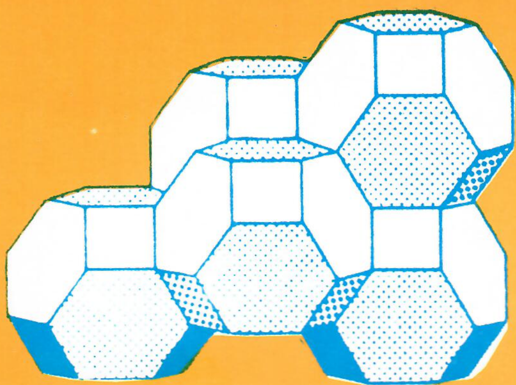
# REVISTA DE EDUCACION MATEMATICA

UNION MATEMATICA ARGENTINA
FACULTAD DE MATEMATICA, ASTRONOMIA Y FISICA



VOLUMEN 11 - Nº 3 - 1996

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA

## Editorial

Se completa con este fascículo el Volumen 11 de la R.E.M. y creemos oportuno hacer algunos comentarios sobre la situación de nuestra revista. La R.E.M. publica trabajos o notas breves en temas de Matemática básica o de Enseñanza de la Matemática. Nuevamente queremos reiterar que la revista desea recibir aportes de los profesores y licenciados en Matemática y por ello hacemos un llamado a los mismos para alentarlos a enviar trabajos, problemas, soluciones, que consideren son de algún modo novedosos y de interés para la R.E.M.

Por otra parte, la R.E.M. desea también receptar opiniones, sugerencias y críticas, sea sobre la misma R.E.M., o sobre temas vinculados a la Enseñanza de la Matemática, a través de cartas de sus lectores. En el futuro, algunas de estas cartas, las que se estimen más constructivas, serán susceptibles de publicación en una columna especial de la revista.

Un comentario que deseamos hacer es que tenemos conciencia de que la R.E.M. publica con frecuencia trabajos que pueden resultar relativamente exigentes para algunos lectores. Nuestra esperanza es que los mismos sirvan, en parte como desafío, para dar nueva información matemática y para abrir nuevos rumbos de estudio. Además, tratamos de tener el cuidado de incluir en cada número y en lo posible, trabajos sobre distintos temas y de dificultad variada a fin de alcanzar a los diversos lectores.

Es buen momento para señalar que por fortuna, desde hace tiempo, el trabajo de la revista se desarrolla con relativa tranquilidad. Esto se ha debido en buena medida, a que la Unión Matemática Argentina, tanto en su presente gestión como en la anterior, ha proporcionado los fondos de publicación regularmente, tres veces por año, cada vez que ha sido necesario. Es más que justo reconocer el sólido apoyo de la U.M.A. a lo largo de estos años. Finalmente deseo destacar la preocupación permanente por la marcha de la R.E.M. de los Dres. Elida Ferreyra y Daniel Penazzi, y muy especialmente el gran esfuerzo de Luisa Gallardo, como Secretaria de Edición.

*Roberto J. Miatello*

# Un problema integrador en la construcción de un modelo para la parábola

*Graciela S. Guala*(*), *Edgardo N. Güichal*(*) *y Viviana Oscherov*(*)

**Introducción.**

Presentamos aquí una forma simple de resolver el siguiente problema, que aparece en muchos textos como una afirmación sin demostración:

*"Si de un hilo sin masa se cuelgan pesos iguales de modo que para cualquier par de puntos sucesivos sus proyecciones horizontales se encuentran separadas por la misma distancia, el hilo forma una poligonal cuyos vértices están sobre el gráfico de una parábola".*

Esta situación es una idealización de un problema de ingeniería, que consiste en determinar la forma que adopta un cable cuyos extremos están fijados en dos torres, que sostiene un puente colgante horizontal, tal que su peso está uniformemente distribuido entre esas torres.

En el desarrollo de su solución mostramos la confluencia de dos aspectos:

* La vinculación entre la Matemática y la Física. (Trabajo interdisciplinario)

* La necesidad de que el alumno tome conciencia de la unidad intrínseca de la Matemática, reflejada por el uso de herramientas provenientes de distintas ramas como Geometría, Algebra y Trigonometría.

En la demostración utilizamos conceptos elementales que forman parte de los contenidos básicos de un Ciclo Polimodal, como son: equilibrio de una partícula, fuerzas resultantes, paralelogramo de fuerzas, identidades trigonométricas, teoremas del seno y del coseno, fórmulas de recurrencia, funciones polimodales de segundo grado y su representación gráfica.

Este problema permite construir un modelo realizable utilizando la metodología de aula-taller, con la participación activa de los alumnos en el análisis y resolución de los distintos aspectos parciales que se irán presentando. El docente contará además con otro ejemplo tangible en el que las cónicas aparecen relacionadas con problemas concretos.

## PLANTEO Y RESOLUCION DEL PROBLEMA.

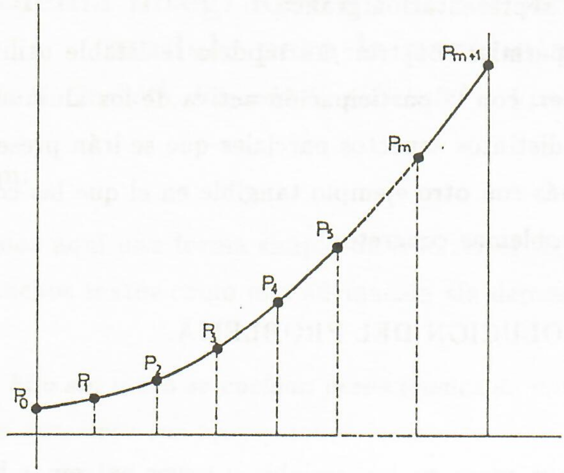
*Problema:*

Si de un hilo cuya masa es despreciable y cuyos extremos han sido fijados en dos puntos que se encuentran a la misma altura del suelo, se cuelgan pesos iguales de modo que para cada par de puntos sucesivos sus proyecciones sobre una recta horizontal se encuentran separadas por la misma distancia, entonces el hilo forma una poligonal cuyos vértices se encuentran sobre el gráfico de una parábola.

*Solución:*

Consideraremos el caso en que se suspende un número impar $n = 2m + 1$ de pesos. Por la simetría de la figura que resulta entonces, habrá un punto que denominaremos con $P_0$, ubicado en el centro de la misma, que ocupa la posición más baja posible. Los restantes $2m$ puntos ocuparán posiciones simétricas alrededor de $P_0$, por lo cual sólo consideraremos los puntos $P_1, P_2, P_3, ..., P_m$, que se encuentran a la derecha de $P_0$. Con $P_{m+1}$ designaremos el extremo derecho del hilo, que se encuentra fijo.

Sea $k$ el peso suspendido en cada punto y llamemos $h$ a la separación que existe entre las proyecciones de dos puntos consecutivos, sobre una recta horizontal.



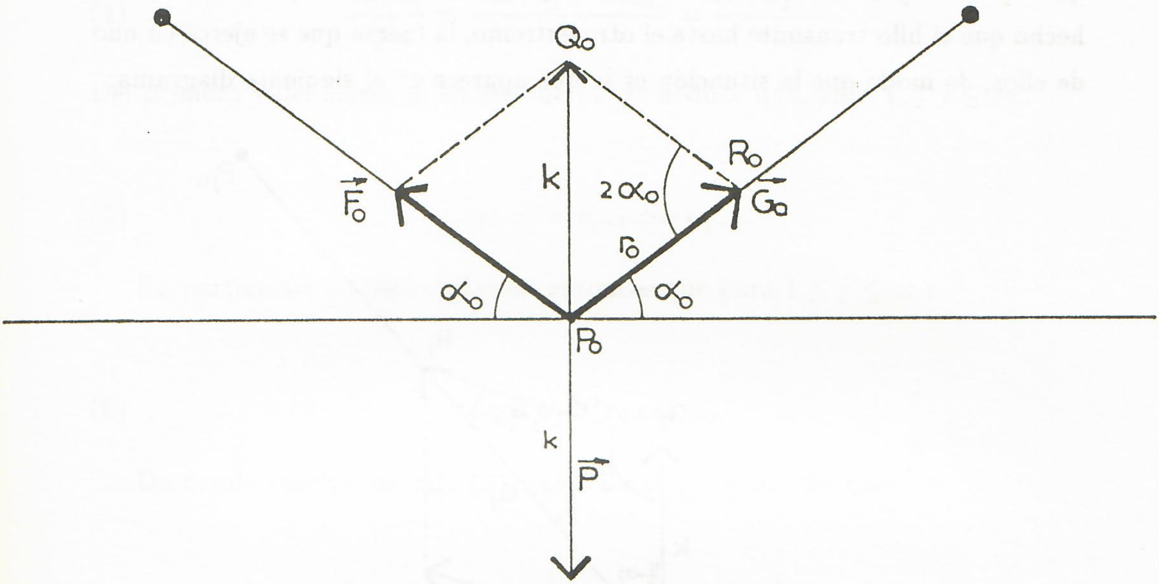

Fijemos un sistema de coordenadas de modo que la abscisa de $P_0$ sea $x_0 = 0$. Si designamos con $(x_j,\ y_j)$ las coordenadas de $P_j$, para $j = 0,\ 1, ..., m+1$, es claro que se tendrá que $x_j = j.h$. Nos interesa determinar los valores de las ordenadas $y_j$.

Sobre cada uno de los puntos $P_j (j = 0, 1, 2, ..., m)$ actúan tres fuerzas: el peso $\vec{P}$ que en él se ha suspendido, cuya magnitud es $k$ y que tiene dirección vertical y dirigida hacia abajo y dos fuerzas que designaremos con $\vec{F}_j$ y $\vec{G}_j$, que representan las acciones sobre $P_j$, de las partes del sistema, que se encuentran a la izquierda y a la derecha del punto, respectivamente. Ellas tienen las direcciones que ha tomado el hilo, a la izquierda y a la derecha de $P_j$. Como el punto $P_j$ se encuentra en equilibrio, la resultante de esas tres fuerzas debe ser nula, es decir:

$$(1) \qquad \vec{F}_j + \vec{G}_j + \vec{P} = \vec{0}.$$

Designaremos con $a_j$ el ángulo que forma $\vec{G}_j$ con la horizontal y trataremos de determinar la magnitud $r_j$ de esta fuerza.

En el caso de $P_0$, nos encontramos con la situación planteada en el siguiente gráfico:




Por la simetría de la situación, resulta que la magnitud de $\vec{F}_0$ es también $r_0$ y para que $P_0$ se encuentre en equilibrio, se debe verificar que $\vec{F}_0 + \vec{G}_0 = -\vec{P}$.

Si consideramos el triángulo $\triangle P_0Q_0R_0$ y aplicamos el teorema del coseno, resulta que:

$$k^2 = 2.r_0^2 - 2.r_0^2.cos\ 2\alpha_0 = 2.r_0^2.(1 - cos\ 2\alpha_0) = 4.r_0^2.sen^2\ \alpha_0$$

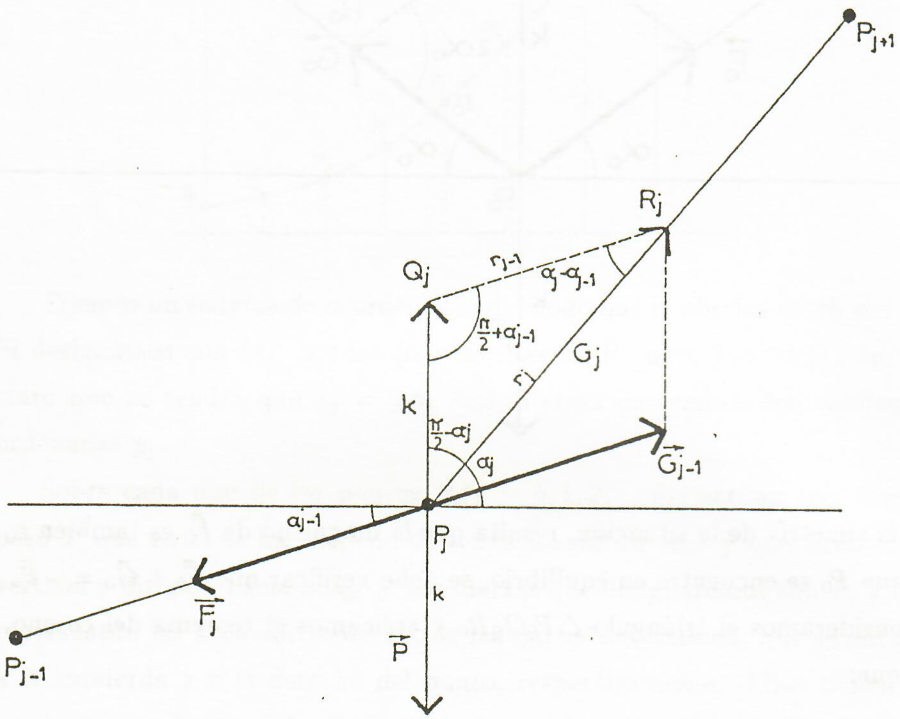
Por ser $k > 0$, $r_0 > 0$ y $\alpha_0$ un ángulo agudo, resulta que

(2) $$k = 2.r_0.sen\ \alpha_0,$$

o bien:

(3) $$r_0 = \frac{k}{2.sen\ \alpha_0}.$$

Examinemos ahora lo que sucede en el punto $P_j$, si $1 \leq j \leq m$. Es claro aquí que $\vec{F}_j = -\vec{G}_{j-1}$, como consecuencia del principio de acción y reacción y del hecho que el hilo transmite hasta el otro extremo, la fuerza que se ejerce en uno de ellos, de modo que la situación es la que aparece en el siguiente diagrama:




La condición (1) puede escribirse ahora en la forma: $\vec{G}_{j-1} - \vec{P} = \vec{G}_j$. Si consideramos ahora el triángulo $\triangle P_jQ_jR_j$ y aplicamos el teorema del seno, obtendremos:

$$\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_j\right)}{r_{j-1}} = \frac{sen\left(\alpha_j-\alpha_{j-1}\right)}{k} = \frac{sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_{j-1}\right)}{r_j},$$

que puede escribirse como sigue:

$$(4) \qquad \frac{cos\ \alpha_j}{r_{j-1}} = \frac{sen\ (\alpha_j - \alpha_{j-1})}{k} = \frac{cos\ \alpha_{j-1}}{r_j}.$$

Del primero y del tercer miembros de (4) se deduce que, para $1 \leq j \leq m$ :

$$(5) \qquad r_j.cos\ \alpha_j = r_{j-1}.cos\ \alpha_{j-1}.$$

En particular, podemos afirmar entonces que para $1 \leq j \leq m$ :

$$(6) \qquad r_j.cos\ \alpha_j = r_0.cos\ \alpha_0.$$

De donde resulta, usando (3), que para $0 \leq j \leq m$ vale que:

$$(7) \qquad r_j.cos\ \alpha_j = \frac{k}{2.sen\ \alpha_0}.cos\ \alpha_0 = \frac{k}{2.tg\ \alpha_0}.$$

Usando el primer y el segundo miembros de (4) obtenemos:

$$cos\ \alpha_j = \frac{r_{j-1}}{k}.sen\ (\alpha_j - \alpha_{j-1}),$$

es decir que:

$$\begin{aligned} cos\ \alpha_j &= \frac{r_{j-1}.cos\ \alpha_{j-1}}{k}.\frac{1}{cos\ \alpha_{j-1}}.sen\ (\alpha_j - \alpha_{j-1}) = \\ &= \frac{r_0.cos\ \alpha_0}{k}.\frac{1}{cos\ \alpha_{j-1}}.(sen\ \alpha_j.cos\ \alpha_{j-1} - cos\ \alpha_j.sen\ \alpha_{j-1}) = \\ &= \frac{1}{2.tg\ \alpha_0}.(sen\ \alpha_j - cos\ \alpha_j.tg\ \alpha_{j-1}) \end{aligned}$$

De aquí se deduce que:

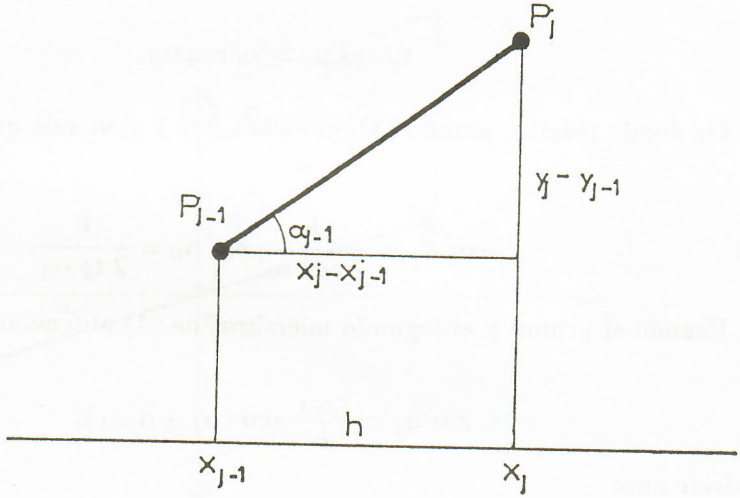
$$cos\ \alpha_j.\Big(1 + \frac{tg\ \alpha_{j-1}}{2.tg\ \alpha_0}\Big) = \frac{1}{2.tg\ \alpha_0}.sen\ \alpha_j,$$

es decir que, si $1 \leq j \leq m$ :

(8) $$tg\ \alpha_j = 2.tg\ \alpha_0 + tg\ \alpha_{j-1},$$

de donde surge como consecuencia que, para $1 \leq j \leq m$, vale la siguiente igualdad:

(9) $$tg\ \alpha_j = (2.j + 1).tg\ \alpha_0.$$




Resulta ahora muy fácil determinar el valor de la ordenada $y_j$ del punto $P_j$, pues tendremos que

$$\begin{aligned} y_j - y_{j-1} &= (x_j - x_{j-1}).tg\ \alpha_{j-1} = \\ &= h.(2.j - 1).tg\ \alpha_0, \end{aligned}$$

Es decir que si $1 \leq j \leq m + 1$ :

(10) $$y_j = y_{j-1} + h.(2.j - 1).tg\ \alpha_0.$$

Reemplazando sucesivamente $j$ por $1, 2, 3, ..., p$ (donde $1 \leq p \leq m+1$) en (10) y sumando las expresiones que resultan, obtenemos que

$$y_p = y_0 + h.[1 + 3 + 5 + ... + (2.p - 1)].tg\ \alpha_0.$$

Teniendo en cuenta que la suma entre corchetes corresponde a la suma de los $p$ primeros términos de una progresión aritmética de razón 2, cuyo resultado es $p^2$, podemos escribir

$$y_p = y_0 + h.p^2.tg\ \alpha_0,$$

o bien:

$$y_p = y_0 + \frac{tg\ \alpha_0}{h}.(h.p)^2.$$

Recordando que $x_p = p.h$, la última expresión puede escribirse en la forma

$$y_p = y_0 + \frac{tg\ \alpha_0}{h}.x_p^2,$$

lo que muestra que efectivamente, los puntos $P_j$ se encuentran sobre el gráfico de una parábola cuya ecuación está dada por

$$y = b + a.x^2, \text{ donde } b = y_0 \text{ y } a = \frac{tg\ \alpha_0}{h},$$

como se quería demostrar.

Ejercicio

Demuestre que en el caso en que haya un número par de puntos en el hilo, desde los que se suspende un peso $k$ y si se elige un sistema de coordenadas de modo que el eje de ordenadas sea nuevamente el eje de simetría del sistema, es decir que las coordenadas de $P_0$ sean $\left(\frac{h}{2}, y_0\right)$ entonces la parábola sobre la que se disponen los vértices de la poligonal tiene por ecuación:

$$y = b + a.x^2$$

$$\text{donde } b = y_0 - \frac{h.tg\ \alpha_0}{8} \quad \text{y} \quad a = \frac{tg\ \alpha_0}{2.h}$$

**Bibliografía**


Roland LARSON, Robert HOSTETLER: *Cálculo y Geometría Analítica.* Mc. Graw Hill, 3a. edición.

Dennis ZILL: *Cálculo con Geometría Analítica.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Earl ZWOKOWSKI: *Cálculo con Geometría Analítica.* Grupo Editorial Iberoamérica. 2a. edición.



(*) Universidad Nacional del sur.
Bahía Blanca.

# Funciones trigonométricas generalizadas

*Noemí. P. Kisbye*

**Abstract**

Las funciones trigonométricas sen $(ax)$ y cos $(ax)$, $a \in \mathbf{R}$, satisfacen las propiedades descriptas en i) – iii). Según el trabajo de A. Kurepa, [1], si se pide que sean continuas éstas son esencialmente las únicas funciones que satisfacen dicha ecuación funcional.

El presente trabajo pretende mostrar que si no se pide continuidad, existen otros pares de funciones $(c(x), s(x))$ que las cumplen y que las de la forma $(cos\ (ax), sen\ (ax))$ son sólo una pequeña parte de la totalidad.

Dar un tal par de funciones $(c(x), s(x))$ equivale a dar un homomorfismo de grupos de $\mathbf{R}$ en el círculo unitario $S^1$. Es por eso que para entender la prueba de la existencia de otros homomorfismos se requieren conocimientos básicos sobre espacios vectoriales, homomorfismos de grupos y cardinalidad de conjuntos.

Al final del trabajo se exhibe un ejemplo de un homomorfismo de $\mathbf{R}$ en $S^1$ que no proviene de un par de funciones trigonométricas clásicas. Este ejemplo puede ser generalizado y demuestra entonces la gran cantidad de funciones que verifican las propiedades i) – iii) y que no son de la forma $(cos\ (ax), sen\ (ax))$.

Consideremos los pares de funciones $\big(c(x), s(x)\big)$ que satisfacen las ecuaciones funcionales:

(i) $c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$

(ii) $s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x)$

(iii) $(s(x))^2 + (c(x))^2 = 1$

para todo $x$, $y \in \mathbf{R}$. Un ejemplo son todos los pares de funciones de la forma $e_a(x) = \big(\cos\ (ax), \text{sen}\ (ax)\big)$, para cada $a \in \mathbf{R}$. Más aún, en [1] está probado que si se pide que $c$ y $s$ sean funciones continuas, entonces esas son todas las soluciones posibles.

El objetivo del trabajo es probar que si no se pide continuidad, hay infinidad de pares $\big(c(x), s(x)\big)$ que satisfacen (i), (ii) y (iii), y que los del tipo $e_a(x)$ son sólo una pequeña parte de la totalidad. Antes de probar esto, recordaremos la definición de grupo y de homomorfismo de grupos.

Un *grupo* es un par $(G, \cdot)$ donde $G$ es un conjunto no vacío y $(\cdot)$ es una operación binaria en $G$ tal que se cumplen las siguientes propiedades:

g1) Clausura: $g \cdot h \in G$, para todo $g$, $h \in G$.

g2) Asociatividad: $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$, para todo $g$, $h$, $x \in G$.

g3) Identidad: Existe $1 \in G$ tal que $g \cdot 1 = 1 \cdot g = g$ para todo $g \in G$.

g4) Inverso: Para todo $g \in G$, existe $g^{-1} \in G$ tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1$.

Los pares $(\mathbf{Z}, +)$, $(\mathbf{R}, +)$, $(\mathbf{R} - \{0\}, \cdot)$ son ejemplos de grupos. Si $(G, \cdot)$ y $(H, *)$ son grupos, un *homomorfismo* de $G$ en $H$ es una función $f : G \mapsto H$ tal que

$$f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) * f(g_2) \qquad \text{para todo } g_1,\, g_2 \in G$$

Identifiquemos entonces el par $\big(c(x), s(x)\big)$ con la función $e : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ dada por

$$e(x) = c(x) + is(x).$$

Entonces (i) y (ii) son equivalentes a

$$e(x+y) = e(x)\, e(y) \tag{1}$$

Luego $e$ es un homomorfismo de $(\mathbf{R}, +)$ en $(\mathbf{C}, \cdot)$. Si además se agrega la condición (iii), se tiene un homomorfismo de $(\mathbf{R}, +)$ en $(S^1, \cdot)$ donde $S^1$ es el grupo multiplicativo de números complejos $z = x + iy$ tales que $x^2 + y^2 = 1$.

El problema se traduce entonces en hallar el conjunto $\mathcal{H}$ de homomorfismos de $\mathbf{R}$ en $S^1$ y caracterizar el subconjunto de homomorfismos continuos $\mathcal{H}_c$.

Recordemos brevemente algunas propiedades del grupo $S^1$. Dado $z \in \mathbf{C}$, se define el *módulo* de $z$ como

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{si } z = x + iy.$$

Gráficamente, $S^1$ está representado en el plano por la circunferencia de radio 1. Puesto que $|z\,w| = |z|\,|w|$, $S^1$ es un grupo con la operación de multiplicación y elemento neutro $1 = 1 + i\,0$.

Todo elemento $z \in S^1$ es de la forma $z = \cos\,\alpha + i\mathrm{sen}\,\alpha$, para algún $\alpha \in \mathbf{R}$. Usaremos entonces la notación

$$e^{i\alpha} = \cos\,\alpha + i\mathrm{sen}\,\alpha. \tag{2}$$

De las propiedades del seno y del coseno respecto de la suma de ángulos, se sigue que la función $\exp(\alpha) = e^{i\alpha}$ satisface (1), y por lo tanto, $\exp : \mathbf{R} \mapsto S^1$ es un homomorfismo de grupos.

Analicemos ahora los homomorfismos de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$. Es fácil ver que $(\mathbf{R}, +)$ es un grupo y que $\mathbf{R}$ es un $\mathbf{Q}$-espacio vectorial. Si $\phi : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ es un homomorfismo de grupos, entonces

$$\begin{aligned} \phi(p\,x) &= \phi(\overbrace{x + \cdots + x}^{p \text{ veces}}) = \overbrace{\phi(x) + \cdots + \phi(x)}^{p \text{ veces}} = p\,\phi(x) && (3)\\ \phi(x) &= \phi(q\,\frac{1}{q}\,x) = q\,\phi(\frac{1}{q}\,x) && (4) \end{aligned}$$

para todo $p$, $q \in \mathrm{N}$. Luego

$$\phi(\frac{p}{q}\,x) = \frac{p}{q}\,\phi(x) \qquad \text{para todo } \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}.$$

Es decir, $\phi$ es un homomorfismo de $\mathbf{Q}$-espacios vectoriales. Lo que probaremos ahora es que todo homomorfismo de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ determina un homomorfismo de $\mathbf{R}$ en $S^1$, y que dos homomorfismos distintos no pueden determinar el mismo.

**Teorema 1** *Sea $\phi : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ un homomorfismo de grupos. Entonces*

$$\tilde{\phi} = \exp \circ \phi : \mathbf{R} \mapsto S^1$$

*también es homomorfismo. Además, $\tilde{\phi} \equiv 1$ si y sólo si $\phi \equiv 0$.*

**Prueba:**

Puesto que $\phi$ y $exp$ son homomorfismos, su composición también lo es. Además, si $\tilde{\phi} \equiv 1$ y $\phi \not\equiv 0$, entonces existe $r \in \mathbf{R}$ tal que $\phi(r) = 2\pi m$, para algún $m \in \mathbf{Z}$, $m \neq 0$. Ahora

$$\phi(\frac{r}{2m}) = \frac{1}{2m}\phi(r) = \pi,$$

pero $\pi \neq 2\pi k$, para cualquier $k \in \mathbf{Z}$, luego $\tilde{\phi}(\frac{r}{2m}) \neq 1$. La contradicción resulta de suponer que $\phi \not\equiv 0$.

Recordemos ahora la noción de continuidad de una función:

**Definición 1.1** *Sea $f : X \mapsto Y$ una función, y sea $x_0 \in X$. Entonces $f$ es* continua *en $x_0$ si y sólo si para toda sucesión $\{x_n \mid n \in \mathrm{N}\} \subset X$ tal que $\lim_{n\to\infty} = x_0$ se cumple que*

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

*$f$ se dice* continua *si es continua en todo $x \in X$.*

Notemos que si además $f : X \mapsto Y$ es un homomorfismo de grupos, entonces para cualquier sucesión $\{x_n \mid n \in \mathrm{N}\} \subset X$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f((x_n - x_0) + x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n - x_0) + f(x_0)$$

para cualquier $x_0 \in X$. Dado que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \qquad \text{si y sólo si} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n - x_0 = 0$$

se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \qquad \text{si y sólo si} \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n - x_0) = 0,$$

es decir que $f$ es continua en $X$ si y sólo si $f$ es continua en 0.

Del trabajo de A. Kurepa, [1], sabemos que todo homomorfismo continuo de $\mathbf{R}$ en $S^1$ es de la forma $\phi(t) = \exp(iat)$, para algún $a \in \mathbf{R}$. Un resultado análogo se tiene para los homomorfismos continuos de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$:

**Teorema 2** *Si* $\Phi : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ *es un homomorfismo continuo, entonces existe* $b \in \mathbf{R}$ *tal que* $\Phi(x) = b\,x$, *para todo* $x \in X$.

**Prueba:** Sea $\Phi$ continua y sea $q \in \mathbf{Q}$. Entonces $\Phi(q) = q\,\Phi(1)$. Además, para todo $r \in \mathbf{R}$, existe una sucesión $\{r_n\} \subset \mathbf{Q}$, tal que

$$\lim_{n \to \infty} r_n = r$$

Como $\Phi$ es continua, resulta que

$$\Phi(r) = \lim_{n \to \infty} \Phi(r_n) = \lim_{n \to \infty} r_n \Phi(1) = r\Phi(1).$$

Poniendo $b = \Phi(1)$, el teorema queda probado.

De este teorema y de los resultados de [1] es fácil concluir que existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto $\mathcal{H}_c$ de homomorfismos continuos de $\mathbf{R}$ en $S^1$ y el conjunto de homomorfismos continuos de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$. Del teorema 1 solo podemos concluir que el conjunto de todos los homomorfismos de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ se puede incluir en el de todos los homomorfismos de $\mathbf{R}$ en $S^1$, aunque en principio este último conjunto podría ser más grande.

Para darle más rigurosidad a este comentario, introduciremos algunas nociones sobre cardinalidad de conjuntos.

De manera intuitiva, el cardinal mide el tamaño de un conjunto. Si un conjunto $A$ tiene 20 elementos, decimos que el cardinal de $A$ es 20, y los denotamos por $|A| = 20$.

Si $A$ y $B$ son dos conjuntos arbitrarios, no necesariamente finitos, decimos que $|A| \leq |B|$ si existe una función $f : A \mapsto B$, inyectiva. $A$ y $B$ tienen el mismo cardinal si existe $f : A \mapsto B$ biyectiva, y $|A| < |B|$ si existe $f : A \mapsto B$ inyectiva pero no existe ninguna $f$ biyectiva.

Decimos que $A$ es *numerable* si $|A| = |\mathbf{N}|$, y que es *no numerable* si $|\mathbf{N}| < |A|$.

**Ejemplos:**

- $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Q}$ son conjuntos infinitos numerables,
- $\mathbf{R}$ y $\mathcal{P}(\mathbf{R}) = \{A \subset \mathbf{R}\}$ son conjuntos no numerables.

Todo espacio vectorial $V$ sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ tiene una base, y dos bases de $V$ sobre $\mathbf{K}$ tienen el mismo cardinal. Se llama *dimensión* de $V$ sobre $K$ y se denota por $dim_{\mathbf{K}}V$ al cardinal de una tal base.

Por ejemplo, $dim_{\mathbf{Q}}(\mathbf{R})$ es no numerable, de lo contrario $\mathbf{R}$ sería numerable.

Con esta noción de cardinalidad, los resultados obtenidos hasta ahora se resumen de la siguiente manera: sean

$$\begin{aligned} Hom(\mathbf{R},\mathbf{R}) &= \{f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R} \mid f \text{ homomorfismo de grupos}\} \\ Hom_c(\mathbf{R},\mathbf{R}) &= \{f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R} \mid f \text{ homomorfismo continuo }\}. \end{aligned}$$

Del teorema 1 concluimos que

$$|Hom(\mathbf{R},\mathbf{R})| \leq |\mathcal{H}|$$

y de los resultados de A. Kurepa y el teorema 2 obtenemos:

$$|\mathbf{R}| = |Hom_c(\mathbf{R},\mathbf{R})| = |\mathcal{H}_c|.$$

Además, si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbf{R}$ sobre $\mathbf{Q}$, dar un homomorfismo $f \in Hom(\mathbf{R},\mathbf{R})$ es equivalente a dar una función $\hat{f} : \mathcal{B} \mapsto \mathbf{R}$. Dado que $|\mathcal{B}| = |\mathbf{R}|$:

$$|Hom(\mathbf{R},\mathbf{R})| = |\{f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R} \mid f \text{ es función}\}|.$$

Ahora bien, para cualquier subconjunto $A$ de $\mathbf{R}$, se tiene la función característica $\chi_A : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, donde

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Luego, si $\mathcal{P}(X) = \{A \subset X\}$, es fácil ver que

$$\mathcal{P}(\mathbf{R}) \subset \{f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R} \mid f \text{ es función}\}$$

y entonces

$$|\mathcal{P}(\mathbf{R})| \leq |Hom(\mathbf{R}, \mathbf{R})|.$$

Sólo nos falta ver que $|\mathbf{R}| < |\mathcal{P}(\mathbf{R})|$, y esto se prueba en el siguiente lema:

**Lema 2.1** *Sea $X$ un conjunto arbitrario, $X \neq \emptyset$. Entonces $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.*

**Prueba:**

Es claro que la función $g : X \mapsto \mathcal{P}(X)$, $g(x) = \{x\}$ es inyectiva, y por lo tanto $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$. Supongamos por el absurdo que existe $h : X \mapsto \mathcal{P}(X)$ biyectiva. Entonces, para cada $A \subset X$, existe $x \in X$ tal que $h(x) = A$. Sean $U$ y $V$ los siguientes subconjuntos de $X$:

$$U = \{x \in X \mid x \in h(x)\}$$

$$V = \{x \in X \mid x \notin h(x)\}$$

Es fácil ver que $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = X$. Además debe existir $v \in V$ tal que $h(v) = V$.

Si $v \in U$, por definición de $U$, $v \in h(v) = V$, lo cual es imposible, y si $v \in V$, por definición de $V$, $v \notin V$, que también es un absurdo. Luego el elemento $v$ no puede existir.

Concluimos finalmente que

$$|\mathcal{H}| \geq |Hom(\mathbf{R}, \mathbf{R})| \geq |\mathcal{P}(\mathbf{R})| > |\mathbf{R}| = |\mathcal{H}_c|$$

Es decir que la gran mayoría de los homomorfismos de $\mathbf{R}$ en $S^1$ no son de la forma $\phi(x) = e^{iax}$ sino más raros.

Culminamos este trabajo dando un ejemplo de un morfismo de $\mathbf{R}$ en $S^1$ que no proviene de un endomorfismo de $\mathbf{R}$:

Consideremos a $\mathbf{R}$ como $\mathbf{Q}$-espacio vectorial, y sea $\beta = \{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una base de $\mathbf{R}$, podemos suponer que $1 \in \beta$. Esto significa que si $x \in \mathbf{R}$, $x$ se escribe de manera única de la forma

$$x = q + q_1 x_1 + q_2 x_2 + \cdots + q_n x_n$$

para ciertos $q, q_1, q_2, \cdots, q_n \in \mathbf{Q}$, y $x_1, x_2 \cdots, x_n \in \beta$.

Luego, si $f$ es un morfismo de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$,

$$f(x) = f(q)\, f(q_1 x_1) f(q_2 x_2) \cdots f(q_n x_n).$$

Para un tal $x$ definimos

$$f(x) = f(q)$$

es decir que $f(x) = 1$ si $x$ "no tiene parte racional". Puesto que $f$ es homomorfismo,

$$f(\frac{a}{b}) = (f(\frac{1}{b}))^a \qquad a,\ b \in \mathbf{Z},$$

luego basta definir a $f$ en las fracciones del tipo $\frac{1}{b}$. En realidad bastará con definir $f$ en las fracciones del tipo $\frac{1}{p^m}$, con $p$ un número primo. Para ver que esto puede dar una buena definición de $f$, veremos primero el siguiente lema:

**Lema 2.2** *Sea $p$ un número primo, y sean $S$ y $T$ los siguientes subconjuntos de $\mathbf{Q}$:*

$$\begin{aligned} S &= \{\frac{a}{p^m} \mid a \in \mathbf{Z},\ m \geq 0\} \\ T &= \{\frac{r}{s} \mid r,\ s \in \mathbf{Z},\ p \text{ no divide a } s\}. \end{aligned}$$

*Entonces $S \cap T = \mathbf{Z}$ y $\mathbf{Q} = S + T$.*

**Prueba:** Si $\frac{a}{p^m} = \frac{r}{s}$, entonces $a\,s = r\,p^m$. Luego $p^m/a$ y $s/r$, o lo que es lo mismo, $\frac{a}{p^m} \in \mathbf{Z}$ y $\frac{r}{s} \in \mathbf{Z}$.

Que $\mathbf{Q} = S + T$, significa que todo racional $q = \dfrac{a}{b}$ se puede escribir de la forma $q = s + t$, $s \in S$ y $t \in T$. Sea $p^m$ la mayor potencia de $p$ que divide a $b$. Entonces $b = k\,p^m$, $(k,p) = (k,p^m) = 1$. Luego existen enteros $u$ y $v$ tales que

$$1 = u\,k + v\,p^m.$$

Multiplicando ambos miembros por $q = \frac{a}{b}$ obtenemos

$$q = \frac{au}{p^m} + \frac{av}{k} \qquad \frac{au}{p^m} \in S,\ \frac{av}{k} \in T.$$

Fijemos entonces un número primo $p$, y consideremos $\{a_n \mid n \geq 0\}$ una sucesión de números enteros tales que $0 \leq a_n < p$, y definimos

$$f(\frac{1}{p^m}) = exp(2\pi \frac{a_0 + a_1\,p\ \cdots\ a_{m-1}\,p^{m-1}}{p^m}) = \prod_{i=0}^{m-1} exp(2\pi a_i \frac{p^i}{p^m}).$$

y si $q = \dfrac{a}{p^m} + \dfrac{r}{s}$,

$$f(q) = f(\frac{a}{p^m}) = \big(f(\frac{1}{p^m})\big)^a.$$

No es difícil comprobar que, si

$$\frac{a}{p^m} + \frac{r}{s} = \frac{a_1}{p^k} + \frac{r_1}{s_1}$$

entonces $s = s_1$ y $k = m$. De aquí también se deduce que $p^m$ divide a $(a - a_1)$. Luego, si $t \in \mathbf{Z}$

$$\exp(2\pi t\frac{a}{p^m}) = \exp(2\pi t\frac{a_1 + (a - a_1)}{p^m}) = \exp(2\pi t\frac{a_1}{p^m}).$$

Resumiendo, para definir $f$ elegimos un número primo $p$ y una sucesión de enteros $\{a_n \mid n \geq 0\}$ tales que $0 \leq a_n < p$. Entonces, siguiendo con la misma notación de antes, si $x \in \mathbf{R}$,

$$x = q + q_1\,x_1 + q_2\,x_2 + \cdots + q_n\,x_n \qquad \text{y}$$

$$q = \frac{a}{p^m} + \frac{r}{s},$$

definimos

$$f(x) = f(q) = f(\frac{a}{p^m}) = \left(f(\frac{1}{p^m})\right)^a.$$

Dejamos como ejercicio para el lector comprobar que efectivamente $f$ resulta un homomorfismo y que $f$ no es de la forma $\exp \circ \phi$, para ningún homomorfismo $\phi : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, a menos que exista un $M > 0$ tal que $a_n = 0$ para todo $n \geq M$.

**Referencias:**

[1] Alexandra Kurepa, *Ecuaciones funcionales involucrando funciones trigonométricas y exponenciales*, vol. 1, 1994.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física.
Universidad Nacional de Córdoba.

# Unidades de medida

*Norberto A. Fava*(*) , *Ursula Molter*(*)

**Introducción.** La teoría de la medida experimentó un progreso espectacular cuando, a principios del presente siglo, los matemáticos franceses Camile Jordan, Emile Borel y Henri Lebesgue advirtieron que la *longitud*, el *área* y el *volumen* eran un *problema* que valía la pena **definir con claridad, resolver y generalizar.**

En esta nota nos proponemos **pensar** en la medida desde un punto de vista teórico, de carácter elemental, que tenga en cuenta la práctica y las aplicaciones a la Física.

## 1. Longitud.

Como es sabido, el *problema de la longitud* consiste en asignar a cada segmento $S$ un número no negativo $\lambda(S)$. llamado *longitud de $S$*, de modo tal que se cumplan las siguientes propiedades:

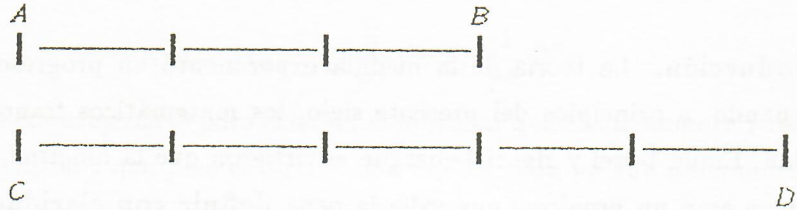
1a) Segmentos congruentes tienen la misma longitud; es decir, si $S_1 \equiv S_2$, entonces $\lambda(S_1) = \lambda(S_2)$.

2a) Si $S_1$ y $S_2$ son segmentos consecutivos sobre una recta, entonces $\lambda(S_1 \cup S_2) = \lambda(S_1) + \lambda(S_2)$.

Se tiene entonces el siguiente teorema:

**Teorema.** *Dados un segmento $AB$ (con $A \neq B$) y un número $u > 0$. existe una única función $\lambda$ que satisface las propiedades anteriores y verifica $\lambda(AB) = u$.*

El segmento $AB$ es el **patrón de comparación** que permite expresar la longitud de cualquier segmento en forma a veces sencilla, como en el siguiente ejemplo que intercalamos sólo para ilustrar:




Si $u = \lambda(AB)$, entonces tendremos $\lambda(CD) = 5(u/3) = \dfrac{5}{3}u$.

Cualquier segmento $MN$ tiene una longitud $\lambda(MN) = \rho u$.

El número $\rho$, que puede ser irracional, es la **medida** de $MN$ con respecto al segmento $AB$.

El valor de $u$ (un número positivo) no necesita ser especificado y todas las longitudes se expresan en términos de él.

En esta interpretación, medir un segmento significa determinar (en forma exacta o aproximada) el coeficiente $\rho$ de una función lineal.

El segmento $AB$ es la *unidad de medida*, y sólo sería la unidad de longitud si se eligiera $u = 1$, lo que se hace con frecuencia en los textos de Matemática para simplificar la expresión de las cantidades geométricas.

En realidad, la unidad de longitud *no puede determinarse sin especificar el valor de u,* cosa que no haremos.

En la práctica se elige un nombre y un símbolo para designar la longitud de un segmento que todos conocemos y sobre el que nos hemos puesto de acuerdo. La referencia a unas unidades concretas es insoslayable en las aplicaciones.

**Ejemplo:** Si $AB$ es el metro patrón que se conserva en la oficina de pesas y medidas de Sévres, llamando $m$ a su longitud, *un número positivo cualquiera*, todas las distancias se expresan en términos del número $m$, o como se dice habitualmente, "en metros". Así,

$$3m, \qquad 1.62\, m, \qquad 360\, m, \qquad \sqrt{2}\, m$$

expresan las longitudes de ciertos segmentos fácilmente construibles.

**2. Area.**

En forma simplificada, el *problema del área* consiste en asignar a cada figura plana $F$ un número no negativo $\phi(F)$, llamado *área de $F$*, de modo que se cumplan las siguientes propiedades:

1a) Si $F_1$ y $F_2$ son figuras congruentes, entonces

$$\phi(F_1) = \phi(F_2).$$

2a) Si $F_1$ y $F_2$ son figuras disjuntas, entonces

$$\phi(F_1 \cup F_2) = \phi(F_1) + \phi(F_2).$$

Llamando $Q$ a un cuadrado que tenga como lado el segmento $AB$ del párrafo anterior, al que hemos atribuido la longitud $u = \lambda(AB)$, podemos enunciar el siguiente teorema:

**Teorema.** *Para cualquier número $C > 0$, existe una única función $\phi$ que satisface las propiedades anteriores y verifica $\phi(Q) = C$.*

El área de un rectángulo $R$ cuyos lados tienen longitudes $a = \alpha u$ y $b = \beta u$ será entonces $\phi(R) = C\alpha\beta$.

**Sugerencia:** suponer primero que $\alpha$ y $\beta$ son números racionales.

Eligiendo $C = u^2$, donde $u = \lambda(AB)$, tendremos $\phi(R) = \alpha\beta u^2 = ab$.

Notemos que en tal caso, *el área de un rectángulo es el producto de las longitudes de sus lados.*

Para que la última afirmación sea correcta es **crucial** la elección de $C$.

Cada figura $F$ tiene un área $\phi(F) = \rho u^2$. El número $\rho$ es la *medida* de $F$ con respecto al *cuadrado unitario* $Q$, cuya área es $u^2$.

Hay que destacar que en esta interpretación $u^2 = u.u$ no es un mero símbolo, sino *el cuadrado del número u.*

## Ejemplos

**1.** La longitud de un pie $(f)$ está dada por la función lineal

$$f = 0.3048\,m$$

Luego, un pie cuadrado se expresa en metros cuadrados así:

$$f^2 = (0.3048m)^2 = (0.3048)^2 m^2 = 0.0929m^2.$$

**2.** En la Física se presentan unidades compuestas, que se expresan como producto o cociente de unidades "heterogéneas", porque miden magnitudes de naturaleza diferente, como longitud y tiempo. Así,

$$30\frac{km}{h} = 30\frac{1000\,m}{3600\,s} = 8.33\frac{m}{s}$$

Con nuestra interpretación, los símbolos $s$ y $h$ son los números positivos *arbitrarios* que asignamos a la duración de ciertos intervalos temporales; sólo que entre ambos existe la relación lineal

$$h = 3600\,s.$$

*En la medida del tiempo, la duración de un intervalo juega un papel análogo al de la longitud de un segmento.*

*Los símbolos de unidades en que se expresan todas las cantidades de una misma magnitud geométrica o física son* variables reales positivas *entre las* *cuales existen ciertas relaciones lineales (exactas o aproximadas) que se establecen por definición, por medición o por cálculo.*

**3.** *Problema del trapecista.* ¿Desde qué altura hay que caer para alcanzar, al chocar contra el piso, una velocidad igual a la del ejemplo anterior?

$$h = \frac{v^2}{2\,g} = \frac{[8.33\ \frac{m}{s}]^2}{2 \times 9.8\ \frac{m}{s^2}} = 3.54.\frac{m^2}{s^2}.\frac{s^2}{m} = 3.54\ m$$

**4.** *(variante del anterior)* ¿qué velocidad alcanza al chocar contra el piso un objeto pesado que cae de una altura de $10m$?

$$v = \sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{2 \times 9.8\ \frac{m}{s^2} \times 10\ m} = 14\sqrt{m^2/s^2} = 14\ m/s.$$

**5.** Sabiendo que la presión atmosférica normal $(at)$ corresponde a una columna de 76 **cm de** mercurio, cuyo peso específico es $\rho = 13.6\ gr/cm^3$, calcular el valor de **at** y expresarlo en hectopascales $(hPa)$, teniendo en cuenta las relaciones:

$$hPa = 100\ Pa = 100\ \frac{Newton}{m^2}, \quad kgr = 1000\ gr = 9.8\ Newton.$$

**Resumiendo:** *Las unidades de las distintas magnitudes son susceptibles de una interpretación que justifica operar con ellas utilizando las leyes del Algebra.*

Bibliografía

H. Lebesgue, *La mesure des grandeurs* (nueva edición), Blanchard, París, 1975.

(*)Departamento de Matemática - Facultad de Ciencias Exactas.
Universidad de Buenos Aires.
Güemes 3931 - (1425) Capital Federal.

# Construcciones con regla y compás

*Cristina Ferraris*

¿Qué figuras geométricas se pueden construir con regla y compás? O más aún: ¿Qué significa decir que una figura se puede construir con regla y compás? En primer lugar cabe aclarar que la regla ha de utilizarse como mero instrumento para trazar rectas (y no en el sentido de "medir") y el compás para trazar circunferencias. En segundo lugar, debe tenerse en cuenta que la construcción con regla y compás será aceptada en tanto se pueda demostrar que la figura construida cumple con todas las propiedades geométricas que la caracterizan.

Desde los comienzos de la geometría han interesado las construcciones con regla y compás. Así, para Euclides significa precisamente *todo lo que se puede obtener utilizando rectas y circunferencias*, cuya existencia está garantizada por sus primeros postulados:

1- Desde cualquier punto a cualquier otro se puede trazar un segmento.

2- Y cada segmento se puede prolongar por derecho.

3- Y con cada centro y cualquier distancia se puede trazar un círculo. ([4]).

Es conveniente tener en cuenta lo subrayado en el párrafo anterior pues se trata de garantizar la posibilidad conceptual de la construcción, esto es, cuando se habla de construir con compás se refiere a la existencia de la circunferencia que queda garantizada por el axioma 3 citado.

Veamos un ejemplo: Euclides realiza una construcción diríamos importante para transportar un segmento dado sobre una semirrecta también dada (o sea, en el lenguaje utilizado actualmente, construir sobre la misma, un segmento *congruente* al dado), de modo que el origen de ésta coincida con uno de los extremos del segmento transportado. Si $\overline{ab}$ es el segmento a transportar y $\overrightarrow{a'd}$ es la semirrecta sobre la cual se lo quiere llevar, la construcción es la siguiente:

paso 1 - se construye un triángulo equilátero de lado $\overline{a'a}$ (existe una circunferencia con centro en $a'$ y radio $\overline{a'a}$ y otra con centro $a$ y radio $\overline{a'a}$ que se cortan, por ejemplo, en un punto $c$ el que determina el triángulo buscado con

$a$ y $a'$).

paso 2 - se determina $b_1$ como la intersección de la circunferencia de centro $a$ y radio $\overline{ab}$ con la semirrecta $\overrightarrow{\bar{a}\,c}$ (semirrecta opuesta a $\overrightarrow{ac}$).

paso 3 - se determina $b''$ como la intersección de la circunferencia de centro $c$ y radio $\overline{cb_1}$ con la semirrecta $\overrightarrow{ca'}$. El segmento $\overline{a'b''}$ (diferencia entre los segmentos $\overline{cb''}$ y $\overline{ca'}$), resulta congruente al segmento $\overline{ab_1}$ (diferencia entre los segmentos $\overline{cb_1}$ y $\overline{ca}$) el que es también congruentes a $\overline{ab}$.

paso 4 - con centro $a'$ y radio $\overline{a'b''}$ se determina $b'$ sobre $\overrightarrow{a'd}$, resultando $\overline{a'b'}$ el segmento buscado.

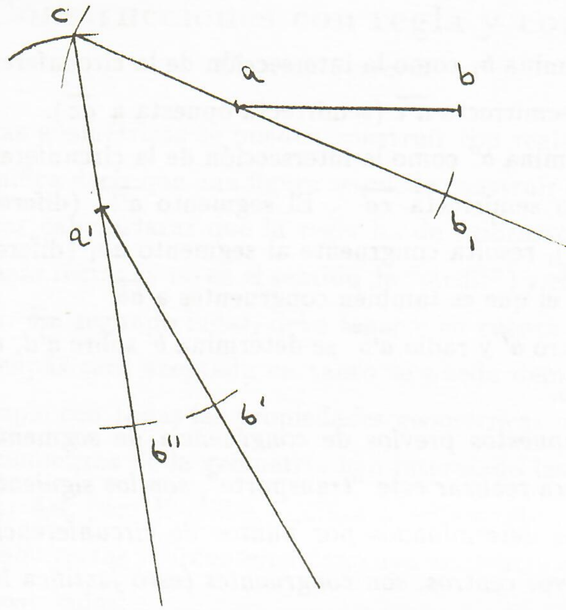
*Nota 1: Los supuestos previos de congruencia de segmentos de los que dispone Euclides para realizar este "transporte", son los siguientes:*

*a) los segmentos determinados por puntos de circunferencias del mismo radio y sus respectivos centros, son congruentes (esto justifica la construcción del triángulo equilátero del paso 1).*

*b) las sumas (o diferencias) de segmentos respectivamente congruentes, son congruentes*

(De este modo, la construcción anterior permite decir que el segmento obtenido es congruente al dado).

*Nota 2: Es interesante señalar que esta construcción nos permite ver que a través de ella Euclides deja implícita la idea de "movimiento" (hoy diríamos "transformación rígida o congruencia") para comparar segmentos, ya que para decidir si dos segmentos son congruentes tendremos que "llevar", "mover" o "transportar" un segmento a otro y ver si el "transportado" del primero coincide o no con el otro. Asimismo, esta construcción también permite construir circunferencias congruentes (o comparar circunferencias).*




Nota: después de esta construcción, sí es válido el "transporte" de segmentos con un compás.

Pero volvamos a las preguntas del comienzo. Lo que se pretende es realizar, a partir de ciertas "operaciones básicas" (que podrán garantizarse en base a los primeros axiomas), otras construcciones. Dichas operaciones básicas las podríamos enunciar así:

-Trazar la recta que pasa por dos puntos y encontrar el punto de intersección de dos rectas no paralelas.

-Construir un segmento congruente a uno dado sobre una dada semirreca, haciendo coincidir uno de los extremos con el origen de la misma.

-Construir un ángulo congruente a uno dado, de modo que uno de sus lados sea una semirrecta dada y el otro esté en uno de los semiplanos que ella determina. (Esta construcción utiliza el hecho de que ángulos centrales correspondientes a cuerdas congruentes de la misma circunferencia o de circunferencias de radios congruentes, son congruentes).

-Construir una paralela a una recta dada por un punto dado (figura 2).

-Construir una perpendicular a una recta dada por un punto dado.

Es posible demostrar que estas cinco operaciones se pueden realizar haciendo uso de los axiomas que, en la clasificación de Hilbert, son llamados de incidencia, ordenación, congruencia (o rigidez) y paralelismo, reemplazando el axioma de continuidad (que es, justamente, el que nos permite *medir** por una versión menos fuerte que podríamos enunciar así:

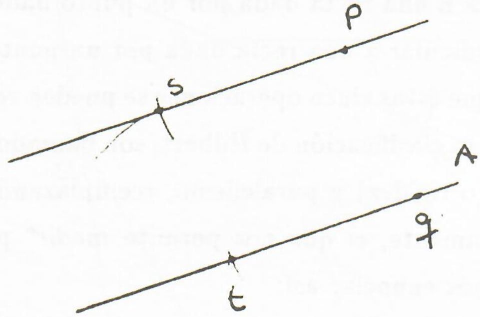
APCE a) La intersección entre una recta y una circunferencia consiste de dos, uno o ningún punto según que el segmento de perpendicular a la recta por el centro de la circunferencia determinado por dicho centro y el pie de la misma sea menor, igual o mayor que el radio.

b) La intersección entre dos circunferencias consiste de dos, uno o ningún punto, según que el segmento determinado por los centros de las mismas sea menor, igual o mayor que la suma de los radios.

El APCE (*axioma precursor del de continuidad debido a Euclides*) no es enunciado por Euclides de esta manera entre sus axiomas y postulados, pero sin embargo hace uso de él (por ejemplo, cuando construye el triángulo equilátero a partir de un segmento construyendo sendas circunferencias con centro en los extremos del segmento y radio congruente al mismo, da por hecho que las mismas se intersectan para poder tomar el tercer vértice. Ver, por ejemplo, el "transporte de un segmento" descripto en la figura 1).

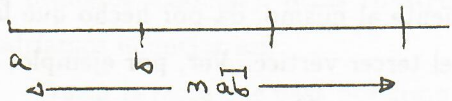
Retomando las operaciones básicas, veamos como ejemplo la cuarta:

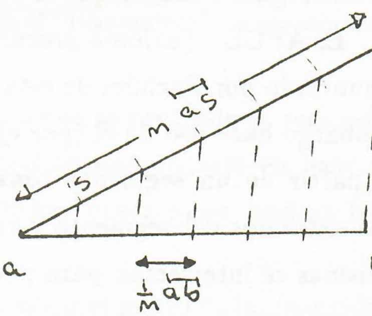
Sean $A$ y $p$ la recta y el punto dados, y $\overline{qt}$ un segmento incluído en $A$. Las circunferencias de radios $\overline{qt}$ y $\overline{qp}$ y centros $p$ y $t$ respectivamente, se cortan en dos puntos, uno de los cuales es interior al ángulo $\widehat{pqt}$; llamando $s$ a tal punto, el cuadrilátero $pqts$ resulta un paralelogramo (por tener sus lados opuestos respectivamente congruentes). Entonces la recta $\overleftrightarrow{ps}$ resulta la paralela buscada.




A esta altura nos podríamos preguntar: a *partir de un segmento dado*, ¿qué otros se pueden construir con regla y compás? (que son los que llamaremos "segmentos construibles").

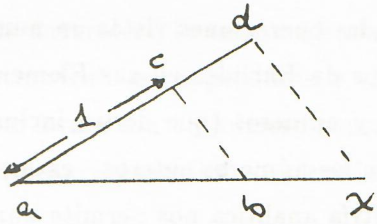
Los primeros segmentos que aparecen para responder a estas preguntas son los múltiplos (transportando n veces el segmento sobre una semirrecta) y submúltiplos:



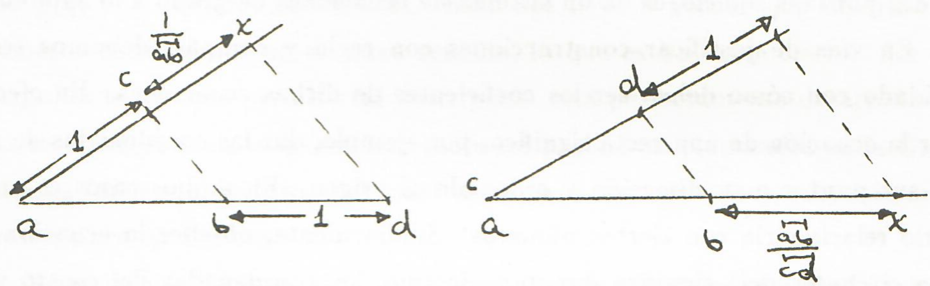

También es fácil ver, partiendo de dos segmentos construibles, que se pueden construir el segmento suma y el segmento diferencia entre el mayor y el menor.

Asimismo, si definimos "segmento producto" de otros dos $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ (construibles a partir de uno dado que llamaremos segmento unitario o segmento unidad) al segmento $\overline{bx}$ que resulta de la siguiente construcción:

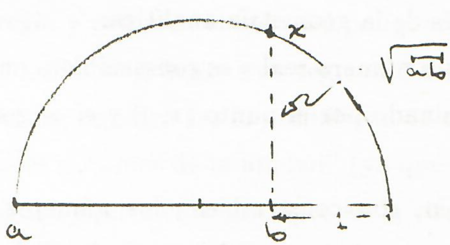



donde $\overline{ac}$ es el segmento unitario y $\overleftrightarrow{dx} \parallel \overleftrightarrow{cb}$, dicho segmento será construible toda vez que lo sean $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ (a partir de $\overline{ac}$).

Esto nos permite justificar las siguientes construcciones de los segmentos "inverso" y "cociente" a partir de dos segmentos construibles $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$.




Para cerrar este primer grupo de segmentos construibles a partir de otro que lo es, se puede ver la construcción de la "raíz cuadrada" del mismo cuya justificación viene dada por resultados de triángulos semejantes.



Como es de imaginar, aquí no se agota el conjunto de segmentos construibles (ya que se pueden reiterar las operaciones vistas un número finito de veces).

Otra sugerencia que nos da Euclides en sus Elementos, es la relación que establece entre segmentos y números (que deriva incluso en un estudio de la aritmética - propiedades de los números enteros - en los Libros VII al X).

Actualmente, la geometría analítica nos permite una fácil identificación de los puntos del plano con pares de números reales (sus coordenadas), a partir de lo cual se pueden expresar las rectas con ecuaciones de primer grado y las circunferencias con ecuaciones de segundo grado. Entonces, las construcciones que nos ocupan (que consisten en hallar puntos de intersección de rectas con rectas, rectas con circunferencias y circunferencias con circunferencias), vendrán dadas por la/s solucio/es de un sistema de ecuaciones de grado a lo sumo dos.

En vías de justificar construcciones con regla y compás, debemos tener cuidado con cómo deben ser los coeficientes de dichas ecuaciones. En efecto, dar la ecuación de una recta significa, por ejemplo, dar las coordenadas de dos de sus puntos o su dirección y ordenada al origen. En ambos casos es necesario relacionarla con ciertos números. Similarmente, obtener la ecuación de una circunferencia significa dar, por ejemplo, las coordenadas del centro y el segmento congruente con el radio: ambos deben poder construirse a *partir de un segmento dado* (que, sin pérdida de generalidad, puede pensarse como el segmento unitario).

A partir de esto, una figura será construible con regla y compás si lo son los puntos que la determinan. Veamos un poco más de la manera en que comienza este estudio a través de la geometría analítica:

i) Diremos que un número real $r$ es construible (con regla y compás), si lo es el segmento determinado por el punto $(r, o)$ y el origen, a partir de segmentos construibles.

Así, por ejemplo, son construibles: los números enteros, $1/m (m \in \mathbb{Z})$, cualquier número racional, los múltiplos y submúltiplos de un número construible, la raíz cuadrada de un número natural cualquiera (ver espiral de raíces cuadradas de números naturales), la raíz cuadrada de un número construible, la suma de números construibles, el producto y el cociente de números construibles, el número que forma con un número construible la razón áurea, etc.

ii) Un número complejo $(a, b)$ se dirá construible, si lo son los números reales $a$ y $b$.

iii) Un punto del plano se dirá construible si lo es el complejo que lo representa.

Por lo visto antes, los primeros números construibles que podemos reconocer son, entonces, los racionales y sus raíces cuadradas. Y, a partir de ellos, "muchos mas" (por ejemplo las raíces cuadradas de números de la forma $p + q\sqrt{r}$ con $p, q$, y $r$ números racionales). Esto nos lleva a pensar que describir los números construibles no es tarea sencilla, lo que es bastante cierto. Sin embargo, la teoría que permite tal descripción está perfectamente desarrollada y sus resultados, además de resolver todos los problemas planteados en la Grecia antigua (diciendo, incluso, qué construcciones *no* son posibles), permitieron un gran avance en álgebra.

No es interés de este trabajo detallar la teoría citada en el párrafo anterior (pueden consultarse, por ej., [1] y [2] sino dar un panorama rápido de la misma que permita tener una idea acerca del significado matemático de la expresión "construcciones con regla y compás".

Uno de los problemas que interesan en geometría es ver que polígonos regulares son constuíbles. En términos geométricos significa: para un n dado ¿es posible construir (con regla y compás) el lado del polígono de n lados inscripto en una circunferencia de radio congruente a un segmento tomado como unitario? Y, traducido a lo visto antes, significa ver la posibilidad de construir los números complejos llamados "raíces n-ésimas de la unidad" (ya que los mismos representan los vértices del polígono equivalente inscripto en la circunferencia unitaria) o sea, las soluciones complejas de la ecuación $x^n - 1 = 0$. Como 1 es solución, basta buscar las soluciones del polinomio ciclotómico $x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1$.

El resultado más trascendente al respecto es debido a C.F. Gauss (1777 - 1855) que dice que si $n$ es un número primo de la forma:

$$2^{2^r} + 1, \text{ con } r \in \mathbf{Z}, r \geq 0$$

dicho polígono es construible.

Nota: los números de esta forma son llamados números de Fermat (1601 - 1665). Si bien los cinco primeros son primos, se sabe que el $6^o$ es compuesto (este resultado se debe a Euler quien demostró que 641 es divisor de $2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297$) y más aún, no se conocen otros primos de Fermat.

El resultado final es: "El polígono regular de n lados es construible con regla y compás, *si* y *solo si* n es de la forma

$$2^t.p_1.....p_s$$

con $t \in \mathbf{Z}$, $t \geq 0$ y los $p_i$ primos de Fermat (distintos)".

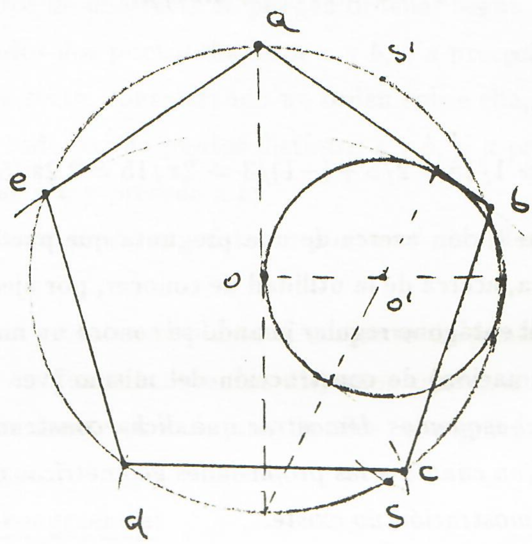
Con respecto a la construcción propiamente dicha de estos polígonos, y ya sabiendo con cuáles es inútil probar, veamos a modo de ejemplos:

1 - cuadrado (interseccción de dos rectas perpendiculares con la circunferencia con centro en el punto común a las mismas) y todos los polígonos con $n = 2^t, t \geq 3$ (subdividiendo en dos ángulos congruentes, por medio de la bisectriz, los ángulos del polígono de $n = 2^{t-1}$ lados).

2 - triángulo (ver paso 1 de la construcción de segmentos equivalentes) y todos los polígonos de $n$ lados con $n = 2^t.3$ y $t \geq 1$ (subdividiendo en dos ángulos congruentes, por medio de la bisectriz, los ángulos del polígono de $n = 2^{t-1}.3$ lados).

3 - pentágono (figura 7) y todos los polígonos de n lados con $n = 2^t.5$ y $t \geq 1$ (subdividiendo en dos ángulos congruentes, por medio de la bisectriz, los

ángulos del polígono de $n = 2^{t-1}.5$ lados).




4 - pentadecágono, observando que el ángulo central correspondiente se puede obtener de los centrales correspondientes al pentágono y al triángulo así:

$$2\pi/15 = 2\pi.2/5 + (-1).2\pi/3$$

Nota: esta es la forma en que se construyen en general los polígonos de n lados, con $n = n_1.n_2$, a partir de los de $n_1$ y $n_2$ lados, si $n_1$ y $n_2$ son coprimos. En efecto, basta observar que en ese caso, 1 (máximo común divisor de $n_1$ y $n_2$), es combinación entera de $n_1$ y $n_2$, esto es:

$$1 = a.n_1 + b.n_2$$

entonces,

$$1/n = 1/n_1.n_2 = a/n_2 + b/n_1$$

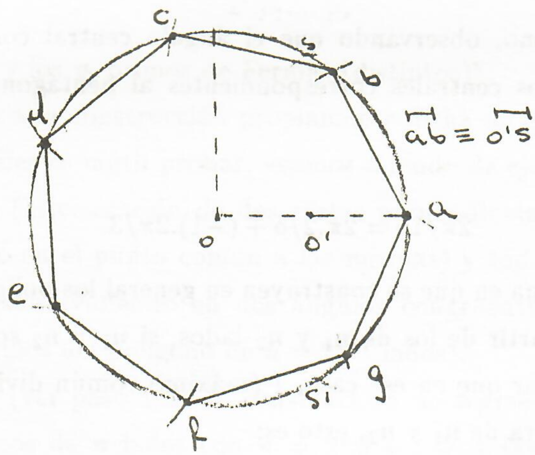
y

$$2\pi/n = a.2\pi/n_2 + b.2\pi/n_1$$

En el caso del ejemplo,

$$1 = 2.3 + (-1).5 \Rightarrow 1/15 = 2/5 + (-1)/3 \Rightarrow 2\pi/15 = 2.2\pi/5 + (-1).2\pi/3$$

Por último, una reflexión acerca de una pregunta que puede hacerse quien se interese por el tema, acerca de la utilidad de conocer, por ejemplo, la imposibilidad de construir el eptágono regular cuando se conoce un muy buen método ( en cuanto a aproximación) de construcción del mismo (ver figura 8): pues, que en este caso, *no busquemos demostrar que dicha construcción nos provee de la figura correcta (en cuanto a las propiedades geométricas que la definen se refiere) ya que tal demostración no existe.*




(*) Axiomas de incidencia, ordenmación, congruencia, paralelismo y continuidad en el plano:

Axiomas de incidencia y ordenación:

i - El plano es un conjunto infinito de puntos.

ii- Las rectas son subconjuntos propios del plano.

iii- Dados dos puntos distintos, existe una única recta a la que ellos pertenecen.

iv - Los puntos de una recta se pueden ordenar según dos órdenes opuestos de nodo que, dados dos puntos distintos $a$ y $b$, o $a$ precede a $b$ o $b$ precede a $a$.

v - Dada una recta, considerando un orden sobre ella,

1) para todo par de puntos distintos $a$ y $b$, si $a$ precede a $b$, existe otro punto $c$ que sigue a $a$ y precede a $b$;

2) para todo punto $m$ existe un punto $m'$ que le precede y otro $m''$ que le sigue.

vi - Dada una recta en el plano, el conjunto de puntos que no pertenecen a ella se divide en dos subconjuntos disjuntos convexos de modo que si $m$ y $n$ están respectivamente en cada uno de ellos, el segmento $\overline{mn}$ intersecta a la recta en un punto.

Axioma de congruencia:

vii - Las transformaciones rígidas son aplicaciones biyectivas del plano en sí mismo que satisfacen las propiedades

1) si tres puntos $a, b$ y $c$ están en una recta y $c$ está entre $a$ y $b$; sus transformados $a'$, $b'$ y $c'$ están alineados y $c'$ está entre $a'$ y $b'$.

2) si $\overline{ab}$ se transforma en $\overline{a'b'}$ y $\overline{ab} \subset \overline{a'b'} \vee \overline{a'b'} \subset \overline{ab}$, entonces $\overline{a'b'} = \overline{ab}$

3) si $\widehat{aob}$ se transforma en $\widehat{a'o'b'}$ y $\widehat{aob} \subset \widehat{a'o'b'} \vee \widehat{a'o'b'} \subset \widehat{aob}$, entonces $\widehat{aob} = \widehat{a'o'b'}$

viii - La composición de transformaciones rígidas es una transformación rígida y la inversa de una transformación rígida es una transformación rígida.

ix - Existe una única transformación rígida que transforma una dada semirrecta en otra y un determinado semiplano limitado por la primera en un determinado semiplano limitado por la segunda.

Axioma de paralelismo:

x - La paralela que pasa por un punto exterior a una recta, es única.

Axioma de continuidad:

xi - Sean $A$ una recta ordenada, $\overline{U}$ un segmento, $u_i$ con $i \in \mathbf{Z}$ puntos de la recta tales que

$$\overline{u_i u_{i+1}} \equiv \overline{U} \qquad \wedge \qquad u_j \text{ precede a } u_i \text{ si } j < i$$

Entonces existe una única función biyectiva

$$f : A \to \mathbf{R}$$

que preserva el orden, tal que $f(u_i) = i \ \ \forall i \in \mathbf{Z}$ y que si $m$ es el punto medio de cualquier segmento $\overline{ab} \subset A$, verifica

$$f(m) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$$

BIBLIOGRAFIA.

[1 ] "*Contrucciones con regla y comás*", Enzo Gentile. Revista de Educación Matemática, vol. 3 $N^o$ 2, Córdoba 1987.

[2 ] "*Foundations of Geometry*", David Hilbert. 2da. edición en inglés de 1971 (original de 1887), La Salle Illinois.

[3 ] "*Geometría Elemental*", A.V. Pogorélov. Ed. MIR, Moscú, 1974. (Versión en castellano del mismo año).

[4 ] *Leyendo a Euclides*", Beppo Levi. Ed. Rosario S.A. 1947.

[5 ] *Geometría Teórico - Práctica para los Niños*". Aquilino Fernández. $10^a$ edición (no trae fecha). F. Crespillo, Editor, Buenos Aires.

[6 ] *Problemas Gráficos y Numéricos de Geometría*". M. García Ardua. $15^a$. edición, Madrid 1968.

Centro Regional Universitario Bariloche.

Universidad Nacional del Comahue.

C.C. 1336 - 8400 - San Carlos de Bariloche.

# Soluciones de Problemas

Soluciones de problemas del Vol. 11 $N^o$ 2, enviadas por la Lic. Isabel Viggiani Rocha; Instituto de Matemática, Fac. de Ciencias Exactas y Tecnología; Universidad Nacional de Tucumán

1.- ¿Qué triángulo tiene mayor área: uno con lados de longitud 3,4 y 5 m, u otro cuyos lados sean los cuadrados de esos números ?.

El triángulo de lados 3, 4 y 5 es un triángulo rectángulo. Por lo tanto su área será $S = \dfrac{3.4}{2} = 6$

En cambio el 2do "triángulo" tiene sus lados de 9, 16 y 25 m. Sin Embargo con estas medidas, no existe triángulo pues $9 + 16 = 25$ y para que exista un triángulo la suma de las longitudes de 2 lados (en realidad cada par) debe ser mayor que la longitud del lado no considerado. Por lo tanto $S = 0$.

E indudablemente el triángulo 3-4-5 es el de mayor área.

2.- Supongamos que no hubiera ninguna montaña, sierra, mar, etc. en el ecuador de la Tierra. Si se tomara un cable cuya longitud fuese igual a la longitud de la circunferencia de la Tierra más 13 m. y se envolviera el ecuador con él ¿Podría un hombre arrastrarse por debajo de este cable?

Sí pues:

$l_t = 2\pi r_t$

$l_c = 2\pi\ r_c = 2\pi(r_t + r_\Delta) = l_t + 13$

$2\pi r_t + 13 = 2\pi(r_t + r_\Delta)$

$r_\Delta = \dfrac{13}{2\ \pi} \cong 2,069m.$

Es decir que el cable se encuentra a una altura de $\dfrac{13}{2\pi}m$ sobre la superficie de la tierra

a) Un hombre va de un pueblo A a un pueblo B por un camino cuesta arriba a un promedio de 4 km/h. Luego vuelve cuesta abajo de B a A a un promedio de 6 km/h.

Su amigo va por un camino llano desde A hasta otro pueblo C, ida y vuelta a un promedio de 5 km/h. Si la distancia de C a A es la misma que la de B a A ¿Quién vuelve primero?

b) En general, si 2 personas van desde un punto A a uno B, el primero yendo a $v_1$ km/h y volviendo a $v_2$ km/h; mientras el segundo va y vuelve a un promedio de $\dfrac{v_1+v_2}{2}$ km/h, probar que sólo llegarán al mismo tiempo si $v_1 = v_2$. ¿Quién gana si no es así?

a) $t_{AB} = \dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{6} = \dfrac{25}{60}x.$

$\boxed{t_{AC} = \dfrac{2x}{5} = \dfrac{24}{60}x.}$ Vuelve primero el que va de A a C y a A.

b) $t_{AC} = 2\left(\dfrac{v_1+v_2}{2}\right)^{-1} x = \dfrac{4x}{v_1+v_2}$

$t_{AB} = \dfrac{x}{v_1} + \dfrac{x}{v_2} = \dfrac{v_1+v_2}{v_1v_2}x$

$t_{AC} = t_{AB} \Longrightarrow \dfrac{4x}{v_1+v_2} = \dfrac{v_1+v_2}{v_1v_2}x \Longrightarrow 4\, v_1v_2 = (v_1+v_2)^2$

$\therefore\ v_1^2 + 2v_1v_2 + v_2^2 = 4\, v_1v_2$

$\therefore\ v_1^2 - 2\, v_1v_2 + v_2^2 = 0 \Longrightarrow (v_1 - v_2)^2 = 0 \Longrightarrow v_1 = v_2$

¿quién gana?

$\dfrac{4}{v_1+v_2} < \dfrac{v_2+v_1}{v_1\, v_2}?$ ó $\dfrac{4}{v_1+v_2} > \dfrac{v_1+v_2}{v_1\, v_2}?$

$4\, v_1v_2 < (v_1+v_2)^2 \Longrightarrow (v_1 - v_2)^2 > 0$ gana el de A-C-A.

# Noticias

## Publicaciones

*Problemas 6* - Patricia Fauring y Flora Gutiérrez -

Reúne los problemas semanales de la Olimpíada Matemática Argentina, que se enviaron durante el año 1995 para el entrenamiento de los participantes de la escuela secundaria.

Contiene los enunciados clasificados según los niveles y además se presenta una solución para cada uno de los problemas propuestos.

Todos estos libros pueden adquirirse en la Olimíada Matemática Argentina, cuya dirección es: Pacheco de Melo 1826 - 1 Piso - Tel/Fax: (01) 813-6663 - (1126) Capital Federal - o en las secretarías regionales de la O.M.A..

### Seminario Internacional. Tucumán - 18 al 21 de noviembre -

El Seminario Internacional, previsto dentro del marco de las actividades de la Olimpíada Matemática Argentina, se llevará a cabo en Tucumán del 18 al 21 de noviembre.

Este año contaremos con la presencia del Dr. Miguel de Guzmán, quien desarrollará el Seminario *La visualización como estrategia en la resolución de problemas.*

El Dr. Claudi Alsina dictará: *El arte de visualizar la Matemática.*

Como en anteriores oportunidades, estarán los profesores José Colera y Joaquín Giménez dictando cada uno esta vez un curso que continuará el del año pasado.

El primero dictará un Seminario sobre *Probabilidades y Estadística* y el segundo, para maestros, continuará investigando en *Matemáticas y entornos.* Para optar por estos seminarios, es necesario haber cursado el anterior. Pero los profesores y maestros interesados en estos temas podrán optar por cursos similares introductorios.

El Dr. Valeri Vavilov también estará presente. Este año nos visitarán por primera vez dos especialistas, conocidos nuestros a través de sus trabajos: Alan Schoenfeld y Colette Laborde. El primero está dedicado desde hace años a estudiar estrategias para la resolución de problemas y la segunda es directora del IREM de Grenoble, Francia, ciudad donde se desarrolló el programa de geometría CABRI. Su participación estará vinculada con este programa.