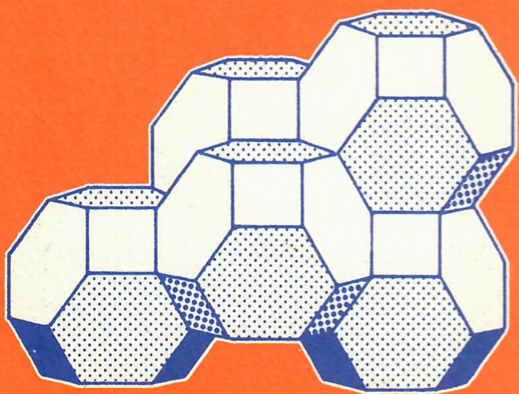
REVISTA DE EDUCACION MATEMATICA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

FACULTAD DE MATEMATICA, ASTRONOMIA Y FISICA



VOLUMEN 4 NUMERO 3 — 1989

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA

DIALOGO SOCRATICO SOBRE LA MATEMATICA

Alfred Rényi

El siguiente "Diálogo sobre la Matemática" fue traducido por el profesor Edgardo Fernández Stacco, a quien le estamos muy agradecidos por ponerlo a nuestra disposición. Este es el primero de una serie de tres diálogos que serán publicados en los próximos números.

SOCRATES: ¿Estás buscando a alguien, querido Hipócrates?

HIPOCRATES: No, Sócrates, ya que acabo de encontrar a quien buscaba, es decir, a ti. He estado buscándote por todas partes. Alguien me dijo en el ágora que te vió caminando por aquí en la ribera del Iliso; entonces vine tras de ti.

SOCRATES: Bien, dime porqué has venido y entonces deseo preguntarte algunas cosas sobre la discusión mantenida con Protágoras. Aún la recuerdas?.

HIPOCRATES: ¿Cómo puedes preguntármelo? Desde aquel momento no ha transcurrido un solo día sin pensar sobre el particular. Hoy he venido a buscar tu consejo ya que aquella discusión permanece en mi memoria.

SOCRATES: Me parece, querido Hipócrates, que quieres platicar conmigo sobre una cuestión precisa que yo también deseo discutir contigo; por lo tanto ambos temas son uno y el mismo.

Estimo que los matemáticos están equivocados cuando dicen que dos nunca es igual a uno.

HIPOCRATES: En efecto, Sócrates, la matemática es justamente el tópico sobre el cual deseo hablar contigo.

SOCRATES: Hipócrates, tú sabes ciertamente que yo no soy matemático. ¿Por qué no le planteas tus preguntas al famoso Teodoro?

HIPOCRATES: Tú eres admirable, Sócrates, ya que respondes a mis preguntas aún antes de que te las haya planteado. He venido a recabar tu opinión sobre mis deseos de llegar a ser alumno de Teodoro. Cuando me acerqué a tí la última vez, con la intención de ser alumno de Protágoras, fuimos hasta él y tú condujiste la discusión de forma tal que quedó bien claro que él no sabía el tema objeto de sus enseñanzas. Fué así como cambié mis deseos y no lo seguí. Esa discusión me ayudó a ver qué no debía hacer, pero no me mostró qué debo hacer. Me estoy interrogando aún sobre ello.

He asistido a banquetes y a la palestra con jóvenes de mi edad, y sin lugar a dudas he pasado momentos agradables, pero ello no me satisface. Me molesta sentirme ignorante. Mas precisamente, presiento que el conocimiento que poseo es bastante incierto. Durante la discusión con Protágoras, me he dado cuenta de que mi conocimiento sobre cuestiones familiares como la virtud, la justicia y el coraje estaba muy lejos de ser satisfactorio. Sin embargo, pienso que he realizado un gran progreso ya que ahora veo claramente mi propia ignorancia.

SOCRATES: Estoy complacido, querido Hipócrates, de que me comprendas tan bien. Yo siempre me digo francamente que nada sé. <u>La diferencia entre yo y la mayoria de la gente es que no me imagino que se algo cuando en realidad no lo sé.</u>

HIPOCRATES: Ello muestra claramente tu sabiduría, Sócrates. Pero esta certeza no es suficiente para mí. Tengo grandes deseos de lograr conocimientos ciertos y sólidos y no seré feliz hasta haberlo conseguido. Estoy constantemente reflexionando sobre la clase de conocimientos que trataré de adquirir. Recientemente, Teeteto me dijo que la certeza existe solamente en la matemática con su maestro, Teodoro, quien es el mejor experto en números y geometría de Atenas. Ahora, yo no deseo reiterar el mismo error que cometí cuando quise ser alumno de Protágoras. Por lo tanto dime, Sócrates, ¿encontraré la clase de conocimiento profundo que presiento si estudio matemática con Teodoro?.

SOCRATES: Si tú deseas estudiar matemática, oh! hijo de Apolodoro, ciertamente lo mejor que puedes hacer es acercarte a mi altamente apreciado amigo Teodoro. Pero debes decidir por tí mismo el por qué realmente deseas estudiar matemática. Nadie puede conocer mejor tus necesidades que tú mismo.

HIPOCRAQTES: ¿Por qué te niegas a ayudarme, Sócrates?¿Quizás te haya ofendido sin saberlo?

SOCRATES: No me has comprendido, mi joven amigo. No estoy enojado; pero tú preguntas algo imposible para mí. Toda persona debe decidir por sí misma qué desea hacer. Lo único que puedo hacer es, cual una partera, asistir al nacimiento de tu decisión.

HIPOCRATES: Por favor, querido Sócrates, no me niegues tu ayuda y si estás libre en estos momentos, comencemos inmediatamente.

SOCRATES: Muy bien, si lo deseas. Sentémonos a la sombra del sicomoro y empecemos. Pero antes que todo dime si estás presto a seguir la discusión de acuerdo a mis preferencias. Yo te haré las preguntas y tú me las contestarás. Por este método llegarás a ver claramente lo que actualmente sabes, para que florezcan las semillas del conocimiento que hay en tu espíritu. Espero que no te comportes como el rey Darío, que asesinó al maestro de sus minas porque extrajo solamente cobre de una de ellas que el rey suponía contenía oro. Y espero también que no olvides que un minero puede encontrar en la mina solamente lo que ella contiene.

SOCRATES: Juro que no haré reproches, pero, por Zeus, comencemos de inmediato.

SOCRATES: Bien, dime entonces, ¿Sabes que es la matemática? Supongo que puedes definirla, ya que deseas estudiarla.

HIPOCRATES: Pienso que un niño puede hacerlo. La matemática es una de las ciencias y una de las más admirables.

SOCRATES: No te he pedido que alabes a la matemática, sino que describas su naturaleza. Por ejemplo, si te interrogo sobre el oficio de los médicos me responderías que se trata de la salud y de la enfermedad y que su finalidad es curar los enfermos y preservar la salud. ¿Estoy en lo cierto?

HIPOCRATES: Exactamente.

SOCRATES: Respóndeme entonces lo siguiente:¿el oficio de los médicos trata con algo existente o con algo que no existe?.¿Si no existieran los médicos, existirían las enfermedades?

HIPOCRATES: Seguramente, y más que en la actualidad.

SOCRATES: Observemos ahora otro arte, digamos la astronomía. Estás de acuerdo conmigo en que los astrónomos estudian el movimiento de las estrellas?

HIPOCRATES: Sin duda alguna.

SOCRATES: Y si te pregunto si la astronomía trata de cosas existentes; ¿cuál es tu respuesta?.

HIPOCRATES: Mi respuesta es que sí.

SOCRATES: ¿Existirían las estrellas si no hubiera astrónomos en el mundo?.

HIPOCRATES: Por supuesto. Y si Zeus y su cólera destruyeran la humanidad, las estrellas continuarían brillando en el cielo por las noches. ¿Pero, por qué estamos discutiendo de astronomía en lugar de matemática?.

SOCRATES: Mi buen amigo, no seas impaciente. Consideremos algunos otros oficios para compararlos con la matemática. ¿Cómo describirías a un hombre que sabe sobre todas las criaturas que viven en los bosques o en las profundidades del mar?

HIPOCRATES: Es un científico que estudia la naturaleza viviente.

SOCRATES: ¿Y estás de acuerdo en que ese hombre estudia cosas que existen?

HIPOCRATES: De acuerdo.

SOCRATES: ¿Y si afirmo que todo oficio trata con algo que existe, estarías de acuerdo?

HIPOCRATES: Completamente.

SOCRATES: Dime ahora, mi joven amigo, ¿cuál es el objeto de la matemática?. ¿Qué objetos estudian los matemáticos?

HIPOCRATES: Le he planteado a Teeteto la misma pregunta. El me contestó que un matemático estudia los números y formas geométricas.

SOCRATES: Bien, la respuesta es correcta, pero podrías afirmar que estas cosas existen?.

HIPOCRATES: Por supuesto. ¿Cómo podemos hablar de ellas si no exiten?

SOCRATES: Dime entonces, ¿Si los matemáticos no existieran, habría números primos, y si así fuera, qué serían ellos?

HIPOCRATES: Realmente, no sé que responderte. Es claro que si los matemáticos piensan sobre los números primos, entonces ellos existen en su conciencia. Pero si no hubiera matemáticos, los números primos no estarían en parte alguna.

SOCRATES: ¿Pretendes con ello significar que tenemos que decir que los matemáticos estudian objetos inexistentes?

HIPOCRATES: Si pienso que debemos admitirlo.

SOCRATES: Examinemos la cuestión: desde otro punto de vista. Aquí, he escrito en esta tabla de cera el número 37. ¿Lo ves?.

HIPOCRATES: Si, lo veo.

SOCRATES: ¿Y puedes tocarlo con tu mano?

HIPOCRATES: Ciertamente.

SOCRATES: ¿Entonces quizá los números existen?

HIPOCRATES: Oh! Sócrates, te estás burlando de mi. Mira aquí, he dibujado sobre la misma tabla un dragón con siete cabezas. ¿De aquí se desprende que tal dragón existe?. Nunca he encontrado a alguien que haya visto un dragón y estoy convencido que los dragones no existen excepto en los cuentos de hadas. Pero supongamos que estoy equivocado, supongamos que detrás de las columnas de Hércules existen realmente los dragones, ello no tiene nada que ver con mi dibujo.

SOCRATES: Tú dices la verdad, Hipócrates, y estoy completamente de acuerdo contigo. ¿Pero eso significa que si bien nosotros podemos hablar sobre ellos, y escribirlos, los números nunca existen en realidad?

HIPOCRATES: Ciertamente.

SOCRATES: No saques conclusiones apresuradas. Realicemos otra prueba. Estoy en lo cierto diciendo que podemos contar las ovejas aquí en el prado o los barcos en el puerto de el Pireo.

HIPOCRATES: Sí, podemos.

SOCRATES: ¿Y las ovejas y los barcos existen?

HIPOCRATES: Ciertamente.

SOCRATES: ¿Pero si las ovejas existen su número debe ser algo que existe también?.

HIPOCRATES: Tu te burlas de mí, Sócrates. Los matemáticos no cuentan las ovejas; ese es trabajo de los pastores.

SOCRATES: ¿Quieres decir que lo que estudian los matemáticos no es el número de ovejas o de barcos, u otros objetos existentes, sino el número en sí mismo? ¿Y así que ellos tratan con algo que existe solamente en sus mentes?

HIPOCRATES: Si, eso es lo que quiero decir.

SOCRATES: Me has dicho que, de acuerdo con Teeteto, los matemáticos estudian los números y las figuras geométricas. ¿Qué se puede decir sobre las figuras? Si te pregunto si ellas existen, ¿Cuál es tu respuesta?

HIPOCRATES: Existen ciertamente. Podemos ver la forma de un hermoso vaso, por ejemplo, y podemos palparlo con nuestras manos también.

SOCRATES: Aún tengo un problema. Si tú miras el vaso Qué estás viendo, el vaso o su forma?

HIPOCRATES: Veo ambas.

SOCRATES: ¿Es lo mismo que cuando miras un cordero?. ¿tú observas el cordero y también su lana?

HIPOCRATES: Encuentro el símil muy bien elegido.

SOCRATES: Bien, yo pienso que es débil como Hefesto. Puedes cortar la lana del cordero y entonces ves el cordero sin su lana, y la lana sin el cordero. ¿Puedes tú separar en una forma similar la forma del vaso y la figura del vaso en sí mismo?

HIPOCRATES: No, ciertamente, y me figuro que nadie puede.

SOCRATES: ¿Y sin embargo aún crees que puedes ver una figura geométrica?.

HIPOCRATES: Estoy empezando a dudarlo.

SOCRATES: Además, si los matemáticos estudian las formas de los vasos, ¿podríamos llamarlos ceramistas?.

HIPOCRATES: Ciertamente.

SOCRATES: Entonces, si Teodoro es el mejor matemático ¿no sería el mejor ceramista también?. He escuchado a muchas personas alabarlo, pero ninguno me ha dicho que él entiende algo de cerámica. Yo dudo si él puede hacer un simple recipiente. ¿o quizá los matemáticos tratan con la forma de las estatuas o de los edificios?

HIPOCRATES: Si así fuera, ellos serían escultores y arquitectos.

SOCRATES: Bien, mi amigo, hemos llegado a la conclusión de que los matemáticos cuando estudian geometría no tratan con las figuras de los objetos existentes como vasos, sino con formas las que existen solamente en sus pensamientos.

¿Estás de acuerdo?

HIPOCRATES: Tengo que estarlo.

SOCRATES: Habiendo establecido que los matemáticos tratan con objetos que no existen en realidad sino solamente en sus pensamientos, examinemos la afirmación de Teeteto que has mencionado de que la matemática nos da un conocimiento más confiable y seguro que cualquier otra rama de la ciencia. Díme, ¿Teeteto dió algunos ejemplos?

HIPOCRATES: Si, en efecto, dijo que no se puede saber exactamente cuán lejos está Atenas de Esparta. Por supuesto, las personas que viajan por esa ruta están de acuerdo sobre el número de días que tienen que caminar, pero es imposible saber exactamente la distancia en pies. Por otra parte, podemos decir, utilizando el teorema de Pitágoras, cuál es la longitud de la diagonal de un cuadrado. También dijo Teeteto que es imposible dar el número exacto de personas que viven en la Hélade. Si alguien trata de contarlos - nunca obtendrá el número exacto, debido a que durante el tiempo que se tarda en hacerlo algunos ancianos pueden morir y algunos niños pueden nacer, por lo tanto, el número total sería correcto sólo aproximadamente. Pero si tú preguntas a un matemático cuántas aristas tiene un dodecaaedro, él te responderá que el dodecaedro está limitado por 12 caras y cada una tiene cinco aristas. Esto hace 60, pero como cada arista pertenece a dos caras y por lo tanto ha sido contada dos veces, el número de aristas del dodecaedro es igual a 30 y este número está fuera de toda duda.

SOCRATES: ¿Mencionó él otros ejemplos?.

HIPOCRATES: Algunos más, pero no los recuerdo todos. Dijo que en realidad no se pueden encontrar nunca

dos objetos que sean exactamente iguales. No hay dos huevos exactamente iguales, y aún las columnas del templo de Poseidón difieren ligeramente unas de otras, pero uno puede estar seguro que dos diagonales de un rectángulo son exactamente iguales.
El mencionó a Heráclito, quien dijo que todo lo que existe está en constante cambio, y que un conocimiento seguro es solamente posible sobre objetos que nunca cambian, por ejemplo, los pares y los impares, la recta y el círculo.

SOCRATES: Así será. Estos ejemplos me convencen que en matemática podemos obtener un conocimiento más allá de toda duda, mientras que en otras ciencias o en la vida diaria ello es imposible. Hagamos un resumen de los resultados de nuestra investigación sobre la naturaleza de la matemática. ¿Estoy en lo cierto cuando digo que hemos llegado a la conclusión de que la matemática estudia objetos que no existen y es capaz de encontrar toda la verdad acerca de ellos?

HIPOCRATES: Efectivamente, a esa conclusión hemos llegado.

SOCRATES: Pero dime, por Zeus, mi querido Hipócrates, ¿no es misterioso que podamos saber más sobre objetos que no existen que sobre cosas existentes?

HIPOCRATES: Si lo dices así, es ciertamente un misterio. Pero estoy seguro que hay algún error en nuestras argumentaciones.

SOCRATES: No, procedimos con el mayor cuidado y controlamos todo paso de la argumentación. No puede haber ningún error en nuestro razonamiento. Pero, escucha, recuerdo algo que puede ayudarnos a resolver el enigma.

HIPOCRATES: Dímelo rápido, porque estoy bastante perplejo.

SOCRATES: Esta mañana estaba en el hall del segundo arconte, donde la esposa de un carpintero de la aldea de Pitthos fue acusada de traición y que, con ayuda de su amante, asesinó a su esposo. La mujer protestaba y juraba por Artemisa y Afrodita que era inocente, que nunca amó a nadie que no fuera su marido, y que su esposo fue asesinado por piratas. Muchas personas fueron citadas como testigos,. Algunos manifestaron que la mujer era culpable, otros dijeron que era inocente. Fué imposible establecer qué ocurrió realmente.

HIPOCRATES: ¿Te estás burlando de mí nuevamente?. Primero me has confundido completamente, y ahora, en lugar de ayudarme a encontrar la verdad me cuentas estas historias.

SOCRATES: No te enfades, mi amigo,tengo serias razones para hablar de esa mujer cuya culpabilidad fue imposible determinar. Pero algo es seguro. La mujer existe. La vi con mis propios ojos y a todos los que allí estaban, la mayoria de los cuales nunca han mentido en su vida, les puedes plantear la misma pregunta y recibirás la misma respuesta.

HIPOCRATES: Tu testimonio es suficiente para mí, querido Sócrates. Demos por sentado que la mujer existe. ¿Pero qué tiene que ver esto con la matemática?

SOCRATES: Mas de lo que te imaginas. Pero dime primero, ¿Conoces la historia de Agamenón y Clitemnestra?.

HIPOCRATES: Todo el mundo conoce esa historia. He visto la trilogia de Esquilo en el teatro el año pasado.

SOCRATES: Cuéntame la historia en pocas palabras.

HIPOCRATES: Mientras Agamenón, rey de Micenas, luchaba bajo las murallas de Troya, su esposa, Clitemnestra, cometió adulterio con Egisto, primo de su marido. Después de la caída de Troya, cuando Agamenón retornó al hogar, su esposa y su amante lo asesinaron.

SOCRATES: Dime, Hipócrates, ¿es completamente seguro que Clitemnestra era culpable?.

HIPOCRATES: No entiendo porqué tú me preguntas estas cuestiones. No hay dudas sobre la historia. De acuerdo con Homero, cuando Odiseo visitó el Averno encontró a Agamenón, quien le relató su trágico destino.

SOCRATES: ¿Pero estás seguro que Clitemnestra y Agamenón y todos los demás personajes de la historia realmente han existido?

HIPOCRATES: Quizá me envíen al ostracismo si digo esto en público,pero mi opinión es que es imposible determinar hoy, después de muchas centurias, si las historias de Homero son ciertas o no. Pero ello es irrelevante. Cuando digo que Clitemnestra era culpable, no hablo acerca de la real Clitemnestra -si tal persona ha existido alguna vez- sino sobre la Clitemnestra de nuestra tradición homérica, sobre la Clitemnestra de la trilogía de Esquilo.

SOCRATES: ¿Puedo decir que nada sabemos sobre la real Clitemnestra?. Aún cuando su existencia es incierta, en lo que respecta a Clitemnestra personaje en la trilogía de Esquilo, estamos seguros que ella era culpable y mató a Agamenón porque eso es lo que nos dice Esquilo.

HIPOCRATES: Sí, por supuesto.¿Pero por qué insistes en todo esto?

SOCRATES: Lo verás en un momento. Resumamos lo que hemos encontrado. Es imposible en el caso de la mujer de carne y hueso que fue juzgada hoy en Atenas establecer si ella era culpable, mientras que no caben dudas sobre la culpabilidad de Clitemnestra que es un personaje de la obra y que probablemente nunca existió. ¿Estás de acuerdo?.

HIPOCRATES: Ahora es que comienzo a entender lo que quieres decir. pero sería mejor si extrajeras las conclusiones por tí mismo.

SOCRATES: La conclusión es esta: tenemos un conocimiento más cierto sobre personas que existen solamente en nuestra imaginación, por ejemplo, acerca de los personajes de un drama, que sobre personajes reales. Si decimos que Clitemnestra era culpable, significa solamente que así es como Esquilo la imaginó y presentó en su obra. La situación es exactamente igual en matemática. Podemos estar seguros de que las diagonales de un rectángulo son iguales porque ello se desprende de la definición de rectángulo dada por los matemáticos.

HIPOCRATES: ¿Eso significa, Sócrates, que nuestro paradójico resultado es realmente cierto y que podemos tener un conocimiento mucho más verdadero sobre objetos no existentes -por ejemplo sobre los objetos de la matemática- que sobre los objetos raales de la naturaleza?. Pienso que ahora veo la razón de ello. Las nociones que nosotros mismos hemos creado son por su misma naturaleza completamente conocidas para nosotros, y podemos encontrar toda la verdad acerca de ellas porque no tienen otra realidad fuera de nuestra imaginación. Sin embargo, los objetos que existen en el mundo real no son idénticos con nuestra imagen que nos hacemos de ellos, la cual es siempre incompleta y aproximada, por lo tanto nuestro conocimiento sobre estos objetos reales no puede ser nunca completo o absolutamente verdadero.

SOCRATES: Esa es la verdad, mi joven amigo, y tú la has establecido mejor de lo que lo he podido hacer yo.

HIPOCRATES: El mérito es tuyo, Sócrates, porque me has conducido hasta comprender estas cosas. Veo ahora que no solamente Teeteto estuvo acertado en decirme que debo estudiar matemática si deseo obtener un conocimiento cierto, sino también porqué lo estuvo. Sin embargo, si me has guiado con paciencia hasta ahora, por favor no me abandones, porque aún una de mis preguntas, de hecho la más importante, no ha sido respondida.

SOCRATES: ¿Cuál es la pregunta?

HIPOCRATES: Por favor, Sócrates, recuerda que llegué hasta tí y buscando consejo si debo estudiar matemática. Tú me has ayudado a darme cuenta que la matemática y solamente la matemática puede darme la clase de conocimiento profundo que deseo. Pero cuál es la utilidad de ese conocimiento? Es claro que si se obtiene algún conocimiento sobre el mundo existente, aún si ese conocimiento es incompleto y no es lo suficiente certero, es, sin embargo, de valor para el individuo así como para el estado. Aún en el caso en que se obtiene algún conocimiento sobre objetos tales como las estrellas, pueden ser útiles, por ejemplo en la navegación nocturna. ¿Pero cuál es la utilidad del conocimiento sobre objetos que no existen como los que nos ofrece la matemática? Aún si es completo y más allá de toda duda ¿Cuál es la utilidad del conocimiento en lo concerniente a objetos que no existen en realidad?

SOCRATES: Mi querido amigo, estoy casi seguro que conoces prueba.

HIPOCRATES: Por Hércules, yo no conozco la respuesta. Por favor, ayúdame.

SOCRATES: Bien, tratemos de encontrarla. Hemos establecido que los conceptos de la matemática son creados por los matemáticos. Dime, ¿ello quiere decir que los matemáticos eligen sus conceptos arbitrariamente como les plazca?

HIPOCRATES: Como te he dicho, no sé aún mucho sobre matemática. Pero me parece que el matemático es tán libre de elegir los objetos de su estudio como el poeta es libre de elegir los personajes de su obra, y así como el poeta inviste a sus personajes con cualquier cualidad que le plazca, del mismo modo el matemático provee a sus nociones con las propiedades que él desea.

SOCRATES: Si ello fuera así, existirían tantas verdades matemáticas como matemáticos. ¿Cómo explicarías entonces nociones y problemas?. ¿Cómo explicas que, como ocurre a menudo, matemáticos que viven muy distantes el uno del otro y no tienen ningún contacto descubren independientemente las mismas verdades?. Nunca he escuchado que dos poetas escribieran el mismo poema.

HIPOCRATES: Nunca he escuchado algo semejante. Pero recuerdo que Teeteto me dijo algo acerca de un teorema muy interesante que él descubrió sobre las distancias inconmensurables. El mostró esos resultados a su maestro, Teodoro, quien a su vez tenía una carta de Arquitas en la cual estaba contenido el mismo teorema casi palabra por palabra.

SOCRATES: En poesía eso sería imposible. Tú ves que hay un problema. Pero continuemos. Cómo explicas que matemáticos de diferentes países puedan habitualmente coincidir sobre la verdad, mientras que sobre cuestiones que conciernen al estado, por ejemplo, los persas y los espartanos tienen puntos de vista bastante opuestos de los nuestros aqui en Atenas, y, además nosotros a menudo no estamos de acuerdo unos con otros.

HIPOCRATES: Puedo responderte la última cuestión. En asuntos concernientes al estado, todos están interesados personalmente, y esos intereses particulares están a menudo en contradicción. Es por ello que es difícil llegar a un acuerdo. Sin embargo, a los matemáticos los mueve solamente el deseo de encontrar la verdad.

SOCRATES: ¿Quieres decir con ello que los matemáticos tratan de enconctrar una verdad que es completamente independiente de su propia persona?

HIPOCRATES: Así es.

SOCRATES: Pero entonces estábamos equivocados al pensar que los matemáticos eligen los objetos de su estudio según sus propios deseos. Me parece que el objeto estudiado tiene cierta clase de existencia la cual es independiente de su persona. Debemos resolver este nuevo dilema.

HIPOCRATES: No se por donde empezar.

SOCRATES: Si tú tienes aún paciencia, intentémoslo juntos. Dime, Cuál es la diferencia entre el marino que encuentra una isla deshabitada y el pintor que encuentra un nuevo color nunca usado antes por pintor alguno?.

HIPOCRATES: Pienso que al marino puede denominárselo un descubridor y al pintor un inventor. El marino descubre una isla que existía antes que él, solamente que no se conocía, mientras que el pintor inventa un nuevo color que antes no existia en absoluto.

SOCRATES: Nadie podría responder mejor a la pregunta. Pero dime,¿el matemático que encuentra una nueva verdad, la descubre o la inventa?.¿Es un descubridor como el marino o un inventor como el pintor?

HIPOCRATES: Me parece que el matemático es más parecido a un descubridor. El es un osado marino que navega el desconocido mar del pensamiento y explora sus costas, islas y remolinos.

SOCRATES: Muy bien expresado, y estoy completamente de acuerdo contigo. Desearía agregar solamente que en menor grado el matemático es también un inventor, especialmente cuando crea nuevos conceptos. Pero todo descubrimiento debe tener, en cierto sentido, un inventor también. Por ejemplo, si un navegante desea llegar a lugares que otros predecesores no pudieron alcanzar, debe construir un barco que sea mejor que los barcos usados por los otros marinos. Los nuevos conceptos inventados por los matemáticos son como los nuevos barcos que llevan al descubridor más lejos en el gran mar del pensamiento.

HIPOCRATES: Querido Sócrates, tú me has ayudado a encontrar la respuesta a una pregunta que me parecía muy difícil. La principal aspiración de un matemático es explorar los secretos y enigmas del mar del pensamiento humano. Ellos existen independientemente de la persona del matemático, aunque no de la humanidad considerada como un todo. El matemático tiene cierta libertad en inventar nuevos conceptos como herramientas, y me parece que él pueda hacerlo a discreción. Sin embargo, no es enteramente libre para hacerlo porque los nuevos conceptos tienen que ser útiles para su trabajo. El marino puede también construir a cualquier clase de barco a su antojo, pero, por supuesto, estaría loco si construyera uno que se rompiera en mil pedazos con la primera tormenta. Pienso que ahora todo está claro.

SOCRATES: Si todo lo ves claramente, trata nuevamente de responder la pregunta: ¿Cuál es el objeto de la matemática?.

HIPOCRATES: Hemos llegado a la conclusión de que además del mundo en que vivimos, existe otro mundo, el mundo del pensamiento humano, y el matemático es el intrépido marino que explora ese mundo, no retrocediendo ante problemas peligrosos y aventuras que esperan por él.

SOCRATES: Mi amigo, tu vigor juvenil me estremece, pero lamento que en el ardor de tu entusiasmo te pasen desapercibidas ciertas cuestiones.

HIPOCRATES: ¿Cuáles son esas cuestiones?

SOCRATES: No deseo contrariarte, pero presiento que tu interrogante principal no ha sido aún respondida. No hemos respondido a la pregunta: ¿Cuál es la necesidad de explorar el maravilloso mar del pensamiento humano?

HIPOCRATES: Tú tienes razón, querido Sócrates, como siempre. ¿Pero dejarás de lado tu método esta vez y me dirás la respuesta de inmediato?

SOCRATES: No, mi amigo, aún cuando pudiera, no lo haría y es por consideración hacia ti. El conocimiento que alguien obtiene sin trabajo es casi despreciable para él. Comprendemos cabalmente sólo aquello que -quizá con alguna ayuda- encontramos nosotros mismos, del mismo modo como la planta puede usar solamente al agua que ella absorbe del suelo a través de sus propias

HIPOCRATES: Está bien, continuemos nuestra búsqueda por el mismo método, pero ayúdame con una pregunta.

SOCRATES: Volvamos al punto donde habíamos establecido que el matemático no trata con el número de ovejas, barcos u otros objetos existentes, sino con los números propiamente dichos. ¿No piensas tú, sin embargo, que lo que los matemáticos descubren como cierto para los números puros es valedero también para los números de los objetos existentes?. Por ejemplo, el matemático encuentra que 17 es un número primo. Por lo tanto, ¿no es cierto que no puedes distribuir 17 ovejas a un grupo de personas dando a cada una el mismo número, a menos que ellas sean exactamente 17?.

HIPOCRATES: Por supuesto, es cierto.

SOCRATES: Bien, y ¿sobre geometría? ¿No puede aplicarse en la construcción de casas, para hacer un tiesto o para calcular la cantidad de granos que puede contener un barco?.

HIPOCRATES: Por supuesto, puede aplicarse, aunque me parece que para los propósitos prácticos del artesano no es necesario mucha matemática. Las reglas simples ya conocidas por los amanuenses de los faraones de Egipto son suficientes para la mayoría de estos casos, y los nuevos descubrimientos a los que se refirió Teeteto con tanto fervor ni son usados, ni se necesitan en la práctica.

SOCRATES: Quizá no de momento, pero pueden ser utilizados en el futuro.

HIPOCRATES: Yo estoy interesado en el presente.

SOCRATES: Si tú deseas ser un matemático, debes darte cuenta que trabajarás principalmente para el futuro. Ahora, volvamos a la cuestión principal. Vimos que el conocimiento sobre otro mundo distinto del real, el mundo del pensamiento, respecto a cosas que no existen en el sentido usual de la palabra, puede ser utilizado en la vida diaria para responder preguntas acerca del mundo real. ¿No es esto sorprendente?

HIPOCRATES: Más que eso, es incomprensible. Es realmente un milagro.

SOCRATES: Quizá no sea tan misterioso y si abrimos la corteza de esta cuestión, podemos encontrar una auténtica perla.

HIPOCRATES: Por favor, querido Sócrates, no hables con acertijos como una pitonisa.

SOCRATES: Dime entonces, ¿te sorprendes cuando alguien que ha viajado por países lejanos, que ha visto y experimentado muchas cosas, retorna a su ciudad y utiliza su experiencia para dar buenos consejos a sus conciudadanos?

HIPOCRATES: En absoluto.

SOCRATES: ¿Aún si los países que el viajero ha visitado están muy distantes y habitados por una clase muy diferente de personas que hablan otras lenguas, que adoran otros dioses?

HIPOCRATES: Tampoco en ese caso, porque hay mucho de común entre pueblos diferentes.

SOCRATES: Dime ahora, si hemos llegado a la conclusión de que el mundo de la matemática es, a pesar de sus particularidades, en algún sentido similar a nuestro mundo real, ¿aún encontrarías milagroso que la matemática pueda aplicarse al estudio del mundo real?

HIPOCRATES: En este caso no, pero no veo ninguna analogía entre el mundo real y el mundo imaginario de la matemática.

SOCRATES: ¿Ves aquella roca al otro lado del río, donde el río se ensancha para formar un lago?

HIPOCRATES: La veo.

SOCRATES: ¿Y ves también la imagen de la roca reflejada en el agua?.

HIPOCRATES: Ciertamente la veo.

SOCRATES: ¿Dime entonces, cuál es la diferencia entre la roca y su reflejo en el agua?

HIPOCRATES: La roca es una pieza sólida de materia dura, se calienta bajo el sol. Si tu la tocas, sentirás que es áspera. La imágen reflejada no puede tocarse; si pongo mi mano sobre ella, solamente tocaré el agua fría. En particular, la imagen reflejada no existe realmente; es una ilusión, nada más.

SOCRATES: ¿No hay nada en común entre la roca y su imagen reflejada?

HIPOCRATES: Bueno, en un cierto sentido, la imagen reflejada es una verdadera representación de la roca. El contorno de la roca, aún sus pequeños desniveles, son visibles claramente en la imagen reflejada. Pero qué más? ¿Quieres decir que el mundo de la matemática es la imagen reflejada del mundo real en el espejo de nuestro pensamiento?

SOCRATES: Tú lo has dicho, y muy bien.

HIPOCRATES: Pero ¿Cómo es ello posible?

SOCRATES: Veamos cómo se han desarrollado los conceptos abstractos en matemática. Hemos dicho que el matemático trata con números puros, y no con los números de los objetos reales. Pero,¿crees tú que alguien que no ha contado nunca objetos reales puede entender la noción abstracta de números?. Cuando un niño aprende a contar, cuenta primero guijarros y palitos. Solamente si sabe que dos guijarros y tres guijarros son cinco guijarros y análogamente para palitos o monedas, está en condiciones de comprender que dos y tres son cinco. La situación es esencialmente la misma con la geometría. El niño llega a la noción de espera a través de experiencias con objetos redondos como pelotas, por ejemplo. La humanidad ha desarrollado todas las nociones fundamentales de la matemática en forma similar. Esas nociones cristalizan a partir del conocimiento del mundo real, y por lo tanto no es sorprendente sino bastante natural que ellas lleven las marcas de su origen, así como los niños se parecen a sus padres. Y exactamente como los niños cuando crecen son el apoyo de sus padres, así cualquier rama de la matemática, si está suficientemente desarrollada, se convierte en una herramienta muy útil para explorar del mundo real.

HIPOCRATES: Ahora está bastante claro para mi cómo el conocimiento de los objetos no existentes del mundo de la matemática puede ser utilizado en la vida diaria. Me has prestado un gran servicio ayudándome a comprenderlo.

SOCRATES: Te envidio, querido Hipócrates, porque yo aún me pregunto sobre algo que desearía resolver. Quizás tú puedas ayudarme.

HIPOCRATES: Lo haría con placer, pero lamento que te burles de mi nuevamente. No me avergüences solicitándome ayuda; pero, dime francamente cuál es el asunto que he pasado por alto.

SOCRATES: Lo verás por ti mismo si tratas de resumir los resultados de nuestra discusión.

HIPOCRATES: Bien, cuando estuvo claro por qué la matemática es capaz de dar un conocimiento cierto sobre el mundo diferente al que vivimos, acerca del mundo del pensamiento humano, la cuestión que nos quedaba pendiente era la utilidad de ese conocimiento. Hemos encontrado que el mundo de la matemática no es nada más que un reflejo en nuestro pensamiento del mundo real. Esto permite que todo descubrimiento sobre el mundo de la matemática nos dé alguna información sobre el mundo real. Estoy completamente satisfecho con esta respuesta.

SOCRATES: Si te digo que la respuesta es aún incompleta, lo hago no porque quiera confundirte, sino porque estoy seguro que tarde o temprano tú te plantearás la misma pregunta, y me reprocharás el no haberte llamado la atención sobre el punto. Tu me dirías: "Dime, Sócrates, ¿Cuál es el sentido de estudiar la imagen reflejada, si puedo estudiar el objeto mismo?

HIPOCRATES: Tienes toda la razón, es una pregunta obvia. Tú me puedes confundir totalmente con pocas palabras y puedes derribar con una pregunta aparentemente inocente todo el edificio que he construido con mucho trabajo. Por supuesto, yo habría respondido que si nosotros podemos observar el objeto original, no tiene sentido mirar la imagen reflejada. Pero estoy seguro que esto muestra que nuestra analogía falla en este punto. Ciertamente existe una respuesta, pero no sé cómo encontrarla.

SOCRATES: Tu conjetura es correcta, la paradoja surgió porque tenemos muy cerca el símil de la imagen reflejada. Una analogía es como un arco si tú lo tensas demasiado, se rompe violentamente. Desechémosla y elijamos otra. Tú ciertamente sabes que los viajeros y marinos hacen buen uso de los mapas.

HIPOCRATES: Lo he experimentado yo mismo. Tú ¿quieres decir que la matemática nos proporciona un mapa del mundo real?

SOCRATES: Sí. ¿Puedes responderme ahora la siguiente pregunta: Qué ventaja habría en mirar el mapa en lugar de mirar el paisaje?.

HIPOCRATES: Eso es claro: usando el mapa podemos escudriñar grandes distancias que podrían cubrirse solamente viajando varias semanas o meses. El mapa no nos muestra todos los detalles, sino las cosas más importantes. Por lo tanto, es útil si deseamos planificar un largo viaje.

SOCRATES: Muy bien. Pero hay algo más que se me ha ocurrido.

HIPOCRATES: ¿Qué es?.

SOCRATES: Hay otra razón por la cual el estudio de la imagen matemática del mundo puede ser de utilidad. Si los matemáticos descubren cierta propiedad del circulo, esto al instante nos da información sobre cualquier objeto de forma circular. Así, el método de la matemática nos permite tratar con diferentes objetos al mismo tiempo.

HIPOCRATES: Qué me dirías sobre las siguientes analogías: Si alguien observa una ciudad desde la cima de una montaña cercana, obtiene una visión más completa que si camina a través de sus sinuosas calles, o si un general observa los movimientos del ejército enemigo desde una colina, tiene un cuadro más exacto de la situación que el soldado en la línea de frente y que ve solamente a aquellos que se le oponen directamente.

SOCRATES: Bien, me has superado en inventar nuevas analogías, pero no quiero quedarme atrás, permíteme también agregar una parábola. Recientemente vi un cuadro de Aristofonte, el hijo de Aglaofonte, y el artistame advirtió: "Si te acercas demasiado al cuadro, Sócrates, verás solamente manchas coloreadas, pero no verás la totalidad de la pintura".

HIPOCRATES: Por supuesto, tenía razón, y tú también cuando no dejaste que diéramos por finalizada la discusión sin antes llegar al meollo de la cuestión. Pero pienso que es tiempo de regresar a la ciudad ya que se acercan las sombras de la noche y tengo hambre y sed. Si aún tienes paciencia, deseo preguntarte algo más mientras caminamos.

SOCRATES: Bien, partamos y puedes hacerme la pregunta.

HIPOCRATES: Nuestra conversación me ha convencido de tal manera que comenzaré a estudiar matemática y te estoy muy agradecido por ello. ¿Pero dime porqué tu mismo no haces matemática?. A juzgar por tu profunda comprensión de la naturaleza y la importancia de la matemática, es mi opinión de que tú sobrepasarías a todos los matemáticos de Hélade, si te concentras en ello. Me sería muy grato seguirte como discípulo en matemática, si me aceptaras.

SOCRATES: No, querido Hipócrates, ese no es mi oficio. Teodoro sabe mucho más de matemática que yo, y no puedes encontrar mejor maestro que él. En relación con tu pregunta de por qué no soy matemático, te daré las razones. No oculto mi alta opinión sobre la matemática. Pienso que nosotros, los helenos, no hemos hecho progresos tan importantes en otras ramas como en matemática, y sólo es el comienzo. Si no nos destruimos unos a otros en guerras absurdas, obtendremos resultados maravillosos como descubridores, así como inventores. Tú me preguntas por qué no me incorporo a las filas de aquellos que desarrollan esta ciencia extraordinaria. De hecho, yo soy una suerte de matemático, aunque de una clase diferente. Una voz interior, tú puedes llamarla oráculo, a quien -siempre escucho cuidadosamente-,me pregutó hace algunos años, "¿Cuál es la fuente de los grandes avances que los matemáticos han hecho en su noble ciencia?" Yo respondí; "Pienso que la fuente del éxito de los matemáticos está en sus métodos, los altos niveles de su lógica, en su esfuerzo, sin compromiso, por la verdad definitiva, su hábito de comenzar siempre por las primeras cosas, definiendo cada noción usada exactamente y de evitar auto-contradicciones". Mi voz interior respondió: "Muy bien, ¿pero tú piensas, Sócrates, que este método de pensamiento y argumentación puede ser utilizado solamente para el estudio de números y formas geométricas?. ¿Porqué no tratas de convencer a tus conciudadanos para que apliquen los mismos niveles lógicos en todos los otros campos, por ejemplo, en filosofía y en política, al discutir los problemas de la vida cotidiana tanto privada como pública?". Desde ese momento, ese ha sido mi objetivo. He demostrado -tú recuerdas, por ejemplo nuestra discusión con Protágoras- que aquellos que piensan que son hombres sabios son en su mayoría necios ignorantes. Todos sus argumentos carecen de una sólida fundamentación, ya que utilizan-contrariamente a los matemáticos- nociones no definidas y solamente comprendidas a medias. Con esta idea he logrado hacerme a casi todo el mundo de enemigo. Eso no es sorprendente por que para todas las personas que son reacias a pensar y vanamente satisfechos de usar términos oscuros, represento un vivo reproche. A la gente no les agrada aquellos que constantemente les recuerdan sus faltas que no son capaces o no desean corregir. Llegarán los días en que esas personas caerán sobre mi para exterminarme.

Pero hasta que llegue ese día, continuaré siguiendo a mi llamado. Tú, sin embargo, dirígete a Teodoro.

SOLUCIONES

Problema (Vol. 3 No. 2).

Determine todas las horas del día en que coinciden las agujas del reloj (por ejemplo a las 12 horas).

Solución: (M.I. Viggiani Rocha, Inst. de Matemática, F.C.E.T. Univ. Nac. Tucumán).

Observamos que las agujas coincidirán a intervalos de tiempo iguales. Denotemos

ω_h (resp. ω_m) = velocidad angular de la aguja horaria, (resp. minutero).

α_h (resp. α_m) = ángulo recorrido por la aguja horaria (resp. minutero).

Se tiene que $\omega_h = \frac{2\pi}{720}$ rad/min, $\omega_m = \frac{2\pi}{60}$ rad/min y en cada instante t, $\alpha_h = \omega_h . t$, $\alpha_m = \omega_m . t$. La próxima coincidencia después de las 12 de la noche (0 hs.) ocurrirá en

$\alpha_h = x$, $\alpha_m = (2\pi + x)$. Luego $t = (2\pi + x)\,\frac{30}{\pi} = x \,.\frac{360}{\pi}$

o sea, $x = \frac{2\pi}{11}$.

Luego $t = \frac{720}{11}$ min = 1 h 5 min 27.27 seg.

Es decir el lapso entre una coincidencia y otra es 1 hora 5 min 27,27 seg. Entre las 0 y las 12 hs, las horas en que hay coincidencia de las agujas son:

1 h	5 min	27,27 seg.	2 hs	10 min	54,54 seg
3 hs	16 min	21,81 seg.	4 hs	21 min	49,09 seg
5 hs	27 min	16,36 seg	6 hs	32 min	43,63 seg
7 hs	38 min	20,90 seg	8 hs	43 min	58,18 seg
9 hs	49 min	25,45 seg	10 hs	54 min	52,72 seg
12 hs.					

------o------

Problema (vol. 3 No. 2).

Un hombre cobra un cheque en un banco. En la calle el hombre nota que el cajero ha intercambiado el valor de los pesos con el de los centavos. Luego de gastar 5 centavos el hombre observa que tiene exactamente el doble del valor original del cheque. Cuál era éste?

Solución (M.J. Viggiani Rocha, F.C.E.T., U.N.Tucumán)

Cheque = x pesos + y centavos. Se tiene que

$$y + \frac{x}{100} - \frac{5}{100} = 2\left[x + \frac{y}{100}\right] \quad \text{Luego } 98\,y - 199\,x = 5$$

El máximo común divisor de 98 y 199 es 1, de donde lo expresaré como combinación lineal entera de estos números: $(-67).98 + 33.199 = 1$, por lo tanto

$- 335.98 - 199.(-165) = 5$, de donde

$$y = -335 + k(-199)$$

$$x = -165 - k.98, \; k \in \mathbb{Z}.$$ Recordando que x e $y \in [0,99]$, determinaré los posibles valores de "k" y en consecuencia de "x" y de "y".

$$0 \leq x \leq 99$$

$$0 \leq -165 - 98\,k \leq 99$$

$$165 \leq -98\,k \leq 264$$

$$-\frac{264}{98} \leq k \leq \frac{165}{98}$$ de donde $-2,69 \leq k \leq -1,68$ y el único valor entero en este intervalo es -2 $k = -2 \Rightarrow y = 63,\ x = 31$. Luego el valor del cheque es \$ 31.63.

-----o-----

Problema (Vol. 2 No. 1).

Pruebe que si $a + b + c = 1$ entonces $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.

Solución: (M.J. Viggiani Rocha, F.C.E.T. U.N. Tucumán)

Se tiene: $(a+b+c)^2 = 1 = (a+b+c)^2 =$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

(pues $2\,ab \leq a^2 + b^2$ y análogamente para 2ac y 2bc).

EL PRINCIPIO DE LOS CASILLEROS

Enzo R. Gentile

Este principio, llamado también: "Pigeonhole Principle". "Dirichlet Schubfachar", "Métode des Tiroirs", establece que, si n objetos han de ser colocados en m casillas y si n es mayor que m, entonces al menos dos objetos irán a una misma casilla. Este principio se usa, inadvertidamente, en muchos razonamientos matemáticos. Quien lo usó explicitamente parece haber sido Dirichlet en la demostración de resultados de finitud en teoría algebraica de números

Veamos algunos ejemplos para ilustrar su aplicación.

1.- Sean $A_1, \ldots, A_8$ números enteros. Afirmamos que hay dos, al menos, que tienen el mismo resto en la división por 7. En efecto, tomamos 7 casilleros correspondientes a los distintos restos en la división por 7. Coloquemos cada número en la casilla que corresponda a su resto en la división por 7. Claramente habrá dos, al menos, que caen en la misma casilla. Esto significa que tienen el mismo resto en la división por 7.

2.- Si se requiere de 11 personas exhibir su documento de identidad habrá dos, al menos, cuyo número de documento tiene la misma terminación. Si en cambio queremos que en un cierto grupo de personas y respecto del número de documento, haya dos con las dos últimas cifras coincidentes, el mínimo número para que esto ocurra con plena certeza, es 101.

3.- En una clase de 30 alumnos hay, por el mismo Principio, al menos dos que nacieron el mismo día de la semana Podemos mejorar este 2? Si, hay con certeza 5 personas que nacieron el mismo día de la semana. En efecto si no hubiera 5 personas, el número máximo sería 4, pero 4 x 7 es menor que 30. El máximo no puede ser 4, lo cual significa que 5, al menos, nacieron el mismo día. Pregunta: Cuántos, al menos, nacieron el mismo mes del año?.

4.- La cantidad de cabellos que puede tener una persona es $\leq$ 300.000. Si la población de una ciudad es 9.000.000 de habitantes, hay por lo menos 30 personas que poseen la misma cantidad de cabellos!.

5.- Sea el conjunto de números 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10. Nos preguntamos cuál es el mínimo número que se debe extraer, de manera tal que contenga al menos un par cuya suma sea 11. Escribamos los pares que suman 11:

$|\underline{1,10}|$ $|\underline{2,9}|$ $|\underline{3,8}|$ $|\underline{4,7}|$ $|\underline{5,6}|$

Si tomamos 6 elementos y colocamos cada uno en el par en que figura, es claro que dos elementos caerán en el mismo par y esos sumarán 11. Entonces 6 es el número mínimo. Por ejemplo si elegimos los números 1,2,3,4,5, ningún par suma 11. Dejamos a cargo del lector probar que si se tiene la progresión aritmética 1,4,7,10,..., 100 entonces todo subconjunto que tenga al menos 20 elementos contiene dos números cuya suma es 104.

6. A una reunión asisten 30 personas. Cada persona estrecha manos con sus conocidos. Eventualmente estrecha mano con ninguno, si no conoce a nadie (algo así como un colado). <u>Se afirma que hay dos personas, al menos, que estrechan el mismo numero de manos.</u>

En otros términos, hay dos personas al menos, que tienen el mismo número de personas conocidas. Para demostrar la afirmación asignaremos a cada persona el número de conocidos presentes.

Los valores posibles son:

0,1,2,..., 29

Observemos que si una persona A no conoce a nadie, o sea, el valor asignado es el 0, entonces ninguna persona B puede conocer a 29 personas!. Por lo tanto el rango de valores es 1,2,..., 29 ó 0,1,..., 28, es decir 29 valores en total. Como se trata de 30 personas, por el Principio de los Casilleros., hay dos personas al menos, que tienen el mismo número de conocidos.

7. Consideremos 5 números naturales compuestos menores de 120. <u>Afirmamos que dos al menos, no son coprimos</u>. Es decir, existe un número primo que divide a ambos.

En efecto, es bien sabido de la Criba de Eratóstenes, que todo número compuesto menor que n es divisible por un primo $\leq \sqrt{n}$. Esto lo suponemos conocido. En nuestro problema, todo número compuesto es divisible por un primo $\leq \sqrt{120} \simeq 10,95$.

Por lo tanto es divisible por algunos de los primos 2,3,5,7. Tratándose de 5 números, dos de ellos son múltiplos del mismo primo!.

Es claro que las mismas ideas muestran que de

7 números compuestos < 200,

8 números compuestos < 360,

..., etc.

hay dos, al menos, que no son coprimos.

8. Sea C un conjunto de diez números naturales menores que 100. Probemos que existen dos subconjuntos disjuntos en C tales que la suma de sus elementos da el mismo valor. En símbolos, existen subconjuntos

$$X, Y \subset C, \; X \cap Y = \phi \qquad \sum_{x \in X} x = \sum_{y \in Y} y$$

Sea, en efecto, para cada subconjunto no vacío $X \subset C$, $v(X)$ el número natural

$$v(X) = \sum_{x \in X} x$$

suma de los elementos de x.

Es claro que, cualquiera sea $X \subset C$,

$$v(X) \leq 90 + 91 + \ldots + 99 = 945.$$

Excluyendo $X = \phi$ y $X = C$ hay en C, $2^{10} - 2 = 1022 > 945$ se sigue que existen dos subconjuntos distintos $X, Y \subset C$ tales que $v(X) = v(Y)$.

Los conjuntos X, Y no tienen porqué ser disjuntos, pero si cancelamos en las sumas $v(X)$, $v(Y)$ los sumandos comunes, obtenemos subconjuntos disjuntos X', Y' tales que $v(X') = v(Y')$.

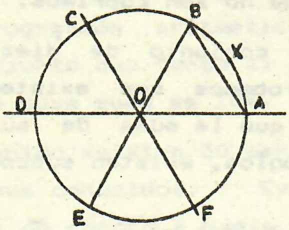
<u>Pregunta</u>: Es cierta la afirmación si C tiene 9 elementos?

9. Veamos una aplicación geométrica, una pequeña

digresión viene a cuenta. El Principio de los Casilleros es un enunciado obvio, esto está claro. Sin embargo lo que no es obvio y es el hecho fundamental vinculado a este principio es, <u>como derivar un problema dado a un problema de casilleros</u>!. La siguiente aplicación es elocuente en este sentido.

Se tiene un círculo de radio 1. Señalaremos en el mismo 7 puntos con la propiedad que la distancia entre dos cualesquiera es mayor o igual a 1. Cuáles son las posibles distribuciones?

Dividamos la circunferencia en seis partes iguales. Esto lo hacemos construyendo el exágono regular A B C D E F



Entonces si 7 puntos distintos yacen en el círculo, 2 al menos caen en el mismo sector. Las posibilidades son:

a. Vértices A y B ó

b. Centro O y punto X en la circunferencia.

En el caso a. los vértices restantes deben yacer en el semicírculo opuesto (al que contiene A y B). No puede haber puntos en el interior de los triángulos OCD, ODE, OEF, OFA. Repitiendo las consideraciones precedentes nos permite concluir que la distribución posible es en los vértices C,D,E,F y <u>el centro O.</u>

La conclusión final es la siguiente: <u>Dados 7 puntos en un círculo de radio 1 con la propiedad que la distancia entre dos puntos no es menor que 1, entonces un punto de los dados es el centro del círculo</u>!.

Estamos de acuerdo que este resultado no era evidente "a priori", pero lo es apenas dividimos al círculo en <u>6</u> partes iguales.

Dejamos a cargo del lector analizar otro ejemplo geométrico a saber: si en un cuadrado de lado 1, fijamos 5 puntos cualesquiera entonces 2 al menos yacen a distancia menor o igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

10. Sean $0 < p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq M$

$0 < q_1 < q_2 < \dots < q_s \leq M$, sucesiones de números enteros.

Supongamos que $r+s>M$ entonces para algunos índices i, j ocurre que $p_i - q_j$. En efecto, es como poner r+s palomas en M casillas. Habrá 2, al menos, que van a la misma casilla, pero como los p son distintos entre sí, al igual que los q_j, deberá ocurrir que $p_i = q_j$ para índices i, j convenientes.

Una aplicación interesante es la siguiente:

Supongamos que un médico receta a una persona la ingestión de un cierto medicamento consistente en 48 píldoras iguales; las mismas deben ser tomadas según las siguientes reglas:

I. Deben tomarse durante 30 días seguidos,

II. Cada día debe tomarse al menos 1,

III. Respetando I y II no se fija el número máximo de píldoras a tomar en cada día.

Por ejemplo: 1, 1, ..., 1, 19 (29 unos) es posible. Se afirma que si $1 \leq k \leq 11$ entonces hay intervalos de días consecutivos en que se ingieren exactamente k píldoras. En el ejemplo precedente esto es claro, en el primero y segundo se ingieren exactamente 2, en el primero, segundo y tercero se ingieren 3; entre el 15 y el 30 se ingieren 35 píldoras. En este ejemplo cualquier $1 \leq k \leq 48$ es posible.

No se afirma que la cota 11 sea la mejor, y no lo es, pero a los fines de la demostración que sigue, utilizando el principio de los casilleros, es una restricción obvia.

Sea p, i = 1,2, ..., 30 la cantidad total de píldoras que se ingirieron hasta el día i, inclusive. Se tiene

$0 < p_1 < p_2 < \dots < p_{30} = 48.$

Por lo tanto, si k satisface $0 < k \leq 11$, es $0 < p_1 + k \leq 11$, es $0 < p_1 + k < p_2 + k < \ldots < p_{30} + k \leq 59$.

Por las consideraciones hechas más arriba (con $M = 59$) se sigue que

$$p_i = p_j + k$$

o sea

$p_i - p_j = k$, luego $j < i$, lo cual dice precisamente que entre el día $j + 1$-ésimo y el i-ésimo se consumieron exactamente k píldoras.

11. Consideremos el conjunto de números naturales de 1 a 100. Sea A un subconjunto que contiene no menos de 51 elementos. <u>Se afirma que A contiene dos números distintos tales que uno es múltiplo del otro.</u>

Notar que si A contiene exactamente 50 elementos el resultado no es válido en general, por ejemplo en

$$A = \{50, 51, \ldots, 99\}$$

ningún número es múltiplo de otro distinto a él. Para demostrar la afirmación consideremos los 50 subconjuntos siguientes, obtenidos a partir de cada k, $51 \leq k \leq 100$ y tomando los sucesivos divisores con mínimo cociente 1.

Por ejemplo:

$A_1 = 100, 50, 25, 5, 1$

$A_2 = 99, 33, 11, 1$

$A_3 = 98, 49, 7, 1$

$A_4 = 97, 1$

$A_{50} = 51, 17, 1$

Afirmemos que todo entero m, $1 \leq m \leq 100$ pertenece a algún A_i. Si $m \geq 51$, está claro. Si $m < 51$, entonces m pertenece a $A_{2^i.m}$, si $2^i m \leq 100$, $2^{i+1}.m > 100$.

Por ejemplo, 34 pertenece a A_{68},

8 pertenece a A_{64}, ...

Entonces cada elemento de A pertenece a (al menos) uno de los conjuntos A_i. Como A tiene 51 elementos, dos elementos distintos pertenecen al mismo conjunto y entonces están en la relación de divisibilidad.

12. Aproximación de números reales por números racionales.

Se trata de resolver el siguiente problema: dado un número real r, encontrar un número racional $\frac{h}{k}$ que constituye una "buena" aproximación de r pero tal que k no sea muy grande!

Más precisamente podríamos decir: dado $n_o \in N$, encontrar una fracción $\frac{h}{k}$ irreducible con $1 \leq k < n_o$, $|r - \frac{h}{k}| < \frac{1}{n_o}$.

Podemos mejorar la desigualdad escribiendo

$$|r - \frac{h}{k}| < \frac{1}{n_o^2} < \frac{1}{n_o}.$$

y entonces el problema es hallar enteros positivos h, k tales que $1 \leq k < n_o$ y $|kr - h| < \frac{1}{n_o}$

Veamos como esto puede lograrse vía el Principio de los Casilleros. Consideremos entonces para cada $r \in R$,

$$[r] \in Z$$

la parte entera de r, definida por el único entero $[r]$ que satisface

$$[r] \leq r < [r] + 1$$

Entonces $r = [r] + (r)$ con $0 \leq (r) < 1$. El número (r) se denomina la parte decimal de r.

Consideremos los números

$$(r), (2r), \ldots, ((n_o + 1).r)$$

pertenecientes al intervalo $[0,1]$. Si dividimos $[0,1]$ en n_o partes, es claro que hay 2 índices

$$i, j, 1 \leq i < j \leq n_o + 1 \text{ tales que}$$

$|(ir) - (kr)| < \frac{1}{n_o}$, o también $|ir - [ir] - jr + [jr]| < \frac{1}{n_o}$

y llamando $j-i=k$, $[jr] - [ir]=h$

$$|h-kr| < \frac{1}{n_o}$$

y claramente $1 \leq k \leq n_o$. Queda por saber si hay una elección de h, k tal que $(h,j) = 1$. Sea $d = (h,k)$, entonces $1 = (\frac{h}{d}, \frac{k}{d})$, $|\frac{h}{d}, \frac{k}{d}| < \frac{1}{n_o . d} \leq \frac{1}{2}$ y entonces $\frac{h}{d}$, $\frac{k}{d}$

resuelven el problema.

Notar que se satisface además

$$|h-kr| < \frac{1}{n_o} < \frac{1}{k}$$

o sea

$$\left|\frac{h}{k} - r\right| < \frac{1}{k^2}.$$

Acabamos de ver que $S(r)$ es no vacío.

Se demuestra en los cursos de teoría de números las siguientes propiedades:

1. Si r es irracional entonces $S(r)$ es un conjunto infinito;
2. Si r es racional, $S(r)$ es un conjunto finito.

Es decir, $S(r)$ es un conjunto finito si y sólo si r es un número racional.

Dejamos a cargo del lector determinar $S(\frac{3}{7})$.

13. <u>Sucesiones</u>.

Sean $a_1, \ldots, a_n$ una sucesión de números reales distintos dos a dos. Sea $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ una subsucesión de la dada.

Al número r lo llamaremos la <u>longitud</u> de la subsucesión. Una sucesión $b_1, \ldots, b_n'$ se dice creciente (resp. decreciente) si para todo

$$1 \leq i < j \leq h \quad \text{es } b_i \leq b_j \text{ (resp. } b_i \geq b_j).$$

El problema que se plantea es el siguiente: dada una sucesión $a_1, \ldots, a_n$ de números reales distintos dos a dos, determinar las posibles longitudes de subsucesiones crecientes o decrecientes máximas.

Por ejemplo si se tiene la sucesión

10,4,1,7,3,13,8,4,11,30,5,17, detectamos la sucesión creciente máxima 1,7,8,11,30, y la sucesión decreciente máxima 9,4,3. Observamos que cualquier subsucesión creciente tiene longitud a lo sumo igual a cinco y toda subsucesión decreciente tiene lóngitud maximal a lo sumo igual a tres.

El resultado a probar es el siguiente.

Si $n = h.k+1$ <u>entonces toda sucesiòn de nòmeros reales distintos de longitud</u> n <u>tiene una subsucesiòn creciente de longitud</u> $h+1$ <u>o una subsucesión decreciente de longitud</u> $k+1$. Veamos una demostración:

Definimos para cada a_i, $1 \leq i \leq h.k + 1$ dos números positivos.,

m_i := Longitud de la sucesión decreciente más larga que comienza en a_i

M_i : = Longitud de la sucesión creciente más larga que comienza en a_i

Por ejemplo en la situación particular anterior, con $a_1 = 9$, $a_2 = 10$, etc.

$$m_1 = 3,\ M_1 = 4$$

$$m_{11} = 2,\ M_{11} = 1$$

Se tienen las relaciones siguientes de verificación inmediata:

$$i < j,\ a_i < a_j \quad M_i > M_j$$

$$i < j,\ a_i > a_j \quad m_i > m_j$$

La conclusión a probar queda satisfecha toda vez que algún $M_i > h$ ó $m_i > k$.

Supongamos, razonando por el absurdo, que $M_i \leq h$ y $m_i \leq k$ cualquiera sea $1 \leq i \leq n$. A cada a_i le asignamos el par (m_i, M_i). Notar que $a_1 \neq a_j \Rightarrow (m_i, M_i) \neq (m_j, M_j)$ por las relaciones anteriores. Hay pues a lo sumo $h.k$ pares distintos (m_1, M_1).

Como la sucesión tiene $h.k+1$ términos, habrá dos elementos $a_i = a_j$, $i \neq j$ que tienen asignado el mismo par $(m_i, M_i) = (m_j, M_j)$, una contradicción!. Por lo tanto la suposición $m_i \leq k$, $M_i \leq h$, cualquiera sea i, es contradictoria y el resultado queda probado..

Se sigue en particular que toda sucesión de $n^2 + 1$ números reales distintos contiene una subsucesión creciente ó una subsucesión decreciente de $n + 1$ términos.

14. Dos circulos concéntricos se dividen en 100 sectores iguales. 50 sectores de cada circulo se pintan de negro y a los otros se los deja blancos. El circulo interior puede girar. Se afirma que <u>hay una posición</u> (rotando el circulo interior) <u>en la cual, al menos</u> 50 <u>sectores se aparean en el mismo color</u> (o sea, hay al menos, 50 coincidencias en color).

Para demostrar esta afirmación numeremos los sectores de color negro del circulo interior de 1 a 50 y hagamos lo mismo con los sectores negros del circulo mayor. Por una rotación podemos aparear el sector interior 1 con los 50 sectores exteriores negros. Podemos indicar estas rotaciones con: $\vec{1,1}$, $\vec{1,2}$, ..., $\vec{1,50}$. Notar que como rotaciones son todas distintas entre sí. Hacemos lo mismo con el sector 2 para obtener $\vec{2,1}$, $\vec{2,2}$, ..., $\vec{2,50}$ etc.. El número total es $50.50 = 2500$.

Hagamos lo mismo con los sectores blancos. Habría otro total de 2500 apareamientos. El total es 5000. Pero estos 5000 apareamientos no son distintos dado que el número total de rotaciones es igual a 100. Habrá pues que colocar 5000 objetos en 100 casillas. Se sigue por el P. de los C. que hay, al menos 50 apareamientos que coinciden con una misma rotación del circulo interior. Esta rotación da lugar a una posición del circulo interior que tiene al menos, 50 coincidencias de color en los sectores de uno y otro circulo.

<u>EJERCICIOS</u>

1. Sea T un triángulo equilátero de lado 1.

a) 5 puntos yacen en T. Probar que por lo menos 2 puntos de los dados yacen a distancia $\leq \frac{1}{2}$.

b) 17 puntos yacen en T. Probar que por lo menos 2 puntos de los dados yacen a distancia $\leq \frac{1}{4}$.

2. Probar que si n objetos han de ser colocados en $m < n$ casilleros entonces $\left[\frac{n}{m}\right]+1$ objetos irán a parar al mismo casillero. $\left[\frac{n}{m}\right]$ denota la parte entera de $\frac{n}{m}$.

3. Probar que en un grupo de 367 personas hay al menos 2 que nacieron el mismo día y mes del año (por ejemplo 30 de noviembre). Y si el grupo es de 366 personas?

4. 750 alumnos de primer año se deben inscribir en exactamente 5 materias de un total de 10. Probar que en cualquier tipo de combinación de cursos, hay un grupo que no tiene más de 2 alumnos inscriptos.

5. Probar que si n+1 personas se sientan en una fila de 2n asientos, al menos, dos personas ocupan asientos contiguos.

6. Dada una sucesión $a_1, \ldots, a_n$ de enteros probar que siempre es posible extraer una subsucesión, la suma de cuyos elementos sea divisible por n (Sug. Considere los números $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots$).

7. Probar que dados 10 enteros consecutivos hay 2 al menos que son coprimos. Y si se trata de 11 enteros consecutivos ó de 9 enteros consecutivos?

8. Probar que, en la división entera por 7, entre
   i. 5 cuadrados enteros, dos al menos tienen el mismo resto;
   ii. 4 cubos enteros, dos al menos tienen el mismo resto;
   iii. 3 sextas potencias enteras, dos al menos tienen el mismo resto.

BIBLIOGRAFIA

Rebman, Kenneth R., The Pigeonhole Principle. Two-Year College Mathematics Jornal, Vol. 10, No. 1, (1979).

SOLUCIONES

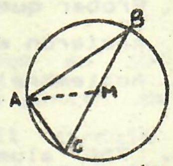
Problema (Vol. 2 No. 3).

Pruebe que en un triángulo rectángulo, la mediana trazada de un vértice a la hipotenusa mide la mitad de lo que la hipotenusa. Dé una demostración usando un conocido teorema sobre el círculo.

Solución: (M.J. Viggiani Rocha, F.C.E.T. U.N.Tucumán)

$\overline{BC}$= hip = 2r   2r = diámetro. $\overline{AM}$ = long mediana

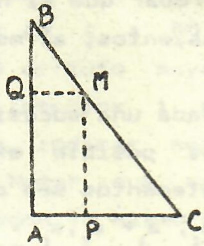
$\overline{AM}$ = r de donde hip = 2 $\overline{AM}$



• Teorema: Todo ángulo inscripto en un arco de circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abarca.

• Corolario: Todo ángulo inscripto en una semicircunferencia es recto.

Una solución alternativa: en la figura,



(1) Los triángulos QMB y PCM son iguales (son semejantes y BM = MC).

(2) Por (1), BQ = MQ = QA.

(3) Por (2) los triángulos BQM y AQM son iguales. Luego AM = BM.

ANUNCIO

En Agosto de 1990, organizado por la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba, se llevará a cabo el X Seminario Nacional de Matemática. El Seminario está principalmente dirigido a jóvenes licenciados y a estudiantes avanzados de la licenciatura en Matemática. Se dictarán 5 ó 6 minicursos a distintos niveles y varias conferencias especializadas. Información precisa se dará en futuros anuncios.

SOLUCIONES

PROBLEMA: Construir con regla y compás un triángulo isósceles del que se conoce la altura y la suma de su base y de uno de los lados restantes.

Este problema fue mencionado por el Dr. Alberto P. Calderón en su conferencia Rey Pastor ofrecida durante la XXXVI Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina. La siguiente solución fue enviada por la Profesora Dolores de Saravia de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Salta.

Usaremos letras minúsculas para designar puntos, ya que es lo que habitualmente se hace hoy en día en los cursos secundarios. En su conferencia, el Dr. Calderón muestra que si el triángulo buscado el el $a\hat{b}c$ de base $\overline{ab}$, es útil construir primero el triángulo isósceles $a'b'c'$ de base $\overline{a'b'}$ igual a la suma dada de base y lado, y con igual altura que la dada; y deja planteado que sólo hace falta luego, determinar el punto a del segmento $\overline{a'b'}$ tal que su distancia a c es el doble de su distancia a a' (escribiremos $2\overline{aa'} \equiv \overline{ac}$); es de este último problema del que nos ocuparemos ahora.

Veamos algunas consecuencias de $2\overline{aa'} \equiv \overline{ac}$ que nos permitirán obtener la construcción pedida. Sea B la bisectriz de los ángulos adyacentes al $a'\hat{a}c$; y σ la simetría axial de eje B. Sean $p = \sigma(a')$ y $q = \sigma(c)$; naturalmente $a = \sigma(a)$. Por ser B bisectriz de $c\hat{a}b'$, tendremos que $q \in ab'$, es decir que a', a y q están alineados; e igualmente, p, a y c están alineados. Además $a'p \perp B$ y $cq \perp B$; de donde $a'p \parallel cq$. por lo tanto, los triángulos $a'\hat{a}p$ y $q\hat{a}c$ son semejantes, y como $2\overline{a'a} \equiv \overline{ac} \equiv \overline{aq} \equiv \overline{qa}$ tenemos que $2\overline{a'p} \equiv \overline{qc}$. Entonces $\overline{a'c}$ y $\overline{pq}$, correspondientes en la simetría no pueden ser paralelas; deberán concurrir en un punto del eje de la simetría, llamémoslo f; se cumplirá $\overline{fc} \equiv \overline{fq}$. Ahora, los triángulos $a'fp$ y $c\hat{f}q$ son semejantes y como $2\overline{a'p} \equiv \overline{cq}$ también será $2\overline{fa'} \equiv \overline{fc}$

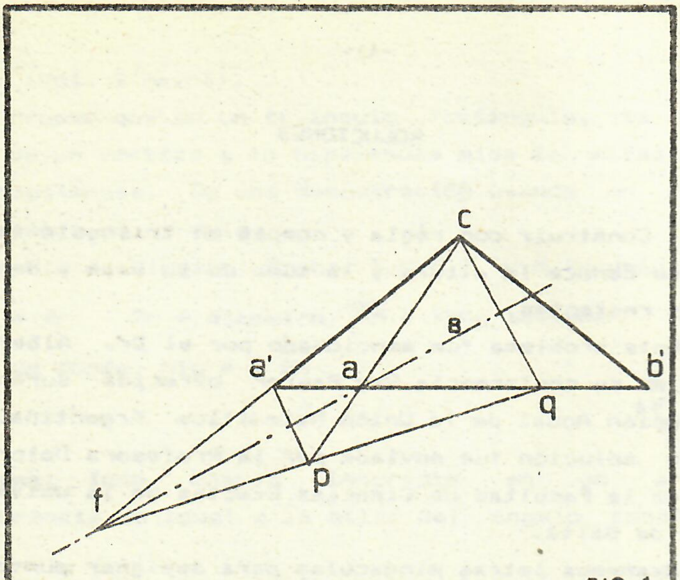


FIG 1

Todo lo anterior nos permite utilizar regla y compás para obtener, dados a',b',c el único punto posible para a.

1) Determinamos f alineado con a' y c, tal que a' sea punto medio de $\overline{fc}$.

2) Determinamos q en la semirrecta de origen a' que contiene ab' y tal que $\overline{fq} \equiv \overline{fc}$.

3) Determinamos p punto medio de $\overline{fq}$.

4) Cortamos la recta $\overline{pc}$ con la recta $\overline{a'b'}$ para obtener a.

Para que realmente a sea solución del problema original deberá ocurrir que el ángulo $c\hat{a}b'$ sea agudo; esto sucederá (puede demostrarse) si y solo si la base $\overline{a'b'}$ es mayor que la altura del triángulo $a'\hat{b}'c'$ desde c; lo cual es natural ya que $\overline{a'b'}$ es la suma de la base ab del triángulo abc más uno de sus lados $\overline{ca}$; y $\overline{ca}$ debe ser mayor que la altura desde c del triángulo $a\hat{b}c$.

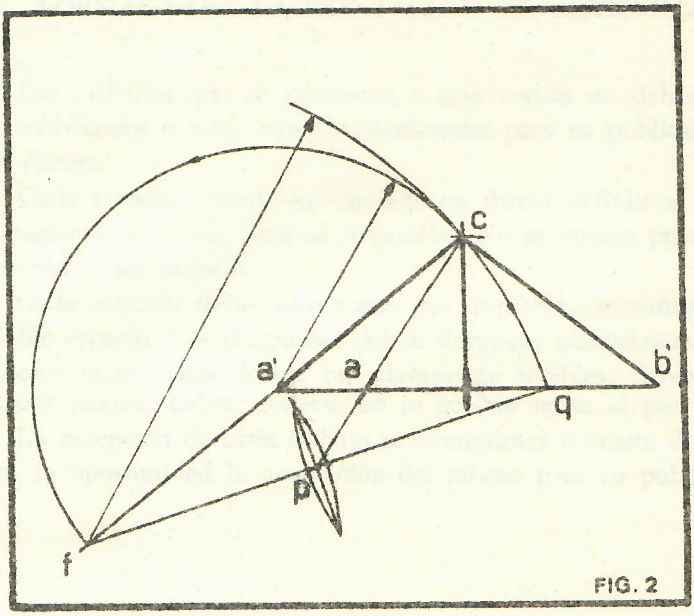


FIG. 2