Revista de Educación Matemática

Registro Nacional de la Propiedad Intelectual N° 168024

ISSN 0326-8780 (versión impresa)

ISSN 1852-2890 (en línea)

Página web: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index
Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

Revista de Educación Matemática

Volumen 34, N° 1 – 2019

ÍNDICE

También encontrarás curiosidades bajo los títulos *¿Sabías que...?* y *¡Sucesiones al toque!*

Editorial

El 18 de marzo de 2019, los matemáticos David Harvey y Joris Van Der Hoeven anunciaron que descubrieron un nuevo algoritmo para multiplicar dos números naturales, el cual se presume que requiere la mínima cantidad de operaciones posibles [D. Harvey and J. Van Der Hoeven. *Integer multiplication in time* $O(n \log n)$. 2019. hal-02070778]. Sin entrar en detalles finos, podemos pensar que "realizamos una operación" cada vez que "multiplicamos dos números de una cifra", o podría ser "multiplicamos dos números de dos cifras", hablar de 1 o 2 cifras no cambia la esencia del problema.

Recordemos brevemente algo de la historia de este problema. En 1960, en la Universidad Estatal de Moscú, se llevaba a cabo un seminario sobre *Problemas de matemática en cibernética* dirigido por el muy destacado matemático Andréi Kolmogórov (reconocido por sus notables trabajos, principalmente en probabilidad, topología y análisis de Fourier). Allí, A. Kolmogórov pone en el centro de la escena el problema de comprender cuántas operaciones requiere multiplicar dos números de n cifras cada uno.

Considerando que realizamos una operación cada vez que multiplicamos dos números de una cifra resulta que, usando el método tradicional que aprendemos en nuestra niñez, para multiplicar 374×726 necesitamos multiplicar todos los dígitos entre sí, así que terminamos realizando 9 operaciones. En general, multiplicar dos números de n cifras con el método tradicional requiere n^2 operaciones.

Volviendo al seminario, los presentes eran completamente conscientes del carácter fundacional que tiene determinar si existe un método o algoritmo para multiplicar que sea más eficiente que el tradicional. Aparentemente, según nos cuenta Anatoly Karatsuba en [*The complexity of computations*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Vol 211 (1995)], A. Kolmogórov creía que no había mejor método. A. Karatsuba sospecha que, tal vez, esto se debía a que hay indicios de que el método tradicional (o uno muy similar) era usado por babilonios y egipcios más de 3500 años atrás, así que si hubiera un algoritmo mejor tal vez ya debería haber algún indicio de él. La cuestión es que A. Karatsuba, uno de los alumnos de A. Kolmogórov presentes en el seminario, luego de una semana intensa de trabajo, encontró un método mejor, que requiere básicamente $n^{1,58}$ operaciones, en lugar de n^2. ¿Cómo es el método? Básicamente consiste en lo siguiente.

Supongamos que a y b tienen 4 cifras, es decir

$$a = a_1 \times 10 + a_0$$
$$b = b_1 \times 10 + b_0.$$

El método tradicional se basa en que si realizamos los siguientes 4 productos:

$$\begin{array}{ccc} & a_1b_0 & a_0b_0 \\ a_1b_1 & a_0b_1 & \end{array}$$

entonces obtenemos ab pues

$$ab = a_1b_1 \times 100 + (a_1b_0 + a_0b_1) \times 10 + a_0b_0.$$

En cambio el método de Karatsuba se basa en que si conocemos los siguientes 3 productos

$$a_1b_1 \qquad (a_1 + a_0)(b_1 + b_0) \qquad a_0b_0$$

entonces obtenemos ab pues

$$ab = a_1b_1 \times 100 + \big((a_1 + a_0)(b_1 + b_0) - a_1b_1 - a_0b_0\big) \times 10 + a_0b_0.$$

Esta reducción de 4 a 3 multiplicaciones, aplicada repetidas veces en números grandes, provoca que el algoritmo de Karatsuba necesita solamente n^q con $q = \log_2(3)$ operaciones (en lugar de las n^q con $q = \log_2(4) = 2$ que necesita el algoritmo tradicional). Conviene aclarar que parte de la esencia de lo que estamos discutiendo radica en que, en principio, es computacionalmente más sencillo sumar o restar que multiplicar. Es por ello que no nos preocupa que en el algoritmo de Karatsuba necesitemos hacer unas restas que en el método tradicional no son necesarias. Sin embargo, por otro lado, la tecnología se ha desarrollado a tal punto que actualmente hay procesadores con una arquitectura en la que el costo de multiplicar es similar al de sumar.

El inesperado descubrimeinto de A. Karatsuba impulsó un enorme desarrollo del problema de determinar exactamente cuántas operaciones son necesarias para multiplicar dos números de n cifras cada uno. En 1971, Arnold Schönhage y Volker Strassen mejoran el método de Karatsuba y desarrollan un algoritmo que requiere

$$n \log_2(n) \log_2(\log_2(n))$$

operaciones. Además conjeturaron que debía haber un método mejor que el de ellos, el cual requiriera solo $n \log_2(n)$ operaciones. Este año, casi 50 años más tarde, David Harvey y Joris Van Der Hoeven encontraron un algoritmo como el conjeturado en 1971. Este método combina resultados diversos de matemática. Dicho muy rápidamente transforma el problema de multiplicar dos naturales a y b en un problema de multiplicar dos polinomios muy especiales en varias variables sobre los números complejos. Estos polinomios tienen de particular que pueden ser multiplicados muy eficientemente gracias a herramientas que provee la teoría de transformadas rápidas de Fourier.

Este descubrimiento es muy importante pues la cantidad de operaciones necesarias para casi cualquier problema de matemática depende de la cantidad de operaciones necesarias para multiplicar dos números naturales. Es como si este problema constituyera una unidad de medida básica que existe en la naturaleza. Es por ello que, si bien estamos celebrando este descubrimiento, cabe señalar que todavía no se ha demostrado que este algoritmo sea el mejor posible, y por lo tanto esta unidad de medida básica no está completamente determinada.

Este primer número del año cuenta con dos trabajos principales. En uno de ellos se aborda la enseñanza de la estadística en la escuela media, la cual es de suma importancia. En su trabajo, Aldana González nos muestra cómo es posible introducir la teoría de los contrastes de hipótesis haciendo uso de métodos de simulación. El artículo es interesante para el lector que tenga curiosidad por entender mejor cómo la ciencia saca conclusiones a partir de datos de una muestra, y es especialmente útil para el docente que busca ejemplos concretos, con datos reales y en sintonía con la intuición, para tratar estos temas en el aula de la escuela media. En el segundo artículo se describe la experiencia de un equipo con integrantes de diferentes unidades académicas de la Universidad Nacional de La Plata, trabajando en la enseñanza de la matemática en aulas que incluyen a estudiantes sordos. La experiencia abordada comienza con la inscripción, en 2017, de una alumna sorda en la carrera de Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y luego se nutre con la inclusión de un estudiante de Licenciatura de Turismo de la Facultad de Ciencias Económicas.

Como siempre, contamos con las curiosidades del número 2019 y los problemas para pensar.

En febrero del año que viene se llevará a cabo en Lisboa la *Conferencia de Estudio* vinculada al ICMI Study 25 "Profesores de Matemática trabajando y Aprendiendo en Grupos Colaborativos". El tema es de central importancia en la labor docente en general y particularmente en lo referente a la formación continua. En este número Cristina Esteley nos presenta detalles de la conferencia e invita a toda la comunidad a participar.

Leandro Cagliero

Nota: Es muy importante para la RevEM contar con la colaboración de ustedes a través del envío de contribuciones de calidad para publicar. Solicitamos enviar los artículos preferentemente a través del sistema en la página web, pero si tienen inconvenientes pueden hacerlo a la dirección de correo electrónico que figura abajo.

Página web: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index

Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

Curiosidades del 2019

Todos los números tienen alguna curiosidad, aquí compartimos algunas de 2019.

Expresiones con los dígitos

- 2019 puede ser escrito usando solamente uno cualquiera de los dígitos:

$$\begin{aligned} 2019 &= 1+(1+1)^{11}-(11-1)(1+1+1) \\ &= (2\times 22+\tfrac{2}{2})^2-2-2-2 \\ &= 3+(3+3)\times(333+3) \\ &= 4+(4+4)\times(4^4-4)-\tfrac{4}{4} \\ &= 5+5^5-\tfrac{5555}{5} \\ &= 6\times(666+6)+6)\times\tfrac{6}{6+6} \\ &= \tfrac{77-7}{7}+7\times(7\times(7\times 7-7)-7) \\ &= 88+(8+8)\times(8\times(8+8)-8)+\tfrac{88}{8} \\ &= 9+\tfrac{9999-9}{9}+9\times 99+9 \end{aligned}$$

- La misma representación usando un único dígito a:

$$2019=\frac{(aaaaa-a)\times(a+a)}{a\times aa}-\frac{a}{a}$$

para cualquier $a\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

- 2019 puede ser escrito con las operaciones elementales en forma ascendente o descendente:

$$\begin{aligned} 2019 &= 1+2\times 34+5\times 6\times(7\times 8+9) \\ &= (1+2)\times 3+(45+67+89)\times 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2019 &= 98+7+65+43^2\times 1 \\ &= 10\times(-9+(8+7)\times(-6+5\times 4)+3\times(2+1) \end{aligned}$$

- Usando los mismos dígitos en bases y potencias:

$$2019=2^9+3^7+7^2-9^3=0^3+1^8+2^7-3^9+4^6+5^4+6^2+7^5+8^1+9^0$$

Primos

- Se tiene:

$$\begin{aligned} 2017 &= 1 \times 2017 \\ 2018 &= 2 \times 1009 \\ 2019 &= 3 \times 673 \end{aligned}$$

  donde 2017, 1009 y 673 son primos.

- 2019 es el menor número que puede ser escrito en 6 formas distintas como suma de 3 primos al cuadrado:

$$\begin{aligned} 2019 &= 7^2 + 11^2 + 43^2 \\ &= 7^2 + 17^2 + 41^2 \\ &= 11^2 + 23^2 + 37^2 \\ &= 13^2 + 13^2 + 41^2 \\ &= 17^2 + 19^2 + 37^2 \\ &= 23^2 + 23^2 + 31^2 \end{aligned}$$

Cuadrados, cubos y otras potencias

- 2019 como suma de cuadrados:

$$\begin{aligned} 2019 &= 13^2 + 25^2 + 35^2 \\ 2019 &= 17^2 + 23^2 + 24^2 + 25^2 \\ 2019 &= 15^2 + 17^2 + 20^2 + 23^2 + 24^2 \\ 2019 &= 15^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2 + 21^2 + 22^2 \end{aligned}$$

- suma de cuadrados y cubos simétricas:

$$\begin{aligned} 2019 &= 1^2 + 15^2 + 28^2 + 15^2 + 1^2 \\ 2019 &= 1^3 + 7^3 + 11^3 + 7^3 + 1^3 \end{aligned}$$

- suma de potencias cuartas:

$$2019 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 5^4 + 6^4$$

- potencias y sumas con mismos dígitos:

$$2019 = 1^6 + 44^2 + 75^0 + 81^1 = 16 + 442 + 750 + 811$$

Ternas pitagóricas

- 2019 satisface la terna pitagórica

$$2019^2 = 1156^2 + 1656^2$$

Cuadrados mágicos

Un cuadrado mágico de tamaño n es un arreglo de $n \times n$ donde se colocan los números $1, 2, \dots, n^2$, de modo tal que todas las filas y columnas y las 2 diagonales tiene la misma suma. Permitiremos cuadrados mágicos mas generales.

- Cuadrado mágico usando los dígitos 2, 0, 1 y 9:

00	11	22	99
29	92	01	10
91	20	19	02
12	09	90	21

- Cuadrado mágico usando los dígitos 2, 0, 1, 9 y 6:

00	99	22	11	66
12	61	06	90	29
96	20	19	62	01
69	02	91	26	10
21	16	60	09	92

Usando la tipografía de las calculadoras, de modo tal que al rotar 180 grados, el 0 y el 1 no cambian, y el 2 con el 5 y el 6 con el 9 intercambian roles, al poner la página boca abajo se tiene otros cuadrados mágicos.

Revista de Educación Matemática
Volumen 34, N° 1 (2019), páginas 11 – 27
Unión Matemática Argentina - FAMAF (UNC)

CONTRASTES DE HIPÓTESIS MEDIANTE TÉCNICAS DE SIMULACIÓN

Aldana M. González Montoro

Resumen. El avance de la tecnología y la disponibilidad de grandes cantidades de datos hacen a la estadística cada vez más indispensable en todas la diciplinas. Luego, es importante contar con estrategias para enseñar la estadística de forma que resulte atractiva a estudiantes de todos los perfiles.

Los contrastes de hipótesis son una herramienta de la inferencia estadística que nos permiten responder preguntas acerca de una población basándonos en los datos de una muestra.

El objetivo del presente artículo es el de construir la intuición de los contrastes de hipótesis utilizando técnicas de simulación. Estas técnicas nos permiten abordar el desarrollo de los métodos estadísticos desde el comienzo de un curso, sin necesidad de presentar la teoría matemática.

Introducción

El continuo avance en la tecnología nos provée cada día de enormes cantidades de datos en tópicos de lo más variados: economía, educación, películas, deportes, comida, medicina, de opinión pública, comportamiento social, por mencionar algunos. Además, la potencia computacional actual nos permite también analizar esos datos en formas muy eficientes. En este escenario, la estadística se vuelve indispensable en casi todas las disciplinas. Por esto, la inclusión de la enseñanza de la estadística en todos los ámbitos (niveles y disciplinas) se vuelve cada día más necesaria. Sin embargo, es muy normal que tras tomar unas clases o un curso introductorio de estadística, las y los estudiantes terminen con una colección de fórmulas y métodos que creen no relacionados entre sí. Esto es porque para llegar a tratar los temas centrales de inferencia estadística, como *intervalos de confianza* o los *contrastes de hipótesis* primero hay que recorrer la teoría de la probabilidad, los modelos probabilísticos y las distribuciones estadísticas, lo que implica introducir hipótesis, fórmulas y teoremas. Tanta formalidad matemática hace muy fácil que se pierda de vista el objetivo principal, que es el de analizar un conjunto de datos. En este artículo se busca mostrar que es posible introducir los temas centrales de la estadística de forma intuitiva, antes de presentar la teoría.

Muchas veces queremos responder preguntas acerca de una población basándonos en la información de una muestra. Por ejemplo, supongamos que le preguntamos a 100 estudiantes de un colegio si quieren ir a la Universidad y 61 de ellos/as nos responden que sí. ¿Podemos afirmar que más del $60\,\%$ de las y los estudiantes de ese colegio quieren ir a la Universidad? O, consideremos el caso en que un equipo médico en un ensayo clínico, le da a 10 pacientes con cierta enfermedad un nuevo medicamento y a otros 10 un placebo. Pasado un tiempo ven que 8 del primer grupo y 6 del segundo mejoraron. ¿Son estos resultados concluyentes para decir que el nuevo medicamento sirve? O, supongamos que basándonos en la evidencia queremos determinar si Lionel Messi es mejor que la media de los jugadores de futbol pateando penales o no. Los procedimientos estadísticos que permiten contestar este tipo de preguntas se llaman contrastes de hipótesis. Estos, usan la información provista por una muestra para inferir acerca de la veracidad de una conjetura.

Aunque el camino para llegar a la teoría de los contrastes de hipótesis es largo y algo abstracto, es posible introducirlos conceptualemente sin utilizar modelos formales ni fórmulas matemáticas. En este artículo, mostraremos una forma de hacerlo, haciendo uso de métodos de simulación. Así, una vez expuesta la idea detrás de los contrastes y comprendido su uso, puede presentarse la teoría, que resultará más fácil de comprender.

Al mismo tiempo, mostraremos los métodos de simulación como herramienta para la enseñanza de la estadística mediante ejemplos y la aplicación a datos reales. En general, los métodos enseñanza basados en la simulación permiten un abordaje más cercano a la intuición de las y los estudiantes introduciendo el proceso estadístico completo desde el comienzo del curso. Además, el uso de tecnología desde las primeras clases, vuelve la materia más llamativa para el estudiantado y hace más fácil mostrar la potencia de la estadística como herramienta para encontrar respuestas a preguntas interesantes. Existen libros de texto con este enfoque, por ejemplo Lock et al. y Tintle et al. (Lock, Lock, Morgan, Lock, y Lock, 2013; Tintle y cols., 2015), aunque están en inglés.

Todas las simulaciones que se muestran en este artículo son explicadas en términos de experimentos físicos para facilitar el entendimiento. Luego fueron realizadas por computadora utilizando el software estadístico libre R (Team, 2018), pero no es parte de los objetivos de este artículo mostrar cómo se realizan. Existen muchas opciones de software libre y fácil de usar para llevarlas a cabo, algunas se listan al final del artículo.

Conceptos previos

En su famoso libro "The Design of Experiments” (Fisher, 1971), el estadístico inglés Ronald Fisher expone la siguiente situación. Una señora afirma que ella puede determinar, con solo probarla, si al preparar una taza de té con leche, la leche fue agregada antes o después del té. Supongamos que le ofrecemos una taza a esta señora y ella señala acertadamente que la leche fue incorporada luego del té. ¿Es esto suficiente para decir que la señora es realmente capaz de distinguir el orden? Claramente no, podría haber adivinado por casualidad. Supongamos ahora que le ofrecemos 8 tazas en vez de una. En este caso, aunque sea cierto que puede distinguir, no esperamos que acierte todas las veces, podemos esperar que se equivoque algunas. Pero, ¿cómo podemos saber si miente o no? Nuestro objetivo en este ejemplo es determinar cuál es el verdadero caso.

Los contrastes de hipótesis nos permiten responder preguntas como estas tomando en cuenta la evidencia que hay en los datos. Pero, para hablar de contrastes de hipótesis es necesario manejar algunos conceptos estadísticos previos, que no serán expuestos en detalle aquí. Sin embargo, haremos un recorrido rápido por algunos de ellos. Sí es importante destacar que todos los conceptos previos necesarios para llegar a los contrastes de hipótesis pueden ser abordados en un curso de la misma forma que se expone en este artículo, utilizando ejemplos, datos reales y simulaciones por computadora.

Recorramos brevemente el proceso estadístico:

1. El proceso comienza con el planteo de una pregunta que puede ser respondida mediante el análisis de un conjunto de datos.
2. Luego, viene la recolección de los datos en una *muestra*. Esto involucra elegir la *población de estudio*, armar un plan de muestreo, y realizar la recolección de forma sistemática y cuidada.
3. Al comenzar el análisis, los datos deben ser explorados, esta etapa se llama *análisis exploratorio de datos* e involucra realizar tablas y gráficos y buscar patrones que tengan que ver con nuestra pregunta.
4. **Inferencia estadística**. Se usa la información de la muestra para buscar tendencias y estudiar la fuerza de esas tendencias . Por último, se usan estos resultados para entender y sacar conclusiones acerca de la población de estudio entera. Esto permite tomar decisiones informadas acerca del problema en cuestión.

En todo este proceso debemos entender la diferencia entre *población*, que incluye todos los individuos u objetos de interés, y *muestra*, que es un subconjunto de esa población. También es importante conocer la diferencia entre *parámetro* y *estadístico muestral*. El primero, es un número que describe una característica de la población entera, es un número fijo, generalmente desconocido. El segundo es un número que se calcula con los datos de la muestra y por lo tanto es aleatorio.

Por ejemplo, el censo de 2010 de la República Argentina dice que el $56,05\,\%$ de la población de tres años y más de la provincia de Córdoba utiliza computadora (GEOCENSO). El número $0{,}5605$ es un parámetro poblacional, la *proporción* (real) de la población de tres años y más de la provincia de Córdoba utiliza computadora, a esta proporción la denotamos por p. Supongamos ahora que tomamos una muestra aleatoria tamaño $n = 200$ de esa población, de las cuales 123 usan computadora. En este caso, la proporción de personas que usan computadora en la muestra, que la denotamos con $\hat{p}$, es $\hat{p} = 123/200 = 0,615$. Este número es el valor que asume el estadístico muestral en este caso particular y depende de la muestra elegida.

Otros parámetros poblacionales y sus compañeros estadísticos muestrales usuales son, por ejemplo, la media poblacional y la media muestral (promedio), la varianza poblacional y muestral y la mediana poblacional y muestral.

Los estadísticos muestrales se usan como *estimadores puntuales* de los parámetros poblacionales. Esto es, aproximaciones a los parámetros desconocidos, basados en los datos de una muestra. Si tomamos dos muestras distintas, los valores que asuma el estadístico muestral serán distintos. Es decir, los estadísticos muestrales tienen *variabilidad* y por lo tanto tienen una distribución, que se llama *distribución muestral*.

La distribución muestral es la distribución del estadístico muestral calculado para muchas muestras del mismo tamaño de la misma población. Este es el concepto más importante para el tema de este artículo, los contrastes de hipótesis.

Veamos un ejemplo. Consideremos las Universidades Nacionales Argentinas. Del INDEC podemos obtener los datos de cantidad de egresados por Universidad en 2015. La tabla se puede bajar de la página del INDEC. Hay 47 Universidades que tuvieron egresado/as ese año. Según los datos, la media de egresado/as por universidad en 2015 es de $2097{,}06$. Como estos datos corresponden al total de la población de Universidades Nacionales, tenemos que el parámetro poblacional μ es conocido y $\mu = 2097{,}06$. Consideremos varias muestras tamaño 10 de estas universidades. Para cada muestra obtendremos una media (muestral) distinta y distinta de μ. En la Figura 1 a) podemos observar la distribución muestral del estadístico *media muestral*, al que podemos llamar $\overline{x}$, en este caso. En la Figura 1 b) y c) observamos la distribución muestral de $\overline{x}$ pero para otros tamaños de muestra, $n = 20$ y $n = 3$. Se puede observar el efecto del tamaño de la muestra (a mayor tamaño menor variabilidad) y que las distribuciones están centradas alrededor del parámetro poblacional.

En general, para la mayoría de los estimadores que utilicemos, si las muestras están elegidas aleatoriamente y n es suficientemente grande, la distribución muestral estará centrada en el valor del parámetro poblacional y será simétrica con forma de campana. La distribución muestral expone cuánto puede variar el estadístico de muestra a muestra, es decir, cuál es su variabilidad.

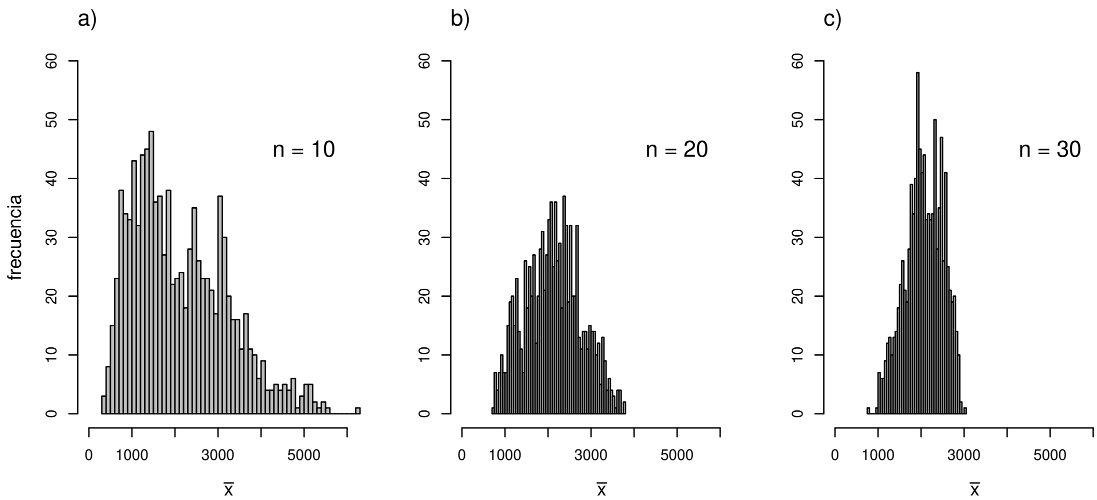


FIGURA 1. Distribución muestral del estadístico media de egresados de Universidades Nacionales en 2015 para muestras tamaño 10 (a), 20 (b) y 30 (c). Cada distribución corresponde a 1000 muestras aleatorias de la población real de 47 Universidades.

Contrastes de Hipótesis

La señora que toma té con leche. Volvamos al ejemplo de la señora que toma té. Llamemos π la proporción de veces que la señora acertaría si fuésemos capaces de darle infinitas tazas de té con leche, esto es, la probabilidad de acierto. Esa es la cantidad o parámetro poblacional que nos interesa estimar. Nuestra conjetura es que ese número es grande y que, por lo tanto, la señora no nos miente. Si la señora no sabe distinguir, y nos está engañando, entonces suponemos que ella elige en cada caso una de las opciones al azar, con probabilidad $0{,}5$. Es decir, si nuestra conjetura es falsa, entonces $\pi = 0{,}5$. Como no podemos darle infintas tazas, estimamos π a partir de una muestra que, en este caso, es de tamaño 8. Supongamos que, de las 8 tazas que le ofrecemos, la señora distingue correctamente en 7 de ellas el orden de los ingredientes. Luego, podemos estimar π con el estadístico muestral $\hat{p} = 7/8 = 0{,}875$.

En este contexto pueden haber pasado dos cosas: la señora realmente sabe distinguir o está adivinando pero tuvo mucha suerte. La explicación más razonable parece ser que la señora sí sabe distinguir. Vamos a proponer una prueba para justificar esta explicación. Pero, antes de seguir, pongamos un poco en contexto estadístico al ejemplo. Tenemos una conjetura acerca de un parámetro poblacional (π) y tenemos una cantidad muestral ($\hat{p}$) que utilizaremos para determinar si nuestra conjetura es verdadera o no. Esta es la escencia de los *contrastes de hipótesis*: usar la información de una muestra para evaluar una afirmación sobre una población.

Un contraste de hipótesis consta de dos afirmaciones contradictorias, las *hipótesis*, a las que llamamos *hipótesis nula*, denotada por H_0, e *hipótesis alternativa*, denotada por H_a. La afirmación que representa nuestra conjetura se asigna a la hipótesis alternativa (en el ejemplo: la señora sabe realmente distinguir). Generalmente, la hipótesis nula es la afirmación de que no hay efecto (la señora elige al azar). Para que las hipótesis no sean ambiguas, se escriben en función de un parámetro poblacional. En nuestro ejemplo podemos escribir:

- $H_0: \ \pi = 0{,}5$ (la señora está eligiendo al azar).
- $H_a: \ \pi > 0{,}5$ (la señora sabe distinguir).

La pregunta aquí es si $\hat{p} = 0{,}875$ es evidencia suficiente para poder descartar la hipótesis nula. Esto es, utilizaremos $\hat{p}$ para desarrollar nuestra prueba. El estadístico muestral que se utiliza en el contraste de hipótesis se llama *estadístico de prueba*.

En los contrastes de hipótesis la decisión de descartar la hipótesis nula se toma en función de la distribución del estadístico de prueba bajo la suposición de que la hipótesis nula es verdadera. Razonemos esto en el contexto del ejemplo. Si la señora estuviera eligiendo al azar con probabilidad $0{,}5$, el proceso de adivinar en cada caso es comparable al de tirar una moneda al aire y elegir leche-té si sale cara y té-leche si sale seca. Podemos usar este hecho para *simular* el ecenario en el que la señora simplemente adivida al azar (con probabilidad $0{,}5$) y así ver si el resultado del experimento real es un resultado esperable en ese ecenario. Al tirar una moneda estamos imitando la elección (al azar) de la señora entre leche-té y té-leche. Luego, para imitar el experimento original, debemos tirar 8 veces la moneda y anotar la proporción de veces que salió cara (o seca). Supongamos que tiramos la moneda 8 veces y obtenemos 5 caras. Luego, el estadístico simulado en este caso es $5/8 = 0{,}625$. Si repetimos la simulación varias veces obtendremos distintos resultados, pues este es un proceso aleatorio.

De esta manera, podemos obtener la distribución muestral del estadístico $\hat{p}$ bajo la suposición de que $\pi = 0{,}5$, esto es, la distribución muestral de $\hat{p}$ asumiendo la hipótesis de que la señora elige al azar (¡y por lo tanto nos miente!). Esa distribución está centrada en el parámetro poblacional, que en este caso es $0{,}5$ y nos permite contestar preguntas como ¿qué proporciones de cara son las más probables de obtener? o ¿cuánta variabilidad tiene el estadístico muestral simulado?

En la Figura 2 se muestra el resultado de repetir el experimento simulado 1000 veces. Podemos ver que los resultados que más ocurren son 3, 4 y 5. El 2 y el 6 también ocurren bastantes veces, el 0 y el 8 ocurrieron 4 veces y el 7 treinta y cuatro veces. Podríamos considerar cualquier resultado entre 2 y 6 como típico, pero sacar menos de 2 o más de 6 lo podemos considerar inusual.

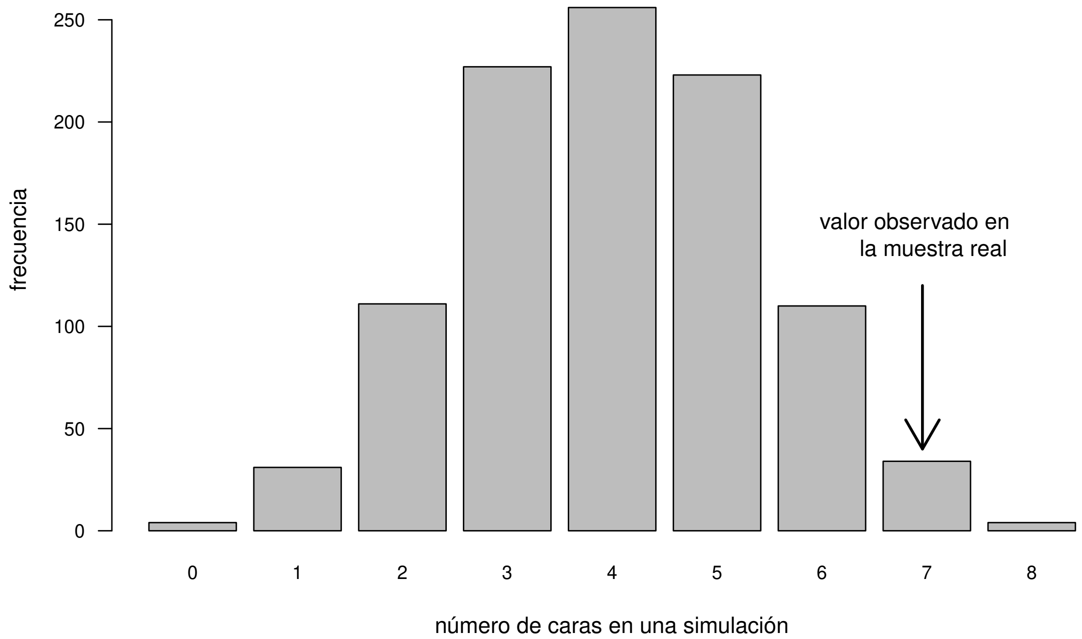


FIGURA 2. Simulaciones del experimento de arrojar una moneda 8 veces y anotar el número de caras. 1000 repeticiones.

En nuestro ejemplo, la señora adivinó 7 de las 8 veces, ese es un resultado inusual bajo la hipótesis nula. Entonces, el modelo de la moneda nos dice que hay una fuerte evidencia de que la señora no nos está mintiendo y efectivamente, puede distinguir el orden de los ingredientes. En estos casos, cuando un resultado como el estadístico calculado de la muestra real es muy poco probable de obtener por mero azar cuando se asume que la hipótesis nula es verdadera, decimos que el resultado es *estadísticamente significativo*. Si el resultado es estadísticamente significativo, tenemos evidencia suficiente en contra de H_0 y a favor de H_a.

Un concepto muy importante en estadística es el del *p-valor*. El p-valor es la probabilidad de obtener un valor tan o más extremo que el observado (en la dirección de la hipótesis alternativa), cuando la hipótesis nula es verdadera. Este valor es una herramienta que nos permite medir la fuerza de la evidencia en contra de la hipótesis nula. Mientras más chico es el p-valor, más improbable es observar un valor como el del estadístico muestral, bajo la hipótesis nula, por mero chance. Es decir, mientras más chico el p-valor, más estadísticamente significativa es la evidencia en contra de la hipótesis nula. Una forma de estimar el p-valor es calculando la proporción de valores de la distribución simulada que son tan o más inusuales que el estadístico muestral observado.

En nuestro ejemplo salieron 38 valores tan o más extremos que el muestral (7's y 8's). Luego, el p-valor es $38/1000 = 0{,}038$. Una pequeña discusión sobre cuán pequeño debe ser un p-valor para considerar la evidencia significativa se puede encontrar un poco más adelante.

Messi y los penales. Hasta el día en que escribí este artículo Lionel Messi había pateado 111 penales de los cuales falló 26. Asumiendo que un jugador promedio acierta el $75\,\%$ de sus penales, ¿es la evidencia suficiente para decir que Messi es un pateador de penales por encima de la norma? Si consideramos π la probabilidad de que Messi falle un penal, podemos plantear las hipótesis de la siguiente manera:

- $H_0: \ \pi = 0{,}25$.
- $H_a: \ \pi < 0{,}25$.

La hipótesis nula es que Messi tiene probabilidad de $0{,}25$ de fallar el penal y la alternativa es que él tiene probabilidad menor a $0{,}25$ de fallarlo. Ahora el experimento de la moneda ya no nos sirve como simulación para imitar la distribución muestral del estadístico pues debemos imitar el hecho de que la probabilidad de fallar es $0{,}25$, no $0{,}5$. Sin embargo, es fácil diseñar una simulación para este caso. Por ejemplo, podemos tirar un dado de 4 caras honesto donde un resultado (digamos el número 1) simule el fallo del penal y los otros 3 simulen el acierto. Así, el fallo tiene probabilidad $1/4 = 0{,}25$ y el acierto $3/4 = 0{,}75$, (otra posibilidad es poner 4 bolillas en un bolillero, una de un color, representando el fallo y las otras de otro color, representando el acierto). Los dados de 4 caras existen y son muy utilizados, entre otros, en los juegos de rol, Figura 3.

FIGURA 3. Dados de distinto número de caras, usualmente usados en juegos de rol. El azul es de cuatro caras, el rojo de 10. Fotos sacadas de (Wikipedia, 2019)

Cada simulación consistirá en 111 lanzamientos del dado y la cantidad de resultados iguales a 1 será la cantidad de fallos asumiendo que la hipótesis nula es verdadera. El estadístico muestral, en este caso, es $\hat{p} = \frac{26}{111} = 0{,}234$. En la Figura 4 observamos la distribución muestral del estadístico $\hat{p}$, proporción penales fallados por Messi, bajo la suposición de que tiene el triple de probabilidad de acertar que de fallar.

Se puede ver que el valor del estadístico observado de la muestra es un valor bastante frecuente en esta simulación, lo que indice que no hay evidencia de que Messi sea mejor pateador de penales que la media de los jugadores. Para calcular el p-valor, tenemos que contar cuantos valores tan o más extremos que el obtenido con la muestra real se observan en la distribución muestral, en la dirección de la hipótesis alternativa. De hecho hay 399 valores *menores o iguales* al 26. Luego, el p-valor estimado es $399/1000 = 0{,}399$, que es un número grande.

Elige un dígito. Consideremos como tercer ejemplo, un juego que se puede implementar en clase. Supongamos que pedimos a cada persona de un grupo de 20 que escriba un número del 0 al 9 en un papel. Si cada persona elige al azar el número, esperaríamos observar una cantidad muy similar (alrededor de dos) de cada uno de los dígitos. Supongamos que al hacer el recuento observamos que hay seis 3's. ¿Es esto evidencia de que las personas suelen elegir el número 3 más de lo esperado? Si las personas eligen realmente al azar esperaríamos que hayan una proporción de $0{,}1$ de 3's en la muestra (ya que hay 10 dígitos). Si queremos realizar un contraste de hipótesis en este caso podemos plantear las hipótesis en términos de la probabilidad π de que una persona cualquiera elija el 3:

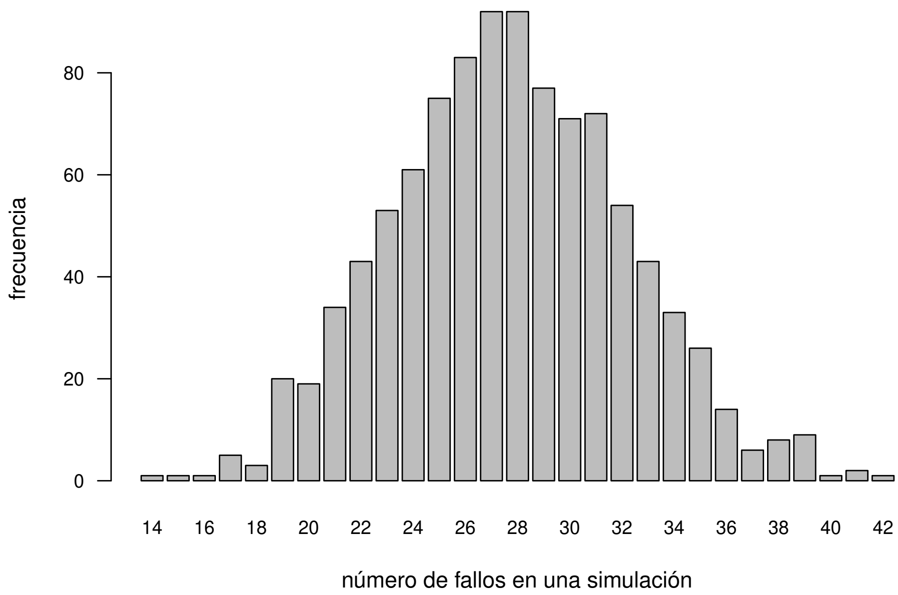


FIGURA 4. Simulaciones del experimento de arrojar un dado de cuatro caras y anotar el número de 1's. 1000 repeticiones.

- $H_0: \ \pi = 0{,}1$
- $H_a: \ \pi \neq 0{,}1$.

El estadístico que consideramos en este caso para realizar el contraste es la proporción de 3's observados en la muestra, $\hat{p} = 6/20 = 0{,}3$. Para imitar la distribución muestral del estadístico debemos imitar el hecho de que la probabilidad de obtener un 3 sea $0{,}1$. Podemos realizar la simulación con una técnica parecida a la del ejercicio anterior: tirar un dado de 10 caras 20 veces donde cada resultado representa la elección de una persona y contar la cantidad de 3's. Este experimento se debe repetir muchas veces para obtener la distribución del estadístico muestral, bajo H_0. La Figura 5 muestra el resultado (realizado por computadora) de repetir 1000 veces el experimento de elegir 20 dígitos al azar, cada uno con probabilidad $0{,}1$. En este caso mostramos la proporción (en vez del conteo) de 3's en cada muestra. Podemos observar que en este caso, la distribución muestral del estadístico no es simétrica. Esto ocurre porque la variable que consideramos es una proporción y, por lo tanto, no puede tomar valores negativos.

En esta simulación, el $0{,}3$ (esto es, que el 3 fuera elegido 6 veces) ocurrió ocho veces, el $0{,}35$ (que corresponde a 7 veces) tres veces y el $0{,}4$ (8 veces) una sola vez. Esto parece indicar que hay evidencia de que las personas eligen el 3 con más

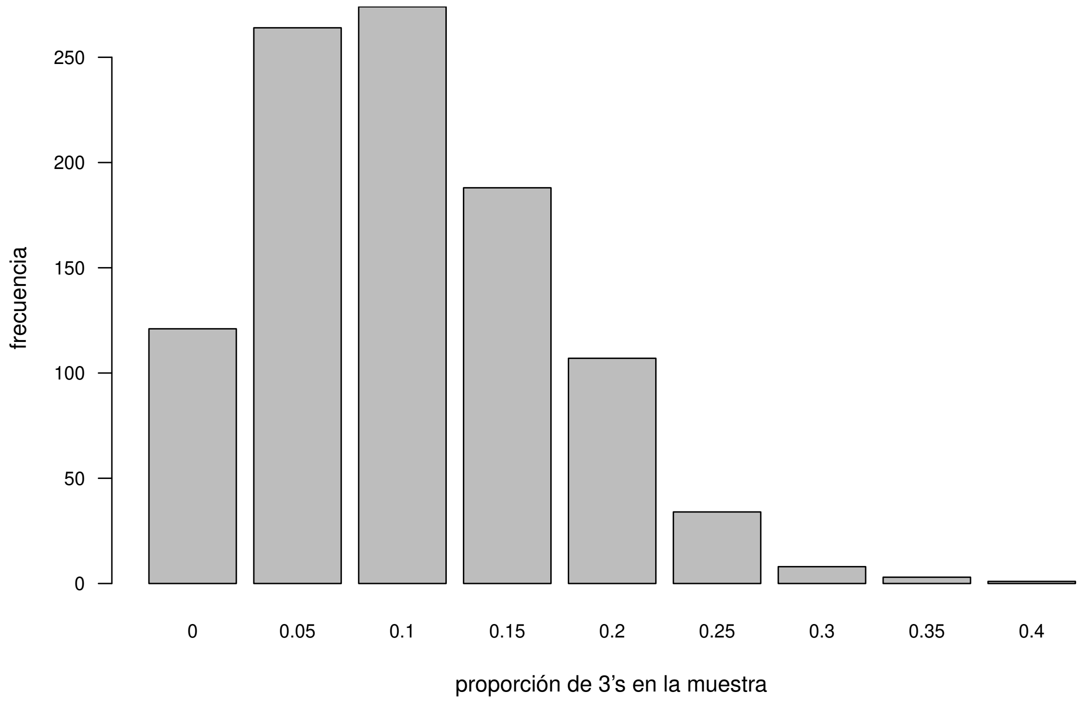


FIGURA 5. Simulaciones del experimento de arrojar un dado de 10 caras 20 veces y anotar la proporción de 3's. 1000 repeticiones.

frecuencia que la esperada por mero azar. Para calcular el p-valor en este caso tenemos que tener en cuenta que la hipótesis nula es $\pi \neq 0{,}1$, por lo tanto debemos considerar valores tan o más extremos que el observado en la muestra para las dos colas de la distribución. En este caso, al no poder observar valores tan extremos como el $0{,}3$ en la cola izquierda, el p-valor lo calculamos como 2 veces la cantidad de valores tan o más extremos que el 6: p-valor $= 2 \times 12/1000 = 0{,}024$. Este número es pequeño, lo que confirma nuestra conjetura, la evidencia es estadísticamente significativa.

Índice de masa corporal y sobrepeso. En este ejemplo, consideramos una variable continua. El índice de masa corporal (IMC) es un indicador que se utiliza frecuentemente para identificar el sobrepeso y la obesidad en los adultos. Este índice es una relación entre el peso y la talla (altura) que se calcula dividiendo el peso de una persona en kilos por el cuadrado de su talla en metros (kg/m^2). Se considera que una persona tiene sobrepeso si el IMC es igual o mayor a 25 y un IMC de más de 30 indica obesidad. Para este ejemplo, consideremos los datos de la Encuesta Nacional de Factores de Riesgo (ENFR). La ENFR se lleva a cabo en Argentina como estrategia nacional de prevención y control de enfermedades no transmisibles. La encuesta se realiza a una muestra de personas de 18 años o más que viven en conglomerados de 5000 o más habitantes. Consideremos para este ejemplo la población de adultos hombres de más de 70 años. En la ENFR hay 1109 hombres de más de 70 años y el IMC medio de esa muestra es $\overline{x} = 26{,}96$. ¿Significa esto que la población de hombres mayores de 70 años en Argentina (que viven en conglomerados de 5000 o más habitantes) sufre de sobrepeso o será un efecto de la aleatoriedad de la muestra? La hipótesis que representa la conjetura de que hay sobrepeso, en términos de la media poblacional μ, es que ésta es mayor a 25. Y queremos ver si hay evidencia de este hecho en contra de que la media es igual a 25. Es decir:

- $H_0 : \mu = 25$
- $H_a : \mu > 25$

Para evaluar la significación de la evidencia en esta muestra, necesitamos aproximar la distribución muestral del estadístico $\overline{x}$ bajo la hipótesis nula. La estrategia de la moneda o el dado ya no nos sirve en este contexto dado que lo que necesitamos son muestras que reflejen la estructura de los datos originales, que son observaciones de una variable aleatoria continua (IMC). Para este tipo de problemas se utilizan métodos de aleatorización o remuestreo, en los que se utilizan los datos originales para generar muestras artificiales. De esta manera, nos evitamos tener que conocer (o aproximar) el proceso que generó los datos para poder imirtalos. Por otro lado, para poder sacar conclusiones válidas, los datos artificiales deben ser consistentes con la hipótesis nula. En este ejemplo, esto significa que debemos generar muestras que sean consistentes con la hipótesis de que la media es $25kg/m^2$. Para lograr esto, sumaremos a cada dato de la muestra original una constante, de manera tal que los datos trasladados tengan media 25. Luego, tomaremos muestras aleatorias *con* reemplazo tamaño $n = 1109$ de la muestra original trasladada.

En la Figura 6 a) podemos observar los datos correspondientes a los 1109 hombres mayores de 70 años de todo el territorio Nacional, que participaron en la ENFR en el diagrama de cajas y bigotes de la izquierda y una muestra aleatorizadas en el diagrmaa de la derecha. En el panel b) observamos un histograma de las medias de los IMC calculados para 1000 muestras aleatorizadas, esto es la distribución del IMC medio bajo la hipótesis nula. Ya en este histograma podemos observar que el valor de IMC medio de la muestra original está lejos de los valores que uno esperaría tener si la media de la población fuera 25 y esto implica que hay evidencias suficientes para decir que la población de hombres mayores de 70 años argentina sufre de sobrepeso. De todas maneras, si queremos calcular el p-valor en este caso, lo hacemos de la misma forma que en los ejemplos anteriores, contamos cuantos resultados son igual o mayores a $26{,}96$. Como no hay valores tan extremos entre los resultados de la simulaciones, p-valor$= 0$

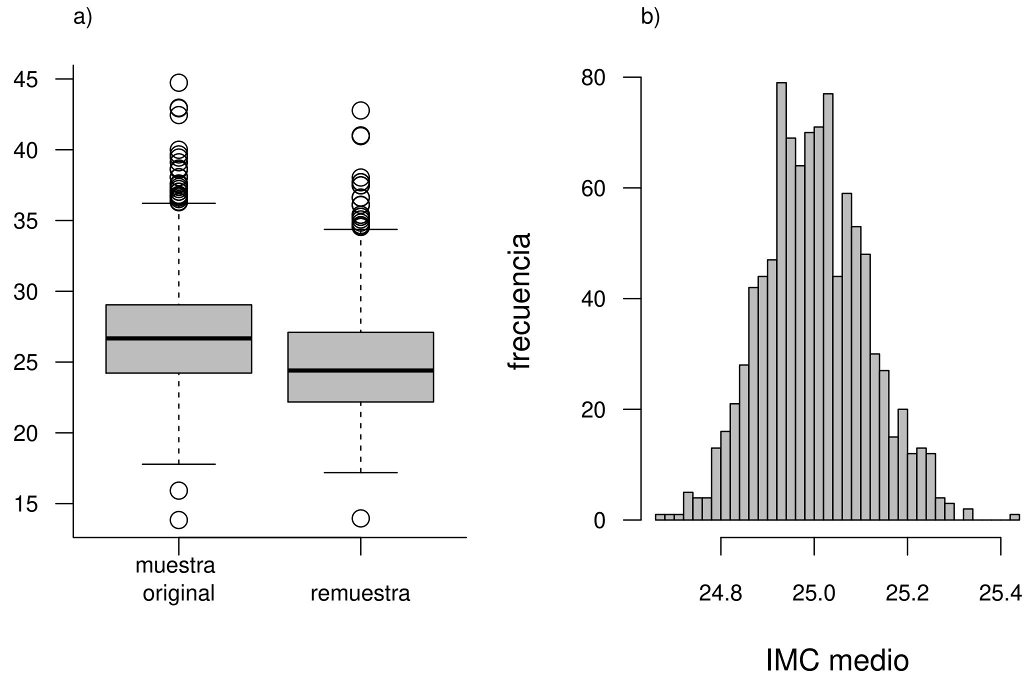


Figura 6. a) Diagramas de caja y bigotes de la muestra original de IMC de adultos hombres mayores de 70 años (izquierda) y de una muestra aleatorizada del mismo tamaño de la original (derecha). b) Histograma de las medias del IMC de 1000 muestras aleatorizdas.

Los pollos. Veamos un último ejemplo con otra variable cuantitativa continua. Vamos a considerar un experimento en el que unos pollos recién nacidos fueron asignados al azar en seis grupos y cada grupo recibió un suplemento alimenticio diferente. Después de seis semanas se registró el peso (en gramos) de cada pollo (Anónimo, 1948). Estos datos (como muchos otros) están en internet libres para usar.

Para este ejemplo, consideraremos solo los pollos alimentados a base de harinas cárnicas (11 pollos) y con linaza (12 pollos). En la Figura 7 a) se muestran los pesos de los pollos de estos dos grupos junto con sus medias muestrales: $\overline{x}_C$ para el grupo alimentado con harinas cárnicas y $\overline{x}_L$ para el grupo alimentado con linaza. Se puede observar que $\bar{x}_C > \bar{x}_L$ y que casi todos (9 de 11) de los pollos alimentados con harinas cárnicas son más pesados que la media de los alimentados con linaza. ¿Será esto evidencia de que pollos alimentados con la dieta a base de harinas cárnicas aumentaron significativamente más de peso que aquellos alimentados con linaza? ¿O será este resultado mera consecuencia del azar?

Si llamamos μ_L a la media poblacional de los pesos de los pollos alimentados con linaza y μ_C a la de los alimentados con harinas cárnicas, podemos plantear las hipótesis de interés como

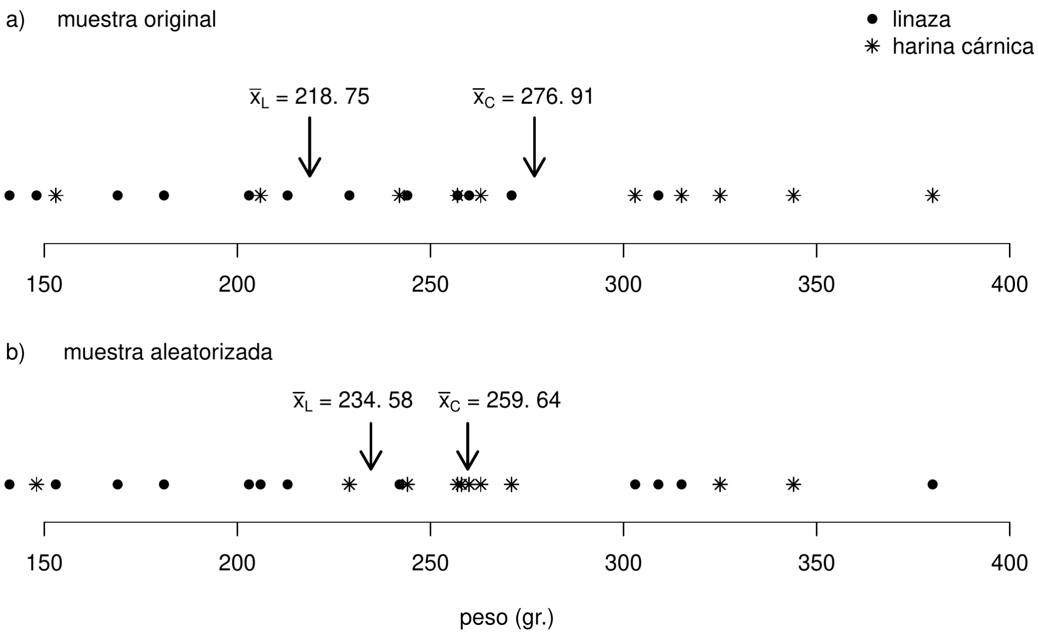


FIGURA 7. Peso de los pollos alimentados con linaza y harinas cárnicas. a) Muestra original. b) Muestra aleatorizada.

- $H_0 : \mu_C = \mu_L$
- $H_a : \mu_C > \mu_L$

La hipótesis nula es equivalente a decir que la diferencia de las medias poblacionales es cero. El estadístico muestral que consideraremos en este caso es la diferencia en medias muestrales. Para estos datos, la diferencia observada es

$$D = 276{,}91 - 218{,}75 = 58{,}16$$

Luego, para determinar si la diferencia observada es significativamente diferente de cero, debemos ver si $58{,}16$ es un valor frecuente en la distribución de la diferencia de medias asumiendo que la hipótesis nula es verdadera. La estrategia utilizada en el ejemplo anterior no nos sirve aquí dado que lo que tenemos que reflejar en este caso es que los valores observados bajo los grupos *harinas cárnicas* y *linaza* en realidad vienen de distribuciones con igual media.

Si H_0 es verdadera el peso de un pollo sería el mismo habiendo recibido cualquiera de los dos alimentos. Dicho de otro modo, cualquiera de los valores observados en el grupo linaza podría haber sido observado en el grupo harinas cárnicas y viceversa, si se hubieran asignado los pollos de otra forma. Esto nos da una idea de cómo generar las muestras aleatorizadas en el escenario en que las asignaciones a los grupos no influyen en el peso de los pollos. Podemos separar aleatoriamente los 23 valores observados en dos grupos: harinas cárnicas y linaza (respetando los tamaños muestrales) y calcular D con la nueva asignación. Para simular este proceso podríamos, por ejemplo, tomar 23 pedazos de papel, en cada uno escribir un valor de la muestra, mezclarlos y luego armar dos pilas, una de once y otra de doce, donde cada pila representa cada grupo. Por ejemplo, en la Figura 7 b), se muestra una de estas asignaciones aleatorias. En esta muestra artificial, $D = \bar{x}_C - \bar{x}_L = 259{,}64 - 234{,}58 = 25{,}06$.

Repitiendo muchas veces el proceso de mezclar los papelitos y separarlos en dos pilas, simulamos el proceso de separar aleatoriamente los pollos en dos grupos, asumiendo que la alimentación no influye en su crecimiento. Así, aproximamos la distribución de la diferencia de medias bajo H_0 y podemos ver dónde cae el estadístico observado $D = 58{,}16$.

La Figura 8 muestra la diferencia de medias en 1000 de estas muestras aleatorizadas. Observar que la distribución está centrada en cero, como es de esperar dado que la hipótesis nula es $\mu_C - \mu_L = 0$. En rojo se muestran las medias mayores a $58{,}16$, que son 16. Luego, el p-valor es $16/1000 = 0{,}016$ y podemos decir que hay evidencia estadísticamente significativa de que la alimentación a base de harinas cárnicas hace crecer más a los pollos que la alimentación a base de linaza.

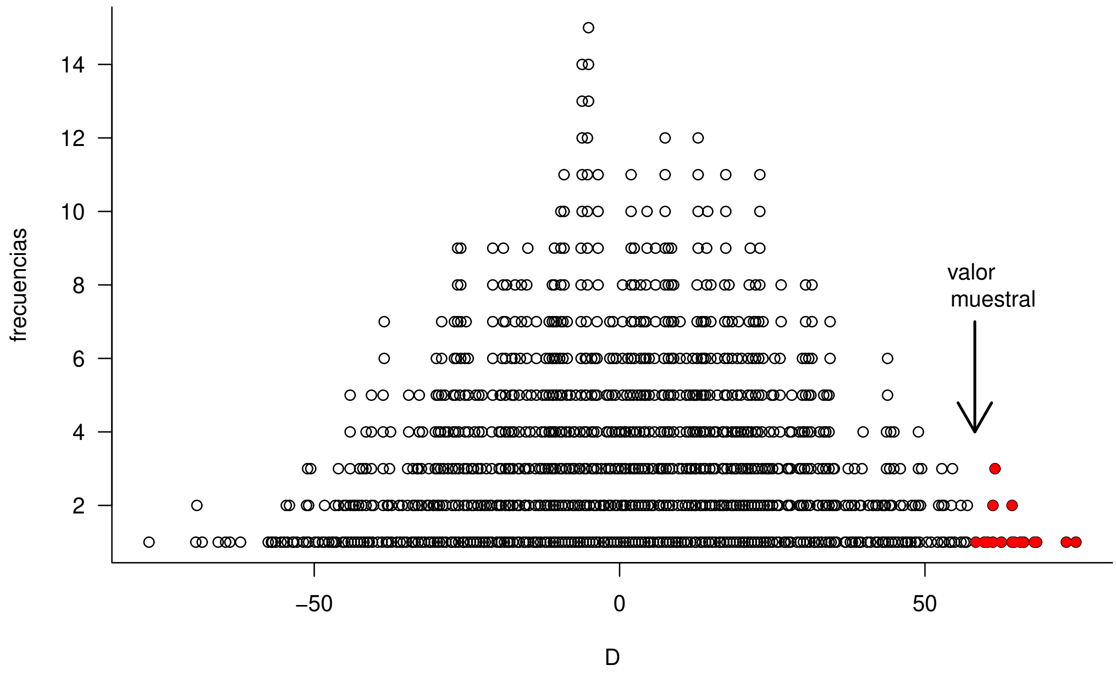


FIGURA 8. Diferencias en media para 1000 muestras aleatorizadas.

Últimas consideraciones. Hemos hablado de significación estadística y p-valor pero sin embargo, no hemos dado una regla para determinar cuán chico debe ser un p-valor para poder considerar la evidencia estadísticamente significativa. El punto de corte entre rechazar y no rechazar una hipótesis nula se llama *nivel de* *significación* y generalmente se denota con la letra griega α. Por ejemplo, si $\alpha = 0{,}05$, decimos que estamos llevando a cabo un contraste de hipótesis de nivel $0{,}05$, rechazaremos la hipótesis nula si el p-valor resulta menor a $0{,}05$ y diremos que se rechaza la hipótesis nula a favor de la alternativa a nivel $0{,}05$ o $5\,\%$. Aunque el nivel de significación hay que elegirlo para cada problema particular, hay bastante consenso en las siguientes conclusiones. Si p-valor $> 0{,}1$ entonces no hay mucha evidencia en contra de H_0. Si $0{,}05 < p$-valor $\leq 0{,}1$ entonces hay alguna evidencia en contra de H_0. Si $0{,}001 < p$-valor $\leq 0{,}05$ entonces hay fuerte evidencia en contra de H_0 y si p-valor $\leq 0{,}01$ entonces hay evidencia muy fuerte en contra de H_0.

El nivel de significación tiene que ver con los errores que se pueden cometer al tomar una decisión. Esto es, podemos rechazar la hipótesis nula cuando esta es en realidad verdadera (error tipo I) o, podemos no rechazarla cuando es falsa (error tipo II). El nivel de significación, α, representa la máxima probabilidad tolerable de cometer el error tipo I. Por esto, la elección del nivel de significación debe hacerse para cada problema en particular. Pero esto se escapa al objetivo de este artículo.

Las simulaciones

Si bien las simulaciones pueden muchas veces pensarse como procesos físicos (como tirar una moneda) para que sean más fácilmente interpretables, luego, éstas se realizan utilizando una computadora. Aunque no entra en los objetivos de este artículo el mostrar cómo realizar estas simulaciones, podemos nombrar algunas opciones. Se pueden usar softwar estadísticos libres y gratuitos como

- R
- GeoGebra
- Infostat (versión estudiantil)

Otras aplicaciones online, por nombrar algunas (éstas en inglés):

- StatKey - del libro “Unlocking the power of data"(Lock y cols., 2013)
- Apps del libro "Introduction to Statistical Investigations" (Tintle y cols., 2015)

Conclusiones

La capacidad de desarrollar herramientas para obtener información de un conjunto de datos nos habilita a tomar decisiones en nuestra vida personal y profesional, cualquiera sea el área en la que nos desarrollemos. Por esto, la incorporación de la estadística en los planes de estudio de todos los niveles y disciplinas se vuelve cada día más necesaria. Para enseñar estadística en áreas alejadas de la matemática es necesario implementar métodos que muestren la potencia y utilidad de los métodos estadísticos tempranamente y de forma atractiva. Los métodos basados en simulaciones permiten incorporar los conceptos de estadística, que muchas veces son difíciles y abstractos, de manera intuitiva, utilizando ejemplos y datos reales desde el primer día, sin atascarnos en las formalidades matemáticas. En este artículo se mostró este hecho con uno de los temas centrales de la inferencia estadística, los contrastes de hipótesis.

Referencias

Anónimo. (1948). –. *Biometrics*, 214. doi: 10.2307/3001566

Fisher, R. A. (1971). *The design of experiments (9th ed.)*. Macmillan. ISBN 0-02-844690-9.

Lock, R., Lock, P., Morgan, K., Lock, E., y Lock, D. (2013). *Statistics: Unlocking the power of data*. John Wiley & Sons, Inc.

Team, R. C. (2018). *A language and environment for statistical computing. r foundation for statistical computing*. Vienna, Austria. Descargado de www.R-project.org

Tintle, N., Chance, B., Cobb, G., Rossman, A., Roy, S., Swanson, T., y VanderStoep, J. (2015). *Introduction to statistical investigations: High school binding*. John Wiley & Sons, Inc.

Wikipedia. (2019). *Dados de rol. (2019, 3 de marzo)*. Descargado de https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Dados_de_rol&oldid=114332241. ([Fecha de consulta: 19:00, marzo 25, 2019])

Aldana M. González Montoro
Universidad Nacional de Córdoba .
FAMAF, Av. Medina Allende s/n, Ciudad Universitaria, CP:X5000HUA Córdoba, Argentina.
(✉) aldana.gonzalez.montor@unc.edu.ar

Recibido: *28 de febrero de 2019*.
Aceptado: *24 de abril de 2019*.
Publicado en línea: *7 de mayo de 2019*.

¿Sabías que...

por Ricardo Podestá

33 es suma de 3 cubos perfectos?

Existen muchos resultados sobre suma de cuadrados. Por ejemplo, todos estamos familiarizados desde el colegio con la ecuación

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Sabemos por el Teorema de Pitágoras, que si x, y, z son las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, entonces x, y, z la satisfacen. Hay soluciones enteras como $(3, 4, 5)$ ó $(5, 12, 13)$. Mas aún, existen infinitas soluciones enteras, que son las conocidas ternas pitagóricas.

Un famoso teorema de Fermat afirma que todo número primo impar p es suma de dos enteros al cuadrado si y sólo si éste tiene resto 1 al dividirlo por 4. En símbolos,

$$p = x^2 + y^2 \quad \text{tiene solución} \qquad \Leftrightarrow \qquad p \equiv 1 \pmod{4}.$$

Más generalmente, un número n (no necesariamente primo) es suma de dos enteros al cuadrado $n = x^2 + y^2$ si y sólo si la descomposición prima de n no contiene primos congruentes a 3 mod 4 elevados a potencias impares.

El teorema de los 3 cuadrados de Legendre afirma que

$$n = x^2 + y^2 + z^2$$

tiene solución en enteros si y sólo si n no es de la forma $n = 4^a(8b+7)$ para enteros a, b. Por otra parte, tenemos el teorema de los 4 cuadrados de Lagrange que afirma que todo número natural puede ser escrito como la suma de 4 enteros al cuadrado. Es decir, dado $n \in \mathbb{N}$, la ecuación

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

siempre tiene solución entera.

Para potencias mayores que dos, tenemos el conocido como el último Teorema de Fermat, conjeturado por éste y probado por Andrew Wiles en 1995, que dice que la ecuación

$$x^n + y^n = z^n$$

no tiene soluciones enteras no triviales (o sea sin usar 0 y ± 1) para $n \geq 3$.

Una pregunta natural y aparentemente inocente, que surge en el mismo espíritu que los comentarios previos, es la siguiente: *¿Se puede escribir cualquier número natural como suma de 3 cubos?* Es decir, dado $a \in \mathbb{N}$, ¿tiene la ecuación

$$a = x^3 + y^3 + z^3 \tag{1}$$

solución en enteros x, y, z? Ejemplos sencillos con solución son los tres primeros naturales: $1 = 1^3 + 0^3 + 0^3$, $2 = 1^3 + 1^3 + 0^3$ y $3 = 1^3 + 1^3 + 1^3$. ¿Qué pasa con 4 y 5?

La pregunta general está lejos de ser respondida. Por un lado, se sabe que algunos números no pueden ser representados como suma de 3 cubos. Los números de la forma $9k \pm 4$ (o sea los que dan resto 4 ó 5 al dividir por 9) no pueden escribirse como suma de 3 cubos. En efecto, es fácil chequear que los cubos módulo 9 son 0, 1 ó -1. En símbolos

$$x^3 \equiv 0, 1, -1 \pmod{9}$$

para todo $x \in \mathbb{Z}$. Basta chequear que

$$0^3, 3^3, 6^3 \equiv 0 \pmod{9}, \quad 1^3, 4^3, 7^3 \equiv 1 \pmod{9}, \quad 2^3, 5^3, 8^3 \equiv -1 \pmod{9}.$$

Luego, como suma de 3 cubos podríamos obtener (o no) números de la forma 9, $9k \pm 1$, $9k \pm 2$ y $9k \pm 3$, pero nunca de la forma $9k \pm 4$.

Por otra parte, en algunos casos existen infinitas soluciones de (1) para el mismo natural a. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 1 &= (9t^3 + 1)^3 + (9t^4)^3 + (-9t^4 - 3t)^3, \\ 2 &= (6t^3 + 1)^3 + (1 - 6t^3)^3 + (-6t^2)^3, \end{aligned}$$

para cualquier $t \in \mathbb{N}$ (¡chequear!). Notar que para $t = 1$ en la primer ecuación tenemos $1 = 10^3 + 9^3 - 12^3$, de donde sale ¡el número de la muy conocida anécdota[1] del taxi entre Hardy y Ramanujan!

La lista con los primeros números naturales como suma de 3 cubos es la siguiente:

$$\begin{aligned} 6 &= 2^3 + (-1)^3 + (-1)^3, & 7 &= 2^3 + (-1)^3 + 0^3, \\ 8 &= 2^3 + 0^3 + 0^3, & 9 &= 2^3 + 1^3 + 0^3, \\ 10 &= 2^3 + 1^3 + 1^3, & 11 &= 3^3 + (-2)^3 + (-2)^3, \\ 12 &= 10^3 + 7^3 + (-11)^3, & 15 &= 2^3 + 2^3 + (-1)^3, \\ 16 &= 2^3 + 2^3 + 0^3, & 17 &= 2^3 + 2^3 + 1^3, \\ 18 &= 3^3 + (-2)^3 + (-1)^3, & 19 &= 3^3 + (-2)^3 + 0^3, \\ 20 &= 3^3 + (-2)^3 + 1^3, & 21 &= 16^3 + (-14)^3 + (-11)^3, \\ 24 &= 2^3 + 2^3 + 2^3, & 25 &= 3^3 + (-1)^3 + (-1)^3, \\ 26 &= 3^3 + (-1)^3 + 0^3, & 27 &= 3^3 + 0^3 + 0^3, \\ 28 &= 3^3 + 1^3 + 0^3, & 29 &= 3^3 + 1^3 + 1^3, \end{aligned}$$

[1] Se dice que estando Srinivasa Ramanujan (el genio indio de la teoría de números) en el hospital, el gran matemático inglés G. H. Hardy fue a visitarlo y le comentó que había tomado un taxi cuya patente era 1729 y que le parecía que este número no tenía ninguna propiedad interesante. Ramanujan meditó un segundo y le respondió: "1729 es el menor entero que puede escribirse como suma de cubos de dos formas distintas". Esto dió lugar a los números llamados 'taxicab'. El número $Ta(n)$ es el menor número que puede escribirse como suma de dos cubos en n formas distintas. De este modo $T(1) = 2 = 1^3 + 1^3$, $T(2) = 1729 = 9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3$, $T(3) = 87.539.139 = 167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255^3 + 414^3$ y sólo se conocen $Ta(4)$, $Ta(5)$ y $Ta(6)$.

donde hemos descartado los números $4, 5, 13, 14, 22, 23, 31, 32$, pues ya sabemos que estos no pueden expresarse cono suma de cubos, por ser de la forma $9k + 4$ ó $9k + 5$. Notar que en la lista damos la menor solución posible, ya que por ejemplo también tenemos $3 = 4^3 + 4^3 + (-5)^3$.

Si bien todos estos números pueden ser hallados a mano con mayor o menor esfuerzo, notemos que también tenemos $26 = (114.844.365)^3 + (110.902.301)^3 + (-142.254.840)^3$; y que para el siguiente se complicaría un poco mas, dado que

$$30 = (-283.059.965)^3 + (-2.218.888.517)^3 + 2.220.422.932^3$$

donde

$$\begin{aligned}
283.059.965^3 &= 22.679.597.663.705.862.245.457.125, \\
2.218.888.517^3 &= 10.924.622.727.902.378.924.946.084.413, \\
2.220.422.932^3 &= 10.947.302.325.566.084.787.191.541.568,
\end{aligned}$$

una expresión que sorprende y hasta asusta un poco. Peor aun, para el 33 tenemos la asombrosa expresión hallada muy recientemente

$$33 = (8.866.128.975.287.528)^3 + (-8.778.405.442.862.239)^3 + (-2.736.111.468.807.040)^3$$

donde

$$\begin{aligned}
8.866.128.975.287.528^3 &= 696.950.821.015.779.435.648.178.972.565.490.929.714.876.221.952, \\
8.778.405.442.862.239^3 &= 676.467.453.392.982.277.424.361.019.810.585.360.331.722.557.919, \\
2.736.111.468.807.040^3 &= 20.483.367.622.797.158.223.817.952.754.905.569.383.153.664.000.
\end{aligned}$$

¡Sin palabras!

La lista sigue: $34 = 3^3 + 2^3 + (-1)^3$, $35 = 3^3 + 2^3 + 0^3$, $36 = 3^3 + 2^3 + 1^3$, $37 = 4^3 + (-3)^3 + 0^3$, $38 = 4^3 + (-3)^3 + 1^3$,

$$39 = 134.476^3 + 117.367^3 + (-159.380)^3.$$

Sabemos que 40 y 41 hay que descartarlos. Sin embargo el 42 no se sabe. Este es el menor número para el que no se sabe si puede escribirse como suma de 3 cubos. ¿Te animás a encontrarlo?

Este es un ejemplo más que muestra que en aritmética, enunciados tan simples que cualquiera puede entender pueden ser tremendamente difíciles de resolver, incluso para los mejores matemáticos y las mejores computadoras.

La representación del 39 fue hallada en 1992 por Heath-Brown, Lioen and te Riele. La representación del 30 fue encontrada por Beck, Pine, Tarrant and Yarbrough Jensen en 1999. El problema para el número 33 estuvo abierto por 64 años y fue resuelto en.. ¡marzo de este año! por un matemático de la Universidad de Bristol llamado Andrew Booker.

Revista de Educación Matemática
Volumen 34, N° 1 (2019), páginas 31 – 51
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

APORTES PARA PENSAR LA INCLUSIÓN DE ALUMNOS SORDOS EN AULAS DE MATEMÁTICA DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR

María Belén Arouxét, Pilar Cobeñas y Verónica Grimaldi

Resumen. En este artículo describimos la conformación de un equipo de trabajo entre miembros de diferentes unidades académicas de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP) y el proceso de problematización que fuimos transitando para construir conocimiento sobre la enseñanza de la matemática en aulas del nivel universitario que incluyen a estudiantes sordos. Si bien la Comisión Universitaria sobre Discapacidad de la UNLP asigna intérpretes en Lengua de Señas Argentina –quienes acompañan a los alumnos durante las clases–, este apoyo parece no resultar suficiente para lograr la retención y el avance de los alumnos en la construcción de aprendizajes matemáticos. Nuestro proyecto propone la conformación de un espacio institucional específico en el que sus distintos actores participen en la identificación de barreras, así como en la construcción de apoyos para la inclusión.

Abstract. In this article, we describe the conformation of a work team between members of different academic units of Universidad Nacional de La Plata (UNLP), and the problematization process that we were going through to build knowledge about the teaching of mathematics in classrooms at a university level that includes deaf students. The University Commission on Disability of the UNLP assigns interpreters in Argentinean Sign Language –which accompany the students during the classes–, but this support does not seem to result enough to achieve the retention and advancement of students in the construction of mathematics learning. Our project proposes the conformation of a specific institutional space in which different actors participate in the identification of barriers, as well as in the construction of supports for inclusion.

§1. Introducción

En este artículo compartimos algunas preguntas y reflexiones sobre una experiencia que se inició en el marco de la Facultad de Ciencias Exactas (FCEx) de la Universidad Nacional de la Plata (UNLP) ante la inscripción de la primera alumna

Palabras clave: alumnos sordos, educación superior, educación inclusiva, didáctica de la matemática.
Keywords: deaf students, higher education, inclusive education, didactics of mathematics.

sorda –en adelante Analía– en la Licenciatura en Matemática en el año 2017. Dado que era la primera vez que una estudiante sorda se inscribía en la FCEx, tanto autoridades como personal docente y no docente manifestaron cierta preocupación por aprender a relacionarse con estudiantes sordos. En este marco institucional, en el mes de febrero del año 2017, se estableció contacto con la cátedra Didáctica Específica II y Prácticas Docentes en Matemática del Profesorado de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación (FaHCE-UNLP) y la Asociación Azul[1] para analizar conjuntamente y colaborar en la inclusión de Analía en las clases del primer año de la Licenciatura en Matemática. Unos meses más tarde, el mismo equipo fue consultado por la Facultad de Ciencias Económicas (FCE-UNLP) para colaborar en la inclusión de un alumno sordo –en adelante Bernardo– de la carrera Licenciatura en Turismo. Producto de ambas consultas, se conformó un equipo interdisciplinario que, hasta el momento, está compuesto por representantes de:

- Cátedra Didáctica Específica II y Prácticas Docentes en Matemática del Profesorado de Matemática, FaHCE-UNLP
- FCEx-UNLP
- FCE-UNLP
- Comisión Universitaria sobre Discapacidad (CUD-UNLP)[2]
- Asociación Azul

El intercambio entre los actores de estos diversos espacios se dio con el fin de estudiar la inclusión de alumnos sordos en aulas de matemática en la universidad, puntualmente en dos facultades: Ciencias Exactas y Ciencias Económicas. Antes de relatar detalles acerca de la construcción del equipo, las acciones desarrolladas y las problemáticas que fueron surgiendo, en la siguiente sección se presentan algunos referentes teóricos que sustentan nuestra posición y acciones en relación a la problemática de la inclusión en la educación.

[1] Asociación civil de la ciudad de La Plata, por la vida independiente de las personas con discapacidad, www.asociacionazul.org.ar

[2] La CUD en la Universidad Nacional de La Plata se inscribe como espacio de gestión cuya misión es diseñar políticas y llevar a cabo estrategias y líneas de acción que contribuyan al cumplimiento de los derechos constitucionales de las personas con discapacidad, un camino para transformar las Universidades Públicas en accesibles y no excluyentes. Está integrada por representantes de las Facultades y áreas de la UNLP, quienes trabajan en forma activa e interdisciplinaria de cara a profundizar la reflexión y transversalizar la temática a través de proyectos de índole académicos, de extensión e investigación. Desde el año 2017, forma parte de la Dirección de Inclusión, Discapacidad y Derechos Humanos, instancia que fortalece su gestión y amplía su horizonte de acción. http://www.cud.unlp.edu.ar/

§2. Algunas ideas que orientan nuestra tarea

Durante mediados y fin de siglo XX, el movimiento social de personas con discapacidad ha logrado visibilizar en la arena pública las demandas de reconocimiento develando las situaciones de opresión, desigualdad e invisibilización y discriminación con las que conviven las personas con discapacidad. Así, uno de los reclamos centrales del movimiento de personas con discapacidad es el de ser consideradas sujetos de derecho, para lo cual es clave la eliminación de cualquier tipo de educación segregada y el desarrollo de una educación inclusiva (Cobeñas, 2015).

Siguiendo las demandas del movimiento de personas con discapacidad, se parte de la convicción de que la efectivización del derecho a la educación de los grupos excluidos del sistema educativo, o segregados en instituciones "especiales", sólo puede darse por medio de una educación inclusiva que problematice esta categorización y tenga como objetivo una educación para todos y todas juntos/as (Cobeñas, 2015). Así, se considera a la educación inclusiva no como un fin en sí misma,

> *sino un medio para alcanzar un fin, el del establecimiento de una sociedad inclusiva. La inclusión tiene que ver con el proceso de incrementar y mantener la participación de todas las personas en la sociedad, escuela o comunidad de forma simultánea, procurando disminuir y eliminar todo tipo de procesos que lleven a la exclusión.* (Barton, 2009, p.10)

Estas demandas del colectivo de personas con discapacidad han tenido, entre otros resultados, la Convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad (ONU, 2006), de reciente jerarquía constitucional en nuestro país. En su artículo 24 obliga al Estado Nacional, como firmante, a garantizar el derecho a la educación inclusiva de las personas con discapacidad. Esto no solo requiere garantizar el acceso de todas las personas a educación en los distintos niveles del sistema, sino también su permanencia como estudiantes, es decir, como personas que aprenden. Para que esto sea posible, es necesario construir condiciones institucionales y conocimiento didáctico que contribuya a efectivizar tal derecho (Grimaldi, Cobeñas, Melchior, & Battistuzzi, 2015; Cobeñas & Grimaldi, 2018).

Referirnos a la inclusión en instituciones educativas significa llevar a cabo propuestas de estudio para todos y todas, donde las dificultades no sean entendidas como imposibilidades del alumnado, sino como barreras que pone la institución para el aprendizaje. Así, una institución inclusiva no supone mecanismos de selección, derivación, segregación, ni discriminación de ningún tipo y sí una transformación de las unidades académicas en pos de una lucha constante contra todas las formas de exclusión y todas las barreras al aprendizaje (Cobeñas, 2015).

Si bien la educación inclusiva aún no es una realidad en nuestro país, existen algunos alumnos con discapacidad que logran atravesar por las múltiples barreras que presenta el sistema de educación común y estar en condiciones de avanzar desde el nivel secundario hacia el nivel superior. Este nivel, por su parte, presenta nuevas barreras para el aprendizaje que han sido escasamente estudiadas.

En el caso particular de la FCEx de la UNLP, la inscripción de Analía en la Licenciatura en Matemática comenzó a instalar nuevas preguntas entre los docentes de la institución: ¿Cómo plantear la comunicación para desarrollar nuestro proyecto de enseñanza y que la alumna aprenda? ¿De qué maneras gestionaremos las diversas interacciones que constituyen el proceso de estudio? ¿De qué modos es posible trabajar con un intérprete en Lengua de Señas Argentina (LSA) en el aula? ¿Qué nuevas complejidades aparecen en la construcción y el uso del lenguaje matemático específico en un aula en la que conviven el español y la LSA? ¿Qué aspectos de nuestras propuestas usuales podrían estar actuando como barreras para el aprendizaje?

El caso de Analía provocó un movimiento institucional que motivó la conformación de un equipo de trabajo que inició un camino de construcción de ideas y reflexiones. Esto es lo que se relata en la próxima sección.

§3. Sobre la construcción de un equipo para la inclusión de personas sordas

A partir del ingreso de Analía a la Licenciatura en Matemática, se realizaron diversas reuniones que involucraron a distintos actores. Además de las que hemos detallado hasta aquí y las que desarrollaremos a lo largo del trabajo, destacamos también algunos encuentros –organizados desde la Comisión de Ciencias Exactas sobre Discapacidad[3] (CCED) y la CUD– con representantes de la Asociación de Sordos de La Plata y la Asociación de Intérpretes en Lengua de Señas Argentina, así como con estudiantes sordos de otras carreras de la UNLP. El objetivo de estas y todas las reuniones que se fueron llevando a cabo fue crear una red de intercambio para favorecer la inserción de la estudiante y poder trabajar sobre las dudas planteadas por docentes y no docentes de la FCEx.

Antes y durante el transcurso del curso de ingreso a la FCEx, Analía se reunió con miembros del Espacio Pedagógico[4] (EP) con el fin de recibir orientación acerca del curso de ingreso y de las materias de primer año de la Licenciatura en Matemática: Análisis Matemático 1 y Álgebra. Al finalizar el curso de ingreso, la alumna decidió cursar solo Análisis Matemático 1. En ese momento, la FCEx propuso la conformación de un equipo que colabore con los profesores de dicha asignatura

[3]Comisión de la FCEx creada en marzo de 2014 y conformada por los diferentes claustros de dicha facultad que tiene participación en la CUD.

[4]El Espacio Pedagógico de la FCEx coordina el curso de ingreso e impulsa el Programa de Seguimiento de las Trayectorias Estudiantiles, entre otras tareas. http://www.exactas.unlp.edu.ar/espacio_pedagogico

para la inclusión de la alumna. A fines de marzo de 2017 y luego de asistir a dos clases, Analía decidió no seguir estudiando.

Aun con esta decisión por parte de la estudiante, nos propusimos seguir adelante con un proceso que se había iniciado: la construcción de un grupo colaborativo de profesionales preocupados por la inclusión efectiva de alumnos con discapacidad en espacios académicos vinculados con la matemática. Esta decisión se apoya en la identificación de que, en términos generales, en el contexto de la UNLP existen diferentes instancias de investigación sobre educación inclusiva pero no existe, al menos en forma continua y sistematizada, una trayectoria de investigación (y acciones consecuentes) que tomen el tópico particular "educación universitaria de alumnos sordos en el campo de la matemática" desde una mirada interdisciplinar. Buscamos conformar un equipo de trabajo que construya conocimiento que redunde en la instrumentación de políticas de accesibilidad inclusivas que partan de reconocer la heterogeneidad áulica, y garantice la igualdad de posiciones. Esta decisión cobra importancia a partir del crecimiento de matrícula de alumnos sordos que se ha registrado en los últimos años en diferentes carreras de la UNLP (Katz, Miranda, Arouxét, Barbato, & Contreras Borbon, 2016).

3.1. La conformación del equipo. Un primer equipo se conformó al momento que Analía comenzó a cursar la materia de primer año, Análisis Matemático 1. Sus integrantes eran un doctor en Física y una doctora en Matemática, quienes se desempeñan como docentes en la FCEx y participan de la CCED y CUD; una doctora en Educación y una especialista en Educación en Ciencias Exactas y Naturales, ambas especialistas en educación inclusiva y docentes de la FaHCE y de la Asociación Azul. Las primeras reuniones nos permitieron ubicar asuntos relevantes que debíamos definir y fundamentar: ¿Qué tipo de trabajo nos íbamos a proponer? ¿Cuáles serían nuestros puntos de partida? ¿Bajo qué marcos teóricos? ¿De qué modos se involucrarían los docentes y otros actores institucionales? ¿Con qué objetivos?

Para construir puntos de partida, ubicamos el surgimiento de la experiencia a partir de una necesidad de los dos docentes de la FCEx: aun con todos los dispositivos institucionales de apoyo a los alumnos con los que contaban –por ejemplo, el Espacio Pedagógico–, con las comisiones de discapacidad a disposición –tanto de la facultad como de la universidad–, algunos asuntos pedagógicos y didácticos específicos debían ser tematizados. Esta cuestión emergió de experiencias anteriores por las que habían transitado estos docentes y algunos de sus colegas en las cuales, aun con todos sus conocimientos matemáticos, aun con su experiencia en la docencia universitaria e incluso a pesar de su compromiso y trayectoria en espacios dedicados a la inclusión, encontraban ciertos límites al momento de plantear clases de matemática en las que participa un alumno sordo. La reconstrucción de algunas de estas experiencias nutrió nuestras primeras reflexiones en el proceso de problematización, y permitió elaborar un primer conjunto de preguntas.

3.2 La construcción de un escenario colaborativo. Propusimos un espacio de trabajo compartido con la intención de que se constituyera una colaboración entre nuestro equipo y referentes institucionales –entre otros, personas sordas (alumnos o docentes), profesores, tutores, intérpretes de LSA, miembros de comisiones de discapacidad–. Esto supone que un cierto saber nuevo ha de ser construido teniendo en cuenta la experiencia y los conocimientos de todos los participantes. Acordamos con las ideas expresadas por (Sadovsky, Quaranta, Itzcovich, Becerril, & García, 2015), quienes, citando a (Desgagné, Bednarz, Lebuis, & Poirier, 2001; Roditi, 2011; Fiorentini, 2004), afirman: "la aproximación colaborativa a los problemas de enseñanza es imprescindible, sobre todo si pensamos que la exploración de esos problemas en el sistema real requerirá de estrategias de intervención que los mismos docentes deberán sostener en la acción" (p. 9). Se espera que desde la heterogeneidad de saberes y miradas de quienes participan, todos aporten a la construcción de algo nuevo, solo posible en el espacio de dicha colaboración y en el marco institucional en el que se sitúa. Los distintos aportes son genuinamente considerados, y en este sentido consideramos una simetría de posiciones –no de saberes– dentro del equipo para elaborar y reelaborar ideas personales sobre la enseñanza de la matemática que surgen de la propia trayectoria docente (Papini, 2015).

En nuestro caso, la intención de constituir un equipo colaborativo implica, por un lado, la revisión de ciertas interpretaciones acerca de qué es lo que estudia específicamente la didáctica general, la didáctica de la Matemática y la educación inclusiva; por lo tanto, sobre qué asuntos y de qué modos se espera que los especialistas en cada área puedan intervenir. Por otro, la construcción por parte de todos los participantes del equipo de una posición que supere ideas que han estado mucho más presentes en la tradición educativa: la capacitación, la supervisión, la evaluación de prácticas docentes[5]. Esto agrega grandes complejidades que son motivo de trabajo sostenido al interior del equipo –pero que no desarrollaremos en este artículo–.

[5]Una expectativa usual sobre la intervención de equipos que se acercan a las instituciones a raíz de problemas específicos es que los especialistas comuniquen "consejos" para mejorar las prácticas, y que estos sean aplicables de manera directa –es decir, sin la implicación de los docentes en su producción–. Hemos encontrado en el trabajo con una institución (que caracterizaremos en próximas secciones) un "deslizamiento" de este tipo, que ilustramos a través del siguiente extracto: "Pilar sacó fotos de todo el material que llevó Bernardo, para poder, junto con Verónica, comenzar a buscar estrategias que solucionen la problemática planteada." (Minuta de reunión 4/8/18). La perspectiva colaborativa se aleja de esta interpretación y tiene como desafío la construcción de posiciones activas frente al estudio de los problemas y al diseño de soluciones.

3.3 Reconfiguración de objetivos y tareas. A raíz del ingreso de Analía a la FCEx, nuestro primer equipo ya conformado definió convocar a distintos actores de dicha facultad vinculados con la alumna:

- uno de los referentes del curso de ingreso, quien había establecido un fluido contacto con Analía durante el período inicial;
- los docentes de la materia Análisis Matemático 1 de primer año que iba a cursar Analía.

En este encuentro, el referente del curso de ingreso compartió algunas características del trabajo que habían planteado con la alumna, los modos de comunicación utilizados, los modos de organización de la tarea de estudio que habían puesto a prueba, las impresiones que el conjunto de docentes del ingreso había tenido en relación a los conocimientos matemáticos de Analía, sus preocupaciones. Fue un espacio propicio para que los nuevos docentes pudieran plantear sus primeras preguntas a partir de imaginar su aula y sus prácticas a la luz de nuevas condiciones: la presencia de esta alumna sorda y la intérprete de LSA que le fue asignada durante el curso de ingreso.

En este mismo período nos pusimos en contacto con Analía, con el objetivo de organizar un encuentro que nos permitiera conocerla, indagar sus expectativas, sus dificultades, sus intereses, así como ofrecer nuestra colaboración. Este contacto estuvo a cargo del referente del curso de ingreso. Sin embargo, no logramos concretar dicho encuentro: Analía había decidido abandonar la carrera, decisión que comunicó a través de su intérprete a los profesores de Análisis Matemático 1. Frente a este escenario, desde la FCEx se hicieron varios intentos de contactarla, sin éxito –por lo cual no hemos tenido acceso a su propia perspectiva sobre su tránsito en esta institución ni a las razones de su decisión–.

A pesar de esto, el equipo se propuso seguir adelante realizando rastreos de bibliografía y sistematizando algunas de las cuestiones elaboradas en relación a esta corta experiencia –cuestiones que incluimos en la sección 4, Inicio de la problematización–.

Posteriormente y en función de una convocatoria de otra unidad académica (FCE) a instancias de su representante en la CUD, recuperamos la idea de colaboración. Así, nos pusimos en contacto con la nueva institución y llevamos adelante algunos encuentros que incluyeron a: Bernardo –alumno sordo de primer año de la Licenciatura en Turismo, cuyo caso es presentado en la sección 5–, referentes de la CUD (sordos y no sordos), docentes de matemática e intérpretes de LSA de la UNLP. Asimismo, se sumaron estudiantes avanzadas de Ciencias de la Educación.

§4. Inicio de la problematización

El primer equipo que conformamos en el marco de la FCEx definió como objetivo trabajar sobre aspectos vinculados a la inclusión de alumnos sordos en las aulas de Matemática de la UNLP. En nuestras primeras reuniones consideramos la posibilidad de plantear encuentros con:

- alumnos sordos de carreras en las que hayan cursado o estén cursando alguna materia de matemática;
- docentes de matemática que tengan o hayan tenido como alumnos a personas sordas;
- intérpretes en LSA de la UNLP que hayan acompañado o estén acompañando a alumnos sordos en materias de matemática en distintas carreras.

Nuestro objetivo es recoger impresiones y vivencias personales de todos estos actores sobre las experiencias de enseñar, aprender y acompañar la trayectoria formativa en la universidad. Los intercambios con alumnos nos permiten acceder a su perspectiva acerca de ciertas barreras que encuentran para estudiar y aprender, así como aquello que les ha resultado provechoso. En relación a los docentes, apuntamos a indagar qué dificultades tienen o han tenido para plantear la enseñanza, qué ideas han desplegado, con qué apoyos han contado, qué les ha dado buenos resultados, qué no. En el caso de los intérpretes, nos resulta importante recoger su perspectiva acerca de sus posibilidades de acompañamiento, los modos en que ciertas características del trabajo condicionan la tarea, cuestiones puntuales de su formación en LSA y su vínculo con el lenguaje específico de la matemática.

Para construir conocimiento acerca de las trayectorias académicas vinculadas al estudio de la matemática de alumnos con discapacidad en la universidad, consideramos necesario incluir cierto rastreo de sus trayectorias matemáticas en los niveles obligatorios de educación. Esta decisión se apoya en una idea teórica fuerte: podemos comprender mejor los problemas de la enseñanza y de los aprendizajes de la matemática si consideramos un enfoque antropológico (Chevallard, 1991). Nos ubicamos así en una perspectiva teórica en la que se vienen produciendo investigaciones en Didáctica de la Matemática desde hace varios años: el carácter institucional de las matemáticas y el problema de las transiciones institucionales (Chevallard, 1991, 1992; Grugeon, 1995; Gascón, 1997; Castela, 2016). Un aspecto central para indagar, vinculado a estos modos de concebir el problema, es la relación con el saber matemático que construyen los alumnos en cada nivel (Charlot, 1991, 2014), y cómo estos modos de vivir sus propias experiencias matemáticas se vinculan con la propia relación con el saber de los profesores de estas instituciones (Nimier, 1993; Grimaldi, 2017).

4.1 Algunas consideraciones sobre la comunicación. Una primera cuestión importante fue identificar que la UNLP propone como apoyo a la inclusión de alumnos con discapacidad auditiva a intérpretes en LSA. Tal como plantean (Katz et al., 2016), la CUD empezó a trabajar en la inserción de alumnos sordos en la UNLP en el año 2007 con el dictado de cursos de LSA para no docentes, trabajando en conjunto con tutores de estudiantes sordos, dando charlas informativas a docentes y a la comunidad universitaria. También, realizó un relevamiento y selección de intérpretes de LSA a fin de contratarlos para estudiantes de la UNLP que así lo requieran. Estos autores también advierten la heterogeneidad de la comunidad sorda,

> *ya que algunos se comunican por LSA, pues el español resulta ser para ellos una segunda lengua por lo que, su gramática no es la misma. Otros utilizan audífonos. En algunas oportunidades, los alumnos se apoyan en la lectura labial, de esta manera aparecen dificultades en el seguimiento de las clases teóricas para realizar la toma de apuntes. Por otro lado, encontramos aquellas personas que han recibido implante coclear y en ocasiones la acústica de las aulas no les favorece la escucha, estas son algunas de las situaciones relevadas en el acompañamiento de las diferentes trayectorias educativas.* (Katz et al., 2016, p.2)

Podemos establecer, por lo tanto, que este tipo de apoyo es solo uno de los múltiples posibles que habrá que construir en función de las barreras que se vayan identificando en la interacción del alumno con las condiciones institucionales que se le proponen.

A raíz del caso particular de la breve trayectoria de Analía en la FCEx durante 2017, a quien se le había asignado una intérprete en LSA, comenzamos a analizar ciertas diferencias en los apoyos que cada nivel educativo ha decidido asignarle para su inclusión. En el nivel secundario, la alumna había contado con maestros integradores con conocimientos en LSA y también en ciertos aspectos de la práctica docente. Es decir, había contado con profesionales con un rol docente cuya formación incluía aspectos pedagógicos y didácticos –entre otros, acerca de la enseñanza de la matemática–. Cuando la misma alumna ingresó a la UNLP, ya no contó con maestros integradores que la acompañaran en este nuevo trayecto. En su lugar, se le asignó un intérprete de LSA que no tiene un rol docente ni formación disciplinar específica (al menos no necesariamente). Su función era mediar en la comunicación. No estamos cuestionando los apoyos que uno y otro nivel han decidido asignar, sino que nos preguntamos por sus diferencias y las implicancias que podrían tener para las trayectorias educativas en cada caso. En particular, ¿de qué modos se juegan estas diferencias en el pasaje de un nivel a otro? ¿De qué manera el estudio de estas diferencias nos permitiría repensar la complejidad de la inclusión en la transición entre la educación obligatoria y la universidad?[6]

En este sentido, creemos necesario señalar que los intérpretes en LSA de los que la UNLP dispone no tienen formación específica disciplinar. Es decir, no están formados para desempeñarse como intérpretes de cada carrera y cada materia o área del conocimiento. Así, los intérpretes se contactan con las lógicas específicas y el vocabulario de cada espacio en el mismo momento que los alumnos sordos. Al considerar esta cuestión debemos, además, tener en cuenta que la interpretación del español hablado a la LSA no es lineal: el intérprete debe justamente "interpretar" y reconstruir el mensaje. Esto podría constituirse como un obstáculo comunicacional de la mediación con efectos sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje. Asimismo, cuando se piensa en la función del intérprete, es usual que se lo considere como un mediador de la palabra hablada, invisibilizando las dificultades que pueden generar también el español escrito tanto para su lectura como su escritura. Esto se ve reflejado, por ejemplo, en la asignación de intérpretes solamente para las clases presenciales.

De ahí que una segunda cuestión que encontramos relevante tiene que ver con las diferencias entre la LSA, el lenguaje español coloquial escrito y hablado, el lenguaje matemático que vive en la escuela secundaria y el lenguaje matemático en los primeros cursos de la universidad. ¿Cómo podríamos caracterizar a cada uno de ellos en sus diferentes contextos? ¿De qué modos sus características y sus diferencias se juegan en la relación de los alumnos, de los docentes y de los intérpretes con el saber matemático? Lejos de plantear su estudio en términos de si una lengua es más completa o más compleja que otra, proponemos la necesidad de analizarlas en relación a posibles barreras que la no consideración de sus diferencias podría sumar a la trayectoria matemática educativa de las personas sordas.

Por otro lado, hemos identificado que algunos problemas de aprendizaje atribuidos a las características de los alumnos sordos están asociados, en realidad, a las formas de enseñanza universitaria tradicional que parten de un supuesto implícito: los alumnos que ingresan a la universidad deberían estar "alfabetizados académicamente". Desde este supuesto deberían, además, disponer de determinados conocimientos y responder de forma positiva a los modos expositivos de enseñanza. En este sentido la pregunta sobre la inclusión de alumnos sordos permite reconocer una heterogeneidad preexistente a la presencia del alumnado

[6]Aclaremos aquí que estas preguntas surgieron gracias a nuestra breve experiencia en los inicios del equipo, aún no hemos podido elaborar respuestas en torno a este caso particular. Sin embargo, creemos que nos posiciona mejor para el momento de plantear una nueva colaboración, y se constituyen en preguntas interesantes para futuras indagaciones que podamos realizar dentro de nuestros equipos.

sordo dentro del aula y la existencia de otros alumnos que, sin ser sordos, no comprenden, desaprueban y se frustran. Así, la presencia de alumnos sordos permite problematizar algunas prácticas institucionales y de enseñanza que terminan redundando en el mejoramiento de los procesos de enseñanza y de aprendizaje para todo el alumnado y el profesorado.

Finalmente, nos resulta relevante intentar reconstruir la biografía escolar de los alumnos sordos, por lo menos en lo que permite relevar de la relación con el saber del estudiantado sordo y las matemáticas. En este sentido nos preguntamos ¿cómo habrá sido la relación entre el estudiante y las matemáticas de cada nivel? ¿De qué manera la experiencia escolar ha influido en la elección de la carrera? ¿Qué prácticas y saberes matemáticos circulaban en la escuela? ¿Serán diferentes a las prácticas y saberes matemáticos que circulan por las aulas de la universidad? ¿Qué concepciones sobre la sordera, las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas a alumnos sordos y no sordos poseen los docentes de las escuelas a las que asistieron los alumnos sordos? ¿Y los de la universidad?

A continuación, presentamos un ejemplo que nos permite analizar cómo algunos errores que producen los alumnos pueden ser asociados a un déficit, sin advertir que se deben al encuentro entre los conocimientos de los estudiantes –construidos en ciertos contextos, a raíz de su interacción con ciertas personas y ciertos tipos de situaciones–, y los modos particulares de hablar, nombrar y decir de las matemáticas de las distintas instituciones.

4.2 Análisis de un ejemplo: el lenguaje de la matemática escolar.[7] Es usual que la matemática universitaria presente sus actividades a través de enunciados que inician de la siguiente manera:

"Sea E el conjunto que verifica ..."

"Siendo E, F y G conjuntos, se cumple ..."

"Dado el polinomio $P(x)$ ..."

"Dados los siguientes conjuntos ..."

Para quienes se dedican a la enseñanza en este nivel, estos modos de plantear una consigna no revisten mayores dificultades. Pero para alguien que no pertenece a esta comunidad de estudio, pueden ser modos bastante artificiales de presentar una situación (de hecho, no es un formato que se utilice frecuentemente en el lenguaje coloquial o en áreas de estudio ajenas a las ciencias exactas).

Hemos registrado que en ocasión de presentar una consigna que iniciaba con la palabra "dados" en una clase que incluía a un alumno sordo, esta palabra fue interpretada por otro de sus significados: "dados" como las piezas cúbicas que

[7] Cuando hablamos de matemática escolar, aludimos a la matemática de instituciones con fines didácticos (Chevallard, 1991). En este sentido, incluimos a la matemática que se enseña en la universidad en esta misma categoría.

se utilizan en numerosos juegos[8]. Algunas opiniones atribuyen esta manera de interpretar a características de las personas sordas, a través de afirmaciones como "las personas sordas son muy literales".

Pero comparemos este episodio con otro registrado en investigaciones llevadas adelante en España, a propósito de la inclusión de alumnos inmigrados provenientes de países en los que no se habla español y para los cuales este idioma es, efectivamente, una segunda lengua.

> *La propuesta, relacionada con la medida, era la siguiente: si una cana eran 8 palmos y un palmo eran 4 cuartos, ¿3 cuartos y 3 palmos llegan a ser media cana? Ya se había resuelto un problema parecido y el uso de dibujos ayudaba a los alumnos a resolverlo:*
>
> Profesor: *Fátima, llevas un rato mirando el enunciado y no intentas resolver el problema. ¿Necesitas ayuda?*
>
> Fátima: *¿Qué quiere decir llegan?*
>
> *El problema de Fátima se encontraba en una palabra del enunciado a la que no lograba encontrarle el significado. Una vez que se lo aclaró el profesor, Fátima se puso a trabajar y en pocos minutos tenía la solución al problema.* (Vilella Miró, 2007, p. 35)

Es poco probable que frente a un alumno proveniente de otro país y para quien el español es su segunda lengua, interpretemos que una duda o una confusión frente a una palabra se deba a características de ese alumno. La afirmación "los alemanes son muy literales" (por poner un ejemplo cualquiera) se interpretaría rápidamente como una sobregeneralización de un episodio puntual a toda una población, una afirmación prejuiciosa y de nula rigurosidad. ¿Por qué no tenemos la misma reacción frente a afirmaciones similares sobre la comunidad sorda?

Atribuimos esta diferencia a una mirada permeada por el modelo médico de discapacidad (Palacios, 2008), que interpreta a la sordera como la falta de audición, una condición médica que diferencia a las personas "normales" (oyentes) de las que no lo son. Desde el modelo social podemos advertir que la primera lengua de muchos miembros de la comunidad sorda argentina es la LSA, siendo el español su segunda lengua. En este sentido, episodios como el de los "dados" pueden interpretarse en clave similar a la que se utiliza en estudios culturales como el que hemos presentado:

> *El dominio del lenguaje se adquiere con muchos años de usarlo y de estudiarlo. El profesorado lo utiliza, como corresponde, usando un registro adecuado a las aulas, pero no podemos suponer que todos los alumnos de la clase se encuentran en el mismo punto.* (Vilella Miró, 2007, p. 35)

[8]Es posible advertir la multiplicidad de significados que propone la Real Academia Española para la palabra "dado" en: http://dle.rae.es/

Hemos reflexionado hasta aquí de qué manera una cierta naturalización en el uso del lenguaje unida a una mirada discapacitante puede constituirse en barrera para el acceso de los estudiantes al sentido de las situaciones que se les proponen desde la enseñanza. En la próxima sección analizaremos otras posibles barreras para la inclusión.

§5. La experiencia de Bernardo. Relato de un caso

A mediados de 2018 el equipo fue convocado para colaborar en la inclusión de Bernardo, un alumno sordo de la carrera Licenciatura en Turismo (Facultad de Ciencias Económicas, UNLP). En la primera etapa de esta colaboración, realizamos un encuentro con Bernardo en el que indagamos acerca de sus experiencias en torno a las matemáticas y a su ingreso a la vida universitaria. Incluimos aquí algunas cuestiones que hemos podido abordar en dicho encuentro, ciertas conceptualizaciones que elaboramos, algunas líneas de acción que quedaron planteadas y nuevas aristas que nos ayudan a seguir delineando la colaboración.

5.1 Acerca de algunas barreras para la inclusión. Bernardo tiene 51 años, y cursó las tres materias que se dictan en el primer cuatrimestre del primer año de la carrera: Introducción al turismo y a la estructura del mercado turístico, Geografía turística argentina y latinoamericana y Matemática I (Álgebra). Logró aprobar las primeras dos, pero desaprobó Matemática I (Álgebra).

Nos relata que cursó tanto el nivel primario como el secundario en escuelas comunes de la ciudad de Buenos Aires. Terminó la secundaria en una escuela de adultos en el año 1994, cuando el sistema educativo aún contaba con el formato EGB-Polimodal. Tiene un título del nivel superior, Técnico en Turismo, y aclara que en esa carrera no debió cursar materias vinculadas a la matemática. Esta experiencia en estudios superiores le permitió, según su propia visión, tener herramientas conceptuales para comprender y aprobar dos de las asignaturas de primer año de la carrera de la UNLP. Bernardo se comunica usando LSA pero también lee labios y está oralizado. De hecho, en nuestro encuentro con él nos comunicamos oralmente, hablándole de frente y de modo pausado. Además, contamos con la presencia del moderador de la comunidad sorda de la UNLP (CUD), que colaboró en la comunicación tanto a través de la oralidad como con LSA.

Pedimos a Bernardo algunos detalles acerca de su experiencia con la matemática del nivel secundario. Recuerda con gratitud a su profesora del último año quien "siempre hablaba de frente y modulando", y aún conserva la última práctica que resolvió en 3º Polimodal, sobre fracciones. Un análisis somero de este material en relación a la primera práctica de matemática del curso universitario permite identificar una distancia importante entre ambas propuestas, tanto conceptualmente como desde el punto de vista del tipo de problemas, del tipo de tareas y de las representaciones que se ofrecen. La Figura 1 muestra una imagen del material referido al tema “fracciones”.

Es interesante destacar que el último conjunto de actividades que resolvió este alumno en su anterior experiencia matemática –hace más de 20 años– estaba centrado en problemas de fracciones asociados a la medida; todos los problemas presentaban dibujos para determinar qué parte del entero estaba sombreada, o bien para sombrear una determinada parte que representará una dada fracción. En cambio, la primera práctica universitaria trata sobre combinatoria, casi no incluye representaciones gráficas y las actividades son problemas en contexto –hoteles, vacaciones, rutas, etc.–[9], enunciados en lenguaje coloquial o acompañados de un lenguaje conjuntista. Las imágenes de la Figura 2 corresponden a enunciados de problemas de la carpeta de Bernardo.

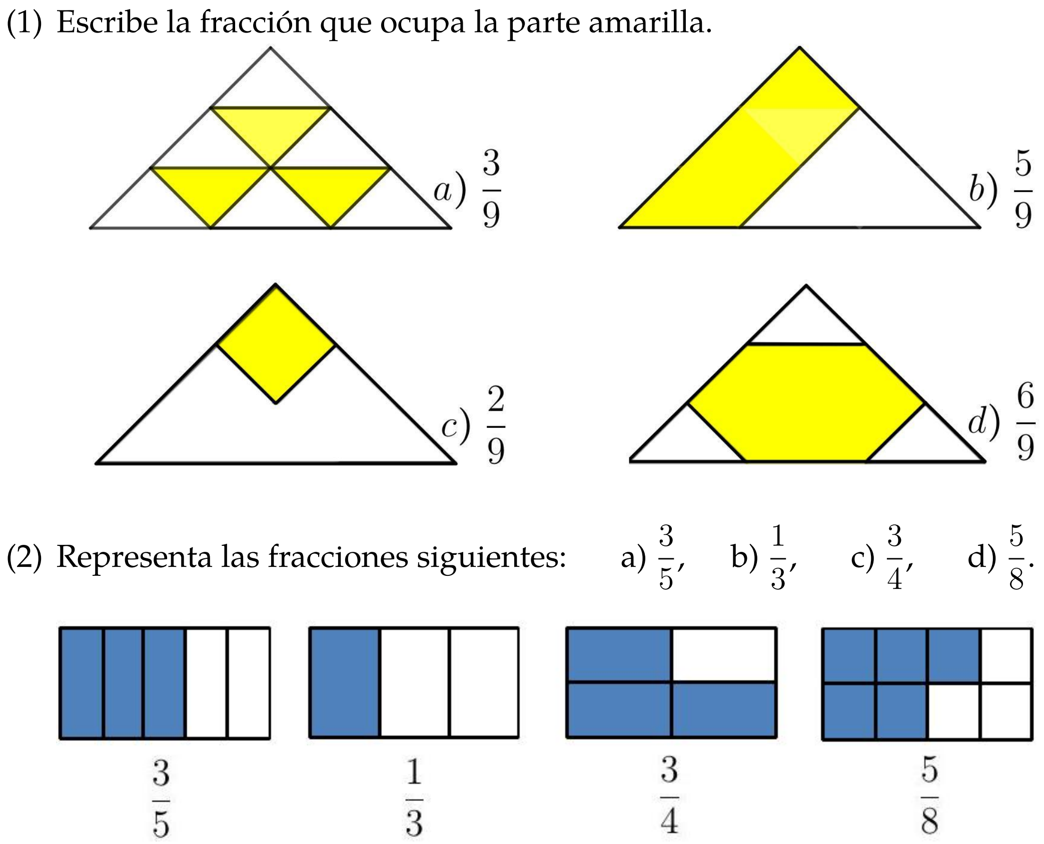
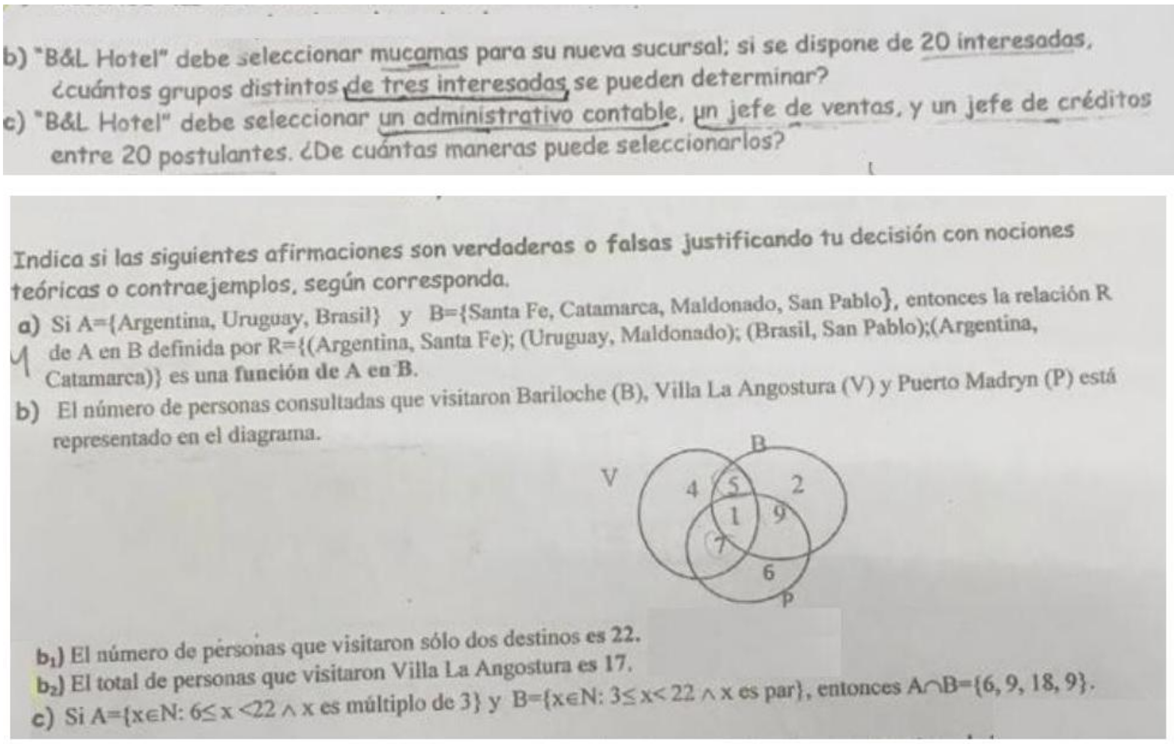


Figura 1. Algunas actividades sobre facciones trabajadas por Bernardo en 3º Polimodal y sus soluciones.

[9]Nos resulta interesante aclarar aquí que la contextualización de los problemas es un intento concreto y bienintencionado de la institución en su conjunto y de los docentes de esta materia para acercar la propuesta de estudio de combinatoria a la carrera en la cual se inscribe. Esto lo relevamos en un encuentro con ellos, sobre el cual no profundizaremos en este artículo.


b) "B&L Hotel" debe seleccionar mucamas para su nueva sucursal; si se dispone de 20 interesadas, ¿cuántos grupos distintos de tres interesadas se pueden determinar?
c) "B&L Hotel" debe seleccionar un administrativo contable, un jefe de ventas, y un jefe de créditos entre 20 postulantes. ¿De cuántas maneras puede seleccionarlos?

Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando tu decisión con nociones teóricas o contraejemplos, según corresponda.
a) Si A={Argentina, Uruguay, Brasil} y B={Santa Fe, Catamarca, Maldonado, San Pablo}, entonces la relación R de A en B definida por R={(Argentina, Santa Fe); (Uruguay, Maldonado); (Brasil, San Pablo);(Argentina, Catamarca)} es una **función de A en B**.
b) El número de personas consultadas que visitaron Bariloche (B), Villa La Angostura (V) y Puerto Madryn (P) está representado en el diagrama.

b$_1$) El número de personas que visitaron sólo dos destinos es 22.
b$_2$) El total de personas que visitaron Villa La Angostura es 17.
c) Si A={x∈N: 6≤ x <22 ∧ x es múltiplo de 3} y B={x∈N: 3≤ x< 22 ∧ x es par}, entonces A∩B={6, 9, 18, 9}.

Figura 2. Problemas de la carpeta de Bernardo en la universidad.

Esta distancia es, sin dudas, una primera barrera para la inclusión de este alumno que valdría la pena tematizar con los docentes de la asignatura[10]. Sin embargo, no está vinculada a su condición de persona sorda. Según nos advierte una de las responsables del área de accesibilidad de la facultad, la proporción de aprobados durante el primer cuatrimestre del primer año asciende solo al 40 %. De este modo, el estudio de la inclusión de Bernardo podría colaborar con la inclusión de muchos otros alumnos sin discapacidad que encuentran en la propuesta ciertas rupturas respecto de sus experiencias matemáticas anteriores que no pueden sortear de manera autónoma.

En su relato acerca de su experiencia universitaria, Bernardo incluye varios aspectos que nos permiten construir un primer panorama sobre ciertas barreras que se le presentan. Por un lado, la asistencia de intérpretes: durante las clases de matemática no ha contado con la presencia de su intérprete, a diferencia de las otras dos materias que ha cursado y aprobado en las que sí participaba de las clases. Esta ausencia fue explicada desde la institución por la incompatibilidad de los horarios de la intérprete contratada por la UNLP y los de la asignatura Matemática I. Encontramos aquí una barrera institucional: la "imposibilidad" de coordinar los

[10]En esta descripción del problema no hemos ahondado sobre otras cuestiones que posiblemente también estén operando, vinculadas por ejemplo a ciertas rupturas epistemológicas. Es, como dijimos, un análisis preliminar muy somero que nos permite identificar "zonas de estudio" sobre las cuales seguiremos trabajando.

horarios de trabajo de distintos profesionales de la universidad con los horarios de cursado de los estudiantes que necesitan de su apoyo.

Bernardo también identifica algunas barreras comparando el modo en que dan clase los docentes de matemática y los de las otras dos asignaturas que sí aprobó. Por ejemplo, comenta que los docentes de las otras materias dan clases utilizando presentaciones con diapositivas, siempre de frente al intérprete. Esto le permite prestar atención al intérprete y tener, además, tiempo para fotografiar cada diapositiva; con estas construye su material personal de estudio. Los docentes de matemática, en cambio, no utilizan este tipo de presentaciones; además, usualmente hablan mientras escriben en el pizarrón, dando la espalda a los alumnos la mayor parte del tiempo[11]. Esto se constituye en una nueva barrera ya que, a la ausencia del intérprete se le suma la imposibilidad de leer los labios de los docentes, teniendo acceso solamente al registro escrito. Nos parece relevante nombrar esta barrera y advertir la importancia de articular lo que se escribe y lo que se dice oralmente ya que, bajo ciertas condiciones, contribuye a la comprensión de lo que se está presentando, especialmente cuando se consideran estudiantes que recién se inician en la cultura matemática universitaria.

5.2 Reflexiones, nuevas tensiones y algunas líneas posibles de trabajo

Un asunto que nos resulta relevante destacar es que en el relato que elabora Bernardo acerca de sus experiencias en matemática –tanto en el nivel secundario como en esta materia que ha cursado en la universidad–, no aparecen frases que indiquen una relación conflictiva con el saber. Bernardo es un alumno comprometido, le interesa estudiar, comprender y aprender. Se trata de un alumno movilizado[12] (Charlot, 2006), que busca construir estrategias para avanzar. Esto es distinto de otros casos en los que, al fracasar, los alumnos se desaniman, construyen una imagen devaluada de sí mismos o sobre las matemáticas. Él no declara "odiar las matemáticas" o tener una relación de rechazo con esta área del conocimiento. Su relación con este saber podría caracterizarse a partir de sus sostenidos intentos de comprender, estudiar, aprender. Ubica que hay algo que se podría hacer para que esto ocurra: él ya ha entendido matemática, otra matemática. Esto lo ha llevado,

[11] Quienes hemos dictado o asistido a cursos de matemática universitaria podemos hipotetizar que este modo de dar clase no se debe a malas intenciones. Por el contrario, los docentes pueden tener buenas razones para hacerlo; por ejemplo, escribir y hablar de manera simultánea para seguir un razonamiento deductivo y mostrarlo a los alumnos mientras lo produce. No lo señalamos para criticar a los docentes, sino para advertir que ciertas prácticas usuales pueden mostrar sus límites con la presencia de un alumno sordo. Esto permite desnaturalizarlas y analizar posibles modificaciones que colaborarían en derribar barreras para la inclusión.

[12] "El concepto de movilización implica la idea de movimiento. Movilizar, es poner en movimiento; movilizarse es ponerse en movimiento. Es para insistir sobre esta dinámica interna que empleamos el término de "movilización" con preferencia al de "motivación". La movilización implica que uno se moviliza (desde "el interior"), mientras que la motivación pone el acento sobre el hecho de que se está motivado por alguien o alguna cosa ("desde el exterior")." (Charlot, 2006)

incluso, a explicitar su voluntad de colaborar en la elaboración de ciertos apoyos para otros alumnos sordos, como la construcción de un glosario de matemática en LSA y la revisión de materiales de estudio, entre otros.

En primer lugar, creemos que es posible profundizar el estudio de la relación de Bernardo –en tanto alumno sordo– con el saber matemático de distintas instituciones considerando estas cuestiones. Tal profundización colaboraría en el estudio de la construcción de posiciones inclusivas –es decir, sujetos activos en la identificación y eliminación de barreras, así como en la construcción de apoyos–, tanto de alumnos como de docentes y otros actores institucionales, en las aulas de matemática de la universidad.

En segundo lugar, el análisis preliminar presentado en el apartado anterior nos muestra que las barreras que hemos identificado son variadas. Algunas están más vinculadas con la organización institucional: la coordinación de horarios, la posibilidad de disponer de intérpretes. Otras, a la comunicación: cómo ubicarse para que el alumno y/o su intérprete accedan a lo que se está diciendo; dónde conviene que se ubique el intérprete dentro de la clase; qué estrategias comunicativas son más convenientes para un determinado alumno. Pero también, algunas de las barreras que hemos identificado son didácticas; esto es, la posibilidad de eliminarlas supone un trabajo específico de los docentes sobre sus propuestas de enseñanza.

Sabemos que los profesores han sido convocados en varias ocasiones por distintos actores de la institución con el objetivo de informar o ser informados, para dar cuenta de ciertas acciones o para recibir "consejos" acerca de ciertos modos de actuar para la inclusión. Sin embargo, desde hace ya varios años las investigaciones didácticas nos han enseñado que la posibilidad de que los docentes se comprometan en un trabajo reflexivo en torno a sus prácticas necesariamente debe incluirlos como parte activa de los grupos de trabajo. ¿De qué modos nuestro equipo podría colaborar para la transformación de la posición de la institución y de sus docentes respecto de la revisión de las prácticas de enseñanza? ¿Cómo podremos visibilizar la naturaleza didáctica de ciertas barreras para la inclusión de alumnos con y sin discapacidad?

§6. Palabras finales

En este trabajo hemos intentado describir el proceso de problematización para la construcción de un espacio con intenciones colaborativas que incluye a miembros de varias unidades académicas de la UNLP y que se ha venido consolidando desde inicios de 2017, así como algunas de nuestras primeras preguntas, experiencias y reflexiones.

En investigaciones que se han llevado a cabo en los últimos años se describe el acceso de personas sordas a la UNLP y el trabajo que realizó la CUD para conseguir intérpretes de LSA –con presupuesto de la UNLP–, con el objetivo de facilitar su ingreso a las distintas carreras. Entre otras cosas, (Katz et al., 2016) destacan que, a pesar de este esfuerzo,

> estos ingresos han evidenciado serias dificultades para su permanencia, ya que los cambios normativos no han sido acompañados de las respuestas estructurales, evidenciándose en barreras de tipo comunicacionales, de recursos humanos y pedagógicos necesarios, es decir, la realidad nos muestra que los estudiantes sordos ingresan a la Universidad Nacional de La Plata, pero aún cuentan con escasos recursos pedagógicos para su accesibilidad académica, (Katz et al., 2016, p. 2).

En este sentido, nuestra experiencia nos ha permitido identificar que la sola incorporación de intérpretes de LSA en clases en las que participan alumnos sordos no es una condición suficiente para la efectivización del derecho a la educación y los aprendizajes. Sabemos hoy que existen aspectos problemáticos en la formación y en las condiciones de trabajo de estas figuras: entre otros, disponibilidad horaria, conocimiento de la disciplina y del lenguaje matemático específico, posibilidad (o no) de participar de espacios de trabajo con los docentes. Así, emergen nuevos aspectos a ser estudiados y considerados por la institución para la mejora en la construcción de apoyos para la inclusión.

Asimismo, como hemos desarrollado a lo largo de estas páginas, si bien la experiencia nació con la intención de conformar un equipo colaborativo, somos conscientes de que la sola intención no es suficiente. Tal como nos enseña la vasta producción de los últimos años en torno a la colaboración –entre otros, (Bednarz, 2004; Sadovsky et al., 2015; Sadovsky, Quaranta, Itzcovich, Becerril, & García, 2016; Papini, 2013, 2015, 2018; Ainscow & West, 2006; Ainscow, Muijs, & West, 2006; Ainscow, 2016)–, su construcción

> requiere de la identificación de problemas comunes para los que no se dispone de respuestas ya hechas y que pueden ser explorados con los aportes de unos y otros que, desde prácticas y posicionamientos diferentes, han acumulado saberes que podrían contribuir a su tratamiento compartido (Sadovsky et al., 2016, p. 17).

La conformación de equipos colaborativos al interior de instituciones específicas –con sus dinámicas propias, sus jerarquías, sus expectativas respecto de ciertas figuras y sus acciones– está atravesada por tensiones que se generan en el encuentro entre las características institucionales y la necesidad de desnaturalizarlas, interrogarlas, e incluso desafiarlas. También, por tensiones en la esfera de lo personal, del encuentro de la relación de cada uno de los actores con el saber matemático, con su saber profesional, y con la posición que supone para sí mismo y le suponen los demás. Todo esto nos lleva a identificar a la construcción de la colaboración como uno de los asuntos a seguir trabajando.

En este mismo sentido, resulta central señalar la necesidad de que los docentes a cargo de la enseñanza en aulas que incluyen a alumnos con discapacidad formen parte de los equipos colaborativos. La construcción de apoyos para la inclusión educativa tiene en el centro de su intención que los alumnos aprendan, y por lo tanto debe apuntar a generar condiciones pedagógicas y didácticas para que esto suceda, y para que dichas condiciones se puedan sostener en el tiempo al interior de la institución.

Finalmente, nuestra experiencia nos permite visibilizar la centralidad que tiene la participación de las personas con discapacidad en los equipos que trabajan para la identificación de barreras y la construcción de apoyos.

Referencias

Ainscow, M. (2016). Collaboration as a strategy for promoting equity in education: possibilities and barriers. *Journal of Professional Capital and Community*, *1*(2), 159–172.

Ainscow, M., Muijs, D., & West, M. (2006). Collaboration as a strategy for improving schools in challenging circumstances. *Improving Schools*, *9*(3), 1-11.

Ainscow, M., & West, M. E. (2006). *Improving urban schools: Leadership and collaboration*. London: Open University Press.

Barton, L. (2009). Estudios sobre discapacidad y la búsqueda de la inclusividad. Observaciones. *Revista de Educación*, *349*, 137–152.

Bednarz, N. (2004). Collaborative research and professional development of teachers in mathematics. En Niss, M. y Emborg, E. (Eds.). *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education (CD version). Copenhagen, Denmark: IMFUFA, Roskilde University*, 1–15.

Castela, C. (2016). La teoría antropológica de lo didáctico: Herramientas para las ciencias de la educación. *Acta Herediana*, *59*, 8–15.

Charlot, B. (1991). La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas. En R. Bkouche, B. Charlot, y N. Rouche. (Coords.). *Faire des mathematiques: le plaisir du sens. Paris: Armand Colin.*, 171-193.

Charlot, B. (2006). *La relación con el saber. Elementos para una teoría*. Montevideo: Trilce.

Charlot, B. (2014). La relación de los jóvenes con el saber en la escuela y en la universidad, problemáticas, metodologías y resultados de las investigaciones. Polifonías. *Revista de Educación*(4), 15–35.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica*. Buenos Aires: Aique.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherhes en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 77–111.

Cobeñas, P. (2015). *Buenas prácticas inclusivas en la educación de las personas con discapacidad en la provincia de Buenos Aires y desafíos pendientes*. CABA: Asociación por los Derechos Civiles. Recuperado de https://educacion-inclusiva.com.ar/wp-content/uploads/2015/10/Buenas-practicas-Educacion-Inclusiva-ADC-2015.pdf

Cobeñas, P., & Grimaldi, V. (2018). *Construyendo una educación inclusiva II. Aportes para repensar la enseñanza en escuelas para todos*. La Plata: Asociación Azul. Recuperado de www.asociacionazul.org.ar/uploads/azulcuadernillodigitalfull.pdf

Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P., & Poirier, L. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation [en red]. *Revue des sciences de l'éducation*, *27*(1), 33–64.

Fiorentini, D. (2004). *Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? En M. Borba y J. Araújo (Eds.), Pesquisa qualitativa em educação matemática (pp. 53-85)*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Gascón, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad. *Revista SUMA*, *26*, 11–21.

Grimaldi, V. (2017). *La inclusión de alumnos con discapacidad en aulas de matemática del nivel secundario: Su abordaje en la formación docente inicial (Trabajo final integrador)*. Presentada en Universidad Nacional de La Plata. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación para optar al grado de Especialista en Educación en Ciencias Exactas y Naturales. Recuperado de www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/tesis/te.1516/te.1516.pdf

Grimaldi, V., Cobeñas, P., Melchior, M., & Battistuzzi, L. (2015). *Construyendo una educación inclusiva. Algunas ideas y reflexiones para la transformación de las escuelas y de las prácticas docentes*. La Plata: Asociación Azul. Recuperado de www.asociacionazul.org.ar/uploads/Construyendo_una_Educacion_Inclusiva_-_Asociacion_Azul_1.pdf

Grugeon, G. (1995). *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l´algèbre élémentaire dans le transition entre deux cycles d´enseignement: Bep et premiere g. (tesis doctoral)*. Universidad París 7.

Katz, S., Miranda, L., Arouxét, M., Barbato, J., & Contreras Borbon, C. (2016). *La incorporación de intérpretes de LSA en la Universidad Nacional de La Plata. Conquistando espacios, garantizando derechos*. Ponencia presentada en el Congreso "Educar para incluir: el compromiso social de la Universidad Pública", IX Jornadas Nacionales de Universidad y Discapacidad. Universidad Nacional del Nordeste, Octubre de 2016.

Nimier, J. (1993). *Las matemáticas, el español, los idiomas... ¿para qué me sirven? El profesor y la presentación de su disciplina*. Colombia: Universidad del Valle.

ONU. (2006). *Convención sobre los derechos de las personas con discapacidad*.

Palacios, A. (2008). *El modelo social de discapacidad: orígenes, caracterización y plasmación en la Convención Internacional sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad*. Madrid: Ediciones Cinca.

Papini, M. C. (2013). *Justificaciones metodológicas para el estudio de un proceso de formación continua de docentes*. Ponencia presentada en el VI Congreso Nacional y IV Internacional de Investigación Educativa, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad Nacional del Comahue, Argentina.

Papini, M. C. (2015). El papel del análisis de problemas aritméticos en la formación continua del docente. *Revista Educación Matemática*, *27*(2), 67–93.

Papini, M. C. (2018). *Una mirada desde la perspectiva de la investigación colaborativa de un proceso de investigación en marcha*. Memorias de la VII Reunión Pampeana de Educación Matemática (pp. 95-104). Santa Rosa, La Pampa, Argentina.

Roditi, (2011). *Apports d'une intégration de diverses approches et perspectives. Note de synthèse présentée pour l'habilitation à diriger des recherches sur les pratiques enseignantes en mathématiques*. Paris: Université Paris Descartes.

Sadovsky, P., Quaranta, M., Itzcovich, H., Becerril, M. M., & García, P. (2015). La noción de relaciones entre cálculos y la producción de explicaciones en la clase de matemática como objetos de enseñanza. Su configuración en el marco de un trabajo colaborativo entre investigadores y docentes. *Revista Educación Matemática*, *27*(1), 7–36.

Sadovsky, P., Quaranta, M., Itzcovich, H., Becerril, M. M., & García, P. (2016). Tensiones y desafíos en la construcción de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática. *Revista Educación Matemática*, *23*(3), 9–30.

Vilella Miró, X. (2007). *Matemáticas para todos. Enseñar en un aula multicultural*. Barcelona: ICE-HORSORI.

María Belén Arouxét
Centro de Matemática de La Plata - Facultad de Ciencias Exactas - Universidad Nacional de La Plata
(✉) *belen@mate.unlp.edu.ar*

Pilar Cobeñas
Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación - Universidad Nacional de La Plata/Instituto de Investigaciones en Humanidades y Ciencias Sociales - Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas/Asociación Azul
(✉) *pilarcobenas@gmail.com*

Verónica Grimaldi
Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación - Universidad Nacional de La Plata /Universidad Pedagógica Nacional/Asociación Azul
(✉) *verogrimaldi@gmail.com*

Recibido: *17 de octubre de 2018*.
Aceptado: *24 de abril de 2019*.
Publicado en línea: *7 de mayo de 2019*.

¿Sabías que...

por Ricardo Podestá

existen sucesiones de dígitos que no son primos en ninguna base?

Recordemos que en sistema decimal (base 10), la notación $a_3a_2a_1a_0$ significa $(a_3a_2a_1a_0)_{10} = a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$. Si cambiamos 10 por otro número b tenemos la notación en base b.

Ahora bien, la definición de número primo (o de número compuesto) no depende de la base elegida para representarlo, sino que sólo tiene que ver con los divisores del número en cuestión. Es una propiedad intrínseca del número y sus divisores. Sin embargo, una secuencia fija de dígitos, digamos $a_3a_2a_1a_0$, con los a_i en $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, bien podría ser primo en alguna base b y compuesto en otra. Por ejemplo, el número $(1234)_b = b^3 + 2b^2 + 3b + 4$ podría ser primo para algún b y compuesto para otro. De hecho, $(111)_2 = 2^2 + 2 + 1 = 7$ es primo, $(111)_3 = 3^2 + 3 + 1 = 13$ es primo, pero $(111)_4 = 4^2 + 4 + 1 = 21$ es compuesto.

Notar que si $b \geq 3$, el número

$$(121)_b = b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2$$

es compuesto para cualquier b. Lo mismo sucede con

$$(1331)_b = b^3 + 3b^2 + 3b + 1 = (b+1)^3,$$
$$(14641)_b = b^4 + 4b^3 + 6b^2 + 4b + 1 = (b+1)^4,$$

para $b \geq 4$ y $b \geq 5$, respectivamente. Es decir, las sucesiones

$$\{(121)_b\}_{b\geq 3}, \quad \{(1331)_b\}_{b\geq 4} \quad \text{ó} \quad \{(14641)_b\}_{b\geq 5}$$

no contienen ¡ni un sólo primo! Del mismo modo, si denotamos el número 10 por el símbolo X, tenemos

$$(15XX51)_b = b^5 + 5b^4 + Xb^3 + Xb^2 + 5b + 1 = (b+1)^5$$

no contiene primos para cualquier $b \geq 11$.

Te dejo planteado el desafío: ¿te animás a enunciar el resultado más general, usando el teorema del binomio

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \tbinom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

donde $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ es el número binomial?

Esta es una aplicación más del triángulo de Pascal (ver la nota histórica del *¿Sabías que..?* del Número 33, Vol. 2, 2018).

Sección de Problemas

por Juan Pablo Rossetti

Los siguientes problemas están pensados para un público amplio.

Las soluciones se encuentran en la página siguiente.

Problema 1. Longitud del tren. Tomás iba en el auto con su hijo cuando vieron un tren yendo en la misma dirección y sentido que ellos. Su hijo dijo: "¡Papi, qué tren más largo!". Entonces ambos se preguntaron cuánto mediría el tren. Tomás le pidió a su hijo que cronometrara el tiempo que tardaban en pasarlo, de punta a punta, y mantuvo su velocidad constante. El tren también iba a velocidad constante, menor que la de ellos. Pasado un buen rato, cuando estaban regresando, volvieron a ver el tren, que continuaba su marcha a la misma velocidad, solo que ahora ellos iban en sentido contrario. Tomás volvió a pedirle a su hijo que anotara el tiempo que tardaban en cruzarse con el tren, de comienzo a fin de éste, y mantuvo la misma velocidad constante que a la ida, porque pensó que con esos datos podría calcular la longitud del tren. Sin embargo no le resultó fácil resolver este problema y se lo tuvo que preguntar a un profesor de matemática. ¿Puedes ayudar a Tomás a calcular la longitud del tren? ¿Puedes calcular la velocidad del tren? Los datos son: la velocidad del auto (constante) y los tiempos que tardaron en pasarlo y en cruzarlo, de punta a punta del tren.

¿Era necesario mantener la misma velocidad a la vuelta que a la ida para poder saber la longitud del tren?

Problema 2. ¿Existen cinco números consecutivos tales que la suma de los cuadrados de los 3 primeros sea igual a la suma de los 2 últimos? En caso que sí, ¿cuántas soluciones habría?

¿Qué sucede si en lugar de considerar los cuadrados de los cinco números consideramos sus cubos? ¿Habrá alguna solución?

Problema 3. Patitas de Pollo. Un restorán de comidas rápidas vende patitas de pollo en porciones de 6, 9 y 20 patitas. ¿Cuál es el mayor número de patitas de pollo que no se puede ordenar en este restorán?

(Por ejemplo, si queremos pedir 19 patitas, no podemos.)

SOLUCIONES

Solución 1. Se sabe que la velocidad es igual a la distancia dividida por el tiempo, es decir, $v = \frac{d}{t}$, o equivalentemente, $t = \frac{d}{v}$. Si aplicamos esto a la longitud del tren, L, y llamamos v_1 a la velocidad del tren y v_2 a la del auto, tenemos que cuando van en el mismo sentido la velocidad relativa es $v_2 - v_1$, por lo que el primer tiempo cronometrado, t_1, satisface $t_1 = \frac{v_2 - v_1}{L}$. Análogamente, el segundo tiempo cronometrado es $t_2 = \frac{v_2 + v_1}{L}$, puesto que la velocidad relativa es ahora $v_2 + v_1$. De estas dos ecuaciones se obtiene fácilmente L, sumando miembro a miembro: $t_1 + t_2 = \frac{2v_2}{L}$, luego $L = \frac{2v_2}{t_1 + t_2}$ es la longitud del tren.

La velocidad del tren se puede calcular ahora despejándola de cualquiera de las dos ecuaciones planteadas.

No fue importante haber mantenido la misma velocidad al regreso que a la ida, puesto que si al regreso Tomás hubiera ido a otra velocidad constante v_3, el cálculo se haría casi del mismo modo, dando como resultado $L = \frac{v_2 + v_3}{t_1 + t_2}$.

Solución 2. Sí, existen. El 10, 11, 12, 13 y 14 cumplen con lo pedido, pues $100 + 121 + 144 = 365 = 169 + 196$. Para llegar a esto, podemos llamar n al número del medio y plantear la ecuación $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2$, que es equivalente a $n^2 = 12n$, cuyas únicas soluciones son $n = 12$ y $n = 0$. El caso $n = 0$ corresponde a los números $-2, -1, 0, 1$ y 2, que sería una solución en los enteros, pero no en los naturales. De modo que hay una única solucion en los enteros positivos.

El caso de los números elevados al cubo se puede hacer planteando la ecuación análoga, que al simplificarla queda $n^3 = 2 \times 3^2 \times (n^2 + 1)$. Esta ecuación no tiene solucion en los enteros. Una forma de notarlo es razonando por el absurdo: si hubiera una solución n y p fuera un divisor primo de n, entonces p no sería divisor de $n^2 + 1$, además, p^3 dividiría a n^3, luego, p^3 debería dividir a 2×3^2, lo cual es un absurdo por el Teorema Fundamental de la Aritmética, que nos asegura la unicidad en la factorización en primos.

Solución 3. Rta. 43. Se ve que a los múltiplos de 3 se los va a poder pedir a partir del 6, puesto que si es múltiplo de 6, pedimos porciones de 6, y si es múltiplo de 3 pero no de 6, entonces pedimos una porción de 9 y completamos con las porciones de 6 que hagan falta. Ahora, pasamos a los números de la forma $3k+1$ y $3k+2$, donde k es un entero positivo. Notemos que el 20 es de la forma $3k+2$ con $k=6$. Por consiguiente, a los números de la forma $3k+2$ los podremos pedir a todos partir del 26 (pedimos una porción de 20 patitas y completamos con las de 6 y 9 como hacíamos antes para los múltiplos de 3). En cambio, para hacer pedidos con $3k+1$ patitas, tenemos que irnos hasta el 40, que es el primer número de esta forma que podemos pedir. Razonando como antes, a partir del 46 podemos ordenar todos los $3k+1$, pero el 43 no.

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones?

$$\{a_n\}: \quad 1, 1, 2, 3, 7, 22, 155, 3411, 528706, \ldots$$

$$\{b_n\}: \quad 1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \frac{49}{20}, \ldots$$

$$\{c_n\}: \quad 1, 4, 27, 256, 3125, 46656, \ldots$$

$$\{d_n\}: \quad 0, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 4, 3,$$
$$2, 3, 4, 3, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 4, \ldots$$

Podés encontrar las soluciones en la página 58.

ICMI Study 25 - Profesores de Matemática trabajando y Aprendiendo en Grupos Colaborativos

Anuncio, por Cristina Esteley

Del **3 al 7 de febrero de 2020**, se realizará en el Instituto de Educación de la Universidad de Lisboa (Portugal) la "Conferencia de Estudio" vinculada al ICMI Study 25. Esta Conferencia es organizada por la Comisión Internacional sobre Educación Matemática (ICMI, por sus siglas en inglés).

Cabe indicar que ICMI fue creada en el año 1908 a partir de iniciativas tomadas en el marco del Congreso Internacional de Matemática que se realizara en ese año en Roma. En esa ocasión se designa como presidente de ICMI a Felix Klein y se fija como principal objetivo analizar diferencias y similitudes en la enseñanza de la matemática en diversas escuelas secundarios del mundo. Luego de una interrupción del trabajo de ICMI, en el período comprendido entre las dos guerras mundiales, en el año 1952 retoma sus actividades y se convierte oficialmente en una comisión de la Unión Matemática Internacional (IMU). Desde ese momento, ICMI ha expandido sus actividades y objetivos.

Actualmente, ICMI busca **promover** programas internacionales de actividades y publicaciones que mejoren la colaboración, el intercambio y la difusión de ideas e información sobre todos los aspectos de la teoría y la práctica de la educación matemática contemporánea, **fomentar** los esfuerzos para mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en todo el mundo y **apoyar y asistir** al Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) y a las reuniones o conferencias de las organizaciones afiliadas a ICMI-IMU (para mayor información sobre ICMI, ver: www.mathunion.org/icmi).

Cumplimiento con tales propósitos es que ICMI organiza periódicamente los denominados ICMI Study o Conferencias de Estudio. Estos estudios promovidos por ICMI, buscan profundizar el estudio, discusión y análisis de una temática reconocida de interés por la comunidad internacional de Educación Matemática. Para realizar estos estudios, se conforma un Comité Internacional de expertos en el tema que tiene como responsabilidad proponer temáticas relacionadas con el tema en estudio y preguntas de indagación, colaborar en la organización de la Conferencia de Estudio y en la edición de un texto en el que se recopilan las principales contribuciones logradas en el marco de dicha Conferencia.

El año pasado, se realizó en la Universidad de Tsukuba (Japón) el ICMI Study 24, titulado “Reformas al Currículo de Matemáticas Escolares: Desafíos, cambios y oportunidades”.

El ICMI Study 25, titulado: “Profesores de Matemática trabajando y Aprendiendo en Grupos Colaborativos” a realizarse en Lisboa, busca informar sobre el estado del arte en el área temática vinculada con la colaboración de los profesores de matemática. Interesa informar acerca de las teorías, las investigaciones, las prácticas y las políticas educativas relacionadas con los trabajos colaborativos de los profesores. A partir de los avances que se logren, se busca sugerir nuevas direcciones de investigación que tengan en cuenta dimensiones contextuales, culturales, nacionales y políticas. Para este estudio se hace evidente una preocupación por recuperar y documentar auténticas actividades de colaboración.

Al hablar de profesores de matemática, se considera a todos los docentes que enseñan matemática en todos los niveles de enseñanza. Se toma en cuenta que, el trabajo de los profesores, incluye todas las dimensiones del trabajo docente que va más allá de la enseñanza cara a cara en las clases con los estudiantes. El aprendizaje de los profesores es interpretado en un sentido dual, refiriéndose tanto a lo que aprende (el producto) como también a los modos en que aprende (el proceso), enfatizando la importancia de la relación entre ambos aspectos.

Vinculado al trabajo colaborativo de los profesores de matemática, para ICMI Study 25, se proponen los siguientes temas:

- *Tema A:* Perspectivas teóricas sobre el estudio de la colaboración entre profesores de matemática.
- *Tema B:* Contextos, formas y resultados de la colaboración de los profesores de matemática.
- *Tema C:* Funciones, identidades e interacciones de los diversos participantes en la colaboración entre profesores de matemática.
- *Tema D:* Herramientas y recursos utilizados/diseñados para la colaboración docente y que resultan de la colaboración docente

Para participar de la Conferencia en Lisboa se pueden presentar informes de investigación, síntesis y meta-análisis de estudios empíricos, discusiones de temas teóricos y metodológicos. También se puede participar con trabajos que informen sobre distintas formas en que la colaboración docente ha tenido lugar en contextos locales o nacionales.

Los trabajos deben estar claramente relacionados con alguno de los cuatro temas que se presentan antes y abordar las cuestiones asociadas con los mismos.

Durante la Conferencia, los participantes en cada grupo temático harán presentaciones breves de sus trabajos, como máximo 5 minutos. Se espera que los participantes hayan leído todas las ponencias de su grupo con antelación. En cada grupo no habrá más de 20 ponencias. Los ponentes se centrarán en plantear preguntas y cuestiones relativas a su documento y analizar su relación con otros documentos presentados en el grupo de trabajo.

Las propuestas de presentaciones deben realizarse en línea a través del sitio web del Estudio ICMI (http://icmistudy25.ie.ulisboa.pt/) a más tardar el **30 de junio de 2019**. Las decisiones del proceso de revisión se enviarán al autor correspondiente antes del **30 de septiembre de 2019**.

Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $a_{10} = 3411 \times 528706 + 1 = 1{,}803{,}416{,}167$, pues cada término es igual al producto de los dos anteriores más uno, es decir $a_n = a_{n-2}a_{n-1} + 1$.
- $b_7 = \frac{363}{140}$, pues es igual a $\frac{49}{20} + \frac{1}{6}$. Son las sumas parciales de la *serie armónica*, es decir $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$.
- $c_7 = 7^7 = 823543$, pues $c_n = n^n$.
- $d_{36} = 5$. Es la distancia en norma uno (a veces llamada *Manhatan distance*) al origen si nos vamos desplazando alrededor del origen en forma de espiral rectilínea en el plano, pasando por los puntos de coordenadas enteras. El recorrido podría ser: $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,-1)$, $(0,-1)$, $(-1,-1)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,0)$, $(2,-1)$, $\ldots$

Viene de la página 55.