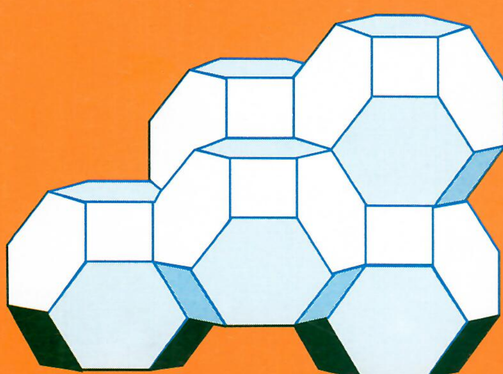
REVISTA DE EDUCACION MATEMATICA

UNION MATEMATICA ARGENTINA
FACULTAD DE MATEMATICA, ASTRONOMIA Y FISICA



VOLUMEN 16 - Nº 2 - 2001

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA

Editorial

Ponemos a consideración de los lectores el segundo número correspondiente al volumen de este año. Este número contiene un artículo sobre Cuadrados Mágicos. Una pregunta que surgió al realizar su lectura es ¿Cuál es la dimensión del espacio vectorial de cuadrados mágicos de orden n? Aparentemente, no es fácil de encontrar una respuesta.

Nos despedimos hasta el próximo número agradeciendo a quienes nos proporcionaron artículos y/o otras colaboraciones para la revista y con un "Los esperamos en la REM de San Luis".

Un abrazo.

Elida Ferreyra - Jorge Vargas

Los Espacios Vectoriales, los Cuadrados Mágicos y las Progresiones Aritméticas

Estela Sonia Aliendro

1. Espacios Vectoriales

1.1 Concepto de Espacio Vectorial

Un **espacio vectorial sobre el cuerpo** R de los números reales es un conjunto V, no vacío, cuyos elementos se llaman vectores, y tales que entre dos cualesquiera de ellos, **u** y **v**, está definida una ley de composición interna - suma de vectores, u + v, y entre un vector cualquiera **v** de V y un escalar a̲ del cuerpo **R** está definida una ley de composición externa - producto de un vector por un escalar - tal que a̲.v pertenece a V, y que verifica las siguientes propiedades:

- Respecto de la suma de vectores se debe satisfacer:

i) Asociatividad

Para todos los vectores **u, v, w** de V, se cumple que: **u + (v + w) = (u + v) + w**

ii) Conmutatividad

Para todos los vectores **u, v** de V, se cumple que: **u + v = v + u**

iii) Existencia de la identidad aditiva

Existe el vector **0** en V, tal que para todo vector **u** de V, **u + 0 = u**

iv) Existencia del inverso aditivo

Para todo vector **u** de V, existe el vector **(-u)** en V,tal que **u + (-u) = 0**

- Respecto del producto de un vector por un escalar:

i) Asociatividad para el producto de escalares

Para todos los escalares a, b de **R** y para todo vector **v** de V, se cumple que:

$$(ab)\,\mathbf{v} = a\,(b\mathbf{v})$$

ii) Distributividad del producto de un escalar para la suma de dos vectores

Para todo escalar a de **R** y para todos los vectores **u, v** de **V**, se cumple que:

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$$

iii) Distributividad del producto de un vector para la suma de dos escalares

Para todos los escalares a, b de **R** y para todo vector **v** de **V**, se cumple que:

$$(a + b)\,\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$$

iv) Para todo vector **v** de V, se cumple que: $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$, siendo 1 la identidad en **R**.

1.2 Concepto de Combinación Lineal

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, vectores de V y sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$, escalares de **R**. El vector:

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$$

se denomina una **combinación lineal** de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

1.3 Concepto de Independencia lineal

Un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de vectores de **V** es **linealmente independiente,** si

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = 0 \quad \text{implica} \quad a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

Si un conjunto de vectores no es linealmente independiente, se denomina **linealmente dependiente**.

1.4 Concepto de Conjunto Generador

Un conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de vectores de **V** es un **conjunto generador** de V, si todo vector de V puede expresarse como combinación lineal de $v_1, v_2, ..., v_n$.

1.5 Concepto de Base

Un conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de vectores de **V** es una **base de V**, si se cumple que:

i) $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es generador de V
ii) $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente independiente.

1.6 Concepto de Dimensión

El número máximo de vectores linealmente independientes en un espacio vectorial **V** define la **dimensión** del espacio vectorial. Esta dimensión puede ser finita o no. Es un número que no depende del conjunto maximal escogido.

2. Situaciones para la Enseñanza

2.1 Las Progresiones Aritméticas:

Observemos la siguiente sucesión de figuras:


Fig. 1


Fig. 2


Fig. 3

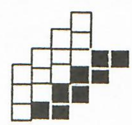


Fig. 4 ...

Los números que indican la cantidad de cuadritos negros corresponden a la sucesión $\{a_n\}$:

$$2, 4, 6, 8, ...$$

mientras que los números que conrresponden a la sucesión $\{b_n\}$ de cuadritos blancos es:

$$3, 6, 9, 12, ...$$

Ambas son dos ejemplos de progresiones aritméticas, las que responden a la fórmula:

$$s_k = s_1 + (k-1)d, \text{ donde } s_1, d \in \mathbf{R} \text{ y } k \in \mathbf{N}.$$

"Progresión aritmética de razón d y primer término s_1 ".

Para los casos anteriores, las correspondientes fórmulas son:

$$a_k = 2 + (k-1)2$$

$$b_k = 3 + (k-1)3\ .$$

A partir de las sucesiones de las figuras, se obtiene también la sucesión $\{c_n\}$ que indica el total de cuadritos de cada una de las figuras:

5, 10, 15, 20, ...

cuya fórmula es:

$$c_k = 5 + (k-1)5$$

y que es obtenida a partir de las fórmulas de a_k y b_k:

$$\begin{aligned} a_k + b_k &= [2 + (k-1)2] + [3 + (k-1)3] \\ &= (2 + 3) + (k-1)(2 + 3) \\ &= 5 + (k-1)5 \\ &= c_k\ . \end{aligned}$$

Es decir, las progresiones aritméticas al ser sumadas, originan una nueva sucesión que también resulta una progresión aritmética.

Comprobemos formalmente este hecho:

La suma de dos progresiones aritméticas, es una ley de composición interna.

En efecto: Sean s y t dos progresiones aritméticas:

$$s = \{s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots\} \text{ con } s_k = s_1 + (k-1)\,d$$

$$t = \{t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots\} \text{ con } t_k = t_1 + (k-1)\,f$$

siendo: $s_k + t_k = [\, s_1 + (k-1)\,d\,] + [\, t_1 + (k-1)\,f\,]$

$$= (s_1 + t_1) + (k-1)(d + f)$$

expresión esta última que también corresponde a una progresión aritmética.

Ahora resulta posible averiguar qué propiedades tiene esta ley de composición interna entre progresiones aritméticas:

i) Asociatividad

Si s, r, y t son progresiones aritméticas, resulta que $(r + s) + t = r + (s + t)$. En efecto:

$$\begin{aligned}
(r_k + s_k) + t_k &= \{\, [\, r_1 + (k-1)\,d\,] + [\, s_1 + (k-1)\,e\,] \,\} + [\, t_1 + (k-1)\,f\,] \\
&= [(r_1 + s_1) + (k-1)(d + e)] + [\, t_1 + (k-1)\,f\,] \\
&= [(r_1 + s_1) + t_1] + (k-1)\,[(d + e) + f\,] \\
&= [r_1 + (s_1 + t_1)] + (k-1)\,[d + (e + f)] \\
&= [\, r_1 + (k-1)\,d\,] + [\, (s_1 + t_1) + (k-1)(e + f)] \\
&= [\, r_1 + (k-1)\,d\,] + \{\, [\, s_1 + (k-1)\,e] + [\, t_1 + (k-1)\,f\,] \,\} \\
&= r_k + (s_k + t_k)\ .
\end{aligned}$$

ii) Conmutatividad

Si r, s son dos progresiones aritméticas, resulta que $r + s = s + r$

$$r_k + s_k = [\, r_1 + (k-1)\,d\,] + [\, s_1 + (k-1)\,e\,]$$

$$= (r_1 + s_1) + (k - 1)(d + e)$$

$$= (s_1 + r_1) + (k - 1)(e + d)$$

$$= [\ s_1 + (k - 1)\, e\ ] + [\ r_1 + (k - 1)\, d\ ]$$

$$= s_k + r_k\ .$$

iii) Existencia de identidad aditiva:

En efecto, la progresión 0, 0, ..., es aritmética, ya que responde a la fórmula:

$$0_k = 0 + (k - 1)0.$$

Así que, para toda progresión aritmética r, r + 0 = r:

$$r_k + 0_k = [\ r_1 + (k - 1)\, d\ ] + [\ 0 + (k - 1)\, 0\ ]$$

$$= (r_1 + 0) + (k - 1)(d + 0)$$

$$= r_1 + (k - 1)\, d$$

$$= r_k\ .$$

iv) Existencia del elemento inverso aditivo

En efecto: para toda progresión aritmética r, existe (-r) tal que r + (-r) = 0, siendo -r definida por:

$$-r_k = -r_1 + (k - 1)(-d)$$

luego,

$$r_k + (-r_k) = [\ r_1 + (k - 1)\, d\ ] + [\ -r_1 + (k - 1)(-d)]$$

$$= [\ r_1 + (-r_1)] + (k - 1)\ [d + (-d)]$$

$$= 0 + (k - 1)\, 0$$

$$= 0_k\ .$$

Si retornamos a la idea original - la sucesión de mosaicos de la página 3 - es posible pensar en la siguiente sucesión de figuras :

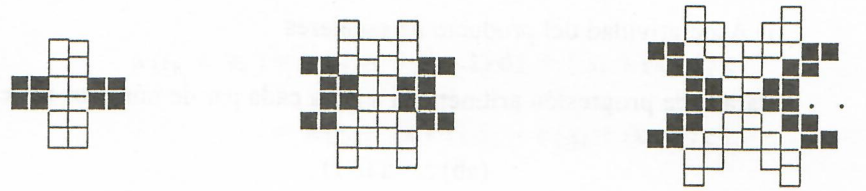


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 ...

Cada una de ellas está formada por el cuádruple de elementos de los correspondientes en la sucesión original.

Nada hay ahora más natural, que pensar en las fórmulas para determinar la cantidad correspondiente a cuadritos blancos y negros o totales de la figura en cada posición, cantidades que pueden obtenerse por la cuadruplicación de las correspondientes a_k, b_k, c_k de las sucesiones generadas al principio de esta sección.

Esto sugiere la idea de una nueva operación entre una progresión aritmética y un número, que origina una nueva progresión aritmética.

Es decir, dada la progresión aritmética s, con $s_k = s_1 + (k - 1)\, d$, y un a del campo de los reales, se obtiene una nueva progresión aritmética t, cuyo término general es:

$$t_k = a\, s_k ,$$

donde efectivamente t_k corresponde a una progresión aritmética como se ve a continuación:

$$\begin{aligned} t_k &= a\ [s_1 + (k - 1)\, d] \\ &= a\, s_1 + a\,(k - 1)\, d \\ &= (a\, s_1) + (k - 1)\,(ad) \end{aligned}$$

Se ha definido así, una **ley de composición externa entre las progresiones aritméticas y los números reales**, la que cumple las siguientes propiedades:

i) Asociatividad del producto de escalares

Para cada progresión aritmética r y para cada par de números reales a y b es:

$$(ab)\, r = a\,(b\, r)\,,$$

en efecto:

$$(ab)\, r_k = (ab)\ [r_1 + (k-1)\, d]$$

$$= (ab)\, r_1 + (ab)\,(k-1)\, d$$

$$= a\ [b\, r_1 + b\,(k-1)\, d]$$

$$= a\,(b\, r_k)\,.$$

ii) Distributividad del producto de una suma de escalares respecto de una progresión

Para cada progresión aritmética r y para cada par de números reales a y b es:

$$(a+b)\, r = a\, r + b\, s\,,$$

en efecto:

$$(a+b)\, r_k = (a+b)\ [r_1 + (k-1)\, d]$$

$$= [a\, r_1 + a\,(k-1)\, d] + [b\, r_1 + b\,(k-1)\, d]$$

$$= a\,[r_1 + (k-1)\, d] + b\,[r_1 + (k-1)\, d]$$

$$= a\, r_k + b\, r_k\,.$$

iii) Distributividad del producto de un escalar respecto de la suma de progresiones

Para cada par de progresiones aritméticas r y s y para cada número real a es:

$$a\,(r+s) = a\,r + a\,s,$$

en efecto:

$$\begin{aligned} a\,(r_k + s_k) &= a\{\,[\,r_1 + (k-1)\,d\,] + [\,s_1 + (k-1)\,e\,]\,\} \\ &= a\,[r_1 + (k-1)\,d\,] + a\,[s_1 + (k-1)\,e\,] \\ &= a\,r_k + a\,s_k\,. \end{aligned}$$

iv) Para cada progresión aritmética r, se cumple que:

$1\,r = r$, donde 1 es la identidad multiplicativa en **R**,
efectivamente:

$$\begin{aligned} 1 r_k &= 1\,[\,r_1 + (k-1)\,d\,] \\ &= 1\,r_1 + 1\,(k-1)\,d \\ &= r_1 + (k-1)\,d \end{aligned}$$

Conclusión: El conjunto de progresiones aritméticas sobre el conjunto de números reales, con las leyes de composición antes definidas, tiene la estructura de espacio vectorial.

2.1.1 Ejemplos de conjuntos linealmente independientes:

i) Conjunto con un elemento:

La progresión $\{1, 1, 1, ..., 1, ...\}$ es linealmente independiente. En efecto, si se considera la combinación lineal:

$$a\,[\,1 + (k-1)\,0\,] = 0 \quad \text{resulta} \quad a = 0$$

ii) Conjuntos con dos elementos linealmente independientes:

$r = \{1, 1, 1, ..., 1, ...\}$ $\qquad$ $s = \{1, 2, 3, ..., k, ...\}$,

$\{r,s\}$ es un conjunto linealmente independiente. En efecto, si a y b son números reales:

$$a\,r + b\,s = 0$$
$$a[1 + (k-1)\,0] + b[1 + (k-1)\,1] = 0$$
$$a\,1 + a(k-1)\,0 + b\,1 + b(k-1)\,1 = 0$$
$$(a + b) + b(k-1) = 0 + (k-1)\,0, \quad \forall\, k$$

de donde: $a + b = 0$ y $b = 0$, lo que implica que $a = b = 0$.

iii) Conjuntos de tres elementos linealmente independientes:

Entre las progresiones aritméticas, no existen estos conjuntos. En efecto, el espacio vectorial de ellas es de dimensión dos. Para comprobarlo, basta tomar una base, la que puede estar formada por las dos progresiones r y s del ejemplo anterior. Ya se sabe que el conjunto $\{r,s\}$ es linealmente independiente. Basta probar entonces, que es *generador* de cualquier progresión aritmética, como se muestra a continuación:

Para r, el término general es: $r_k = 1 + (k-1)\,0$

y para s, el término general es: $s_k = 1 + (k-1)\,1$.

Sea t la sucesión cuyo término general es $t_k = t_1 + (k-1)\,f$. Entonces hay que resolver, para a y b reales, el sistema generado a partir de:

$$a\,r_k + b\,s_k = t_k$$
$$a[1 + (k-1)\,0] + b[1 + (k-1)\,1] = t_1 + (k-1)\,f$$

de donde: $a + b = t_1$ y $b = f$

por lo tanto: $a = t_1 - f$ y $b = f$.

Ello prueba que cualquier progresión aritmética puede ser expresada como combinación lineal de r y s.

Es decir, el conjunto $\{r,s\}$ es una base de dicho espacio vectorial y por lo tanto, la dimensión del espacio vectorial de las progresiones aritméticas es dos.

2.1.2 Ejemplos de conjuntos linealmente dependientes:

i) de un elemento:

La progresión $\{0, 0, \ldots 0, \ldots\}$ es linealmente dependiente, ya que:

$$a[0 + (k-1)\,0] = 0 \text{ es válida para cualquier número real } a.$$

ii) de dos elementos:

Las progresiones $\{1, 1, \ldots 1, \ldots\}$ y $\{2, 2, \ldots 2, \ldots\}$, cuyos respectivos términos generales son:

$$r_k = 1 + (k-1)\,0 \quad y \quad s_k = 2 + (k-1)\,0$$

son linealmente dependientes, ya que: $a\,r_k = s_k$ implica $a = 2$.

iii) de más de dos elementos:

Cualquier conjunto de tres elementos o más, es linealmente dependiente, ya que la dimensión del espacio vectorial de las progresiones aritméticas es dos.

2.1.3 Ejemplos de bases

a) El conjunto $\{r, s\}$, donde $r_k = 1 + (k-1)\,0$ y $s_k = 1 + (k-1)\,1$.

b) El conjunto $\{r, t\}$, donde $r_k = 1 + (k-1)\,0$ y $t_k = 1 + (k-1)\,2$.

2.2 Los Cuadrados Mágicos

Un **cuadrado mágico** es una matriz cuadrada que tiene la característica de que la suma de los elementos de cada fila, de cada columna y de cada diagonal es constante. El orden de la matriz es el orden del cuadrado mágico.

Según refiere Malba Tahan en *El Hombre que Calculaba*, "los antiguos Magos de Persia, que también eran médicos, pretendían curar enfermedades aplicando a la parte enferma un cuadrado mágico, siguiendo el conocido principio de medicina *primun non nocére*, o sea, primer principio: no dañar".

2.2.1 El Espacio Vectorial de los Cuadrados Mágicos

Los cuadrados mágicos de orden tres constituyen un ejemplo de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales, donde la ley de composición interna está dada por la suma de matrices y la ley de composición externa corresponde al producto de una matriz por un escalar. En efecto, probemos que:

i) La suma de dos cuadrados mágicos es otro cuadrado mágico.

ii) El producto de un cuadrado mágico por un escalar es otro cuadrado mágico.

Pero antes es necesario definir formalmente cuadrado mágico.

Definición: Una matriz de orden tres es un cuadrado mágico si y sólo si:

$$A=(a_{ik})_{3\times 3} \text{ tal que } \sum_{j=1}^{3} a_{jp} = \sum_{k=1}^{3} a_{rk} = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \sum_{i+k=4} a_{ik} = a \quad \forall \text{ r,p}$$

Demostremos i):

Dadas las matrices A y B, cuadrados mágicos, la matriz suma A + B es también cuadrado mágico.

Sea $A+B=C=(c_{ik})_{3\times 3}$ donde $c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}$,

$$A=(a_{ik})_{3\times 3} \text{ con } \sum_{j=1}^{3} a_{jp} = \sum_{k=1}^{3} a_{rk} = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \sum_{i+k=4} a_{ik} = a$$

$$\text{y } B=(b_{ik})_{3\times 3} \text{ con } \sum_{j=1}^{3} b_{jp} = \sum_{k=1}^{3} b_{rk} = \sum_{i=1}^{3} b_{ii} = \sum_{i+k=4} b_{ik} = b$$

Entonces:

$$\sum_{j=1}^{3} c_{jp} = \sum_{j=1}^{3} (a_{jp}+b_{jp}) = \sum_{j=1}^{3} a_{jp} + \sum_{j=1}^{3} b_{jp} = a+b$$

$$\sum_{k=1}^{3} c_{rk} = \sum_{k=1}^{3} (a_{rk}+b_{rk}) = \sum_{k=1}^{3} a_{rk} + \sum_{k=1}^{3} b_{rk} = a+b$$

$$\sum_{i=1}^{3} c_{ii} = \sum_{i=1}^{3} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} + \sum_{i=1}^{3} b_{ii} = a + b$$

$$\sum_{i+k=4} c_{ik} = \sum_{i+k=4} (a_{ik} + b_{ik}) = \sum_{i+k=4} a_{ik} + \sum_{i+k=4} b_{ik} = a + b\,.$$

Lo anterior prueba que la suma de dos cuadrados mágicos es otro cuadrado mágico.

Ahora demostremos ii):

Sea $C = \alpha A$ donde α es un escalar (número real en este caso) y A un cuadrado mágico de orden tres. Entonces, si $A = (a_{ik})_{3\times3}$ y $C = (c_{ik})_{3\times3}$, se tiene que:

$c_{ik} = \alpha a_{ik}$ y $A = (a_{ik})_{3\times3}$ con $\sum_{j=1}^{3} a_{jp} = \sum_{k=1}^{3} a_{rk} = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \sum_{i+k=4} a_{ik} = a\,, \forall$r, p

Entonces: $$\sum_{j=1}^{3} c_{jp} = \sum_{j=1}^{3} \alpha a_{jp} = \alpha \sum_{j=1}^{3} a_{jp} = \alpha a$$

$$\sum_{k=1}^{3} c_{rk} = \sum_{k=1}^{3} \alpha a_{rk} = \alpha \sum_{k=1}^{3} a_{rk} = \alpha a$$

$$\sum_{i=1}^{3} c_{ii} = \sum_{i=1}^{3} \alpha a_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \alpha a$$

$$\sum_{i+k=4} c_{ik} = \sum_{i+k=4} \alpha a_{ik} = \alpha \sum_{i+k=4} a_{ik} = \alpha a$$

lo que muestra que la matriz *C* resulta un cuadrado mágico.

La matriz nula es un cuadrado mágico, ya que todas sus filas, columnas y diagonales suman cero.

Si la matriz A es un cuadrado mágico, la matriz (-A) también lo es, ya que sus filas, columnas y diagonales tienen como suma la opuesta de la respectiva suma de filas, columnas o diagonales de A.

Como los cuadrados mágicos de orden tres corresponden a un subconjunto de matrices de orden tres, y el conjunto de matrices de orden tres es un espacio vectorial sobre el cuerpo de números reales, también lo son los cuadrados mágicos con respecto a dicho cuerpo numérico, ya que se cumplen las leyes de composición correspondientes.

2.2.2 Ejemplos de conjuntos linealmente independientes:

a) de un solo elemento

$\{A_1\}$

$$\text{donde } A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En efecto: $a\,A_1 = 0$ implica $a = 0$; puesto que:

$$a\,A_1 = a \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a & 0 \\ 0 & a & 2a \\ 2a & 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ de donde } a = 0$$

b) de dos elementos

$\{A_1, A_2\}$

$$\text{donde } A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

En efecto: $a A_1 + b A_2 = 0$ implica $a = b = 0$, puesto que

$$a A_1 + b A_2 = a \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a A_1 + b A_2 = \begin{bmatrix} a & 2a & 0 \\ 0 & a & 2a \\ 2a & 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b & 0 & b \\ 0 & b & 2b \\ b & 2b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a + 2b & 2a & b \\ 0 & a + b & 2a + 2b \\ 2a + b & 2b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde $a = b = 0$

c) de tres elementos

$\{A_1, A_2, A_3\}$

$$\text{donde } A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

En efecto: $a A_1 + b A_2 + c A_3 = 0$ implica $a = b = c = 0$:

$$a A_1 + b A_2 + c A_3 = a \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a + 2b + c & 2a & b + 2c \\ 2c & a + b + c & 2a + 2b \\ 2a + b & 2b + 2c & a + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde
$$\begin{aligned} 2a &= 0 \quad & a &= 0 \\ 2c &= 0 \quad & c &= 0 \\ a + b + c &= 0 \quad & b &= 0 \end{aligned}$$

d) de cuatro elementos

No existen, en el conjunto de cuadrados mágicos de orden tres, conjuntos de cuatro cuadrados mágicos linealmente independientes. En efecto, si se considera el conjunto $\{A_1, A_2, A_3, X\}$, donde A_1, A_2, A_3 son las cuadrados mágicos linealmente independientes del ejemplo anterior y X es un cuadrado mágico arbitrario, cuyos elementos no son todos nulos, se busca probar que $a A_1 + b A_2 + c A_3 + 1 X = 0$ tiene solución. Veámoslo:

$$a\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&2\\2&0&1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&2\\1&2&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

donde **0** es la matriz nula.

$$\begin{bmatrix}a+2b+c+x_{11}&2a+x_{12}&b+2c+x_{13}\\2c+x_{21}&a+b+c+x_{22}&2a+2b+x_{23}\\2a+b+x_{31}&2b+2c+x_{32}&a+c+x_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

En consecuencia:

$$2a+x_{12}=0 \qquad 2\,a=-\,x_{12} \qquad a=-\frac{x_{12}}{2}$$

$$2c+x_{21}=0 \qquad 2\,c=-\,x_{21} \qquad c=-\frac{x_{21}}{2}$$

$$b+2c+x_{13}=0$$
$$2b+2c+x_{32}=0 \qquad b+(x_{32}-x_{13})=0 \qquad b=-\,(x_{32}-x_{13})$$

Usando el hecho que $d = x_{11} + x_{12} + x_{13} = x_{21} + x_{22} + x_{23} = \ldots$ un cálculo "sencillo" muestra que a,b,c resuelven el sistema del recuadro. Por ejemplo, $b+2c+x_{13} = -\,x_{32}+ + 2x_{13} - x_{21} = x_{13} + x_{13} - d + x_{11} + x_{31} - d + x_{12} + x_{22} = x_{13} + x_{31} - d + x_{22} = 0$. Esto prueba que el conjunto $\{A_1, A_2, A_3\}$ es *generador* de cualquier cuadrado mágico de orden tres. A la vez queda implicado que la **dimensión del espacio vectorial de los cuadrados mágicos de orden tres, es tres.**

2.2.3 Ejemplos de conjuntos linealmente dependientes

a) de un elemento:

La matriz nula, **0**, es un conjunto linealmente dependiente, ya que a **0** = **0** se verifica también para $a \neq 0$.

b) **de dos elementos:**

El conjunto $\{A_1, A_2\}$

$$\text{donde } A_1 = \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}} \quad , \quad A_2 = \boxed{\begin{matrix} \pi & 2\pi & 0 \\ 0 & \pi & 2\pi \\ 2\pi & 0 & \pi \end{matrix}}$$

En efecto, si a y b son escalares, se tiene:

$$a \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}} + b \boxed{\begin{matrix} \pi & 2\pi & 0 \\ 0 & \pi & 2\pi \\ 2\pi & 0 & \pi \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}$$

de donde resulta que: $a + b\pi = 0$, lo que implica $a = -b\pi$, ecuación que admite infinitas soluciones.

c) de tres elementos:

$\{A_1, A_2, A_3\}$

$$\text{donde } A_1 = \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}} , A_2 = \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix}} , A_3 = \boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}}$$

En efecto, $A_1 + A_2 + (-1)\, A_3 = \mathbf{0}$, donde **0** es la matriz nula.

d) de cuatro elementos:

Como tres es la dimensión del espacio vectorial de los cuadrados mágicos de orden tres, cualquier conjunto de cuatro o más elementos resulta linealmente dependiente.

2.2.4 Ejemplos de bases

El conjunto $\{A_1, A_2, A_3\}$ es una base, donde:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

El conjunto $\{B_1, B_2, B_3\}$ es una base, donde:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Bibliografía:

Birkhoff y Mac Lane: Álgebra Moderna. Ed. Vicens Vives. 1963
Colera y Guzmán: Matemática I, II, III. Ed. Anaya. 1994.
Colera y Guzmán: Matemática I, II. Ed. Anaya. 1989
Fletcher: Álgebra Lineal por sus Aplicaciones. Ed. Cedic. 1972
Paige y Swift: Elementos de Álgebra Lineal. Ed. Reverté. 1967
Tahan: El Hombre que Calculaba. Panamericana Editorial. 1994.

Facultad de Ciencias Exactas.
Universidad Nacional de Salta.

El Teorema de Dehn

Antonio J. Di Scala

1 Introducción

En el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900 en París, Hilbert propuso 23 problemas con el objeto de estimular la investigación matemática durante el nuevo siglo. El tercer problema fue quizás el más rápido en ser resuelto: Bricard en 1896 (es decir, antes de ser propuesto) y Max W. Dehn (alumno de Hilbert, conocido además, por haber formulado dos problemas clásicos en teoría de grupos presentados por generadores y relaciones, a saber: el problema de la palabra y el problema del isomorfismo [MT]) en 1900. Este artículo está destinado a exponer dos soluciones de este problema.

Desde la antigüedad sabemos que una manera de calcular el área de un polígono P es dividirlo en sub-polígonos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ buscando que éstos sean a su vez una subdivisión de un polígono al cual sabemos calcularle el área (e.g. un rectángulo o triángulo). El teorema de Bolyai-Gerwien justifica en cierto modo esta idea: *Dados dos polígonos A y B que tengan la misma área se pueden subdividir en sub-polígonos $A_1, \ldots, A_n$ y $B_1, \ldots, B_n$ de manera que los A_i's son congruentes con los B_i's* [B], [F, pág.270]. En palabras más sencillas, dados dos polígonos A y B de igual área, es posible dividir a A en sub-polígonos que reagrupados (sin solaparse) adecuadamente forman B. El matemático húngaro Farkas Bolyai (padre de János Bolyai conocido por las geometrías no-euclideanas junto con Gauss y Lobatchevsky; cabe destacar que Farkas Bolyai conoció al joven Gauss en Göttingen y recomendó a su hijo no enredarse con el axioma de las paralelas el cual le obsesionó toda su vida [MT]) y el oficial alemán aficionado a las matemáticas Gerwien demostraron casi simultáneamente el teorema en 1832 y 1833 respectivamente [B].

Para calcular el volumen de un poliedro podemos proceder en forma análoga, buscando dividirlo en sub-poliedros de manera que estos sub-poliedros sean congruentes con los que provienen de una subdivisión de un poliedro al cual sabemos calcularle el volumen. El **Tercer Problema de Hilbert** pregunta: *¿es posible dividir*[1] *un tetraedro regular de volumen* 1 *en sub-poliedros, de manera que estos sub-poliedros sean congruentes con los que provienen de una subdivisión del cubo de lado* 1*?* La respuesta, conocida con el nombre de Teorema de Dehn, es: **No.** A continuación exponemos dos demostraciones de este enunciado. La primera, es la que se encuentra en [F, pág. 288]. Luego, damos una demostración más general y conceptual basada en la idea de *invariante* . Concluimos el artículo señalando algunos resultados relacionados con el Teorema de Dehn y generalizaciones. Deseo agradecer a Leandro Cagliero, Juan Pablo Rossetti y Juan José Bigeón los numerosos comentarios y la invalorable ayuda en la presentación del artículo. También expreso mi agradecimento al Dr. Jorge Vargas por invitarme a escribir el artículo.

2 El Teorema de Dehn, primera versión

Se dice que dos poliedros A y B son *equicompuestos* si existe una subdivisión de A en sub-poliedros $A_1, \ldots, A_n$ y una subdivisión de B en sub-poliedros $B_1, \ldots, B_n$ tales que A_i es congruente con B_i para $i = 1, \ldots, n$. En palabras más sencillas, es posible encontrar poliedros $P_1, \ldots, P_n$ tales que tanto A como B se obtienen reagrupándolos (sin solapamiento).

La idea en la demostración de Dehn es establecer una relación entre los ángulos diedrales de poliedros equicompuestos. Luego, mostrar que esto no se cumple para un cubo y un tetraedro regular de igual volumen.

Un poliedro A consta de caras y aristas. A cada arista a de A le corresponden dos números, su longitud $l(a)$ y su *ángulo diedral* $\alpha(a)$. Recordemos que el ángulo diedral es el ángulo entre las caras que se unen en la arista a visto desde adentro del poliedro. En realidad, convendría escribir $\alpha(a, A)$ para resaltar la dependencia del ángulo diedral respecto al poliedro A, debido a que una misma

[1]dividir el poliedro A: significa encontrar poliedros $A_1, \ldots, A_n$ de modo que $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ y para cada $i \neq j$, $A_i \cap A_j$ está contenido en un plano

arista podría ser parte de varios poliedros. Dado el poliedro A denotamos con $\mathcal{A}$ el conjunto de aristas de A.

Vamos a demostrar, en primer lugar, que si A y B son equicompuestos entonces existen enteros positivos m_a, n_b y un entero n de manera que:

$$\sum_{a\in\mathcal{A}} m_a\alpha(a,A) = \sum_{b\in\mathcal{B}} n_b\alpha(b,B) + n\pi. \qquad (*)$$

Luego, vamos a aplicar la identidad anterior a un tetraedro regular de volumen 1 y a un cubo de lado 1. Llamemos θ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ al ángulo diedral del tetraedro regular. Este ángulo diedral satisface: $cos(\theta) = \frac{1}{3}$. En efecto, en un triángulo equilátero de lado l y mediana m se verifica $(\frac{l}{2m})^2 = \frac{1}{3}$, como muestra una sencilla aplicación del teorema de Pitágoras. Ahora, cortamos el tetraedro con un plano perpendicular a una cara que contenga una mediana por esa cara. En este plano queda entonces dibujado un triángulo isósceles (dos de sus lados miden m y el otro l) donde θ es el ángulo entre las medianas. Finalmente, usando el teorema del coseno y la relación $(\frac{l}{2m})^2 = \frac{1}{3}$ obtenemos $cos(\theta) = \frac{1}{3}$. Además la identidad $(*)$ implica que existen enteros no nulos r, s tales que: $s\theta = r\pi$.

Vamos a demostrar, en segundo lugar, que si $s\theta = r\pi$ entonces $r = s = 0$. De donde se sigue el Teorema de Dehn.
Resumiendo:

1- Si un cubo de lado uno y un tetraedro regular de igual volumen fueran equicompuestos entonces existirían enteros r, s no nulos tales que $r\pi = s\theta$.

2- Si dos enteros r, s satisfacen $r\pi = s\theta$ entonces son ambos nulos.

Prueba de 1-. En realidad, vamos a demostrar la identidad $(*)$. Llamemos $P_1, \ldots, P_n$ a los poliedros que reagrupados (sin solapamientos) de cierto modo forman A y de otro modo forman B. La idea es calcular la suma de todos los ángulos diedrales de todos los poliedros P_i's utilizando que una reagrupación forma A y otra forma B. Sea entonces,

$$S = \sum \alpha(a, P_j)$$

la suma de todos los ángulos diedrales de todos los poliedros P_i's.

Ahora, pensando en A podemos decir que las aristas de los poliedros P_i's se agrupan en tres clases: I las aristas que son parte de una arista de A, II las aristas que son parte de una cara de A y no están en una arista de A y finalmente III las aristas que están en el interior de A, salvo posiblemente por los extremos. Escribimos entonces,

$$S = \sum_{a \in I} \alpha(a, P_j) + \sum_{a \in II} \alpha(a, P_j) + \sum_{a \in III} \alpha(a, P_j).$$

Donde $a \in I$ indica que la arista a está en la situación I y de manera análoga $a \in II$ y $a \in III$.

Ahora, calculamos separadamente cada una de estas sumas. Para la primera suma, notemos que cada arista de A está subdividida en segmentos que pueden ser aristas de varios P_i's. Resulta claro que dependiendo de si el ángulo $\alpha(a, A)$ es obtuso o no, la suma de los ángulos diedrales de los poliedros que se encuentran en este segmento de esta arista será $\alpha(a, A) - \pi$ o $\alpha(a, A)$. De esta manera recorriendo una por una las aristas de A obtenemos :

$$\sum_{a \in I} \alpha(a, P_j) = \sum_{a \in A} n_a \alpha(a, A) - m\pi$$

donde $m, n_a \in \mathbb{N}$.

La suma sobre las aristas de tipo II es quizás la más sencilla de calcular, ya que los poliedros que comparten una arista dada que está en una cara deben acomodarse para formar esa cara. De donde esta suma es π. Luego, obtenemos:

$$\sum_{a \in II} \alpha(a, P_j) = r\pi$$

donde $r \in \mathbb{N}$.

Finalmente, las aristas de poliedros que están en el interior de A se pueden agrupar, a su vez, en aquellas que no están en ninguna cara de ninguno de los poliedros P_i's y las que están en una cara de algún poliedro P_i. En el primer caso resulta claro que la suma de los ángulos es 2π mientras que en el segundo debe ser π. Podemos entonces escribir:

$$\sum_{a \in III} \alpha(a, P_j) = s\pi + l2\pi$$

donde $s, l \in \mathbb{N}$.

Incorporando estos cálculos parciales a la suma de S arribamos a:

$$S = \sum_{a \in \mathcal{A}} n_a \alpha(a, A) - m\pi + r\pi + s\pi + l2\pi \quad r, m \in \mathbb{Z}\,.$$

Razonando análogamente con B hemos demostrado $(*)$. Usando $(*)$ para un cubo de lado 1 y un tetraedro regular de volumen 1 obtenemos la relación **1**$-$.

Prueba de 2- [B, pág. 50]. Recordemos que debemos demostrar que si $r\theta = s\pi, r, s \in \mathbb{Z}$ donde $cos(\theta) = \frac{1}{3}$ entonces $r = s = 0$. Supongamos que existe dicha relación. Por tanto $cos(r\theta) = cos(s\pi) = \pm 1$. Las fórmulas de **adición** del *seno* y del *coseno* nos permiten razonar por inducción, por ejemplo definiendo la sucesión $a_k := cos(k\theta)$ podemos hallar una relación de recurrencia que satisface. Más precisamente,

$$\begin{cases} cos((k+1)\theta) = cos(k\theta + \theta) = cos(k\theta)cos(\theta) - sen(k\theta)sen(\theta) \\ cos((k-1)\theta) = cos(k\theta - \theta) = cos(k\theta)cos(\theta) + sen(k\theta)sen(\theta). \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro estas dos igualdades resulta que la sucesión $a_k := cos(k\theta)$ satisface:

$$\begin{cases} a_{k+1} = \frac{2}{3}a_k - a_{k-1} \\ a_1 = \frac{1}{3} \\ a_0 = 0. \end{cases}$$

Ahora, utilizando el principio de inducción no es difícil verificar que $a_k = \frac{c_k}{3^k}$ para $1 \geq k$, donde c_k es un entero que no es divisible por 3. Luego, $cos(k\theta)$ nunca es un entero salvo que $k = 0$, esto implica $r = 0$, y demuestra **2**$-$.

Nota 2.1 *En [F, pág. 290], se da la siguiente demostración de* **2−**. *De* $cos(\theta) = \frac{1}{3}$, $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$, *resulta* $sen(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. *Es decir, usando números complejos* $cos(\theta) + isen(\theta) = \frac{1}{3} + i\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1+i2\sqrt{2}}{3}$. *Supongamos que existe* $n \neq 0$ *tal que* $cos(n\theta) = \pm 1$. *Luego, de las formula de De Moivre:* $cos(n\theta) + isen(n\theta) = (\frac{1+i2\sqrt{2}}{3})^n$ *obtenemos que la parte imaginaria de* $(\frac{1+i2\sqrt{2}}{3})^n$ *debe ser cero (pues* $cos(n\theta) = \pm 1$ *implica* $sen(n\theta) = 0$*). Es decir,* $0 = Im((\frac{1+i2\sqrt{2}}{3})^n) = Im((1 + i2\sqrt{2})^n)$. *Utilizando la fórmula del binomio de Newton resulta:*

$$0 = \sum_{0 \le k \le \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1} (-1)^k 2^{3k} = n + \sum_{1 \le k \le \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1} (-1)^k 2^{3k}.$$

Ahora, escribamos $n = 2^r m$ *con* m *impar. Vamos a demostrar que en la sumatoria* $\sum_{1 \le k \le \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1} (-1)^k 2^{3k}$ *cada sumando es divisible por* 2^{r+1}, *lo cual es absurdo ya que implica* m *par. En efecto, escribamos* $(2k+1)! = 2^{o_k} m_k$ *con* m_k *impar, donde* $1 \le k \le \frac{n-1}{2}$. *No es difícil demostrar que* $o_k < 2k + 1 \le 3k$. *Finalmente,*

$$\binom{n}{2k+1} (-1)^k 2^{3k} = (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-2k)2^{3k}}{(2k+1)!} =$$

$$= (-1)^k \frac{2^r m(n-1)\dots(n-2k)2^{3k}}{2^{o_k} m_k} = (-1)^k 2^{(r+3k-o_k)} \frac{m(n-1)\dots(n-2k)}{m_k}.$$

Como sólo hemos manipulado potencias de 2 el número $\frac{m(n-1)\dots(n-2k)}{m_k}$ *es entero y esto concluye la demostración, ya que* $3k - o_k > 0$.

3 El Teorema de Dehn, segunda versión

3.1 La idea de invariante

La idea central en la segunda versión, al igual que en muchos otros problemas de la matemática moderna, es calcular un *invariante* . En general, la idea del cálculo de un invariante es posible ilustrarla de la siguiente manera: Supongamos que se nos pregunta si podemos transformar el objeto A en el B

utilizando solamente transformaciones permitidas $\mathcal{R}$. Luego, si podemos definir una función f del conjunto de todos los transformados de A y B de manera que $f(A) \neq f(B)$ y f sea invariante por las transformaciones permitidas $\mathcal{R}$ (i.e. Si $A' = T(A)$, donde T es una transformación permitida entonces $f(A') = f(A)$), entonces claramente no podremos transformar A en B. Por ejemplo, podemos pensar en el famoso *cubo mágico* o *cubo de Rubik* . Aquí, el objeto B es el cubo cuyas caras contienen un solo color mientras que el objeto A es un cubo *desordenado* , es decir cuyas caras contienen diferentes colores. Finalmente, las reglas permitidas son los movimientos que admite el cubo. Naturalmente, que el cubo que se vende en los negocios se puede ordenar.

En Física aparecen *leyes de conservación* (energía, momento, etc) que son ejemplos de invariantes en el sentido que estamos hablando. Es decir, un sistema físico se halla en el estado $\mathbf{e}_0$ y queremos ver si es posible, sin romper las leyes de la física, alcanzar el estado final $\mathbf{e}_1$. Luego, si el valor de la energía (o de una ley de conservación) es distinto en $\mathbf{e}_0$ y en $\mathbf{e}_1$ esto no será posible. Sin embargo, muchas veces el problema que uno tiene que resolver no está aparentemente vinculado con el cálculo de un invariante. Muchas veces se necesita mucho tiempo, un gran esfuerzo e ingenio para descubrir el invariante adecuado. Otras veces los matemáticos siguen buscándolo (e.g. la conjetura de Poincaré en dimensión 3, que pregunta si una variedad cerrada (i.e. compacta y sin borde) simplemente conexa de dimensión 3 es (homeomorfa a) la esfera de dimensión 3).

Existen situaciones en las cuales el conjunto de transformaciones permitidas tiene la estructura de *grupo* . En otras palabras, los objetos A y B son dos elementos de un cierto conjunto X y las transformaciones permitidas son un conjunto $\mathcal{R}$ de biyecciones de X. Ésta es precisamenta la situación que encontramos en *Geometría* donde se tiene el grupo de los movimientos rígidos y el problema esencial es descubrir cuáles son los invariantes geométricos. Por ejemplo, la suma de los ángulos internos de un triángulo arbitrario es π. Otro ejemplo es la curvatura de una curva plana, que permite determinar si dos curvas son las mismas, salvo su posición en el plano, o de manera análoga, la curvatura y la torsión que resuelve el mismo problema en el caso de curvas en el espacio. Alrededor de 1870, el matemático alemán Felix Klein definió **Geometría**, en general, como la totalidad de invariantes de un mismo grupo y se lanzó (él y colaboradores) al cálculo y búsqueda sistemática de estos invariantes para una diversa gama de grupos en lo que se conoció como el *Programa de Erlangen* (Erlangen es el nombre de la ciudad en Alemania donde se realizó el proyecto).

3.2 El invariante de Dehn

Si bien no lo vamos a usar, se conoce como *invariante de Dehn* al producto tensorial:

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} l(a) \otimes \alpha(a) .$$

Para el lector que conozca la noción de producto tensorial nos referimos aquí a $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Una manera de evitar la noción de producto tensorial es siguiendo a [B]. Para ello, sea f una función, en principio arbitraria, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Definimos D_f como el número real:

$$D_f = \sum_{a \in \mathcal{A}} l(a) f(\alpha(a)) .$$

En realidad, podemos pensar a D_f como una función. Es decir, al poliedro A le asignamos $D_f(A) := \sum_{a \in \mathcal{A}} l(a) f(\alpha(a))$.

Sean $P_1, \ldots, P_n$ poliedros y armemos con ellos dos poliedros A y B. Notemos que el número real $I = \sum_{i=1}^{n} D_f(P_i)$ no depende de A ni de B. Cuando reagrupamos los poliedros P_i's para formar el poliedro A algunas aristas de los poliedros P_i se identifican, de esta forma obtenemos otra expresión para I, a saber:

$$I = \sum_{a} l(a) \sum_{\mathcal{P}_j \ni a} f(\alpha(a, P_j)) .$$

La expresión anterior para I sugiere tratar de obtener funciones aditivas con respecto a los ángulos diedrales, de manera que podamos pasar la suma dentro del argumento de la función f y obtener:

$$I = \sum_{a} l(a) f(\sum_{\mathcal{P}_j \ni a} \alpha(a, P_j)) \, .$$

Bajo la hipótesis de que tenemos una tal función aditiva respecto a los ángulos diedrales, observamos que si una arista a está en el interior del poliedro A entonces debe valer o bien $\sum_{\mathcal{P}_j \ni a} \alpha(a, P_j) = 2\pi$ ó igual a π (esto último en caso de que la arista esté en una cara de un sub-poliedro). De otra forma la arista está en una cara. Supongamos que no pertenezca a una de las aristas de A. Luego, no es difícil verificar que en este caso $\sum_{\mathcal{P}_j \ni a} \alpha(a, P_j) = \pi$. Queda entonces la suma sobre las aristas que son partes de aristas de A. En este caso, dependiendo si el ángulo $\alpha(a, A)$ es obtuso o no, la suma es igual a $\pi - \alpha(a, A)$ o $\alpha(a, A)$ respectivamente. Esto sugiere agregar a π al conjunto de aditividad de f, es decir, supongamos además que $f(n\pi + m\alpha) = nf(\pi) + mf(\alpha)$ siempre que α sea un ángulo diedral y $n, m \in \mathbb{Z}$. Dicho esto, el análisis anterior arroja la siguiente relación entre I y $D_f(A)$:

$$I = D_f(A) + f(\pi) c_A \, .$$

La explicación de la aparición de $D_f(A)$ en la igualdad anterior, radica en la observación de que al sumar las longitudes de las aristas de los poliedros P_j que son sub-aristas de la arista a de A se obtiene la longitud de la arista a. La constante c_A depende naturalmente de A. Si además, suponemos que f posee la propiedad de aditividad respecto de los ángulos diedrales de B también obtenemos, igualando las expresiones obtenidas de I, que:

$$D_f(A) - D_f(B) = f(\pi) d_{A,B},$$

donde la constante $d_{A,B}$ depende de los poliedros A y B. Convengamos en decir que una función f es *aditiva* respecto a un conjunto X si $f(nx + my) = nf(x) + mf(y)$ para $x, y \in X$ y $n, m \in \mathbb{Z}$. Resulta que hemos establecido la siguiente proposición:

Proposición 3.1 *Sean A y B dos poliedros equicompuestos. Sea $X(A,B) := \{\pi\} \cup \{\alpha(a,A)\} \cup \{\alpha(b,B)\}$, el conjunto de todos los ángulos diedrales de A,B unión $\{\pi\}$. Entonces, para toda función f aditiva respecto a X, existe una constante $d_{A,B}$ tal que:*

$$D_f(A) - D_f(B) = f(\pi)d_{A,B} .$$

Además, si f se anula en π obtenemos: $D_f(A) = D_f(B)$.

Diremos que una función f aditiva, en las condiciones de la última parte de la proposición anterior es π-nula para los poliedros A y B. Precisamos esto en la siguiente definición:

Definición 3.1 *Sean A y B dos poliedros. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditiva respecto a $X(A,B)$ tal que $f(\pi) = 0$ se llama π-nula para A y B.*

Notemos que en realidad nos interesa cuánto vale f en las combinaciones lineales enteras de elementos de $X(A,B)$. De esta forma para construir funciones π-nulas sólo necesitamos definirlas bien en $X(A,B)$ (i.e. que esta definición permita extenderlas luego por linealidad en los enteros) y definirlas de manera arbitaria en el resto de los números reales que no sean combinaciones lineales enteras de elementos en $X(A,B)$.

Para demostrar el Teorema de Dehn alcanza con construir una función π-nula para el cubo A de lado unidad y el tetraedro regular B de volumen 1, de manera que: $D_f(A) \neq D_f(B)$.

Nota 3.2 *Una manera alternativa de motivar la introducción de funciones π-nulas es pensando en ellas como una generalización de la identidad $(*)$ en la primera versión. Es decir, si no existen enteros no todos nulos $m_a, n_b, n \in \mathbb{Z}$ tales que $(*)$ se cumple entonces no es difícil construir un función π-nula f tal que $D_f(A) \neq D_f(B)$. En efecto, definimos f igual a cero sobre los ángulos diedrales de B, uno en los ángulos diedrales de A y cero en π. Como el 0 se escribe de una única manera como combinación entera de los ángulos diedrales* *de A y B junto con π la definición anterior se extiende sin problemas a las combinaciones lineales enteras de elementos de $X(A,B)$. Sin embargo, en la identidad $(*)$ los enteros m_a, n_b, n son positivos y no es evidente a priori que de la no existencia de enteros positivos que satisfagan $(*)$ se siga que no existan enteros arbitrarios que satisfagan $(*)$ y así construir una función π-nula tal que $D_f(A) \neq D_f(B)$. Es interesante notar que si nos olvidamos de los poliedros y pensamos en la identidad $(*)$ como una identidad entre números reales α's y β's positivos menores o iguales a 2π no es equivalente la existencia de enteros positivos que satisfagan $(*)$ con la existencia de enteros de signo arbitrario que la satisfagan. Podría entonces suceder que $(*)$ no se cumpla para enteros positivos por un lado y por otro lado, toda función f π-nula para A y B verifique: $D_f(A) = D_f(B)$. No obstante, el Teorema de Sydler demuestra que esto no es posible (ver Algunos comentarios finales).*

3.3 Las funciones π-nulas del cubo y el tetraedro regular

En el caso del cubo hay un solo ángulo diedral: $\frac{\pi}{2}$. Sea θ el único ángulo diedral del tetraedro regular de volumen 1. Si f es π-nula para el cubo unidad A y el tetraedro regular B vamos tener que: $D_f(A) = 0$. En efecto, $D_f(A) = 12f(\frac{\pi}{2}) = 6f(2\frac{\pi}{2}) = 6f(\pi) = 0$. Entonces, debemos definir $f : L \to \mathbb{R}$, donde $L = \{n\theta + m\pi + r\frac{\pi}{2} : n,m,r \in \mathbb{Z}\}$ de manera que $f(n\theta + m\pi + r\frac{\pi}{2}) = nf(\theta) + mf(\pi) + rf(\frac{\pi}{2})$. Es decir, alcanza con definir f en θ,π y $\frac{\pi}{2}$. El problema es que un mismo elemento de L se puede, en principio, expresar de varias formas como combinación lineal entera de θ,π y $\frac{\pi}{2}$. Luego, queda claro que para evitar este inconveniente hay que *identificar* todas las combinaciones enteras que expresan el 0 y definir f en ellas de manera que valga 0. Esto impondrá las condiciones que deben satisfacer $f(\theta)$,$f(\pi)$ y $f(\frac{\pi}{2})$ para que la definición se extienda sin problemas. Anteriormente se demostró que si $0 = n\theta + m\pi$ entonces $n = m = 0$. Usando esto, resulta que si $n\theta + m\pi + r\frac{\pi}{2} = 0$ entonces $n = 0$ y $2m + r = 0$. De donde obtenemos que $f(\theta)$ podemos definirlo arbitrariamente, mientras que $f(\pi) = 2f(\frac{\pi}{2})$. Definiendo entonces, $f(\theta) := 1$,$f(\pi) := f(\frac{\pi}{2}) := 0$ concluimos que $D_f(B) = 6l \neq 0$, donde l es la longitud de la arista del tetraedro regular de volumen 1. Lo que demuestra el Teorema de Dehn.

4 Algunos comentarios finales

Resulta claro que la segunda demostración es más general que la primera debido a que podría suceder, en principio, que entre los ángulos diedrales de dos poliedros A y B exista una relación como la $(*)$ de la primera demostración y sin embargo los poliedros A y B no sean equicompuestos. En 1965, Sydler [Sy] demostró que si dos poliedros A y B poseen el mismo volumen y el mismo invariante de Dehn entonces son equicompuestos. En términos de funciones π-nulas, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 4.1 *[Dehn (1900), Sydler (1965)]. La condición necesaria y suficiente para que dos poliedros A y B sean equicompuestos es que tengan el mismo volumen y que para toda función π-nula para A y B se satisfaga $D_f(A) = D_f(B)$.*

Este resultado puede consultarse también en [B1], [C] y [S].

Una generalización del problema de equicomposición se obtiene considerando un subgrupo G de movimientos más pequeño que el grupo de todos los movimientos rígidos. Más precisamente, diremos que dos polígonos A y B (resp. poliedros) son G-equicompuestos si existen polígonos (resp. poliedros) $P_1, \ldots, P_n$ y elementos $g_1, \ldots, g_n$ en G tales que:

$$\begin{cases} A = P_1 \cup \ldots \cup P_n \\ B = g_1(P_1) \cup \ldots \cup g_n(P_n) \, . \end{cases}$$

Cuando G es el grupo de traslaciones, es posible decidir si dos poliedros (resp. polígonos) son G-equicompuestos o no calculando el *invariante de Hadwiger* .

Otra generalización es considerar el problema de equicomposición de polígonos o poliedros en las esferas o los espacios hiperbólicos. En este caso sólo se conoce la respuesta en dimensiones bajas [C].

Finalmente, es interesante notar que en la actualidad se utilizan conceptos y herramientas de álgebra homológica para demostrar estos resultados (e.g. el Teorema 4.1 equivale a probar la exactitud de una sucesión de morfismos de grupos abelianos, llamada sucesión de Jessen, ver más abajo). También existen conexiones de estos temas con K-teoría algebraica, homología de grupos de Lie, teoría de haces, fibrados con conexiones integrables, etc. La aparición de grupos abelianos se explica muy someramente (e informalmente) de la siguiente manera: en el conjunto $\mathcal{P}$ de poliedros uno define $+$ como la operación de apoyar un poliedro contra otro. De esta manera queda definido un grupo abeliano, dentro del cual los prismas Z (poliedros que se obtienen multiplicando un polígono por un intervalo) juegan un papel central ya que su invariante de Dehn es 0 (i.e. toda función π-nula f para un prisma y otro poliedro arbitrario satisface: $D_f(Z) = 0$). Luego, el invariante de Dehn induce un morfismo $\bar{D}$ entre $\mathcal{P}/\mathcal{Z}$ y $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, donde $\mathcal{Z}$ es el subgrupo de $\mathcal{P}$ generado por los prismas Z. Luego, el Teorema de Sydler resulta de la igualdad entre $\mathcal{Z}$ y el núcleo de $\bar{D}$. Más precisamente, se debe demostar la exactitud de la sucesión de Jessen (la cual tiene en cuenta el volumen del poliedro):

$$0 \to \mathcal{P}/\mathcal{Z} \xrightarrow{\bar{D}} \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbf{Q}} \to 0$$

para más detalles (e.g. definición de $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbf{Q}}$) consultar [C].

References

[B] Boltiansky, V.G.: *Figuras equivalentes y equicompuestas,* Lecciones Populares de matemáticas, Editorial Mir, Moscú 1981.

[B1] Boltiansky, V.G.: *Hilbert's Third Problem,* New York: Wiley (1978).

[C] Cartier, P.: *Décomposition des Polyédres: le point sur le troisiéme probléme de Hilbert,* Sémin. Bourbaki (1984-1985), No. 646. También en: Astérisque 133-134, pág. 261-288 (1986).

[F] Forder, H.G.: *The foundations of euclidean geometry,* Dover Publications, Inc. New York 1958.

[K] Kantor, J-M.: *Hilbert's problems and Their Sequels,* THE MATHEMATICAL INTELLIGENCER VOL.18 No.1 (1996), pág. 21-30, Springer-Verlag New York.

[MT] *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians*

[S] Sah, G.: *Hilbert's Third Problem: Scissors Congruence,* London: Pitman (1979).

[Sy] Sydler, J.-P.: *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyédres de l'espace euclidien á trois dimensions,* Comment. Math. Helv. **40** (1965), pág. 43-80.

Fa.M.A.F., Universidad Nacional de Córdoba
Ciudad Universitaria, 5000 Córdoba, Argentina
E-mail address: discala@mate.uncor.edu

Fermat-Wiles

Ode to Andrew Wiles
By Tom M. Apostol

FERMAT' S FAMOUS SCRIBBLE – AS MARGINAL NOTE
LAUNCHED THOUSANDS OF EFFORTS – TOO MANY TO QUOTE
ANYONE ARMED WITH A FEW FACTS MATHEMATICAL
CAN SETTLE THE PROBLEM WHEN IT'S ONLY QUADRATICAL
PYTHAGORAS GETS CREDIT AS FIRST TO PRODUCE
THE THEOREM ON THE SQUARE OF THE HYPOTENUSE.

EULER'S ATTEMPTS TO TAKE CARE OF THE CUBICS
MIGHT HAVE HAD MORE SUCCESS IF DEVOTED TO RUBIK'S.
SOPHIE GERMAIN THEN ENTERED THE RACE
WITH A HANDFUL OF PRIMES THAT WERE IN THE FIRST CASE

LAME AT MID-CENTURY PROUDLY ANNOUNCED
THAT THE FERMAT PROBLEM WAS FINALLY TROUNCED.
BUT THE VERY SAME YEAR A LETTER FROM KUMMER
REVEALED THE ATTEMPT BY LAME WAS A BUMMER.

REGULAR PRIMES AND KUMMER'S IDEALS

Oda a Andrew Wiles
Por Tom M. Apostol

Los famosos garabatos de Fermat, al margen anotados,
miles de esfuerzos provocaron,
demasiados para ser citados.
Cualquiera que tenga un pequeño bagaje matemático
puede resolver el problema cuando es sólo cuadrático.
Pitágoras es reconocido como el primero que usa
el teorema sobre el cuadrado de la hipotenusa.

Los esfuerzos de Euler para el caso cúbico resolver
podrían, dedicados a Rubik, más éxito obtener.
En ese entonces, Sophie Germain, en la carrera entraba
con un puñado de primos que en el primer caso mostraba.

Orgullosamente, a mitad del siglo, Lame proclamaba
que sobre el problema de Fermat él finalmente triunfaba.
Pero el mismo año, Kummer en una carta, publicaba
que el esfuerzo de Lame desafortunado se revelaba.

Primos regulares e ideales de Kummer aparecen

BROUGHT NEW MOMENTUM TO FAST-SPINNING WHEELS.
HUGE PRIZES WERE OFFERED, AND

MANY SHED TEARS
WHEN A THOUSAND FALSE PROOFS APPEARED IN FOUR YEARS.
THE HIGH-SPEED COMPUTERS TRIED MORE AND MORE SAMPLES,
BUT NO ONE COULD FIND ANY COUNTEREXAMPLES.

IN JUNE ' 93 ANDREW WILES LAID CLAIM
TO A PROOF THAT WOULD BRING HIM FORTUNE AND FAME.
BUT, ALAS, IT WAS FLAWED – HE SEEMED TO BE STUCK
WHEN NEW INSPIRATION SUDDENLY STRUCK.

THE FLAW WAS REMOVED WITH A CHANGE OF APPROACH,
AND NOW HIS NEW PROOF IS BEYOND ALL REPROCH.
THE QUEEN O ENGLAND HAS DUBBED HIM A KNIGHT
FOR BEING THE FIRST TO SHOW FERMAT WAS RIGHT.

y nuevo momento al loco giro de las ruedas introducen.
Hubo grandes premios ofrecidos, y

muchas lágrimas derramadas.
Pues en cuatro años miles de pruebas falsas fueron desechadas.
Las veloces computadoras producen más y más ejemplos.
Sin embargo todos fueron incapaces de hallar contraejemplos.

En junio del 93 Andrew Wiles lanza una proclama
con una prueba que le brindaría fortuna y fama.
Pero, alas, fallaba y él pareció despistado -
mas, súbitamente por nueva inspiración fue iluminado.

La falta, cambiando el camino de ataque, fue enmendada.
Ahora su prueba, sin dudas irreprochable se mostraba.
La Reina de Inglaterra lo nombró del Reino Caballero
Por ser el primero en mostrar que Fermat no estaba equivocado.

Traducción libre: Roberto A. Macías
Santa Fe, mayo 2001

Historia

Al-Khorezmi
Un matemático olvidado

(Por Ricardo Baeza)

> Cuando en una resta nada queda, entonces escribe un pequeño círculo para que ese lugar no permanezca vacío. Al-Khorezmi explicando el cero, Siglo IX.

Muchos se preguntaran quien es Al-Khorezmi. Posiblemente adivinen su origen árabe, pero Al-Khorezmi debería ser tan conocido como Pitágoras o Euclides. Gracias a él, la matemática moderna usa el sistema numérico actual, proveniente de la India. Mas aún, las palabras guarismo (cifra, número) y algoritmo provienen de su nombre, que en árabe significa, "el de Khorezm" por su lugar de origen. Un algoritmo, según el diccionario de la Real Academia, es una secuencia o conjunto ordenado de operaciones o pasos que permite hallar la solución de un problema (otra acepción: es un método y notación en las distintas formas del cálculo). Aunque los algoritmos datan de tiempos babilónicos y los griegos diseñaron algoritmos aún famosos (por ejemplo, el de Euclides para calcular el máximo común divisor de dos números), fue Al-Khorezmi el primero que diseñó algoritmos pensando en su eficiencia, en particular, para el cálculo de raíces de ecuaciones. La algoritmia es uno de los pilares fundamentales de la ciencia de la computación, ni siquiera soñada mil años atrás.

Su vida

Muhammad ibn Musa abu Djafar Al-Khorezmi nació alrededor del 780 dC en Khorezm, al sur del Mar de Aral (hoy Khiva, Uzbekistan), que había sido conquistado 70 años antes por los árabes. Su nombre ya dice mucho, pues significa "Mohamed, hijo de Moisés, padre de Jafar, el de Khorezm". Su fama debió ser muy grande para que todo el mundo lo conociera por su lugar de origen.

Hacia el 820, Al-Khorezmi fue llamado a Bagdad por el califa abasida Al-Mamun, segundo hijo de Harun ar-Rashid, por todos conocido gracias a las "Mil y unas Noches". Al-Mamun continuó el enriquecimiento de la ciencia árabe y de la Academia de Ciencias creada por su padre, llamada La Casa de la Sabiduría, lo que traería importantes consecuencias en el desarrollo de la ciencia en Europa, principalmente a través de España. Poco se sabe de su vida, pero realizó viajes a Afganistan, el sur de Rusia y Bizancio (hoy Turquía). Falleció en Bagdad hacia el 850 dC.

Su obra

La mayoría de sus diez obras son conocidas en forma indirecta o por traducciones hechas más tarde al latín y de algunas sólo se conoce el título. Al-Khorezmi fue un recopilador de conocimientos de los griegos y de la India, principalmente matemáticas, pero también astronomía, astrología, geografía e historia. Su trabajo más conocido y usàdo fue las Tablas Astronómicas, basadas en la astronomía india. Incluyen algoritmos para calcular fechas y las primeras tablas conocidas de las funciones trigonométricas seno y cotangente. Lo más increíble es que no usó los números negativos (que aún no se conocían), ni el sistema decimal ni fracciones, aunque sí el concepto del cero.

Su Aritmética, traducida al latín como "Algoritmi de número Indorum" introduce el sistema numérico indio (sólo conocido por los árabes unos 50 años antes) y los algoritmos para calcular con él. Finalmente tenemos el Álgebra, una introducción compacta al cálculo, usando reglas para completar y reducir ecuaciones. Además de sistematizar la resolución de ecuaciones cuadráticas, también trata geometría, cálculos comerciales y de herencias. Quizás éste es el libro árabe más antiguo conocido y parte de su título "Kitab al-jabr wa'l-muqabala" da origen a la palabra álgebra. Aunque los historiadores no se han puesto de acuerdo en la mejor traducción del título, éste significa "El libro de restaurar e igualar" o "El arte de resolver ecuaciones".

Su impacto

El trabajo de Al-Khorezmi permitió preservar y difundir el conocimiento de los griegos (con la notable excepción del trabajo de Diofanto) e indios, pilares de nuestra civilización. Rescató, de los griegos, la rigurosidad; y de los indios, la simplicidad (en vez de una larga demostración, usar un diagrama junto a la palabra "Mira").

Sus libros son intuitivos y prácticos y su principal contribución fue simplificar las matemáticas a un nivel entendible por no expertos. En particular muestran las ventajas de usar el sistema decimal indio, un atrevimiento para su época, dado lo tradicional de la cultura árabe.

La exposición clara de cómo calcular de una manera sistemática, a través de algoritmos diseñados para ser usados con algún tipo de dispositivo mecánico similar a un ábaco, más que con lápiz y papel, muestra la intuición y el poder de abstracción de Al-Khorezmi. Hasta se preocupaba de reducir el número de operaciones necesarias en cada cálculo. Por esta razón, aunque no haya sido él el inventor del primer algoritmo, merece que este concepto esté asociado a su nombre.

Al-Khorezmi fue sin duda el primer pensador algorítmico.

Universidad de Talca. Chile.

Noticias

Reunión Anual de Educación Matemática (UMA)
Universidad Nacional de San Luis
17 al 21 de septiembre de 2001.

Cursos

-Area y Volumen en la Geometría Elemental, por José Araujo (UNCPBA)*. (REM).
-Geometría con Cabri, por Santiago Laplagne (UBA)*. (REM).
-Aritmética, por Graciela Fernández y Héctor Pérez (UBA)*. (REM).
-Nuestro sistema de numeración y las cuatro operaciones básicas en los números naturales, por Norma Cerizola (UNSL). (REM, maestros).
-"La Inversión, una transformación del plano con imaginación", por Ruth Martínez (UNSL). (REM, Polimodal).
-Fractales Geométricos: Una introducción a los Sistemas de Funciones Iteradas, por docentes de la U. N. de Salta. (REM).
-La derivada en la vida real, por Pedro Marangunic (UNRosario). (REM).
-Estadística, por Aldo Viollaz (UNT). (REM).
-Paulo Tirao (UNCórdoba.), título a confirmar. (REM).
-Geometría, por Patricia Kisbye (UNCdba.). (REM, maestros).
-Sólidos Platónicos y Origami, por Diego Maldonado y Mariano Suárez. (REM).

Conferencia de REM. Dr. Humberto Alagia, Universidad Nacional de Córdoba.
Tema: "Problemas en Educación Matemática".

Comunicaciones, El envío deberá efectuarse por correo antes del 1 de agosto a:
UMA 2001 – comunicaciones
Ejército de los Andes 950
5700 San Luis
Para mayor información contactar http://www.uma.unsl.edu.ar

IV Congreso Iberoamericano de Educación Matemática
Cochabamba Bolivia. 1 al 6 de Julio 2001
Organizado por:
SOBOEDMA -Bolivia
Casilla 4234 Cochabamba Bolivia
Correo electrónico: bgrigori@supernet.com.bo ; antonietavps@yahoo.com

XI Jornadas Nacionales de Educación Matemática, que se realizarán los días 14, 15 y 16 de Noviembre de 2001.

Los interesados deberán dirigirse a:
XI Jornadas Nacionales de Educación Matemática
Instituto de Matemáticas, Campus Isla Teja
Universidad Austral de Chile
Casilla 567, Valdivia
Chile.

e-mail:rtrumper@uach.cl

La Formación de Profesores y los Desafíos del Cambio. Alternativas e Innovaciones.

Cuadragésimo-Sexta Asamblea Mundial ICET.
23-27 DE JULIO, 2001.
Santiago, Chile

Organiza:
International Council on Education for Teaching at National
Louis University
1000 Capitol Drive
Wheeling, Illinois 60090
USA
Tel: (847) 465-0191
Fax: (847) 465-5617
E-Mail: ICET@nl.edu
Website: www.nl.edu/icet

SOAREM (Sociedad Argentina de Educación Matemática).
La VI Reunión de Matemática del Cono Sur no se llevará a cabo en Mar del Plata como estaba previsto, la misma se realizará en Buenos Aires del 22 al 27 de Julio en el Instituto del profesorado Joaquín V. González.