

Gail: 4 al cuadrado es 16 y cinco al cuadrado es 25.

Profesor: ¿De quién está más cerca?[2]

Dina: De 4.

Profesor: De 4. ¿Por qué?

Dina: 18 está más cerca [pausa]

Profesor: Porque 18 está más cerca de 16 que de 25

Dina: está a dos [de 16] y a 7 [de 25], la diferencia.

Esta transcripción, tomada de una clase en un octavo grado en Israel[3], fue observada durante un curso de desarrollo profesional docente basado en videos de clase. En su momento, no provocó respuestas de los profesores participantes, pero para nosotros, algo en el razonamiento no nos pareció del todo correcto. Claramente, la afirmación (A) "$\sqrt{18}$ está más cerca de 4 que de 5", es correcta, y también lo son los datos (D) sobre los cuales se apoya "18 está más cerca de 16 que de 25". Pero, ¿es correcto decir que A es verdadero por causa de D?

Reconocemos que diferentes comunidades matemáticas, cada una de ellas guiada por sus normas particulares y sus objetivos, pueden tener razones diferentes para avalar o rechazar D como la causa de A. Típicamente, los matemáticos se ocupan de las rutinas de demostración; para ellos se puede decir que D es la causa de A si es un elemento clave en la demostración de una generalización de A. Alumnos de un octavo grado mayormente se ocupan de rutinas de cálculo y estimación. Ellos pueden percibir que la proximidad de 18 a 16 es en cierto sentido 'responsable' de la proximidad de a 4, y eso se apoya en la estimación. Profesores, al decidir si avalan esa narrativa en sus clases, pueden guiarse por lo que sus alumnos saben actualmente y por lo que necesitan saber en un futuro próximo. Por lo tanto, renunciamos a la falacia de un análisis "objetivo" de esta proposición. En cambio, consideraremos la perspectiva de los matemáticos, de los alumnos y de sus profesores acerca de la palabra 'porque' en un argumento.

Nuestra motivación inicial fue desentrañar el potencial de esta anécdota para fomentar la discusión en un curso de desarrollo profesional docente. Nuestro análisis de la proposición reveló una profundidad y unos matices inesperados, tanto matemáticos como pedagógicos. En este artículo, reconstruimos nuestro análisis

[2]Tanto en hebreo, como en español, el número sería referido normalmente como 'cuál', pero en este diálogo fue referido como 'quién'.

[3]N. de T.: los estudiantes de octavo grado en Israel tienen edades entre 13 y 14 años.

con dos objetivos en mente. El primero es compartir nuestros hallazgos en relación con el asunto matemático en juego y con respecto a la argumentación matemática en diferentes comunidades. El segundo es mostrar cómo un análisis multifacético de un error aparente puede servir como un trampolín para investigar. Además, mostramos cómo las perspectivas matemática y pedagógica interactúan y se enriquecen mutuamente.

Fundamentos teóricos

Consideramos el 'conocimiento' matemático como un discurso particular de una comunidad –sus modos establecidos de comunicación– que se constituye mediante palabras clave y sus usos, mediante narrativas que son avaladas o rechazadas por la comunidad, mediante mediación visual y mediante rutinas repetitivas (Sfard, 2008). La comunidad de matemáticos define un discurso matemático especial. Sin embargo, hay otras comunidades que se ocupan de un discurso matemático, tales como los profesores de educación secundaria y los investigadores en educación matemática. Aun un aula determinada puede tener su propio discurso. Las comunidades pueden diferir en su uso de palabras clave, en el tipo de rutinas de las que se ocupan, o en el uso de reglas y normas que determinan cuáles narrativas serán avaladas o rechazadas.

Un argumento es un tipo particular de narrativa, y una argumentación es un tipo particular de rutina discursiva. De acuerdo al modelo de (Toulmin, 1958) acerca de la estructura y el contenido semántico de la argumentación, un argumento consistiría típicamente en una afirmación (o conclusión), basada en datos (o información), y una justificación que permite derivar la conclusión a partir de los datos. Asimismo, incluiría soportes en los cuales la justificación se apoya, una calificación expresando el grado de confianza del argumentador en la conclusión, y una refutación que consiste de posibles objeciones a la conclusión, incluyendo excepciones o condiciones bajo las cuales la conclusión no es sostenible. En estos términos, la afirmación "$\sqrt{18}$ está más cerca de 4 que de 5" está basada en el dato "18 está más cerca de 16 que de 25". En el trasfondo, se esconde una justificación tácita sobre la cual podemos especular. Quizás la justificación del argumentador fue "cuando un número está más cerca de n^2 que de $(n+1)^2$ su raíz está más cerca de n que de $n+1$". Las justificaciones, y en particular los argumentos en los que se basan, dependen del campo de actividad en el cual ocurre la argumentación. Desde nuestra perspectiva discursiva, reemplazaríamos campo por discurso. Por ejemplo, en el discurso de los matemáticos, la justificación típica sería que la afirmación puede ser demostrada.

(Freeman, 2005) opina que la noción de dependencia del campo de Toulmin es problemática. Él sostiene que las personas pueden participar en varios campos de actividad, y a menudo es difícil (e improductivo) intentar determinar el campo en el cual la argumentación tiene lugar. En cambio, él clasifica las justificaciones en base al tipo de intuición, creencia o comprensión previa que las originaron. Propone cuatro categorías: a priori (basada en la intuición primaria), empírica (basada en la experiencia o en intuiciones secundarias), institucional (basada en definiciones o en reglas definidas) y evaluativa (que requiere un proceso argumentativo tal como una demostración matemática).

> *Esta clasificación conserva la idea de dependencia de campo de Toulmin, pero sin la problemática noción de campo. Justificaciones diferentes serán apoyadas de maneras diferentes, y debemos observar el tipo de justificación para determinar cómo hacerlo de manera apropiada (p. 342).*

(Von Glasersfeld, 1993) argumentó que "lo que sea que el alumno diga [...] es lo que tiene sentido para él en ese momento. Debe ser tomado seriamente como tal, sin importar cuán raro o 'incorrecto' parezca" (p. 10). Aplicando esto a la argumentación, reconocemos una implicación pedagógica al enfoque de Freeman. Desde la perspectiva de Toulmin, al considerar campos de actividad nos puede llevar a decidir si un argumento es válido o normativo (es decir, sería avalado por una comunidad particular), mientras que considerar el tipo de intuición o comprensión previa sobre la cual se apoya un argumento, dejando de lado la pregunta de si es 'válido', nos ayudaría a ver que el pensamiento del alumno tiene sentido.

(Chazan & Herbst, 2012) han usado experimentos (acerca de rupturas de normas) para investigar normas matemáticas y pedagógicas de los profesores. Por medio de viñetas de clase, en las que, para algunos profesores algo 'no se siente como correcto', sondearon y revelaron normas tácitas de clases. En estos términos, puede decirse que la afirmación acerca de $\sqrt{18}$ ha violado una norma tácita del discurso matemático. El objetivo de este estudio es explicitar nuestras rupturas de las normas matemáticas, primeramente, para nosotros mismos y luego para los lectores de este artículo, revelando por qué tendemos a rechazar la afirmación sobre $\sqrt{18}$. A pesar de eso, entendemos que esta afirmación tiene sentido para otros. Es más, aun cuando eventualmente rechacemos la afirmación, reflexionar sobre ella puede ser productivo. (Borasi, 1996) sugirió cómo errores en la clase pueden ser un trampolín para una investigación matemática. En base a eso, proponemos cómo un argumento, considerado un error, puede servir de trampolín para una investigación matemática y pedagógica en la formación docente. Aquí ejemplificamos una investigación de ese tipo.

Análisis epistémico: la perspectiva del matemático

Consideremos la siguiente proposición, basada en el intercambio ocurrido en el octavo grado:

> **Proposición 1.1**: $\sqrt{18}$ *está más cerca de 4 que de 5 porque 18 está más cerca de 16 que de 25.*

En esta sección, nuestra meta es elaborar nuestras normas de argumentación (como matemáticos), explicando en qué sentido esta proposición las transgrede. Para ello, elaboramos la proposición con argumentos hipotéticos, y discutimos razones para avalar o rechazar cada uno de ellos. En el discurso de los matemáticos, la palabra 'porque' en la Proposición 1.1 debería estar ligada a la idea de demostración matemática. Presentamos un argumento hipotético, basado en la descomposición estructural de Toulmin en afirmación, datos, justificación y su soporte:

> **Argumento 1.1**: (Afirmación:) $\sqrt{18}$ está más cerca de 4 que de 5 porque (Datos:) 18 está más cerca de 16 que de 25, debido a que (Justificación 1.1:) cuando un número x está más cerca de 16 que de 25, $\sqrt{x}$ está más cerca de 4 que de 5, teniendo en cuenta que (Soporte 1.1:) la Justificación 1.1 puede ser demostrada.

Acá hemos explicitado un posible significado de "porque' en la Proposición 1.1. Por lo tanto, debemos decidir si la Justificación 1.1 puede ser demostrada. Esto sugiere una investigación.

> **Investigación 1.1:** Demuéstrese o refútese la Justificación 1.1.

El resultado de esta investigación es que la Justificación 1.1 es inválida, pues, por ejemplo, $20{,}3$ está más cerca de 16 que de 25, pero $\sqrt{20{,}3} \approx 4{,}505$ está más cerca de 5 que de 4. Notamos que el intervalo de contraejemplos es bastante pequeño $20{,}25 < x < 20{,}5$ (longitud 0.25).

Hemos mostrado cómo en cierto sentido el Argumento 1.1 puede ser considerado inválido. El argumento se sostiene en la Justificación 1.1, para la cual hay contraejemplos, y por lo tanto no se puede demostrar. Aparentemente, hemos revelado el origen de nuestro recelo con respecto a la Proposición 1.1, sin embargo, pensamos que la situación es más delicada, y lo demostraremos sugiriendo una línea de argumentación similar usando números diferentes. Supóngase que la proposición hubiese sido:

> **Proposición 1.2**: $\sqrt{21}$ está más cerca de 5 que de 4 porque 21 está más cerca de 25 que de 16.

Esta proposición se puede argumentar así:

> **Argumento 1.2:** (Afirmación:) $\sqrt{21}$ está más cerca de 5 que de 4, porque (Datos:) 21 está más cerca de 25 que de 16, debido a que (Justificación 1.2:) cuando un número x está más cerca de 25 que de 16, $\sqrt{x}$ está más cerca de 5 que de 4, teniendo en cuenta que (Soporte:) la Justificación 1.2 puede ser demostrada.

Este argumento sugiere una nueva investigación:

> **Investigación 1.2:** Demuéstrese o refútese la Justificación 1.2.

A diferencia de la Justificación 1.1, la Justificación 1.2 puede ser demostrada, así. Supóngase que x es mayor que

$$20{,}5 = \frac{4^2 + 5^2}{2}.$$

Entonces es también mayor que

$$20{,}25 = \left(\frac{4+5}{2}\right)^2,$$

y como la función raíz es creciente, $\sqrt{x} > 4{,}5$ es verdadero.

¿Sería el Argumento 1.2 avalado por la comunidad de matemáticos? La Justificación 1.2 es demostrable, la afirmación se deduce de los datos, por lo tanto, en base a la discusión anterior, la respuesta es "sí". Sin embargo, nos preguntamos si la Justificación 1.2 es apropiada. ¿Son los datos la causa de la afirmación? Los lectores compartirán nuestra sensación de que esto no es del todo correcto, y trataremos de articular por qué.

Expectativas acerca de la palabra 'porque': En el discurso de los matemáticos, tanto como en el discurso general, un argumento expresado como "Afirmación porque Datos" no solo nos convencería que la afirmación es verdadera, pero nos debería proveer alguna apreciación de la naturaleza de esa causalidad entre los datos y la afirmación, tal como lo sugiere la palabra porque. Desde nuestra perspectiva, el Argumento 1.2, si bien está basado en la Justificación 1.2 que es demostrable, falla en proveernos de esa apreciación porque, a pesar de la similitud entre la Justificación 1.1 y la Justificación 1.2, no queda claro por qué la segunda es válida y la primera no lo es.

Generalización: Para entender por qué $\sqrt{21}$ está más cerca de 5 que de 4, y por qué $\sqrt{18}$ está más cerca de 4 que de 5, nos gustaría tener una justificación general. La Justificaciones 1.1 y 1.2 nos parecen un tanto específicas. Por empezar, los roles de los números 4, 5, 16 y 25 pueden generalizarse a n, $n+1$, n^2, $(n+1)^2$ pero, aun así, la existencia de dos afirmaciones similares (Justificaciones 1.1 y 1.2), siendo una válida y la otra no, sugiere que un patrón más general está esperando ser descubierto. Ambas cuestiones se resolverían si la siguiente justificación general fuera válida:

> **Justificación 1.3:** Si un número x en el intervalo $[n^2, (n+1)^2]$ está más cerca de uno de los extremos, $\sqrt{x}$ estará más cerca del correspondiente extremo del intervalo $[n, n+1]$.

Ya hemos establecido que la Justificación 1.3, tal como está enunciada, es inválida. Sin embargo, sugerimos ahora la siguiente investigación:

> **Investigación 1.3:** Encontremos todos los contraejemplos de la Justificación 1.3. Modifiquémosla para hacerla demostrable y reformulemos la Proposición 1.1 de acuerdo a ello.

La investigación produce un resultado que nos pareció sorprendente. La justificación es 'casi-válida', en el sentido de que la longitud del intervalo de contraejemplos, $n^2+n+\frac{1}{4} < x < n^2+n+\frac{1}{2}$, es $0{,}25$ para todo n, tal como lo fue para el caso de $n=4$, y la longitud realtiva del intervalo de contraejemplos $\frac{0{,}25}{(n+1)^2-n^2}$ tiende a cero. Por lo tanto, las Justificaciones 1.1 y 1.3 pueden 'corregirse' agregando una refutación apropiada. Sugerimos lo siguiente:

> **Proposición 1.4:** $\sqrt{18}$ está más cerca de 4 que de 5 porque 18 está mucho más cerca de 16 que de 25.

> **Justificación 1.4:** Si un número x del intervalo $[n^2, (n+1)^2]$ está suficientemente cerca de uno de los puntos extremos, $\sqrt{x}$ está más cerca del punto extremo correspondiente del intervalo $[n, n+1]$.

Elaboramos esta proposición y su justificación en la sección siguiente.

Análisis pedagógico: las perspectivas del alumno y del profesor

La Proposición 1.1 fue producida por una alumna, guiada y estimulada por su profesora. Aceptando la postura de von Glasersfeld, esta proposición debe haber tenido sentido para el alumno (y para el profesor). Queremos investigar qué sentido pudo haber tenido esta proposición para el alumno. Nuestra meta no es llegar al fondo del pensamiento de un alumno en particular, más bien aprovechar esta postura pedagógica, considerando lo que la alumna pudo haber pensado, para nuestra investigación acerca de los aspectos epistémicos y pedagógicos de la matemática en juego.

Por empezar, la matemática practicada en un octavo grado es diferente de lo que es practicado en departamentos de matemática. Para un matemático, el valor particular de $\sqrt{18}$ es de poco interés; la cuestión principal es la demostrabilidad de la justificación de la afirmación general. Sin embargo, en muchos contextos escolares, la estimación del valor de un cálculo es una rutina apreciada, y cualquier argumento que apoye la Proposición 1.1 debe ser considerado en ese contexto. En términos de Toulmin, el argumento de la alumna y el argumento del matemático pertenecen a diferentes campos de actividad.

Para encontrarle sentido a lo que dijo la alumna, no es suficiente considerar su campo de actividad; recurrimos además a las categorías de argumentación de Freeman. Considérese el siguiente argumento hipotético:

> **Argumento 2.1:** (Afirmación:) $\sqrt{18}$ está más cerca de 4 que de 5, porque (Datos:) 18 está más cerca de 16 que de 25, ya que (Justificación 2.1:) cuando un número x está cerca de n^2, $\sqrt{x}$ está cerca de n.

Esta justificación, con o sin una refutación (condicionado *a cuán cerca x* esté de n^2), parece ser apropiada para estimar $\sqrt{18}$. ¿Cuál podría ser su soporte? Proponemos lo siguiente:

> ... teniendo en cuenta el hecho que (Soporte 2.1) esta es mi experiencia con la función raíz.

En términos de Freeman, sugerimos que a diferencia del soporte de los matemáticos (es decir, basado en la demostrabilidad de la justificación), el soporte de un alumno para la Justificación 2.1 puede ser empírico (es decir, basado en la experiencia), ya que la justificación puede ser un medio para el fin de aproximar un cálculo. Esto lleva a una cuestión pedagógica crítica: ¿qué comprensión previa de la función raíz puede respaldar la Justificación 2.1? Contextos escolares diferentes pueden sugerir diferentes respuestas. Por lo tanto, la investigación que estamos proponiendo diferiría a través de distintos contextos. Proponemos respuestas basadas en nuestras experiencias escolares en Israel.

Nuestra primera respuesta es continuidad. Aunque los alumnos no han sido introducidos a esta noción, subyace a la creencia que la proximidad de 18 a 16 'causa' la proximidad de $\sqrt{18}$ a 4. Pero, la afirmación no fue solo que está cerca de 4, sino más cerca de 4 que de 5. Esto parece basarse en la noción de monotonicidad. De acuerdo a esto proponemos:

> **Justificación 2.2:** A medida que x aumenta de 16 a 25, $\sqrt{x}$ aumenta de 4 a 5.

Esta justificación sugiere que hay un cierto punto en el cual $\sqrt{x}$ hará la transición de "más cercano a 4" a "más cercano a 5". Pensamos que tal justificación, proviniendo de un alumno, sería empírica en términos de Freeman. No es ni a priori (obvia e inmediata), ni institucional (basada en reglas o definiciones), ni evaluativa (basada en cierto proceso de razonamiento). Está basada en intuiciones secundarias que un alumno ha recogido con respecto a la función raíz. Revisando la Justificación 1.4 con estas ideas en mente, notamos que las palabras "mucho más cerca" tienen un significado matemático sólido, derivado de la definición de continuidad: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x - 16 < \delta$ implica $\sqrt{x} - 4 < \varepsilon$. En estos términos, la Proposición 1.1 se apoya tácitamente en que $\delta = 2$ es un valor apropiado para $\varepsilon = 0{,}5$.

Consideremos ahora la Proposición 1.4 (basada en el dato de que 18 está *mucho* más cerca de 16) teniendo en mente la Justificación 2.2. Pensamos que esta proposición puede ser aprobada igualmente por matemáticos y profesores, ya que el argumento sugerido es bastante sofisticado. Su justificación sigue siendo empírica, apoyándose en la experiencia con funciones continuas y monótonas[4], mientras que su refutación, implicada por la palabra 'mucho', permite excepciones más alejadas de 16. Si bien la palabra 'mucho' es bastante imprecisa, quien esté familiarizado con el discurso de los matemáticos sabe cómo formalizarla en un argumento evaluativo, basado en lo siguiente:

> **Justificación 2.3:** Existe un único número $16 < d < 25$, tal que para todo $16 \leq x \leq 25$: si $x < d$ entonces $\sqrt{x}$ está más cerca de 4 que de 5, y si $x > d$ entonces $\sqrt{x}$ está más cerca de 5 que de 4.

Esto sugiere una variante de la Investigación 1.3:

> **Investigación 2.1:** Encontremos d para el cual la Justificación 2.3 es válida y generalicemos.

Desde el punto de vista del matemático, la Justificación 2.3 es atractiva porque no solo generaliza el rol de 18 para cualquier número suficientemente cercano a 16, sino que además sugiere una generalización del rol de la función raíz a cualquier función monótona y continua en un cierto intervalo.

Examinemos ahora con más cuidado la Justificación 2.2 y en qué se apoya. ¿Cuál puede ser el origen de la experiencia de los alumnos acerca de funciones continuas y monótonas? La formulación de la Proposición 1.1 nos sugiere que quien la dijo cree (erróneamente) que la transición de $\sqrt{x}$ de *más cerca de 4 a más cerca de 5* está exactamente a mitad de camino entre 16 y 25. Aparentemente es probable que la alumna, y posiblemente incluso la profesora, aplicaban un razonamiento lineal a una situación no lineal (véase, por ejemplo, (Markovits, Eylon, & Bruckheimer, 1983)). Claramente si $f(x)$ es *lineal* en el intervalo [4,5] (es decir, su gráfico es una recta), entonces la siguiente proposición es válida:

[4] A lo largo de todo el artículo, cuando decimos 'monótonas', nos referimos a estrictamente monótonas.

> **Proposición 2.2:** Si un número x está más cerca de uno de los puntos extremos del intervalo $[a, b]$, entonces $f(x)$ está más cerca del punto extremo correspondiente en el intervalo $[f(a), f(b)]$.

La función x^2 y su inversa $\sqrt{x}$ no son funciones lineales, pero tienen mucho en común con ellas (son continuas y monótonas). Es posible que la Proposición 1.1 se haya basado en una sobre-extensión de un principio válido para relaciones lineales. Desde esta perspectiva, incluso la Proposición 1.2, que se basa en la Justificación 1.2 que es válida, puede ser considerada 'pedagógicamente' inválida, si aceptamos que está basada en una aplicación incorrecta de linealidad. Esto sugiere una explicación para nuestro recelo con respecto a la Proposición 1.1; a pesar de su validez epistémica, sospechamos que está basada en una concepción errónea de la alumna, y por lo tanto no es válida. Esto provee una nueva perspectiva sobre la Justificación 1.3 (si un número x en el intervalo $[n^2, (n+1)^2]$ está más cerca de uno de los extremos, estará más cerca del extremo correspondiente del intervalo $[n, (n+1)]$). La Investigación 1.3 convocó un argumento evaluativo acerca de la invalidez de esta justificación: encontrar (y demostrar) el conjunto de contraejemplos. Sin embargo, recordamos claramente el primer argumento que nos vino a la mente:

> **Argumento 2.4:** (Afirmación 2.4:) la Justificación 1.3 no es válida, debido a que (Datos:) hubiera sido válida si $\sqrt{x}$ fuese lineal, pero no lo es.

¿Sobre qué tipo de justificación se basa este argumento? Notamos que la Proposición 2.2 es válida para funciones lineales, donde la transición de "cerca de $f(a)$" a "cerca de $f(b)$" ocurre en el punto medio $\frac{a+b}{2}$. Además, esta propiedad caracteriza a las funciones lineales (es decir, es la condición necesaria y suficiente para la linealidad). Por lo tanto, sugerimos lo siguiente:

> **Justificación 2.4:** Si una propiedad caracteriza a las funciones lineales, entonces no es válida para funciones no lineales.

Esto implica que si $f(x)$ no es lineal, entonces el punto d (como en la Justificación 2.3) no puede ser el punto medio de $[16, 25]$, y la Afirmación 2.4 se deduce de los datos basados en esta justificación. El problema es que la Proposición 2.2 ¡no es una condición suficiente para la linealidad! Podemos cerciorarnos de esto mediante la siguiente investigación:

> **Investigación 2.3:** Encontremos una función no lineal continua creciente para la cual la Proposición 2.2 es válida.

Demostramos la existencia de dichas funciones en la siguiente sección acerca de la perspectiva del alumno.

Nota acerca de la perspectiva del profesor: Nuestro análisis epistémico y pedagógico puede llevarnos a cuestionar el criterio del profesor al inducir y avalar la Proposición 1.1. Sin embargo, el docente pudo haber sido capaz de justificar pedagógicamente este paso. Proponer este tipo de justificaciones va más allá del alcance de este artículo. Dirigimos a los lectores al trabajo de (Nardi, Biza, & Zachariades, 2012) que se basaron en los trabajos de Toulmin y de Freeman para estudiar las justificaciones de los profesores, distinguiendo en su argumentación entre consideraciones epistemológicas/pedagógicas, a-priori/empíricas/institucionales/evaluativas y personales/profesionales.

Retomando el análisis epistémico desde la perspectiva del alumno

Nuestro primer análisis estaba basado en una argumentación evaluativa: justificaciones que son demostrables matemáticamente. Retomamos el análisis de la matemática, centrándonos en la comprensión matemática y las intuiciones que pueden traer los alumnos, incluyendo nociones tales como continuidad, monotonicidad y linealidad. Comenzamos trabajando la generalización de la Investigación 1.3.

> **Investigación 3.1:** Demuéstrese o refútese la siguiente aserción: Si un número en el intervalo (a^2, b^2) está más cerca de uno de los puntos extremos del intervalo, su raíz estará más cerca del correspondiente punto extremo del intervalo (a, b).

Para refutar esta aserción por medio de un contraejemplo, se debe encontrar un número y, para el cual se cumple una de estas dos opciones:

A. y está más cerca de a^2, es decir $y < \frac{a^2+b^2}{2}$, pero su raíz cuadrada está más cerca de b, es decir $y > \frac{a+b}{2}$,

B. y está más cerca de b^2, es decir $y > \frac{a^2+b^2}{2}$, pero su raíz cuadrada está más cerca de a, es decir $y < \frac{a+b}{2}$.

Dijimos que para el caso de $a = 4$, $b = 5$ existen contraejemplos del tipo A. Para el caso general denotemos $d = b-a$ como la longitud del intervalo (a, b). Encontremos primero el punto medio del intervalo (a^2, b^2):

$$\frac{a^2+b^2}{2} = \frac{a^2+(a+d)^2}{2} = \frac{2a^2+2ad+d^2}{2} = a^2+ad+\frac{d^2}{2}.$$

Comparamos esto con el cuadrado del punto medio del intervalo (a, b):

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+(a+d)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2a+d}{2}\right)^2 = \frac{4a^2+4ad+d^2}{4} = a^2+ad+\frac{d^2}{4}.$$

Sin importar cuales fueran los valores de a y de b, hay una diferencia de $\frac{d^2}{4}$ entre los dos resultados. Esto muestra que contraejemplos de tipo B no pueden existir, y que contraejemplos de tipo A sí existen, y que todos ellos están en un intervalo de longitud $\frac{d^2}{4}$ tales que

$$a^2 + ad + \frac{d^2}{4} < y < a^2 + ad + \frac{d^2}{4}.$$

Este argumento tiene una convincente representación visual. La Figura 1 muestra dos puntos A, B en la parábola $y = x^2$ (ó $x = \sqrt{y}$). El punto C es el punto medio de la cuerda AB. Las líneas punteadas $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a^2+b^2}{2}$ dividen el plano en cuatro 'cuadrantes'.

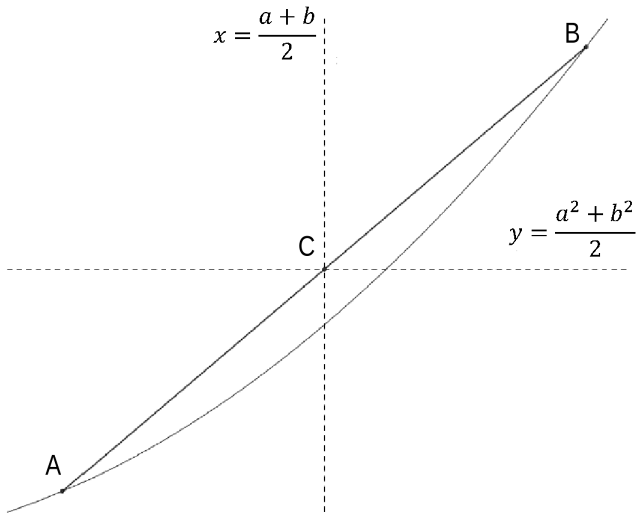

Figura 1. Representación visual del argumento del punto medio

El dominio de los contraejemplos de tipo A y B tienen ahora una interpretación gráfica: un contraejemplo de tipo A es un punto de la parábola en el cuadrante inferior derecho y un contraejemplo de tipo B es un punto de la parábola en el cuadrante superior izquierdo. La parábola es convexa, su gráfico está completamente debajo de la cuerda, por lo tanto, no pasa por el cuadrante superior izquierdo, y entonces contraejemplos de tipo B no existen. El rango de contraejemplos de tipo A está indicado en la Figura 2.

¿Qué sentido le atribuirían los alumnos a la Proposición 1.1? Tuvimos curiosidad por saber qué pensarían los alumnos de la Proposición 1.1. No lo investigamos sistemáticamente, pero el primer autor lo intentó con su hijo, alumno del

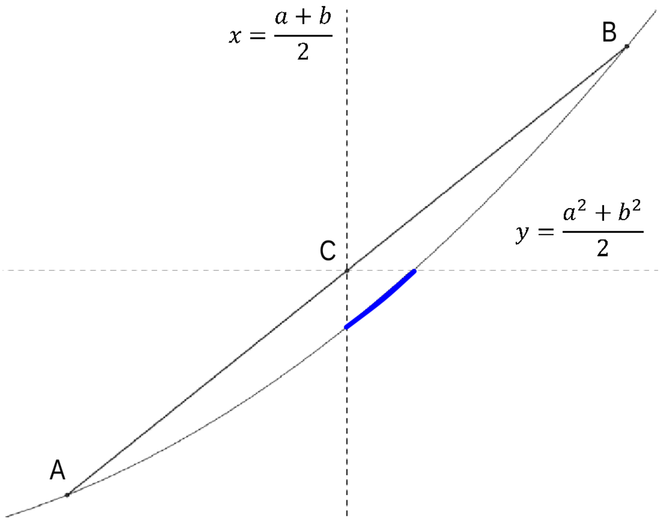

FIGURA 2. Conjunto de contraejemplos del tipo A

duodécimo grado[5] en un curso avanzado de matemática. Él, como nosotros, reconoció la justificación tácita 1.3 en esta proposición, que inmediatamente consideró incorrecta. Su argumento fue el siguiente: si la Justificación 1.3 fuera verdadera, entonces necesariamente debería ser verdadero que "la raíz del punto medio es el punto medio de las raíces", es decir

$$\sqrt{\frac{4^2+5^2}{2}} = \frac{4+5}{2}.$$

Como este no es el caso ($\sqrt{20{,}5} \neq 4{,}5$), la Justificacion 1.3 es falsa y debe existir un contraejemplo. Nos preguntamos qué nivel de comprensión requeriría este argumento. Parecería estar basado en la noción de continuidad, pero el alumno no tenía ningún conocimiento formal de análisis matemático más allá de lo que estudió en el secundario. Su argumento puede ser formalizado (es decir, demostrado) en base al Teorema de los valores intermedios aplicado a la función continua $f(x) = \sqrt{x}$, pero la visualización que propusimos sugiere una realización concreta que sería más accesible a los alumnos. El gráfico de pasa de manera continua del punto (4,16) en cuadrante inferior izquierdo al punto (5, 25) en cuadrante superior derecho. Si suponemos (por la negación) que el gráfico no pasa por los cuadrantes (de los contraejemplos) superior izquierdo e inferior derecho, deberá pasar por el punto $C = (4{,}5, 20{,}5)$. Como no pasa por él, ($\sqrt{20{,}5} \neq 4{,}5$), la justificación es inválida.

Linealidad es suficiente para la Proposición 2.2, pero no es necesaria. Retomemos ahora la Investigación 2.3, usando nuestra visualización para presentar un contraejemplo: una función continua, monótona creciente, no lineal para la cual

[5]N. de T.: Último grado de la escuela secundaria en Israel

la Proposición 2.2 es válida. Esa función solo necesita pasar por los puntos (4,16) y (5,25), quedando fuera de las dos zonas de contraejemplos. Evidentemente, esa función no necesariamente debe ser lineal (Figura 3).

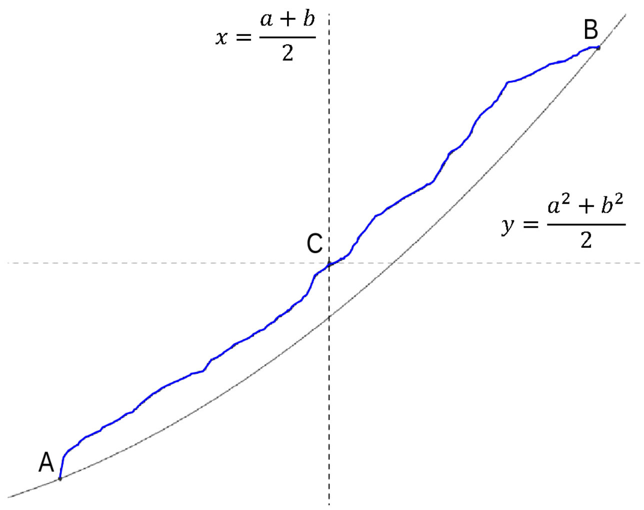

FIGURA 3. Una función no lineal para la cual la Proposición 2.2 es válida

Como ya mencionáramos, esto revela una falla en nuestro razonamiento. Cuando decíamos en el Argumento 2.4 que "la Justificación 1.3 es inválida porque $\sqrt{x}$ no es lineal", no estábamos permitiendo funciones tales como la que trazamos en la Figura 3. Supusimos erróneamente que la Proposición 2.2 no solo es una condición necesaria para la linealidad, sino también suficiente. Apliquemos ahora el principio de von Glasersfeld a nosotros mismos, y veamos si nuestro error pudo haberse basado en una comprensión productiva. Proponemos que teníamos en mente la siguiente caracterización de funciones lineales:

> **Proposición 3.1:** *Para todo* número $a < b$, si un número x en el intervalo $[a, b]$ está más cerca de uno de sus puntos extremos, entonces $f(x)$ está más cerca del correspondiente punto extremo de $[f(a), f(b)]$.

Esta proposición es idéntica a la Proposición 2.2, salvo que no está formulada para números $a < b$ dados, sino para cualesquier números $a < b$. Tal como la Proposición 2.2, ésta es válida para funciones lineales, pero a diferencia de la Proposición 2.2, es verdadera solamente para funciones lineales[6].

Supongamos que éste haya sido el argumento para la Proposición 1.1:

[6]Suponiendo continuidad. Omitimos la demostración por falta de espacio.

> **Argumento 3.1:** (Afirmación:) está más cerca de 4 que de 5, puesto que (Justificación 3.1:) Para todo número $0 < a < b$, y para todo x en el intervalo $[a, b]$ si x está más cerca a uno de los puntos extremos, $\sqrt{x}$ está más cerca del correspondiente punto extremo de $[\sqrt{a}, \sqrt{b}]$.

Este argumento es tan fallido como el Argumento 1.1, y tiene los mismos contraejemplos para la Justificación 3.1 que para la Justificación 1.3. Sin embargo, tiene el tono general del que carecían las justificaciones previas, donde los puntos extremos del intervalo $[a, b]$ están precedidas del cuantificador universal ("para todo"). Además, con este argumento en mente, proponemos una versión válida del Argumento 2.4:

> **Argumento 3.2:** (Afirmación 3.2:) La Justificación 3.1 es inválida, porque (Datos:) hubiera sido válida si $\sqrt{x}$ fuera lineal, pero no lo es. Esta conclusión es posible pues (Justificación 3.2:) si una propiedad es necesaria y suficiente para funciones lineales, entonces no es válida para funciones no lineales.

Resumen

Hemos reconstruido una investigación de una proposición matemática de un octavo grado en Israel. No afirmamos que estudiantes o matemáticos hubieran argumentado de la manera en que conjeturamos. Más bien, usamos argumentos hipotéticos, derivados de nuestra propia experiencia con alumnos y matemáticos, como objeto para reflexionar en nuestro análisis.

Nuestro punto de partida fue nuestra sensación de intranquilidad de que el argumento es fallido. Comenzamos con una investigación matemática de argumentos hipotéticos para la afirmación. La invalidez del Argumento 1.1 aparentemente explicó nuestra intranquilidad, sin embargo, la validez del similar Argumento 1.2 nos empujó a cavar más hondo.

La perspectiva de los matemáticos nos avanzó solo un poco. La perspectiva pedagógica, tomando la postura del docente y preguntándonos qué pudo haber tenido en mente el que lo dijo, nos permitió progresar. Comprensiones previas que emergieron de esta perspectiva pedagógica, continuidad, monotonicidad y eventualmente linealidad, no solo arrojaron luz acerca de lo que los alumnos pueden traer con ellos a la conversación, sino que demostraron ser productivas en nuestro análisis de la matemática subyacente.

Retomando la perspectiva de los matemáticos con esta comprensión en mente, eventualmente reconocimos una condición necesaria y suficiente para funciones lineales. Esta condición sugirió una nueva perspectiva acerca de la proposición:

el argumento se apoya tácitamente en una condición que es válida solo para funciones lineales. $\sqrt{x}$ no es lineal, por lo tanto el argumento no es válido.

Por lo tanto, esta condición necesaria y suficiente para funciones lineales (Proposición 3.1) surgió como la clave para reconciliar todos nuestros argumentos previos, evaluativos y empíricos, epistémicos y pedagógicos.

A lo largo de nuestra exposición, hemos explicitado nuestras propias normas acerca de la argumentación matemática, una de las cuales es: Justificaciones no solo deben ser demostrables, deben ser lo más generales posible, y deben aportar una idea del porqué la afirmación presentada se deriva de los datos. También hemos discutido la argumentación de los alumnos, que pueden basarse en objetivos diferentes de los de los matemáticos. Además, hemos mostrado que tomar en consideración la comprensión previa de los alumnos puede arrojar luz no solo sobre sus argumentaciones sino también sobre la matemática que está en juego.

La afirmación sobre $\sqrt{18}$ no provocó una reacción de los profesores que la vieron en video en un curso de desarrollo profesional. Proponemos que formadores de profesores deberían tratar de desarrollar la sensibilidad y la curiosidad de los profesores para involucrarse en investigaciones como la que hemos presentado. Eso requiere escuchar muy atentamente las afirmaciones matemáticas, aparentemente obvias, de profesores y alumnos durante la clase, ya que ellas pueden llevar, como en el caso de $\sqrt{18}$, a ricos descubrimientos matemáticos y pedagógicos.

Reconocimiento

Este artículo se basa en un trabajo que fue financiado parcialmente por la Fundación Israelí de Ciencias, Grant 1539/15 y por el Instituto Weizmann de Ciencias.

Bibliografía

Borasi, R. (1996). *Reconceiving Mathematics Instruction: a Focus on Errors*. Norwood, NJ: Praeger.

Chazan, D., & Herbst, P. (2012). Animations of classroom interaction: expanding the boundaries of video records of practice. *Teachers College Record*, *114*(3), 1-34.

Freeman, J. B. (2005). Systematizing Toulmin's warrants: an epistemic approach. *Argumentation*, *19*(3), 331-346.

Markovits, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M. (1983). Functions: linearity unconstrained. In R. Hershkowitz (Ed.), *Proceedings of the 7th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 271-277). Israel: Rehovot.

Nardi, E., Biza, I., & Zachariades, T. (2012). 'Warrant' revisited: integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 157-173.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Toulmin, S. E. (1958). *The Uses of Argument*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Von Glasersfeld, E. (1993). Questions and answers about radical constructivism. In K. G. Tobin (Ed.), *The Practice of Constructivism in Science Education* (p. 23-38). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Jason Cooper
Departamento de Enseñanza de las Ciencias, Instituto Weizmann de Ciencias Rehovot - Israel.
(✉) *jason.cooper@weizmann.ac.il*

Alon Pinto
Departamento de Enseñanza de las Ciencias, Instituto Weizmann de Ciencias Rehovot - Israel.
(✉) *alon.pinto@weizmann.ac.il*

Recibido: *16 de septiembre de 2019*.
Aceptado: *1 de noviembre de 2019*.
Publicado en línea: *14 de diciembre de 2019*.

Sección de Problemas

☞ *por Juan Pablo Rossetti*

Los siguientes problemas están pensados para un público amplio. Las soluciones se encuentran en la página siguiente.

Problema 1. ADIVINAR DOS NÚMEROS. Susana y Muriel tienen que adivinar dos números enteros a y b, mayores que uno. A Susana solo le dijeron la suma de los dos números, es decir, $a + b$, mientras que a Muriel, solo la multiplicación, $a \times b$. Entre ellas dialogan:

Su: No puedo saber cuáles son a y b.

Mu: ¡Yo tampoco!

Su: Ah, entonces ¡ahora yo sí!

¿Cuáles son los números a y b?

Problema 2. CUATRO CUATROS. Queremos escribir los 10 dígitos del 0 al 9 utilizando para cada uno exactamente cuatro cuatros y solo las operaciones elementales: suma, resta, multiplicación y división. Este problema es muy conocido, aquí proponemos una variante, que consiste en ir realizando las operaciones secuencialmente, es decir, de a una, sobre el resultado que se va obteniendo. Por ejemplo, si decimos 4 más 4 menos 4 por 4, hay que hacer $((4 + 4) - 4) \times 4 = 16$.

Aclaración: Se permite empezar con -4 (como si fuera restando un cuatro) pero NO se permite usar combinaciones de cuatros al tipo de 44 ni 4^4, y menos aun $4{,}4$. Es decir, con cuatro cuatros, operando en forma secuencial, hay que obtener los números $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$.

Problema 3. DISTANCIA DEL PUEBLO AL REFUGIO. El camino entre el pueblo y el refugio en la montaña mide un número entero de kilómetros. Una mañana, tres grupos de andinistas salen del pueblo hacia el refugio. El primer día, el grupo A recorre la sexta parte del camino, el grupo B la mitad del camino, y el grupo C la cuarta parte del camino. Al día siguiente, el grupo A recorre 100 km, el grupo B recorre 10 km, el grupo C recorre 78 km, y nadie llega al refugio. Si el grupo B ha recorrido en total, más distancia que el A, pero menos que el C, determinar cuánto mide el camino desde el pueblo hasta el refugio.

SOLUCIONES

Solución 1. Respuesta: 3 y 4.

Llamemos $s = a + b$. Susana no sabía los números, por lo que s no es 4 ni 5. Ahora bien, Muriel tampoco sabe los números, por lo que s tampoco puede ser 6 (pues si $s = 6$, entonces las dos posibilidades son $2 + 4$ y $3 + 3$, que al hacer sus productos dan 8 y 9 respectivamente, pero en ambos casos Muriel se habría dado cuenta que los números originales eran 2 y 4 en el primer caso y 3 y 3 en el segundo). Si $s = 7$, entonces las dos opciones son $2 + 5$ y $3 + 4$. En la primera, Muriel hubiera visto $10 = 2 \times 5$, dándose cuenta de que los números eran 2 y 5. Pero en la segunda opción, Muriel ve 12 y no puede distinguir si 12 es 2×6 o 3×4. Sin embargo, cuando Susana se entera que Muriel no puede adivinar los números, entonces se da cuenta que tienen que haber sido 3 y 4. Por consiguiente, este caso es compatible con el diálogo ocurrido.

Por otra parte, si $s > 7$, ya empieza a haber más posibilidades, Susana no puede saber los números de entrada, Muriel tendrá al menos dos casos en los que no puede adivinar, por lo tanto Susana no sabrá cuál de esos dos casos es. Esta situación no es compatibles con el diálogo ocurrido. Así, la única respuesta posible es $s = 7$ y los números son 3 y 4.

Solución 2. Una forma de escribir cada dígito es la siguiente:

$0 = 4-4+4-4$; $\quad 1 = (4+4-4) : 4$; $\quad 2 = (-4-4) : 2+4$; $\quad 3 = (4+4+4) : 4$;
$4 = (4-4) \times 4+4$; $\quad 5 = ((4 \times 4)+4) : 4$; $\quad 6 = (4+4) : 4+4$;
$7 = (-4 : 4)+4+4$; $\quad 8 = 4+4-4+4$; $\quad 9 = (4 : 4)+4+4$.

Solución 3. La distancia es 271 km.

Si llamamos x a la distancia entre el pueblo y el refugio, entonces sabemos que

$$\tfrac{1}{6}x + 100 < \tfrac{1}{2}x + 10 \qquad \text{y que} \tfrac{1}{2}x + 10 < \tfrac{1}{4}x + 78.$$

Trabajando estas dos desigualdades, tenemos que

$$100 < \tfrac{1}{3}x + 10 \qquad \text{y} \qquad \tfrac{1}{4}x + 10 < 78,$$

es decir que llegamos a $270 < x$ y $x < 272$. Como x es un entero, debe ser, necesariamente, $x = 271$.

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones? ¿Y una fórmula general?

- $\{a_n\}$: 1, -2, 5, -12, 29, -70, 169, -408, 985, -2378, …
- $\{b_n\}$: 4, 9, 25, 49, 121, 169, 289, 361, 529, 841, 961, 1369, 1681, 1849, 2209, 2809, 3481, 3721, …
- $\{c_n\}$: 3, 5, 11, 17, 31, 41, 59, 67, 83, 109, 127, 157, 179, 191, …
- $\{d_n\}$: 1, 4, 3, 0, -3, -4, -1, 2, 5, 2, -1, -4, -3, 0, 3, 4, 1, -2, -5, -2, …

Podés encontrar las soluciones en la página siguiente.

Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $a_{11} = 5741$.
  Son los números de Pell alternando signos, es decir
  $$a_n = -2a_{n-1} + a_{n-2}.$$
- $b_{19} = 4489$.
  Son los cuadrados de los números primos.
- $c_{15} = 211$.
  Los números primos indexados por primos. Es decir, si p_n, $n \in \mathbb{N}$, es la sucesión de los números primos, entonces $c_n = p_{p_n}$.
- $d_{21} = 1$.
  Saltando de a 3 pasos en el intervalo de enteros $[[-5, 5]]$ rebotando en los extremos

Viene de la página 61.

Información para autores

La *Revista de Educación Matemática* recibe artículos en cualquiera sus secciones que no hayan sido ya publicados. Se espera que tengan excelente nivel de redacción, claridad en la exposición de las ideas, coherencia y cohesión.

Los autores que deseen publicar sus artículos en la *Revista de Educación Matemática* deberán enviar un archivo LibreOffice, Word o Latex a la dirección **revm@famaf.unc.edu.ar** de correo electrónico.

El archivo deberá estar escrito en hoja tamaño A4, con sus cuatro márgenes de 2,5 cm, interlineado sencillo y letra Times New Roman de 11 pt. En la medida de lo posible evitar el uso de notas al pie. En la primera página se informará:

- Título del trabajo.
- Nombre, filiación académica y correo electrónico de todos los autores.
- Categoría propuesta (Matemática, Aportes para la Enseñanza de la Matemática, Investigación en Educación Matemática, Reseña).
- Resumen en español y en inglés con una extensión máxima de 200 palabras. No incluir referencias bibliográficas.
- Palabras-clave en español e inglés. No más de cuatro.

Los artículos de *Matemática* y *Aportes para la enseñanza* pueden ser de hasta 12 páginas (excepcionalmente se aceptarán artículos más extensos), incluida bibliografía, tablas y figuras.

Los artículos de *Investigación* pueden ser de hasta 20 páginas, incluida bibliografía, tablas y figuras. Deben incluir: resumen (en español e inglés), problemática investigada, preguntas u objetivos de investigación, referentes teóricos y antecedentes, metodología de investigación, resultados, análisis, conclusiones y bibliografía. El resumen, tanto en español como en inglés, puede tener una extensión máxima de 200 palabras y no incluir referencias bibliográficas.

Las *Reseñas* pueden ser de hasta 4 páginas.

Para la publicación de Anuncios enviar la información completa al correo electrónico de la revista.

Más información en la página https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/information/authors.