Revista de Educación Matemática

Registro Nacional de la Propiedad Intelectual N° 168024

ISSN 0326-8780 (versión impresa)

ISSN 1852-2882 (en línea)

https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM

Revista de Educación Matemática

Volumen 32, Nº 3 – 2017

ÍNDICE

En este número también encontrarás curiosidades bajo los títulos *¿Sabías que...?* y *¡Sucesiones al toque!*

Editorial

Con este número cerramos el primer año de trabajo del nuevo Comité Editorial de la *Revista de Educación Matemática*. Durante el mismo iniciamos un proceso de migración de la revista a una plataforma digital que permite el acceso abierto, otorga mayor visibilidad y amplía su alcance. Este cambio de formato y las múltiples opciones que brinda la plataforma nos abre diferentes posibilidades que implican permanentes aprendizajes y desafíos para los editores. Es propósito de este Comité ir realizando cambios graduales en la gestión editorial que permitan agilizar los procesos de recepción y evaluación de las contribuciones. Asimismo pretendemos realizar la indexación de la revista a fin de posicionarla a nivel regional y lograr que los autores interesados vean en ella un espacio valioso para publicar sus artículos originales.

El trabajo en el Comité Editorial ha generado intercambios y diálogos entre dos comunidades que tienen objetos de investigación, tradiciones y culturas de producción y trabajo diferentes: la comunidad matemática y la comunidad de educación matemática. Esta conjunción resulta de gran riqueza y permite que la revista tenga un perfil particular que intentamos reflejar en cada número. El lector podrá encontrar en ella discusiones acerca de problemáticas educativas generales o particulares de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, relatos de experiencias innovadoras o reportes de investigación en educación matemática. Podrá deleitarse con la belleza de la matemática al resolver problemas, sorprenderse con algunos resultados poco conocidos o adentrarse en la vida y producción de algunos científicos que han aportado al desarrollo de la matemática en nuestro país.

Este número es una muestra de la variada producción que publica la revista. El artículo *Límites de las evaluaciones estandarizadas para comprender los desempeños escolares. El caso de los Operativos Aprender en Argentina*, nos invita a considerar diversos aspectos relacionados con la importancia de la evaluación como instrumento para la mejora de la calidad educativa y las limitaciones de la aplicación de pruebas estandarizadas en relación con este objetivo de mejora. Discute en particular las limitaciones del Operativo *Aprender* para conocer el aprendizaje de los estudiantes. De modo complementario, en *Una mirada al Operativo Aprender* se muestra una visión crítica que considera diversas claves de lectura: lo político, lo técnico, lo psicológico, abordando en particular el caso de la evaluación en matemática. Invitamos al lector a contrastar estas miradas con la propia y quizás ensayar nuevos aportes que nos permitan pensar en profundidad en torno a las pruebas estandarizadas como la que se propone en *Aprender*.

Si de la complejidad de las aulas y la evaluación de aprendizajes en el actual sistema educativo, nos adentramos en el mundo de la matemática pura, la revista ofrece el artículo *Números primos: una historia sin fin*, que nos muestra la fascinación que los números primos han provocado entre los matemáticos desde la antigüedad. Esto ha permitido la generación de conjeturas que buscan responder preguntas tales como: ¿es posible conocer cómo se distribuyen los números primos entre los naturales?, ¿cómo generar números primos a través de fórmulas? o ¿cómo determinar la primalidad de un número natural?

Finalmente, en este número recibimos la ”visita” de Julio Rey Pastor, a cien años de su llegada a la Argentina. Preocupado por facilitar la enseñanza de la matemática en el nivel universitario, fue un prolífico escritor de libros de texto. El artículo *Primeros libros de texto universitarios de Julio Rey Pastor en España y Argentina*, destaca esta faceta del matemático y permite ver una muestra de esa producción, que no cesó hasta su desaparición física en 1962. El artículo pone en evidencia que: ”En líneas generales, los libros españoles son más teóricos, dirigidos a matemáticos, mientras que los argentinos son de matemática para ingenieros y científicos”. Asimismo se deja entrever que Rey Pastor desarrollaba diferentes enfoques de enseñanza teniendo en cuenta las carreras hacia las cuales sus textos estaban dirigidos. El reconocimiento del legado de Rey Pastor para la matemática argentina es propicio en el contexto de esta revista y también en el marco del Primer Encuentro Conjunto de la Real Sociedad Matemática Española y la Unión Matemática Argentina (RSME-UMA 2017) a realizarse en Buenos Aires entre el 11 y el 15 de diciembre del corriente año.

Como siempre contamos con la sección de problemas y la reseña de un libro que puede ser de interés para los lectores. Esperamos que la lectura de los diversos aportes que este número de la revista trae, resulte inspiradora para los lectores y produzca reflexiones que puedan derivar en nuevos aportes para la revista. Los estamos esperando.

Mónica Villarreal

Revista de Educación Matemática
Volumen 32, N° 3 (2017), páginas 5 – 18
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

LÍMITES DE LAS EVALUACIONES ESTANDARIZADAS PARA COMPRENDER LOS DESEMPEÑOS ESCOLARES. EL CASO DE LOS OPERATIVOS *APRENDER* EN ARGENTINA

Gonzalo Gutiérrez

El estudio no se mide por el número de páginas leídas en una noche ni por la cantidad de libros leídos en un semestre. Estudiar no es un acto de consumir ideas sino de crearlas y recrearlas.

Paulo Freire

§1. Introducción

La evaluación educativa es uno de los pilares constitutivos del trabajo de enseñar que contribuye a mirar aprendizajes y experiencias de niños, niñas y jóvenes, así como a valorar sus logros y obstáculos en la apropiación de saberes escolares socialmente relevantes. Por ello, la preocupación del Estado por conocer los aprendizajes construidos por los/as estudiantes siempre representa una responsabilidad y oportunidad para apreciar en qué medida se atiende su derecho a acceder a los saberes culturales necesarios para su plena inserción ciudadana. En este sentido, las políticas de evaluación deberían interrogarse sobre un principio básico de justicia: ¿todos los niños, niñas y jóvenes han podido apropiarse de las experiencias y saberes culturalmente valiosos a los que tienen derecho y la escuela pone a su disposición? Atender esta pregunta supone resolver otra que la acompaña en forma tácita referida a la discusión y definición de los dispositivos e instrumentos de evaluación en la escala de los sistemas educativos que pueden brindar información relevante al respecto.

En este artículo analizaremos las limitaciones que posee el uso de la información proporcionada por las evaluaciones estandarizadas para identificar, comprender y reflejar la variedad y complejidad de aprendizajes y experiencias formativas que los estudiantes construyen en la escuela. Para ello, se analizarán algunos problemas de validez que suelen presentarse en las comparaciones entre desempeños escolares de sistemas educativos y contextos sociales muy diferentes al de nuestro país. Ambas cuestiones dan sustento al argumento según el cual no es posible reducir las interpretaciones sobre la calidad de los sistemas educativos a los resultados de las evaluaciones estandarizadas. Finalmente se presentarán algunas características y debilidades políticas, técnicas y pedagógicas que posee el Operativo *Aprender* en Argentina, las discusiones generadas sobre sus resultados y los desafíos pendientes para desarrollar un sistema democrático e integral de evaluación que se configure como insumo de relevancia para el desarrollo de políticas de enseñanza.

§2. Sobran evaluaciones, faltan consensos sobre su función y legitimidad político-pedagógica

Un debate importante viene produciéndose en nuestro país sobre los desempeños escolares, la calidad educativa y los instrumentos que posibilitan obtener información relevante para la toma de decisiones desde las políticas educativas. En este sentido, las pruebas estandarizadas vienen ocupando un lugar creciente en las referencias para analizar los logros y obstáculos del sistema educativo argentino.

Una perspectiva histórica de este asunto permite apreciar que en los últimos 24 años se ha incrementado en forma constante la aplicación de evaluaciones estandarizadas. Entre ellas se destacan el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés) que depende de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), el Tercer Estudio Evaluativo y Comparativo (TERCE) desarrollado desde UNESCO y destinado a estudiantes de nivel primario, así como el Estudio de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS, por sus siglas en inglés) y el Estudio Internacional de Progreso en Comprensión Lectora. Entre las evaluaciones nacionales, desde el año 1993, se encuentran los Operativos Nacionales de Evaluación (ONE) que desde 2016, fueron reemplazados por los *Aprender* y, desde el año 2017 se implementa un nuevo operativo de evaluación, denominado *Enseñar* dirigido a estudiantes del último año de los profesorados de Educación Primaria y Secundaria (Matemática, Lengua/ Lengua y Literatura, Historia, Geografía, Biología, Física, Química e Inglés). También se han desarrollado experiencias provinciales de evaluación en todo el país, por ejemplo, en Córdoba, cuatro operativos de evaluación, tres de ellos entre 1992 y 1994, el restante en 2005.

Las actuales autoridades educativas nacionales vienen planteando la necesidad de construir una cultura evaluativa que permita conocer los aprendizajes de los/as estudiantes, sin advertir que en los hechos, tal cultura ya se encuentra instalada aunque con escasas articulaciones entre el uso de la información brindada por las evaluaciones y el desarrollo de políticas de enseñanza. Por ejemplo, en la provincia de Córdoba, entre los años 1993 y 2017, se desarrollaron por lo menos, 37 evaluaciones estandarizadas a las que se deben añadir las correspondientes a programas nacionales y provinciales implementados en las escuelas que, según Gutierrez (2011), en el año 2010, llegaban a 58. Junto a ellas se encuentran también, las realizadas al interior de las escuelas en el marco de proyectos institucionales y/o curriculares de carácter más específico. Es decir, si sobre algo se ha construido experiencia en nuestro país, es sobre el desarrollo de modelos de evaluación educativa en diferentes escalas atendiendo a múltiples finalidades. En este sentido, es posible sostener la presencia de múltiples dispositivos de este tipo, que desplazan la centralidad del trabajo escolar: enseñar, generando una saturación de información que reduce su relevancia y complejiza el reconocimiento de tendencias en los logros y obstáculos que sobre el desempeño escolar se vienen configurando en nuestro país. Como veremos más adelante, esta situación se refleja en el uso descontextualizado de medidas de tendencia central que al presentar indicadores en porcentajes sin el análisis de su evolución histórica, ni contar con recaudos metodológicos en las comparaciones de rendimientos entre poblaciones estudiantiles con condiciones materiales de vida y de escolarización muy diferentes entre sí, producen interpretaciones con problemas de validez en algunos casos y/o sesgadas en otros, que reflejan el estado de situación existente en torno a los desempeños escolares.

La multiplicidad y periodicidad de evaluaciones estandarizadas no supone ni implica consenso sobre los alcances que poseen sus conclusiones, su validez metodológica y ni sus implicancias para la construcción de políticas públicas. Por ello, gran parte de los conflictos en torno a ellas se debe a que el interés por conocer el lugar que ocupa nuestro país en el ranking de participantes o las comparaciones de desempeño entre provincias, suele articularse con la intencionalidad de cuestionar la relevancia de la educación pública poniendo bajo sospecha el trabajo docente y cuestionando la democratización producida durante las últimas décadas en nuestro país con las políticas de inclusión educativa.

§3. Los límites de las evaluaciones estandarizadas

La publicación de resultados sobre evaluaciones estandarizadas suele generar confusiones importantes porque no pueden, ni es su propósito, reflejar todo lo que se espera de la escuela ni lo que cotidianamente en ella se realiza. Usualmente, ellas no pueden dar cuenta de la presencia de experiencias participativas; ni de la construcción de confianza y dignidad que el trabajo docente posibilita a diario con miles de estudiantes y sus familias, ni de los diferentes modos de relación con el saber y la cultura generados por medio de la literatura, el arte y los múltiples recursos tecnológicos que se encuentran disponibles en las escuelas. Tampoco de la manera en que los niños/as y jóvenes construyen, en diálogo con el trabajo escolar, prácticas de ciudadanía significativas; y son justamente estas cuestiones, que también forman parte de los objetivos centrales del curriculum escolar y constituyen el núcleo que otorga identidad a la escuela, las que no logran ser reconocidas ni visibilizadas en las evaluaciones estandarizadas.

La mayoría de las evaluaciones estandarizadas toman como referencia cuatro áreas de conocimiento: Lengua (o lectura y escritura), Ciencias Naturales (o simplemente Ciencias), Matemática y Ciencias Sociales. Aquí opera una reducción del curriculum a lo evaluable que actúa como legitimante de lo enseñado, pues en la escuela se enseñan muchos más objetos y áreas de conocimiento que varían en su ubicación al interior de la trayectoria escolar teórica de cada sistema o sub-sistema educativo, por lo que en numerosas ocasiones, se construyen interpretaciones sobre desempeños escolares y calidad educativa a partir de dispositivos que evalúan cuestiones no necesariamente enseñadas por igual y/o en el mismo tramo escolar, en cada región, provincia y/o país. Así por ejemplo, PISA toma como referencia a jóvenes de 15 años sin considerar si asisten a la escuela secundaria, el año en que lo hacen e incluso si se encuentran en el nivel primario, por lo que sus resultados permiten hablar de los desempeños escolares de un grupo etario entre los países participantes, pero no de la calidad de sus sistemas educativos. Una segunda reducción se produce de la evaluación en su sentido más amplio, a la medición de indicadores limitados para comunicar la variedad de aprendizajes y experiencias construidas por los estudiantes. Este asunto adquiere relevancia, porque numerosos desempeños escolares no pueden conocerse por medio de las evaluaciones estandarizadas y requieren de otros tipos de instrumentos. Así por ejemplo, es creciente el número de escuelas que anualmente participan en Ferias de Ciencia nacionales y provinciales; también se incrementan las distinciones y reconocimientos de estudiantes argentinos en diferentes exposiciones internacionales, tanto por sus logros académicos, como por sus innovaciones tecnológicas; es cada vez más frecuente el desarrollo de proyectos escolares que promoviendo el desarrollo de prácticas solidarias, atienden como parte de sus procesos formativos diferentes necesidades de sus comunidades[1]. Las evaluaciones estandarizadas tampoco pueden dar respuestas a interrogantes nodales para comprender la calidad de un sistema educativo, tales como los siguientes: ¿cómo se mide el cuidado de la infancia y la adolescencia realizado por los docentes? ¿Cómo se miden las experiencias significativas que posibilitan a los niños/as y jóvenes sentirse parte de la escuela, la sociedad y el mundo? ¿Cómo se miden las relaciones pedagógicas que han posibilitado en estos años a miles de estudiantes volver a la escuela o mantenerse en ella, asumiéndose como sujetos de derecho, con plenas capacidades de aprender? Claramente no son este tipo de evaluaciones el mejor modo de responder estas preguntas y sus resultados en forma aislada, no pueden reflejar la calidad de un sistema educativo. Por ello, es posible sostener que una política de evaluación sin perspectiva pedagógica, asentada sólo en la preocupación de medir y controlar, difícilmente pueda generar medidas que construyan mejores oportunidades de aprender para los niños, niñas y jóvenes.

§4. Problemas de validez en la comparación de los desempeños escolares entre países

Una de las cuestiones más problemáticas en algunos análisis de tendencias educativas, consiste en el uso fragmentario y descontextualizado de estadísticas que habilitan a realizar afirmaciones políticas y pedagógicas que carecen de sustento. En este sentido, es frecuente observar comparaciones lineales de logros y aprendizajes educativos entre países, sin considerar las diferentes tradiciones de escolarización existentes, sus puntos de partida y los modos de concebir la relación Estado-educación reflejados en políticas de financiamiento educativo, formación docente, provisión de recursos para la enseñanza y apoyo al trabajo de enseñar que en conjunto, configuran condiciones de enseñanza muy

[1] Así por ejemplo, en 2014, el Ministerio de Educación de la Nación reconoció con el premio presidencial Escuelas Solidarias a cuatro escuelas de Buenos Aires, Córdoba, La Pampa y Jujuy. En ese mismo año, durante la Feria Provincial de Ciencias realizada en la provincia de Córdoba, 34 proyectos escolares pasaron a la instancia nacional en Tecnópolis. Algunos de los proyectos que fueron seleccionados para participar de la instancia nacional, fueron los siguientes: IPET 44, de Miramar, con un trabajo sobre abono orgánico para el cultivo de trigo. Su propuesta consistía en usar desechos orgánicos para generar biogás y biolito, un abono particularmente provechoso para el trigo; IPET 85 junto con la escuela República de Italia (Estación General Paz) donde los/as estudiantes desarrollaron un proyecto sobre caramelos de goma de nopal (cactus del norte cordobés) logrando determinar que ese era el alimento nutritivo más aceptado por sus compañeros; El IPEM 274, de Huinca Renancó, indagó en el sexting (el envío por celular de fotos y mensajes con contenidos sexuales). Allí, estudiantes y docentes estudiaron el alcance que tiene esta práctica en las escuelas de la localidad y analizaron sus riesgos; El IPET 80 de Río Cuarto desarrolló un sistema automático que permite encender y apagar la iluminación de un espacio.

diferentes entre países y regiones. En este sentido, es posible apreciar que en los últimos años, numerosos estudios comparan la educación argentina con la de Chile y Finlandia omitiendo dar cuenta de las profundas diferencias entre nuestros sistemas y tradiciones escolares. Así, por ejemplo, si bien es cierto que Chile posee indicadores de desempeño escolar mejores que Argentina, también es verdad que cuenta con uno de los sistemas más desiguales del mundo, según un informe de la OCDE en 2004 (ver OCDE, 2015) y otro de UNESCO en 2013 (Muñoz, 2013). La segregación se produce en el vecino país por dos vías: el pago complementario que las familias realizan por su educación, de modo tal que a mayor ingreso, mayores posibilidades de pagar y obtener una mejor educación; y el hecho de que las escuelas pueden elegir a sus estudiantes. De este modo, quienes pertenecen a sectores de menores ingresos no pueden romper con los círculos de reproducción de la pobreza. Por su parte en Argentina, la educación pública (de gestión estatal y privada) es solventada en un 95 % por el Estado y solo el 5 % por las familias (González Olguín, 2015), además, la escuela pública estatal no puede generar políticas de selección de su matrícula, porque, es un pilar del derecho educativo, es para todas/os.

Las comparaciones con Finlandia, también omiten cuestiones relevantes para comprender las diferencias existentes entre su sistema educativo y el nuestro. En el país nórdico, el 92 % de su sistema es público, se comienza a ir a la escuela a los 7 años, no tiene pobreza infantil, hace más de 30 años universalizó el acceso a la escolaridad, su sistema educativo es menor al de la provincia de Buenos Aires, posee consensos de décadas sobre los horizontes de sus políticas públicas y el financiamiento educativo se logra con una presión tributaria del 43 % (año 2012, según OCDE). A diferencia de esta realidad, en nuestro país, la inversión educativa se logra con una presión tributaria del 29,5 % (año 2012, según OCDE); hace 15 años, la mitad de la población infantil estaba en condiciones de pobreza, en 30 años se ha duplicado el acceso a la secundaria pasando del 42 % al 85 % en 2013 (SITEAL) y las políticas públicas poseen una alta inestabilidad por las disputas entre posiciones que consideran al conocimiento como un bien de mercado, que debe regirse por la lógica de la oferta y la demanda y quienes lo entienden como un derecho y al Estado como responsable de generar las condiciones para que todos los niños/as y jóvenes puedan acceder a él, independientemente de su nivel socioeconómico, género o región en que se encuentre.

Con el desempeño escolar en Argentina también suelen realizarse comparaciones problemáticas. Así por ejemplo, es cierto que en las evaluaciones de PISA se pasó a ocupar uno de los últimos lugares entre los países participantes, pero también lo es que Argentina posee la tasa más alta de escolarización, por encima de Chile, Uruguay y Brasil (SITEAL, 2017). Es cierto que en los ONE 2013, entre un cuarto y un tercio de los estudiantes del último año de la secundaria tuvieron un desempeño bajo, pero también hay que señalar que dicho porcentaje fue menor en tres de las cuatro áreas evaluadas al de 2010. Lo mismo ocurrió con los datos arrojados por el *Aprender* 2016 donde, como veremos más adelante, salvo en dos áreas de la escuela secundaria (Matemática y Ciencias Naturales), en el resto, el desempeño mejoró con respecto a 2013. Es a partir de estos datos, que sostenemos la imposibilidad de interpretar adecuadamente la situación de los desempeños escolares sin una perspectiva histórica que permita reconocer su tendencia. Algo similar ocurre cuando se describe como una situación de crisis terminal el ciclo básico de la escuela secundaria donde se encuentran los desempeños escolares más bajos y los mayores porcentajes de repitencia y abandono escolar, sin considerar que es en ese tramo de escolaridad donde se ha producido la mayor incorporación de jóvenes que constituyen la primera generación familiar en acceder a dicho nivel educativo y por tanto, donde se concentran los desafíos más complejos de resolver pedagógicamente (Gutierrez et al., 2014). Estas diferencias en los criterios de interpretación muestran la relevancia de analizar el modo en que los datos se utilizan, porque de allí se ponen en juego cuestiones nodales sobre la validez política, pedagógica y metodológica de las interpretaciones que sobre ellos se realizan.

§5. El Operativo *Aprender*: características y limitaciones de un nuevo dispositivo de evaluación estandarizado

En noviembre de 2017 el Ministerio de Educación Nacional implementó dos operativos nacionales de evaluación. Uno dirigido a quienes cursan el nivel primario y secundario; y otro a estudiantes del último año de los profesorados de Educación Primaria y de Educación Secundaria (Matemática, Lengua/ Lengua y Literatura, Historia, Geografía, Biología, Física, Química e Inglés). *Aprender* en un caso y *Enseñar* en el otro, se configuran como nuevos mecanismos para evaluar desempeños estudiantiles con fuertes cuestionamientos públicos por sus problemas de validez y los débiles consensos académicos y sociales con los que se han construido.

Tanto *Aprender* como *Enseñar*, se inscriben en lo previsto por la Ley de Educación Nacional n°26.206 donde se sostiene que la evaluación de los aprendizajes es una obligación del Estado prevista en el artículo 85 inciso d), según el cual el Estado debe implementar "...una política de evaluación concebida como instrumento de mejora de la calidad de la educación" con la finalidad de "... garantizar las condiciones materiales y culturales para que todos/as los/as alumnos/as logren aprendizajes comunes de buena calidad, independientemente de su origen social, radicación geográfica, género o identidad cultural". Según lo establecido en el artículo 94 de dicha ley, es responsabilidad del Estado a través de su Ministerio de Educación, desarrollar e implementar "...una política de información y evaluación continua y periódica del sistema educativo para la toma de decisiones tendiente al mejoramiento de la calidad de la educación, la justicia social en la asignación de recursos, la transparencia y la participación social". La Ley de Educación Nacional plantea una perspectiva amplia sobre la evaluación al señalar en su artículo 95 que:

> *Son objeto de información y evaluación las principales variables de funcionamiento del sistema, tales como cobertura, repetición, deserción, egreso, promoción, sobre-edad, origen socioeconómico, inversiones y costos, los procesos y logros de aprendizaje, los proyectos y programas educativos, la formación y las prácticas de docentes, directivos y supervisores, las unidades escolares, los contextos socioculturales del aprendizaje y los propios métodos de evaluación.*

Es decir, las evaluaciones de desempeños en Argentina se encuentran inscriptas en regulaciones según las cuales la calidad educativa no puede reducirse a lo medido por pruebas estandarizadas y sus resultados deben analizarse en relación a otras variables como terminalidad, repitencia, sobreedad, etc.

En tanto la educación es un bien público, las decisiones sobre finalidades, modalidades y destinatarios de la evaluación que pretenda conocer el estado de la calidad educativa, no pueden construirse unilateralmente y requieren de la participación de múltiples actores institucionales, tales como universidades públicas y privadas, representantes de la sociedad civil, organizaciones sindicales docentes, investigadores. Así lo plantea el artículo 98 de la Ley de Educación Nacional donde se señala:

> *Créase el Consejo Nacional de Calidad de la Educación, en el ámbito del Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología, como órgano de asesoramiento especializado, que estará integrado por miembros de la comunidad académica y científica de reconocida trayectoria en la materia, representantes de dicho Ministerio, del Consejo Federal de Educación, del Congreso Nacional, de las organizaciones del trabajo y la producción, y de las organizaciones gremiales docentes con personería nacional.*

Las funciones principales de este Consejo Nacional de Calidad son:

> *a) Proponer criterios y modalidades en los procesos evaluativos del Sistema Educativo Nacional. b) Participar en el seguimiento de los procesos de evaluación del Sistema Educativo Nacional, y emitir opinión técnica al respecto. c) Elevar al Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología propuestas y estudios destinados a mejorar la calidad de la educación nacional y la equidad en la asignación de recursos. d) Participar en la difusión y utilización de la información generada por dichos procesos. e) Asesorar al Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología con respecto a la participación en operativos internacionales de evaluación.*

En este marco, resulta problemático el bajo consenso que poseen *Aprender* y *Enseñar* elaborados en soledad por las autoridades nacionales de educación.

En 2017, el Operativo *Aprender* continúa evaluando a estudiantes de nivel primario y secundario, aunque con algunas diferencias con respecto a su versión 2016 (Cuadro 1) por las áreas y grados considerados en nivel primario. Una cuestión novedosa en los cambios introducidos, consiste en la evaluación a estudiantes de 4^{to} grado de primaria en producción lectora. Por su parte el Operativo *Enseñar* se presenta como algo diferente y nuevo con respecto a las tres evaluaciones sobre diseño curricular implementadas entre los años 2011-2015. A continuación, nos centraremos en algunas características y limitaciones que poseen las evaluaciones estandarizadas denominadas *Aprender*.

Operativo de evaluación	Niveles y grados/años	Tipo de muestra	Áreas evaluadas
Aprender 2016	3^{er} grado Primaria	Muestral	Lengua y Matemática
	6^{to} grado Primaria	Censal	
	2^{do} y 3^{er} años Secundaria	Muestral	
	5^{to} y 6^{to} años Secundaria	Censal	Lengua, Cs. Sociales y Cs. Naturales
Aprender 2017	4^{to} grado Primaria	Muestral	Prodcción escrita
	6^{to} grado Primaria	Censal	Ciencias Sociales y Ciencias Naturales
	6^{to} años Secundaria	Censal	Matemática y Lengua
Enseñar 2017	Estudiantes del último año de institutos de formación docente que estén realizando su residencia en profesorados de Educación Primaria y de profesorados de materias del ciclo básico de Educación Secundaria (Matemática, Lengua / Lengua y Literatura, Historia, Geografía, Biología, Física, Química e Inglés).	Muestra representativa (público-privada). Algunas jurisdicciones eligieron realizar una muestra censal, otras muestral. Quedan excluidos institutos con menos de 15 estudiantes en 4^{to} año.	Comunicación escrita (lectura y escritura) y criterio pedagógico (planificación de la enseñanza, implementación de estrategias de enseñanza y evaluación de aprendizajes).

Cuadro 1. Operativos *Aprender* 2016-2017 y Enseñar 2017 según destinatarios, tipo de muestra y área evaluada

§6. Las limitaciones del Operativo *Aprender* como insumo para conocer los aprendizajes estudiantiles

Las evaluaciones denominadas *Aprender* han tenido numerosos cuestionamientos por problemas metodológicos, perspectivas pedagógicas e intencionalidades políticas. En documentos oficiales se sostiene que aunque las recomendaciones internacionales en torno a evaluaciones estandarizadas sugieren una periodicidad de dos o tres años que eviten la saturación de información, se ha optado por su aplicación anual. Su fundamento es la ”...necesidad de recrear una dinámica que nos vuelva a conciliar con instancias evaluativas...” (Documento Marco Aprender 2016). De este modo, el control y la medición de resultados toman forma como marcas identitarias de este nuevo dispositivo de evaluación.

Metodológicamente, se observa un cambio significativo entre los ONE y *Aprender*. En el primero de ellos, los desempeños se clasificaban en torno a tres categorías: Alto, Medio y Bajo, mientras que en *Aprender*, se lo hace en cuatro: Avanzado, Satisfactorio, Básico y por debajo del Básico. En este cambio, cada categoría informa sobre niveles de desempeño diferentes, no sobre saberes, ello hace que no sea válido establecer agrupamientos entre ellas para dar cuenta de tendencias en el desempeño. Este nuevo modo de informar la producción de los/as estudiantes da cuenta de un problema conceptual aún no despejado metodológicamente: si las categorías informan sobre desempeños, es decir, lo que pueden o no hacer los/as estudiantes, ello no implica que lo hagan sobre sus aprendizajes, porque el saber no necesariamente se reduce al hacer. Esta ambigüedad se expresa en el corte establecidos entre categorías, donde el Básico se define como una proporción del 25 % por debajo de la categoría Satisfactorio sin que pueda precisarse a qué tipo de desempeño ni saberes remite esta diferencia. El análisis de *Aprender* como instrumento de evaluación permite apreciar limitaciones similares a las que en otros tiempos tuvieron los ONE, al dar cuenta de los aprendizajes estudiantiles a partir de la medición de logros en solo cuatro áreas del curriculum escolar, sin considerar otros campos de conocimiento, ni indicadores de desempeño alternativos producidos en el marco de la participación creciente de escuelas en Ferias de Ciencias nacionales y provinciales; el desarrollo de proyectos innovadores de escuelas técnicas; experiencias de trabajo comunitario realizados a lo largo y ancho del país por parte de miles de niños y niñas con sus docentes. Se invisibilizan así, aprendizajes valiosos construidos en espacios como jornada extendida, talleres de escuelas técnicas, Centros de Actividades Juveniles o programas provinciales tales como el Programa de Inclusión y Terminalidad donde el gobierno de la provincia de Córdoba ha destinado importantes esfuerzos para la reinserción educativa de miles de jóvenes.

Como instrumento de evaluación, *Aprender* invisibiliza dimensiones centrales del aprendizaje y planos del trabajo de enseñar sostenidos por los docentes en función de demandas específicas que al respecto construye la misma política pública por medio de los ministerios provinciales de educación. Una mirada comparativa con respecto a los ONE donde se aplicaban evaluaciones en 3^{er} grado y 6^{to} grado de la escuela primaria y $2^{do}/3^{er}$ año y $5^{to}/6^{to}$ año de secundaria, muestra que en *Aprender* 2017 se reducen los años a evaluar, al no incluir 3^{er} grado de primaria, ni $2^{do}/3^{er}$ año de secundaria, brindando de este modo, menos información sobre los aprendizajes estudiantiles en el punto más crítico de la escolaridad secundaria (primer ciclo) que es donde se ubican las mayores dificultades y problemáticas en la enseñanza y convivencia escolar. Pero además, en primaria, *Aprender* 2017, alterna las áreas evaluadas incluyendo Ciencias Sociales y Naturales y omitiendo Matemática y Lengua, sin que queden claros los criterios metodológicos en que se funda dicha decisión, aunque todo hace pensar que se evaluarán en adelante de forma bianual.

Por otro lado, la eliminación de ítems abiertos en *Aprender*, con respecto a los ONE, genera otro tipo de reducción pedagógica, al excluir de la evaluación contenidos y competencias vinculados con las posibilidades de describir, explicar y argumentar. Esta opción por trabajar solo con ítems cerrados (múltiple opción) representa un retroceso en la calidad de la información que puede brindar sobre los aprendizajes. Las respuestas de ítem cerrado no permiten conocer si las respuestas adecuadas corresponden a comprensiones genuinas de los estudiantes o al azar por haber acertado en la opción elegida. Pero tampoco permiten generar hipótesis sobre los modos de razonamiento, sus características y las dificultades que presentan para resolver adecuadamente las opciones presentadas.

De este modo, los resultados del *Aprender* pueden informar sobre cuántos estudiantes contestaron bien o mal las preguntas planteadas, pero no sobre los aprendizajes que han construido.

La opción de presentar solo ítems cerrados de múltiple opción representa un retroceso en las formas de construir información sobre los aprendizajes logrados por niños, niñas y jóvenes. Durante los últimos años, escuelas y docentes vienen desarrollando proyectos pedagógicos promovidos por el propio Estado como políticas curriculares y de enseñanza que posibiliten a los estudiantes "leer el mundo y transformarlo" por medio de descripciones, interpretaciones, argumentaciones, explicaciones, desarrollando hipótesis sobre diferentes aspectos de la relación con el saber. Sin embargo, las evaluaciones *Aprender* privilegian un modo de evaluar que excluye la consideración sobre estos aprendizajes, que es donde mayor esfuerzo se viene realizando desde el trabajo de enseñar. De este modo, al no preverse preguntas abiertas se pierde la posibilidad de conocer las fortalezas y debilidades que presentan los aprendizajes estudiantiles, pero también se reducen las posibilidades de elaborar a partir de los resultados obtenidos, orientaciones para la enseñanza y aportes para el desarrollo de políticas de formación docente continua.

Las evaluaciones *Aprender* comienzan a condicionar la enseñanza, al hacer que poco a poco, esta empiece a organizarse por lo privilegiado en las evaluaciones y no por la relevancia curricular de aquello que se decide transmitir en la escuela. En Córdoba y en el país, por "recomendaciones de las autoridades", cada vez más escuelas destinan tiempo de enseñanza a preparar a sus estudiantes en los modos de responder las actividades de simulación publicadas en páginas oficiales del Ministerio de Educación y Deportes de la Nación. Se condiciona de ese modo las respuestas que pasan a ser el resultado de un "entrenamiento" previo y la enseñanza deja de tener como horizonte, la distribución de bienes culturales para comenzar a centrarse en que los resultados de las evaluaciones "den bien". Este efecto se condice con lo planteado en documentos que señalan "...la regularidad del operativo permitirá incorporar la evaluación en el calendario escolar, planificar acciones basadas en los resultados de operativos y fomentar una cultura de difusión y uso de información para la mejora" (Documento Marco Aprender 2016). De este modo, la enseñanza corre el riesgo de quedar subordinada a la lógica de la evaluación, que deja de ser pensada como insumo para conocer y comprender los aprendizajes alcanzados por los niños, niñas y jóvenes y se transforma en un dispositivo de control, medición y comparación de resultados entre estudiantes, escuelas, provincias y regiones, que dan lugar de hecho (aunque no se lo enuncie de ese modo), a la elaboración de rankings, donde unos/as están mejor que otros. Complementariamente, este modo de asumir la evaluación, tiende a instrumentalizar y despolitizar el sentido del trabajo de enseñar, de modo tal que los docentes comienzan a ser concebidos como aplicadores de instrumentos diseñados externamente.

Finalmente, podemos señalar que en las evaluaciones *Aprender*, la meritocracia se hace lugar: Se sostiene en los documentos oficiales que: "En el caso de los estudiantes de $5^{to}/6^{to}$ que desean estudiar carreras vinculadas a la docencia, se les dará la opción de dejar sus datos personales para participar de un proceso de selección para un programa de becas". Es decir, la historia del desempeño escolar comienza a funcionar estigmatizantemente, porque poco a poco la escuela corre el riesgo de transformar las diferencias de rendimiento académico en diferencias de oportunidades sociales.

§7. Los resultados del *Aprender* 2016 en debate

Las controversias en torno al *Aprender* se trasladaron a la lectura de sus resultados. En marzo de 2017, en medio de un conflicto nacional con los gremios docentes por la no convocatoria a paritarias docentes previstas por la Ley de Educación Nacional, las autoridades nacionales presentaron los resultados del operativo de evaluación implementado en octubre de 2016. En su interpretación de los datos obtenidos, se planteó un escenario de crisis educativa al sostener que casi el 70 % de los estudiantes de nivel secundario no podían realizar operaciones básicas de Matemática y que algo similar ocurría en Ciencias Naturales al agrupar los desempeños ”por debajo de Básico y Satisfactorio” que ya hemos señalado no es válido metodológicamente. Pero además, se realizó una comparación entre *Aprender* y ONE 2013, sin compatibilizar las categorías utilizadas en ambas evaluaciones. Cuando meses más tarde se realizaron los procedimientos técnicos que permiten comparar los resultados de ambas evaluaciones, pudo verse que la situación educativa es muy diferente a la anunciada a comienzos del ciclo escolar.

Es verdad que los desempeños escolares deben mejorar y están lejos de lo que quisiéramos como sociedad. Pero también, que la comparación del Operativo *Aprender* 2016, con el ONE 2013, refleja en términos generales, una mejora de los desempeños escolares. Según el ”Informes de resultados *Aprender* 2016”, en nivel primario (Cuadro 2) puede apreciarse que tanto en 3^{er} grado como en 6^{to} grado, en Lengua y Matemática, el porcentaje de estudiantes con niveles de logro Avanzado y Satisfactorio creció entre ONE 2013 y *Aprender* 2016 y se redujo el de estudiantes en ”Por debajo del nivel básico”.

Desempeño	**Primaria 3^{er} grado**				**Primaria 6^{to} grado**			
	Lengua		*Matemática*		*Lengua*		*Matemática*	
	2013	**2016**	**2013**	**2016**	**2013**	**2016**	**2013**	**2016**
Avanzado	34	41	12	12	23,6	32,3	12,3	19,7
Satisfactorio	25	21	47	51	35	34,5	39,4	38,9
Básico	26	22	18	22	23,7	18,7	26,5	23,4
Por debajo del nivel básico	14	16	22	15	18	14,7	21,8	18

Cuadro 2. Comparación de desempeños entre el Operativo Nacional de Evaluación 2013 y el *Aprender* 2016 para nivel secundario, en porcentajes. **Fuente**: Elaboración propia en base a datos publicados en Aprender (2016)

En el nivel secundario existe una mayor complejidad pedagógica expresada tanto en el crecimiento de su cobertura en las últimas décadas, como en el hecho de que una proporción importante de quienes acceden a este nivel educativo constituyen la primera generación familiar en lograrlo. Esta mayor complejidad también se refleja en los desempeños escolares. Según el informe de resultados de *Aprender* 2016 en secundaria (Cuadro 3), para $2^{do}/3^{er}$ año área Lengua, puede apreciarse que el porcentaje de estudiantes con niveles de logro Avanzado y Satisfactorio subió levemente entre ONE 2013 y *Aprender* 2016, aunque también lo hizo el porcentaje de "Por debajo del nivel básico". En Matemática se mantuvo el porcentaje de estudiantes con niveles de logro Avanzado y Satisfactorio y se incrementó el de estudiantes en "Por debajo del nivel básico". En $5^{to}/6^{to}$ año Secundaria las áreas Lengua y Ciencias Sociales, muestran que el porcentaje de estudiantes con niveles de logro Avanzado y Satisfactorio subió levemente entre ONE 2013 y Aprender 2016 y se redujo levemente el de "Por debajo del nivel básico". En cambio en Ciencias Naturales aunque creció levemente el porcentaje de estudiantes con niveles de logro Avanzado y Satisfactorio, también se incrementó el porcentaje de estudiantes en "Por debajo del nivel básico". Es Matemática el área más crítica entre las evaluadas en tanto allí el porcentaje de estudiantes con niveles de logro Avanzado y Satisfactorio disminuyó entre ONE 2013 y Aprender 2016 y se incrementó levemente el porcentaje de estudiantes "Por debajo del nivel básico".

Desempeño	**Secundaria $2^{do}/3^{er}$ año**				**Secundaria $5^{to}/6^{to}$ año**							
	Lengua		**Matemática**		**Lengua**		**Matemática**		**C. Naturales**		**C. Sociales**	
	2013	**2016**	**2013**	**2016**	**2013**	**2016**	**2013**	**2016**	**2013**	**2016**	**2013**	**2016**
Avanzado	23	27	5	9	11	9,4	7,4	5,2	3,1	10,1	32,8	34
Satisfactorio	37	35	33	29	39,5	44,2	27,9	24,6	57,2	53,6	23,5	24,9
Básico	26	21	36	28	21	23,4	24,7	29,3	23,8	19,4	24	22,3
Por debajo del Nivel Básico	14	17	27	34	28,5	23	40	40,9	15,9	16,9	19,1	18,8

Cuadro 3. Comparación de desempeños entre el Operativo Nacional de Evaluación 2013 y el *Aprender* 2016 para nivel secundario, en porcentajes. **Fuente**: Elaboración propia en base a datos publicados en Aprender (2016)

El análisis de la comparación entre ONE 2013-*Aprender* 2016, refuerza lo sostenido en un documento de reciente circulación elaborado por CTERA (2017, Los operativos de evaluación "*Aprender* y Enseñar"), donde se sostiene que la comparación entre el ONE 2013 y *Aprender* 2016 corrobora lo que otras evaluaciones (TERCE y PISA, entre ellas) venían mostrando: el nivel educativo en Argentina no ha bajado. Al contrario, hay evidencias de mejora, especialmente en la educación primaria y en secundaria, si bien la mejora se evidencia en algunas áreas (Lengua y Sociales), en Matemática y Naturales se presenta una situación de estancamiento en cuanto a los estudiantes que no alcanzan el nivel básico, ya que estos porcentajes descienden muy levemente. Por ello, es necesario preguntarse en qué medida, la interpretación sesgada de la información surgida del *Aprender* 2016 busca construir una sensación de "catástrofe educativa" que no se deriva de los desempeños estudiantiles. Algo similar ocurre con la comparación de resultados entre quienes asisten a escuelas de gestión estatal y privada. Mientras el gobierno señala que existe una brecha abismal entre ambas, estudios recientes de CTERA (2017) mostraron que al controlar las variables *nivel socioeconómico y disponibilidad de recursos didácticos en las escuelas*, dichas diferencias desaparecen e incluso se invierten, por lo que no es posible sostener que la educación brindada en el sector privado es mejor que la ofrecida en el estatal.

El análisis realizado sobre las evaluaciones *Aprender*, permite sostener que se han construido con escasos consensos político-académicos y que el instrumento implementado tiene numerosos problemas técnico-pedagógicos, porque evalúa lo que la escuela no enseña y de un modo en que la escuela tampoco lo hace. Frente a esta situación cabe preguntarse ¿Qué enseña la escuela? y ¿Si los *Aprender* evalúan en forma diferente a como lo hacen los docentes, en qué radica dicha diferencia? En primer lugar habría que señalar que en las escuelas se enseña aquello que, prescripto en los diseños curriculares, es definido como prioritario por cada una de las jurisdicciones de un modo muy diferente al propuesto por las evaluaciones *Aprender*. Mientras las escuelas enseñan a resolver situaciones problemáticas, las evaluaciones *Aprender* presentan seudo-problemas; mientras los docentes enseñan múltiples modos de argumentar las interpretaciones, explicaciones y sensaciones, *Aprender* presenta actividades cerradas de múltiple opción. Mientras a las escuelas y sus docentes se les demanda promover en sus estudiantes la revisión y reflexión permanente de sus producciones y procesos de aprendizaje, en las evaluaciones *Aprender*, se presentan entre 25/30 actividades para responder en una hora, a razón de dos minutos por pregunta.

§8. Por políticas integrales de evaluación

En la actualidad, a diferencia de décadas anteriores, para nuestra sociedad no resulta indiferente si se aprende o no en la escuela, si los/as estudiantes la concluyen en los tiempos previstos y si logran continuar estudios superiores. Estos desafíos se inscriben en esfuerzos más amplios por construir una sociedad más justa. Por ello, sostenemos que el interés por conocer los aprendizajes logrados por los niños, niñas y jóvenes, es un derecho social y la responsabilidad del Estado es construir dispositivos adecuados para ello. Para ello, resulta central desarrollar políticas integrales y participativas de evaluación que generen información válida y relevante para elaborar dispositivos de formación docente y estructuras de apoyo al trabajo de enseñar que permitan sostener los logros alcanzados y revertir las dificultades encontradas. Esto requiere políticas de evaluación situadas, permanentes, colectivas, formativas, es decir, integrales y no punitivas, donde los aprendizajes constituyan una de las variables principales de análisis, pero no la única.

Referencias

Aprender 2016. *Informe de resultados*. En http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL005597.pdf

CTERA (2017). *Los operativos de evaluación "Aprender y Enseñar"*. Disponible en http://mediateca.ctera.org.ar/files/original/6501cb036c7a188d2c505cd140397211.pdf

Documento Marco Aprender 2016. Ministerio de Educación y Deportes de la Nación. En http://educacion.gob.ar/data_storage/file/documents/las-claves-de-aprender-58bece1277804.pdf

González Olguín, E. (2015). *Tras una intervención global positiva, es momento de afrontar la diversidad en el sistema educativo*. Revista Educar en Córdoba Nº 31, Junio 2015. En http://revistaeducar.com.ar/2015/06/28/tras-una-intervencion-global-positiva-es-momento-de-afrontar-la-diversidad-en-el-sistema-educativo/

Gutierrez, G. (2011). *Dispositivos pedagógicos - Escuela y Enseñanza*. Notas para el análisis de una relación compleja. En S. La Rocca y G. Gutierrez (Comp.), *Escuela, Políticas y Formación Docente. Piezas en juego para una estrategia de transformación* (pp. 22–51). Córdoba: UEPC.

Gutierrez, G., Beltramino, L., Castro González, E., González Olguín, E. & Tosolini, M. (2014). *El nivel secundario en Córdoba. Análisis de sus tendencias y transformaciones*: 2003-2013. Unión de Educadores de la Provincia de Córdoba. Córdoba: Alaya Editorial. http://www.uepc.org.ar/conectate/publicacionespdf/instituto-UEPC-secundaria.pdf

Muñoz, V. (2013). *El derecho a la educación: una mirada comparativa. Argentina, Chile, Uruguay y Finlandia*. Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe (OREALC/UNESCO Santiago). Disponible en http://www.unesco.org/fileadmin/MULTIMEDIA/FIELD/Santiago/images/Estudio-comparativo-UNESCO-vernor-munoz-espanol.pdf

OCDE/CEPAL/CIAT/BID (2015). *Estadísticas tributarias en América Latina y el Caribe* 1990-2013. OECD Publishing, Paris. Disponible en http://dx.doi.org/10.1787/rev_lat-2015-3-en-fr

SITEAL. Sistema de Tendencia Educativas de América Latina. Disponible en http://www.siteal.iipe-oei.org/

Terce. Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE) del Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE), OREALC/UNESCO Santiago. En http://www.unesco.org/new/es/santiago/education/education-assessment-llece/third-regional-comparative-and-explanatory-study-terce/

Gonzalo Gutierrez
Facultad de Ciencias de la Comunicación – Cátedra Didáctica General,
Facultad de Filosofía y Humanidades – Cátedras de Didáctica General e Historia de la Educación Argentina,
*Universidad Nacional de Córdoba (*UNC*).*
Instituto de Capacitación e Investigación de los Educadores de la Provincia de Córdoba (ICIEC-UEPC).
(✉) *gutierrezg61@yahoo.com.ar*

Recibido: *13 de octubre de 2017.*
Aceptado: *27 de octubre de 2017.*
Publicado en línea: *1 de diciembre de 2017.*

Revista de Educación Matemática
Volumen 32, N° 3 (2017), páginas 19 – 27
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

UNA MIRADA SOBRE EL OPERATIVO *APRENDER*

Mónica Villarreal

§1. Operativo *Aprender*: objetivos y críticas

En octubre de 2016 se llevó a cabo el Operativo *Aprender* que aplicó dispositivos de evaluación de aprendizajes en las áreas de Matemática y Lengua en 3^{er} y 6^{to} grados del nivel primario, siendo de carácter muestral en 3^{er} grado y censal en 6^{to} grado. Simultáneamente, se evaluó en Matemática y Lengua en 2^{do} ó 3^{er} año (según la jurisdicción) del nivel secundario, con carácter muestral y, en el último año del nivel secundario (5^{to} ó 6^{to} años, según la jurisdicción), se evaluó con carácter censal en Matemática, Lengua, Ciencias Sociales y Ciencias Naturales. Además de las evaluaciones de aprendizajes también se aplicaron cuestionarios complementarios dirigidos a estudiantes, docentes y directivos a fin de indagar acerca de la organización de la institución educativa, el clima escolar, el perfil del personal directivo y docente, la disponibilidad de bienes y servicios en la escuela, las características de los alumnos, la disponibilidad y uso de tecnologías.

La Ley de Educación Nacional 26.206 sancionada en 2006 prevé, en el Capítulo III (Información y evaluación del sistema educativo), el desarrollo de acciones a fin de generar e implementar una "política de información y evaluación continua y periódica del sistema educativo para la toma de decisiones tendiente al mejoramiento de la calidad de la educación, la justicia social en la asignación de recursos, la transparencia y la participación social" (Art. 94). En este marco jurídico se encuadra el Operativo *Aprender*.

Según se declara en un documento[1] publicado en 2016 por el Ministerio de Educación y Deportes de la Nación en el cual se presentan los objetivos del Operativo *Aprender*, el mismo

> *. . . se implementa para aportar a mayor conocimiento del sistema educativo en su nivel primario y secundario y dotar a toda la comunidad educativa –bajo las condiciones de confidencialidad establecidas por la Ley de Educación Nacional N°26.206– de información relevante sobre los logros y desafíos de aprendizajes, así como de ciertos factores que inciden en el proceso educativo. Un uso efectivo de esta información, redundará en la toma de decisiones que permitan orientar la búsqueda colectiva de la mejora continua de la educación (p. 7).*

[1] https://www.argentina.gob.ar/sites/default/files/las_claves_de_aprender.pdf

Los objetivos propuestos apuntan a un hecho simple: contar con información para la toma de decisiones que mejoren el sistema educativo. De hecho, dos aspectos del Operativo *Aprender* que resultan destacables son la pronta publicación de los resultados de las pruebas en marzo de 2017 y la creación del *Sistema abierto de consulta Aprender 2016*[2]. Este sistema es una herramienta online que permite acceder al procesamiento de las bases de datos surgidas de la evaluación, posibilitando seleccionar y cruzar diferentes variables, elaborar tablas y gráficos y procesar datos a nivel nacional, provincial o municipal. Es decir, los resultados están disponibles, y eso resulta un hecho destacable.

Aprender no es el primero operativo de evaluación nacional masivo. De hecho, entre 1993 y 2013 se desarrollaron periódicamente, en todas las jurisdicciones del país, los Operativos Nacionales de Evaluación (ONE). ¿Qué tuvo de diferente el Operativo *Aprender* que despertó críticas y resistencias entre docentes, padres y estudiantes? Sin pretender ahondar en esta dirección, es necesario recordar que el Operativo *Aprender* y la posterior publicación de sus resultados se desarrolló en medio de profundos conflictos gremiales docentes enmarcados por un "sentimiento de estigmatización" de la educación pública. Una información que puede contribuir a entender algunas de las críticas la brinda la propia Ley 26.206 que en su Artículo 98 crea el Consejo Nacional de Calidad de la Educación, en el ámbito del entonces Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. Este Consejo se proponía como un órgano de asesoramiento especializado, integrado por miembros de la comunidad académica y científica, representantes del Ministerio de Educación, del Consejo Federal de Educación, del Congreso Nacional, de las organizaciones del trabajo y la producción, y de las organizaciones gremiales docentes con personería nacional. Aparentemente, este órgano de conformación plural que tenía injerencia en los procesos evaluativos del sistema educativo fue sustituido por la Secretaría de Evaluación Educativa, creada por decreto en abril de 2016. Esta decisión unilateral e inconsulta fue criticada por los gremios docentes[3] que, de esta manera, quedaban excluidos de participar activamente en la generación de propuestas de evaluaciones del sistema educativo nacional tal como estaba previsto en el Artículo 98 antes mencionado.

Más allá de las críticas dirigidas al Operativo *Aprender* en particular, existen críticas en general hacia los tests estandarizados de opción múltiple que deben resolverse en un período de tiempo corto. Algunas de tales críticas se basan en estudios que han puesto de manifiesto que la aplicación de estos tests puede provocar que estudiantes y docentes se vean expuestos a niveles importantes de estrés o que en las escuelas se dedique tiempo de la enseñanza para "entrenar" a los alumnos en la resolución de este tipo de pruebas, perdiendo de vista los objetivos mayores que se persiguen en la educación y deteniendo el proceso de aprendizaje. En el caso particular de la matemática, estudios recientes (Boaler, 2014) muestran que realizar una prueba bajo la presión de un tiempo acotado genera ansiedad ante la matemática. Esta ansiedad que puede desarrollarse desde edades tempranas provoca logros deficientes y experiencias negativas con la Matemática. Foley et al. (2017) presentan un estudio basado en resultados de la prueba internacional PISA 2012

[2] http://aprenderdatos.educacion.gob.ar/

[3] http://www.ctera.org.ar/index.php/educacion/publicaciones/boletines-e-informacion/item/2290-boletin-n-43-de-la-secretaria-de-educacion-de-la-ctera

(Program for International Student Assessment) que evaluó el desempeño académico de estudiantes de 15 años en 65 países, entre ellos Argentina. Esta prueba incluyó también un estudio del nivel de ansiedad ante la matemática entre los estudiantes que la realizaron. Esto permitió construir un índice de ansiedad. Los resultados de PISA 2012 (ver detalles en OEDC, 2013) muestran que existe una correlación negativa entre el nivel de ansiedad ante la matemática y el desempeño en esta disciplina. Los autores afirman que

> *. . . en 63 de los 64 [sic] sistemas educativos que participaron en PISA en 2012, aquellos estudiantes que reportaron mayores niveles de ansiedad ante la matemática mostraron niveles más bajos de desempaño matemático que sus pares que reportaron niveles bajos de ansiedad ante la matemática (p. 52, traducción propia).*

Asimismo observaron que, en promedio, el aumento de un punto en el índice de ansiedad matemática para un estudiante dado, correspondía a la disminución de 29 puntos (sobre un máximo aproximado de 600 puntos) en su nota de desempeño matemático. Los investigadores también reportan que el vínculo entre el nivel de ansiedad matemática y el desempeño en matemática es bidireccional: un nivel de ansiedad elevado puede provocar un desempeño pobre en matemática y de igual manera un desempeño deficiente en matemática puede provocar ansiedad en el estudiante. Cabe señalar que en 2012 Argentina fue el segundo de los países con mayor nivel de ansiedad ante la matemática. Un dato no menor para considerar al leer los resultados arrojados por el Operativo *Aprender* en matemática.

El educador matemático brasilero Ubiratam D'Ambrosio se manifestó crítico de pruebas estandarizadas nacionales en su país ya en la década del 90. Este investigador afirmaba que la aplicación de tales pruebas era contraria a

> *. . . las nuevas concepciones de educación, tanto desde el punto de vista social como desde el punto de vista cognitivo. Todo lo que existe de moderno en cognición y aprendizaje muestra que los tests estandarizados muchas veces tienen un efecto negativo en el aprendizaje (D'Ambrosio, 1997, p. 64, traducción propia).*

Más adelante se profundizará en los aspectos críticos al considerar los resultados del Operativo *Aprender* en matemática.

§2. *Aprender* y la escuela pública

La información que se publicó en marzo de 2016 en el documento titulado "Aprender 2016. Primer Informe de Resultados" muestra que los resultados más desfavorables se registran en escuelas de gestión pública, en sectores con nivel socioeconómico bajo, entre adolescentes que tienen que trabajar fuera del hogar; hace evidente que los niveles de repitencia son mayores en las escuelas de gestión pública o que quienes fueron escolarizados tempranamente obtienen mejores resultados en la prueba. Es decir, muestra algo que ya se sabe y puede leerse, por ejemplo, en reportes que publica periódicamente el Sistema de Información de Tendencias Educativas en América Latina (SITEAL-UNESCO)[4]: los sectores sociales de mayor vulnerabilidad económica y cultural son quienes ven más vulnerado su derecho a la educación, pero simultáneamente pareciera que el Informe quiere hacer notar que las cosas van mejor en las escuelas de gestión privada. Al mismo tiempo, se muestra que la escuela de gestión pública es la que recibe en mayor porcentaje a estudiantes que provienen de los sectores socioeconómicos más desfavorecidos. Es importante destacar también, que los mayores niveles de repitencia en escuelas de gestión pública son evidencia de un hecho insoslayable: las escuelas de gestión pública reciben alumnos repitentes, mientras que muchas escuelas de gestión privada tienen protocoles de selección para la admisión. En otras palabras, la escuela de gestión pública es la institución que garantiza el derecho igualitario de acceso a la educación para todos los estudiantes, incluyendo a aquellos que tienen que repetir. Así, la escuela pública atiende a la diversidad y a la heterogeneidad que muchas escuelas de gestión privada parecen no contemplar.

§3. *Aprender* y la matemática

Si ahora dirigimos la mirada hacia la matemática, disciplina que interesa a los lectores de esta revista, puede afirmarse que la publicación del primer informe de resultados del Operativo *Aprender*, en marzo de 2017, colocó a la matemática en el ojo de la tormenta. Una vez más era señalada como el área con peores resultados, en particular en el nivel secundario. De todos modos, para quienes hace años trabajamos en el campo de la educación matemática, incluyendo a docentes y directivos, y teniendo conocimiento de la realidad cotidiana de las escuelas, estos resultados negativos no son novedosos y tampoco de exclusivo patrimonio nacional. Sin embargo, el análisis de los mismos se hace difícil sin tener acceso al instrumento aplicado. Hasta el momento, tal instrumento no es de dominio público, aunque sí sabemos que se trata de una prueba estandarizada que contiene 30 ítems de opción múltiple a ser resueltos en un lapso de 60 minutos, con una tolerancia de 10 minutos. Algunos de esos ítems fueron liberados oficialmente, otros divulgados por la prensa. A partir de ellos es posible realizar algunas reflexiones en torno a la prueba, aunque no será posible analizar si el instrumento resulta válido (mide lo que dice medir) y confiable (lo mide bien).

Al momento de elaborar un instrumento de evaluación masiva es necesario considerar y analizar muchos aspectos. Los que siguen son solo algunos referidos al Operativo *Aprender*. En primer lugar, no se puede desconocer que las realidades en donde ese instrumento fue aplicado varían de contexto en contexto. ¿Es posible evaluar con el mismo instrumento a todos los estudiantes del país? Si bien en la elaboración de las pruebas *Aprender* se han tomado como base los NAP (Núcleos de Aprendizaje Prioritarios), no hay que olvidar que cada jurisdicción provincial tiene autonomía para elaborar sus diseños curriculares. Un segundo aspecto se refiere al tipo de prueba aplicada y a las características de los problemas o ejercicios que se plantean en la misma. ¿Resultan familiares para los estudiantes? ¿Los enunciados son claros y sin ambigüedades? ¿Los alumnos están familiarizados con pruebas de opción múltiple? Y en relación a la matemática, ¿qué tipo de conocimientos

[4]http://www.siteal.iipe.unesco.org/etiqueta/21/argentina

es posible evaluar con una prueba de opción múltiple? En este caso las posibilidades de evaluar dimensiones cognitivas de alto nivel y complejidad tales como la creatividad o la habilidad para resolver problemas a través de pruebas de opción múltiple, es limitada.

Teniendo en cuenta esa limitación, encontramos una contradicción entre lo que se pretende evaluar en el Operativo *Aprender* y lo que una prueba de opción múltiple efectivamente permite evaluar. El documento del Ministerio de Educación y Deportes de la Nación[5] que presenta las claves del Operativo a la sociedad, declara que:

> *En el área de Matemática se evalúa una capacidad cognitiva general:* ***la resolución de problemas****. Ello implica la solución de situaciones nuevas para el alumno, en las que necesita usar los conocimientos matemáticos de que dispone. Puede requerir de los estudiantes: reconocer, relacionar y utilizar información; determinar la pertinencia, suficiencia y consistencia de los datos; reconocer, utilizar y relacionar conceptos; utilizar, transferir, modificar y generar procedimientos; juzgar la razonabilidad y coherencia de las soluciones y justificar y argumentar sus acciones. A los efectos de la evaluación, se han considerado capacidades cognitivas específicas incluidas en la resolución de problemas (p. 19, negritas en el original).*

Las capacidades cognitivas específicas, asociadas a la resolución de problemas, a las que hace referencia el extracto anterior son: reconocimiento de datos y conceptos, resolución de operaciones, resolución de situaciones en contextos intramatemáticos y/o de la vida cotidiana y comunicación en matemática. Cabe destacar que un buen desempeño en relación a estas capacidades específicas que, de alguna manera, desagregan la capacidad de resolución de problemas, no garantiza éxito en esta capacidad mayor.

La resolución de problemas es una actividad matemática fundamental e integral que lleva tiempo, requiere del desarrollo de heurísticas y admite múltiples formas de abordaje. En mi opinión, la evaluación de esa capacidad a través de un dispositivo de opción múltiple resulta contradictoria. Basta considerar el último de los ítems enumerados en el documento oficial antes citado, cuando declara que la resolución de problemas puede requerir del alumno: "juzgar la razonabilidad y coherencia de las soluciones y justificar y argumentar sus acciones". ¿Cómo evaluar la capacidad de argumentar a través de una prueba de opción múltiple?

Como ya se dijo anteriormente, el instrumento de evaluación no es de dominio público, sin embargo algunos de sus ítems fueron liberados y esto permite mirar más de cerca la naturaleza de lo que fue evaluado en el Operativo *Aprender*. Para cada uno de los ítems liberados[6] se informa el contenido, la capacidad cognitiva específica y el desempeño que se pretende evaluar con ese ítem. Asimismo se indica cuál es la respuesta correcta y se explicitan las hipótesis de error sobre las cuales se construyeron los distractores.

La Figura 1 muestra uno de tales ítems.

[5]https://www.argentina.gob.ar/sites/default/files/las_claves_de_aprender.pdf

[6]Los ítems liberados pueden consultarse en: http://educacion.gob.ar/secretaria-de-evaluacion-educativa/documentos/195/items-liberados

¿Qué expresión es equivalente a $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3$?
A) $6^{\frac{2}{3}}$
B) $9^{\frac{2}{3}}$
C) $3^{\frac{5}{3}}$
D) $3^{\frac{-1}{3}}$

Figura 1. Ítem de la prueba Aprender para $5^{to}/6^{to}$ año del nivel secundario

En este caso se evalúa el reconocimiento y uso de propiedades de las potencias, pero no es posible afirmar que el ítem esté evaluando la capacidad de resolución de problemas. Los otros ítems liberados tampoco evalúan la resolución de problemas. En principio, los mismos no pueden ser considerados problemas, si por problema consideramos un enunciado que implica la elaboración de un plan para su resolución que no se limite a la aplicación directa de alguna fórmula, propiedad o teorema conocido.

Otros ítems fueron divulgados en diversos medios de comunicación masiva al momento de la publicación de los resultados (¡e inclusive antes de la aplicación de la prueba!). Uno de ellos fue el controvertido enunciado: ¿Cuántas horas hay en una semana de cinco días? Las opciones eran: 168, 120, 300, 420. En las noticias televisivas se reportaba que la mitad de los alumnos no había sabido responder esta pregunta.

Al leer ese enunciado cabe preguntarse qué es lo que se quería evaluar con este ítem. ¿Si los alumnos sabían cuántas horas tiene un día? ¿Si sabían multiplicar? o ¿si se pudieron dar cuenta de lo absurdo del enunciado cuando afirma "una semana de cinco días"? Una semana no tiene cinco días, sino siete. Seguramente hubo algunos alumnos que respondieron 168, que resulta de multiplicar 24 x 7 porque saben que una semana tiene 7 días, pero es probable que esa respuesta haya sido considerada incorrecta. En este caso, la respuesta que podría considerarse como correcta: "no tiene sentido la pregunta formulada", no estaba entre las opciones. En síntesis, se trata de un enunciado que puede resultar sin sentido para el estudiante. Esto nos lleva a uno de los mayores problemas asociados con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática: la falta de atribución de sentido a la actividad matemática por parte de los estudiantes. ¿Cuál es el sentido de lo que se aprende, para qué se lo enseña?

§4. La construcción del sentido: lo que *Aprender* no puede medir

Que el estudiante construya sentido se relaciona básicamente con dos preguntas ¿por qué? y ¿para qué? O sea, se relaciona con la justificación y con la aplicación. En matemática se ha puesto énfasis en técnicas y algoritmos sin comprender el porqué y el para qué, y eso es una parte muy limitada de lo que significa hacer matemática. Hacer foco en la técnica o el algoritmo no convoca al estudiante, no lo invita a pensar matemáticamente, principalmente hoy en día cuando existen tecnologías que hacen ese trabajo. Otro problema importante es el uso del lenguaje matemático y su formalismo que suele introducirse en niveles tempranos de la educación. Puede observarse que algunos estudiantes tienen ideas matemáticas claras, pero no las pueden expresar en el lenguaje matemático.

Un alumno puede comprender el concepto de suma como la reunión de elementos de dos conjuntos y no saber escribir en símbolos esa suma.

Hay muchos estudios a nivel internacional que revelan algunas creencias de los estudiantes en relación a la matemática. Menciono aquí algunas de esas creencias: "la matemática es un conjunto de reglas que deben seguirse para resolver ejercicios y ecuaciones", "los problemas en matemática tienen respuesta única","los problemas en matemática se resuelven en un tiempo corto, si no, no tienen solución" (Schoenfeld, 1992). Quienes producen matemática pueden negar cada una de esas afirmaciones. De hecho, hay problemas matemáticos que demoraron siglos en ser resueltos y otros siguen aún abiertos. Claro, en la escuela no podemos demorarnos tanto para resolver un problema, pero lo que quiero señalar es que es importante dar tiempo para pensar, para "darle vueltas" al problema y, a veces, los tiempos escolares, el programa que apremia, etc. hacen que el desarrollo del proceso de pensamiento matemático sea atropellado. En el caso particular de la prueba del Operativo *Aprender*, que contenía 30 ítems a resolver en 60 minutos, un simple cálculo nos permite afirmar que los estudiantes disponían de un promedio de 2 minutos para resolver cada ítem.

Crear ambientes de aprendizaje donde el estudiante pueda formular preguntas, plantear y resolver problemas, elaborar conjeturas, explicar, justificar, buscar patrones de regularidad en diferentes contextos (matemáticos y no matemáticos), leer e interpretar datos y gráficos, discutir con los compañeros y con el profesor, implica crear un ambiente donde el estudiante pueda dar sentido a lo que hace en la clase de matemática. Estas actividades pueden ser de naturaleza intra-matemática o extra-matemática. Es decir, es posible plantear actividades desafiantes que sean de exploración puramente matemática, pero también actividades en las que la matemática se torne en una herramienta para resolver problemas del cotidiano y para poder hacer una lectura crítica de la realidad. Quiero detenerme en esto último.

En general, en la escuela suelen proponerse problemas de semi-realidad (Skovsmose, 2000) que resultan ficticios para el estudiante y donde lo único que interesa es saber qué operación hay que realizar o qué ecuación hay que plantear para resolverlo, es decir el contexto semi-real del problema es un disfraz para la matemática que se desea aplicar y no juega un papel de relevancia en la resolución. Por ejemplo, cierta vez me encontré con el siguiente problema: Si en un teatro hay 200 filas con 1000 butacas en cada fila, ¿cuántas personas caben en el teatro? La respuesta esperada es 200x1000= 200.000, pero ¡no existe un teatro con esa capacidad! Este enunciado recuerda al de la "semana de cinco días": no tiene sentido. En los problemas de semi-realidad, el contexto no es lo que importa, sino la operación a resolver y ese tipo de problemas no ayuda a conectar la matemática con el mundo real. A menos que, después de resolverlos, se genere una discusión en la clase acerca del "sentido" de ese problema. ¿Está mal trabajar con esos problemas? No, pero hay que tener cuidado con que los enunciados planteen contextos razonables y generar discusiones cuando no lo sean. Pero, quiero decir más que eso, quiero decir que es necesario ampliar el horizonte de problemas en los cuales la consideración del contexto del cual provienen sea esencial para poder entenderlos, abordarlos y resolverlos. Para ello, resulta fundamental involucrar activamente al estudiante en ese proceso. Una manera de involucrarlo es tratando, en clase, problemáticas que sean de interés de los estudiantes y donde la matemática se torne en una herramienta para tratarlas. Para saber qué problemáticas son de interés para los estudiantes hay que darles la oportunidad de manifestarlas, esto es, hay que darles la palabra. Cuando los estudiantes tienen la palabra, aparecen muchos temas que pueden ser fuente de problemas matemáticos para tratar en clases y abordar los contenidos programados. Menciono algunos ejemplos de temas que han surgido entre estudiantes de escuelas secundarias donde hemos trabajado junto a los docentes: la violencia en el fútbol, el gasto de papel en la escuela, el reciclado de basura, el consumo desmedido de electricidad o agua en el hogar, bulimia y anorexia, entre muchos otros. Algunos ejemplos de preguntas formuladas por los propios estudiantes fueron: "¿Cuántas hojas hay que reciclar para salvar un árbol? ¿Cuánto rinde el papel cuando lo reciclas?"

Esta breve digresión en torno a la problemática de la atribución de sentido en matemática muestra que el tipo de actividades que tornan significativa la actividad matemática en el aula está lejos de asemejarse a los enunciados cerrados presentes en las pruebas del Operativo *Aprender*.

En síntesis, y no solo para el caso de la matemática, si alguien sabe por qué y para qué está haciendo algo se produce un proceso de atribución de sentido para ese algo, y eso genera las condiciones para que se produzca aprendizaje. Cabe agregar que con este tipo de trabajo se producen ricas experiencias de aprendizajes que trascienden lo meramente matemático, pero que contribuyen a la educación matemática de los estudiantes. Existen docentes que en sus proyectos áulicos desarrollan propuestas con un profundo sentido de inclusión, que demandan tiempo de preparación e implementación, que requieren del involucramiento de los estudiantes y contribuyen al aprendizaje de la matemática con sentido. Se trata de experiencias únicas y valiosas para los estudiantes, que generan aprendizajes y que una prueba estandarizada como *Aprender* está lejos de poder medir.

Es indudable que hay problemas y dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática que requieren ser atendidos. Es innegable la necesidad de contar con variados instrumentos de evaluación que permitan detectar problemas, delinear soluciones o proponer cambios en el sistema educativo.

A un año de la implementación del Operativo *Aprender* en 2016, acabamos de pasar por un nuevo operativo nacional de evaluación. ¿Cuáles fueron los cambios implementados en el sistema educativo para que esta nueva medición se justifique? Habrá que esperar la publicación de los nuevos resultados para hacer nuevas lecturas.

Referencias

Boaler, J. (2014). *Research suggests that timed tests cause math anxiety*. Teaching children mathematics, 20(8), 469-474.

D'Ambrosio, U. (1997). *Educação matemática: Da teoria à prática*. Campinas, SP: Papirus Editora.

Foley, A., Herts, J., Borgonovi, F., Guerriero, S., Levine, S. & Beilock, S. (2017). *The math anxiety-performance link: a global phenomenon*. Current Directions in Psychological Science, 26(1), 52–58.

Organization for Economic Cooperation and Development (2013). PISA 2012 *results: ready to learn: students' engagement, drive and self-beliefs* (Vol. III). Paris, France: Author. doi:10.1787/9789264201170-en

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6(1), 3–26.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning*, (pp. 334–370). New York: Macmillan.

Mónica Villarreal
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (Famaf),
Universidad Nacional de Córdoba (UNC).
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).
Av. Medina Allende s/n , Ciudad Universitaria (X5000HUA) Córdoba, Argentina.
(✉) mvilla@famaf.unc.edu.ar

Recibido: *5 de octubre de 2017*.
Aceptado: *21 de octubre de 2017*.
Publicado en línea: *1 de diciembre de 2017*.

Revista de Educación Matemática
Volumen 32, N° 3 (2017), páginas 29 – 36
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

NÚMEROS PRIMOS: UNA HISTORIA SIN FIN

Eugenia Bernaschini

Sutilmente escondidos en la infinitud de los números enteros se encuentran unos peculiares numerillos que han movilizado el desarrollo de la matemática por siglos. Su peculiaridad radica en la capacidad que tienen de generar todos y cada uno de los números enteros. Son como las “partículas elementales"de la matemática. Son los *números primos*.

§1. El comienzo de esta historia: Euclides y los Elementos

Euclides fue un célebre matemático griego que vivió durante los años 325 – 265 a.C. Se lo conoce como *El Padre de la Geometría*, y se le atribuye la autoría de una famosa obra, titulada *Elementos*, que recopila gran parte del saber matemático de la época.

Figura 1. Euclides, dibujo en grafito sobre papel de la autora del artículo

Dicha obra es un tratado que consta de trece volúmenes en los cuales se presentan y se desarrollan, de manera sistemática y formal, conceptos de geometría del plano, geometría de los objetos sólidos y algunos resultados de lo que hoy se conoce como Teoría de Números.

Después de la Biblia, los Elementos es el libro con mayor cantidad de ediciones publicadas en la historia [2]. Incluso hoy en día algunas universidades lo siguen utilizando como bibliografía para sus cursos de geometría. Sin lugar a duda, es uno de los tratados más importantes de la historia de la disciplina, y es en donde se aprecia por primera vez el surgimiento de una matemática deductiva y analítica, que busca las verdades universales.

En uno de los tantos tomos de los Elementos, Euclides introduce un tipo especial de números, los *números primos*:

> Un *número primo* es el medido por la sola unidad [1].

En términos modernos, un número primo es un número natural distinto de 1 que sólo es divisible por 1, -1, por sí mismo y por su opuesto. Por ejemplo, 5 es un número primo, pues sólo es divisible por $1, -1, 5$ y -5; en cambio 6 no es un número primo, ya que además de ser divisible por $1, -1, 6$ y -6, es divisible por 2 y -2. A los números que no son primos se los llama *números compuestos*.

Los números primos son los bloques constitutivos de los números enteros. Esto quiere decir que todo número entero distinto de 0, 1 y -1 se factoriza de forma única como producto de números primos, por ejemplo $440 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11$, donde 2, 5 y 11 son números primos. Este hecho se conoce en matemática como *El Teorema fundamental de la Aritmética*, y fue Euclides quien lo demostró por primera vez.

Otra característica importante de los números primos es que existen infinitos de ellos. A estas alturas no creo sorprender al lector al decir que Euclides ya estaba al tanto de este fenómeno, y su demostración va más o menos como sigue:

> *Supongamos que hay una cantidad finita de números primos, y que todos ellos son $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Sea*
>
> $$r = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1.$$
>
> *Como r es un número entero mayor que 1, el Teorema Fundamental de la Aritmética (mencionado más arriba) nos permite afirmar que existe un primo p que divide a r. Como $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son los únicos primos que existen, $p = p_j$ para algún j entre 1 y n, luego p divide a $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$. Pero como p también divide a r, entonces p divide a 1, lo que es un absurdo.* $\square$

§2. Primalidad

Determinar si un cierto número es primo o compuesto se denomina *problema de primalidad*. Y los métodos que dan con la solución son algoritmos conocidos como *test de primalidad*. Existen dos tipos de test, lo deterministas y los probabilísticos. Los test deterministas son capaces de afirmar con absoluta certeza la primalidad de un número dado. En cambio, los test probabilísticos sólo nos indican qué tan probable es que dicho número sea primo, sin ningún tipo de garantía matemática.

El primer test determinista surgió en el siglo II a. C. y se lo conoce como *la criba de Eratóstenes*, en honor a su creador, quien fue un matemático y astrónomo griego contemporáneo a Arquímedes.

La criba de Eratóstenes no sólo permite deducir la primalidad de un número dado n, sino que también encuentra todos los números primos menores que n. Funciona de la siguiente manera:

Se arma una tabla con todos los números comprendidos entre 2 y n. A continuación, se tachan todos los múltiplos de 2. El primer número que no ha sido tachado en la tabla (el 3) será número primo. Luego se tachan todos los múltiplos de ese número (los múltiplos de 3), y se repiten los pasos anteriores hasta el último número menor o igual a $\sqrt{n}$. Si al final del procedimiento el número n no ha sido tachado, entonces será un número primo. Por ejemplo, en la Figura 2, luego de haber tachado todos los múltiplos de los primos menores o iguales a $\sqrt{97}$, vemos que el 97 quedó sin tachar, por lo tanto 97 es un número primo.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97			

FIGURA 2. Criba de Eratóstenes para $n = 97$.

Si bien la criba de Eratóstenes es un método determinista para el análisis de primalidad, es ineficiente cuando se aplica a n grandes, pues requiere de tiempos de cómputo muy prolongados.

Un resultado teórico muy bello que podría ser utilizado como test de primalidad determinista es el llamado *Teorema de Wilson*:

> *Teorema de Wilson:* El número entero $n > 1$ es primo si y sólo si n divide a $(n-1)! + 1$.

Desafortunadamente, al igual que la criba de Eratóstenes, en la práctica, usar el Teorema de Wilson para determinar la primalidad de un número dado es muy costoso computacionalmente.

En el año 2002 un grupo de investigadores desarrolló un test de primalidad determinista con la característica de ser un algoritmo que se ejecuta en *tiempo polinomial*. Sin entrar en detalles técnicos, eso quiere decir que el tiempo que le lleva a una computadora completar el procedimiento es bastante "aceptable". El test se denomina *Test de primalidad AKS* [3], por las siglas de sus diseñadores. Y está basado en una generalización del *Pequeño Teorema de Fermat*:

> *Pequeño Teorema de Fermat:* Sea p un número primo y a un número natural, entonces p divide a $a^p - a$.

Una consecuencia directa del Pequeño Teorema de Fermat es la siguiente:

> *Corolario del PTF:* Si p es un número primo y a es un número natural no divisible por p, entonces p divide a $a^{p-1} - 1$.

Si bien la recíproca del corolario no vale, hay muchos valores de p para la cual sí se verifica. En ese hecho se basa un test probabilístico conocido como *Test de primalidad de Fermat* [4]. Los números en donde falla este test se llaman *Números de Carmichel*, por el matemático Robert Carmichel (1879 - 1967), quien se dedicó a estudiarlos. El número de Carmichael más pequeño es $n = 561 = 3 \times 11 \times 17$, que no es primo. Sin embargo, $a^{560} - 1$ es divisible por 561 para cualquier a coprimo con 561.

§3. Factorización

El *problema de factorización* consiste en escribir cualquier número n como producto de primos, y es aún más complicado que el problema de primalidad. Un algoritmo elemental que se enseña en la escuela primaria (Figura 3) permite factorizar, con papel, lápiz y calculadora, cualquier número n (no muy grande) en producto de primos. Pero, desventajosamente, ese algoritmo requiere conocer previamente todos los números primos menores o iguales a n; además de muuucha paciencia y tiempo.

$$\begin{array}{r|l} 68 & 2 \\ 34 & 2 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

Figura 3. $68 = 2^2 17$.

A diferencia del problema de primalidad, aún no se sabe si el problema de factorización se puede resolver en *computación clásica* en tiempo polinomial. Sin embargo, existe un algoritmo de factorización en tiempo polinomial en lo que se conoce como *computación* *cuántica* [5], que es otro enfoque a la computación, y que se encuentra en sus primeras etapas de desarrollo.

§4. Fábrica de números primos

No nos costó mucho entender que hay infinitos números primos, pero decir quiénes son es otra historia, y una muy difícil. Desde su descubrimiento, los matemáticos han trabajado arduamente en la búsqueda de nuevos números primos. El interés por encontrarlos no nace sólo del reto intelectual que implica, sino también de la utilidad práctica que tienen estos números para, por ejemplo, la criptografía. Los números primos son la base de los sistemas de seguridad informática que protegen las comunicaciones y los datos en Internet.

Una *fórmula de números primos* es una regla que genera estos números, como una especie de fábrica de primos. El desafío del matemático consiste en encontrar fórmulas de números primos que requieran tiempos de ejecución razonables.

Consideremos la siguiente fórmula

$$n^2 - n + 41.$$

Para $n = 1$ obtenemos 41, que es un número primo. Para $n = 2$ da 43, que también es primo. Para $n = 3$ sale 47, que nuevamente es un número primo. ¿Será cierto que para cualquier $n = 1, 2, 3, 4, ...$ número natural $n^2 - n + 41$ es un número primo? A pesar de que para los primeros números naturales la fórmula produce exitosamente números primos, para $n = 41$ falla, pues el número que se obtiene es 41^2, que es claramente un número compuesto.

En la primera mitad del siglo XVII el matemático francés Pierre de Fermat conjeturó que todos los números de la forma

$$F_n = 2^{2^n} + 1,$$

donde n es un número natural, son números primos. Por ejemplo $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ y $F_4 = 65537$ son ciertamente números primos. Sin embargo F_5 ya no es un número primo, pues es divisible por 641. Lo que prueba la falsedad de la conjetura.

Las dos fórmulas arriba presentadas no son fórmulas de números primos, ya que para ciertos valores de n (conocidos y desconocidos) el cálculo no da número primo. Pero entonces... ¿existen fórmulas de números primos? Actualmente sí se conocen algunas, un ejemplo deriva del ya mencionado Teorema de Wilson [6].

Por otra parte, no es difícil probar que no existe una fórmula polinómica

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

de grado $n \geq 1$, tal que $f(k)$ sea un número primo para todo entero k. Sin embargo, se conocen sistemas de *ecuaciones diofánticas* (ecuaciones algebraicas en una o más incógnitas con coeficientes enteros) en 26 variables que pueden ser usadas para obtener números primos [7].

Finalmente, cabe destacar que, a pesar de que existen fórmulas de números primos, las que se conocen hasta la fecha son demasiado complicadas como para ser aplicables computacionalmente. Para fortuna de los matemáticos, aún queda muchísimo por investigar y descubrir :)

§5. Primos con nombre propio

Si bien algunas fórmulas no generan siempre números primos, son muy útiles para encontrar conjuntos pequeños de estos números. Es por ello que se les han asignado nombre propio. Algunos ejemplos:

Primos de Fermat. Estos primos ya se han mencionado más arriba. Son de la forma

$$F_n = 2^{2^n} + 1,$$

para algún número entero n mayor o igual a cero. Curiosamente, los únicos primos de Fermat que se conocen son F_0, F_1, F_2, F_3 y F_4.

Primos de Mersenne. Un primo de Mersenne es de la forma

$$M_p = 2^p - 1,$$

donde p es un número primo. El 7 de enero de 2016 se anunció el descubrimiento del primo más grande que se conoce: es el primo de Mersenne $M_{74207281}$, ¡y tiene más de 22 millones de cifras! [8].

Primos de Sophie Germain. Un número primo p se dice que es de Sophie Germain si $2p+1$ también es un número primo. Estos primos recibieron el nombre de la matemática francesa Sophie Germain (1776 – 1831), quien obtuvo importantes resultados en el área de Teoría de Números.

§6. El Teorema de los Números Primos

Se sabe que hay infinitos números primos, pero... ¿se conoce su distribución entre los números naturales? Hacia el siglo XVIII el matemático alemán llamado Johann Carl Friedrich Gauss se planteó este interrogante. La idea intuitiva de la época era que los números primos se hacen cada vez menos frecuentes cuanto más grandes son. Gauss conjeturó que, si $\pi(n)$ es la cantidad de números primos menores o (iguales a n, entonces $\pi(n)$ es aproximadamente (de forma que precisaremos más adelante) igual a $n/\log n$.

Recién en el año 1896 J. Hadamard y C. de la Vallée Poussin demostraron, de manera independiente pero con técnicas similares, la conjetura de Gauss [9], convirtiéndola en uno de los teoremas más importantes y emblemáticos de la Teoría de Números.

Teorema de los Números Primos:

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}.$$

Aquí, el símbolo ~ se define por $f(x) \sim g(x)$ si y sólo si $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ cuando x tiende a infinito.

§7. ¿Cómo sigue esta historia?

¿Existen infinitos primos de Mersenne? ¿Hay sólo cinco primos de Fermat? ¿Todo número par es la diferencia de dos números primos? ¿Existe un número primo entre n^2 y $(n+1)^2$?... Conjeturas como éstas hay un montón. Una muy famosa, y que algunos matemáticos la califican como el problema abierto más difícil de la historia de la matemática, es la *conjetura de Goldbach*. Fue conjeturada por Christian Goldbach en el año 1742, y sorprendentemente tiene un enunciado muy muy sencillo:

> *Conjetura de Goldbach:* Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos.

Han pasado 275 años y muchas mentes brillantes y aún no se ha encontrado una demostración. Sin embargo, entre los año 2012 y 2013 el matemático peruano Harald Helfgott publicó dos trabajos ([10], [11]) en donde logra probar una versión débil de la conjetura:

> *Conjetura débil de Goldbach:* Todo número impar mayor que 5 puede expresarse como suma de tres números primos.

Notar que la Conjetura de Goldbach implica la Conjetura Débil de Goldbach.

Sobre números primos aún queda muchísimo por descubrir. Numerosas conjeturas y preguntas abiertas son temas de investigación actual. La curiosidad y la fascinación por estos números nos motivan a indagar cada vez más profundo sobre su naturaleza. Sin lugar a duda, esta historia sigue para adelante...

Referencias

[1] Euclides. *Elementos. Libros I-XIII. Vol. I, II y III. Trad. M.L. Puertas Castaños.* Notas: L. Vega Reñón. Madrid: Editorial Gredos. 1991.

[2] Boyer. Carl B. Boyer, Uta C. Merzbach. *A History of Mathematics*. New York: Wiley, 1991.

[3] Manindra Agrawal, Neeraj Kayal, Nitin Saxena. *PRIMES is in P*, Ann. Math. 160, no. 2, (781–793) 2004.

[4] https://es.wikipedia.org/wiki/Test_de_primalidad_de_Fermat.

[5] Peter Shor. *Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer*. SIAM Journal on Computing, Vol. 26,No. 5, (1484–1509), 1997.

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Formula_for_primes.

[7] James Jones, Daihachiro Sato, Hideo Wada, Douglas Wiens *Diophantine representation of the set of prime numbers*. American Mathematical Monthly 83, no. 6, (449–464) 1976.

[8] http://www.bbc.com/news/technology-35361090.

[9] Andrew Granville. *Harald Cramér and the distribution of prime numbers*, Scandinavian Actuarial Journal 1, (12–28) 1995

[10] Harald A. Helfgott *Major arcs for Goldbach's theorem*, 2013, arXiv:1305.2897.

[11] Harald A. Helfgott. *Minor arcs for Goldbach's problem*, 2012, arXiv:1205.5252.

Eugenia Bernanschini
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (Famaf),
Universidad Nacional de Córdoba (UNC).
Av. Medina Allende s/n , Ciudad Universitaria (X5000HUA) Córdoba, Argentina.
(✉) bernasch@famaf.unc.edu.ar

Recibido: *4 de julio de 2017*.
Aceptado: *2 de setimebre de 2017*.
Publicado en línea: *1 de diciembre de 2017*.

Resultó ser fundamental

Nota editorial por Juan Carlos Pedraza

El *Teorema Fundamental de la Aritmética* fue formulado por primera vez por Euclides en el libro IX de los Elementos, aunque la primera demostración completa aparece en las *Disquisitiones arithmeticae* que Gauss publicara cuando éste contaba con 21 años de edad. Parece obvio que cualquier número admite una descomposición única en sus factores primos, pero este resultado es de gran relevancia en la teoría de números y pierde validez en otros sistemas numéricos más generales.

Para muestra de ambas afirmaciones, basta una historia: el 1 de marzo de 1847 la Academia de Ciencias de Francia celebró una de sus reuniones más dramáticas que registra su historia, según nos refiere Simon Singh en su libro *El último teorema de Fermat* (Grupo Editorial Norma, 1999). Tal vez no tanto por los 3000 francos que la Academia había puesto en juego sino más bien por el prestigio de los dos matemáticos que tomaron la palabra ese día: por un lado, Gabriel Lamé (1795–1870) anunciaba desde el estrado que estaba terminando los detalles de una demostración del último teorema de Fermat (el que dice que la ecuación

$$x^n + y^n = z^n$$

no tiene soluciones enteras para $n \geq 3$ y que fuera conjeturado 210 años antes de ese día). Ante este anuncio, pidió la palabra uno de los más encumbrados miembros de la Academia, Agustin Louis Cauchy (1789–1857) para decir que él también estaba terminando de escribir una solución del célebre problema.

Las semanas que siguieron fueron de una ansiedad indescriptible entre la comunidad científica, a la espera de la tan demorada solución. Finalmente, en sendos sobres sellados, ambos matemáticos hicieron entrega de sus soluciones para consideración y análisis de la Academia.

El 24 de mayo, el que habló en la reunión fue el joven Joseph Liouville (1809–1882) quién leyó una comunicación del matemático alemán, también joven, Ernst Kummer (1810–1893). El anuncio de Kummer era demoledor: *ambas soluciones se basaban en la factorización única* que Euclides había enunciado un par de milenios antes. Generaciones de matemáticos habían hecho uso de ella, ¿cuál era el problema entonces? Lamentablemente, tanto Lamé como Cauchy habían usado en sus razonamientos ciertos conjuntos de números complejos donde esta propiedad no es válida. Esta descomposición es única cuando trabajamos con números enteros. Sin embargo, si admitimos números complejos de la forma

$$a + ib\sqrt{5}$$

con a y b enteros (junto con las operaciones de suma y producto entre ellos), resulta que los números

$$2, \quad 3, \quad 1 + i\sqrt{5} \quad \text{y} \quad 1 - i\sqrt{5}$$

resultan "primos" en este contexto (es decir, no tienen divisores no triviales). Por otra parte, también vale que

$$2 \cdot 3 = 6 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5}).$$

Esto muestra que el 6 se expresa de dos formas distintas como producto de números primos.

Esta falta de unicidad dañaba seriamente las soluciones de Lamé y Cauchy. El último teorema de Fermat tuvo que esperar hasta 1994 para ser resuelto (y hasta 1995 para su publicación) por Andrew Wiles.

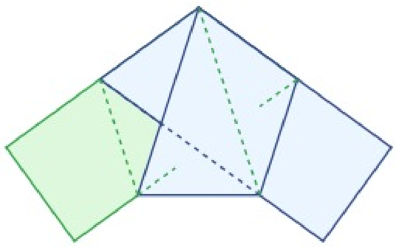
LO DICHO: *bien puesto el nombre de Teorema Fundamental de la Aritmética.*

¿Sabías que...?

por Leandro Cagliero y Ricardo Podestá

¡Se pueden construir pentágonos regulares doblando una cinta rectangular!

Comprobá por vos mismo este sorprendente hecho. Tomá papel y tijeras y fabricate una cinta de bordes paralelos. Ahora, anudando la cinta (¡sí, haciendo un nudo común!) con destreza y cuidado, obtendrás algo así.



Esta curiosidad es simple y bella, pero... ¿por qué funciona? ¿Se te ocurre otra forma "física" de obtener un pentágono regular? Te invitamos a que nos envíes la o las respuestas.

Un pentágono regular es un pentágono que es equilátero y equiángulo. Existen pentágonos equiláteros (respectivamente equiángulos) que no son regulares.

Revista de Educación Matemática
Volumen 32, N° 3 (2017), páginas 39 – 48
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

PRIMEROS LIBROS DE TEXTO UNIVERSITARIOS DE JULIO REY PASTOR EN ESPAÑA Y ARGENTINA

Luis Español González

§1. Introducción

En la biografía de Julio Rey Pastor[1] hay dos periodos bien definidos, el primero hasta 1920 abarca los años de formación y su primera década como catedrático desde 1911, en la que hay que anotar un curso en la Universidad de Oviedo (1912-13) y otros dos becado en universidades alemanas (Berlín 1911-12 y Gotinga 1913-14). Otra ausencia fue por una estancia como profesor invitado en Buenos Aires en 1917-18, durante la cual se gestaron los vínculos que le llevaron de nuevo a Buenos Aires en 1921 para iniciar una alternancia desigual entre España y Argentina, pasando del orden de nueve meses en la capital argentina y tres en la española. La alternancia se interrumpió durante la década que va de la Guerra Civil Española 1936-39 hasta 1947, que incluye la Segunda Guerra Mundial; durante estos años permaneció en Argentina sin visitar España.

En este artículo comentaré los libros de texto universitarios del periodo 1917-36, los años de su primera alternancia entre los dos países. Por entonces Rey Pastor se sumó a la tarea de escribir libros de texto con entusiasmo y espíritu comercial mientras reivindicaba para España la modernidad europea[2]. Preparaba libros modernos en su origen conociendo muy bien lo que explicaba y haciéndolo de un modo brillante en la exposición general y original en detalles concretos[3]. Los más característicos tenían abundante bibliografía, actual y clásica acompañada de información histórica, estaban llenos de notas y comentarios que impulsaban al lector a ir más allá del propio libro que tenía en las manos. Facilitaba la primera lectura del libro señalando, con un asterisco o imprimiendo

[1]Nacido en Logroño (España) en 1888 y fallecido en Buenos Aires (Argentina) en 1962, fue el matemático más importante de la primera mitad del siglo XX entre los que se expresaron en lengua española a ambos lados del Atlántico [23]. Además: una biografía breve en red [10], más información diversa en [1, 2, 4], en [9] sobre el periodo hasta 1920 y en el libro [12] sobre su entorno español. Para el papel de Rey Pastor en la matemática argentina véase [21]. Al final de [23] aparece el listado cronológico de la obra completa de Rey Pastor, que fue revisado y completado por Eduardo y Miguel Ortiz [22].

[2]Rey Pastor formaba parte de las élites científicas de la "generación del 14" que lideraba el filósofo José Ortega y Gasset [7]. En matemáticas seguía la estela de Zoel García de Galdeano [18], un catedrático de la Universidad de Zaragoza que dejó en él notables influencias. Véase `https://biblioteca.unizar.es/sites/biblioteca.unizar.es/files/exposiciones/galdeano/expo_matematicas.pdf`.

[3]Dando resultados que habría podido publicar en revistas especializadas, lo que le llevó a reclamar prioridad cuando los vió publicados por otros en años posteriores.

en letra de cuerpo menor, las partes que se pueden dejar para la segunda lectura. Muchos de estos libros tienen una historia propia imbricada en la del autor, que se descubre con el seguimiento de las numerosas ediciones modificadas a lo largo de dilatados periodos de tiempo. Distinguiré los libros originados en cada uno de sus dos países, aunque tienen distintos orígenes nacionales su distribución posterior alcanzó a ambos y a otros de América Latina[4]. Con el paso del tiempo sus libros de texto perdieron modernidad pero siguieron siendo una lectura útil y el conjunto de su obra tiene valor para la historia de la cultura científica latinoamericana.

§2. Libros españoles

Durante las primeras décadas del siglo XX, en las Facultades de Ciencias españolas había dos asignaturas de Análisis matemático, de primero y segundo curso, cuyo contenido era análisis algebraico, con el cálculo diferencial de varias variables reales intercalado por necesidades curriculares. Por análisis algebraico debe entenderse, a la manera iniciada por Euler y Cauchy, el estudio de los sistemas de números, de los naturales a los complejos, los polinomios con el álgebra de las ecuaciones previa a la teoría de Galois, las funciones continuas y los desarrollos en series de potencias; es decir, la teoría de funciones previa al cálculo infinitesimal ([16]).

Rey Pastor ganó en 1911 una cátedra de Análisis matemático con destino en la Universidad de Oviedo y en 1913 obtuvo el traslado a la Universidad Central en Madrid, iniciando allí la docencia en octubre de 1914. Impartió sucesivamente Análisis matemático 1º y 2º en los cursos 1914-15 y 1915-16, publicando sendos apuntes con el título *Resumen de las lecciones de análisis matemático (primer/segundo curso)*. Con este material previo concibió un *Tratado de Análisis Matemático* en tres volúmenes. En la introducción al primer *Resumen* explicaba que un curso no puede entrar en la materia con la extensión propia de un tratado, que es más sistemático y completo, aunque, decía, tampoco tiene que ser una enciclopedia ni una obra histórica. Las vicisitudes que le fueron saliendo al paso trocaron este proyecto unitario en tres libros enlazados pero independientes.

1917, Elementos de Análisis Algebraico (EAA). Este libro es la versión acabada del primer *Resumen* y tuvo un par de reediciones con algunos cambios, hasta que a principios de los años treinta, con la ayuda de su discípulo Ricardo San Juan, quedó en su versión definitiva[5]. La introducción muestra los criterios pedagógicos del autor en este su primer libro de texto, en el que quiere conseguir rigor sin formalismo y lograr profundidad con brevedad; se propone llegar por el camino mínimo a los resultados principales y a las puertas de los temas avanzados, evitando "perderse en una selva de minucias y casos particulares" con los que nunca se sale de la matemática elemental. Por otra parte, reniega de la abstracción prematura y del formalismo que se va imponiendo en el siglo XX:

[4]Estos libros fueron publicados por el autor, que mantuvo un importante negocio editorial gestionado con la ayuda de su hermano José.

[5]Véase [6]. En los años cuarenta pasó a ser un libro clásico, pero se siguió reimprimiendo por los herederos después de la muerte del autor. El año 1944 la obra se publicó en Buenos Aires con alguna ampliación respecto a la versión española.

Resumen
de las lecciones de
Análisis Matemático
(Primer curso)
Explicadas por
D. Julio Rey Pastor
en la Universidad de Madrid.

Curso de 1914-1915

FIGURA 1. Julio Rey Pastor en 1915 en Zaragoza y portada del primer *Resumen* de sus lecciones en Madrid, 1914-15.

> *Huyendo de la general tendencia a elevar por abstracción los asuntos elementales, hemos prescindido de todo formalismo, esforzándonos, por el contrario, en elementalizar las cuestiones difíciles sin menoscabo del rigor. [. . . sigue en nota a pie de página citando al profesor italiano E. Pascal . . .] toda abstracción exige una base previa que sirva de punto de apoyo para poder elevarse, y no sólo carecen los alumnos de esta base, sino que precisamente vienen a la Universidad en busca de ella. "Hacer descender de lo alto los conceptos del Análisis es didácticamente equivocado, históricamente absurdo, conceptualmente hipertrófico y científicamente inútil".*

Rey Pastor sostuvo la primacía de la invención, que puede ser ahogada por el exceso de lógica, la cual tiene ventajas expositivas pero no creadoras, de modo que intenta equilibrar rigor y concisión con el lenguaje sin formalizar. Su rigor es así un tanto subjetivo y necesita de la complicidad del lector, que tiene que poner algo de su parte para alcanzar la claridad que el autor transmite, porque, dice, hay que evitar que los alumnos se acostumbren a "delegar en las páginas impresas el trabajo de discurrir". Bajo la influencia de autores italianos, Rey Pastor redactó un libro original en el diseño y más en el estilo, con los algoritmos básicos del álgebra y el análisis dispuestos a lo largo de las sucesivas extensiones del número que siguen el principio de permanencia de las leyes formales de la aritmética ([16]).

1924, Lecciones de Álgebra (LA). Se inició en las lecciones dadas en la Universidad de Oviedo el curso 1912-13 y coincide con buena parte del segundo *Resumen*, pero la aparición definitiva a imprenta se retrasó ocho años. En la brevísima presentación de la primera edición, indicaba Rey Pastor la causa: deseaba "someter a minuciosa elaboración los apuntes del curso", pero los años pasan sin que "a esa labor crítica le llegue su hora", por lo que los apuntes van a la imprenta "apenas corregidos y nada ampliados". Los retoques y ampliaciones se publicaron en 1932 con la colaboración de San Juan, como fascículo adelantado a la segunda edición que llegó en 1935 con la gran novedad de la teoría de Galois. El origen de la parte nueva es un curso de Rey Pastor del año 1933 que San Juan se encargó de redactar, uno de los muchos cursos de matemática superior no contemplada en los planes de estudio oficiales que impartía en Madrid y también en Buenos Aires a partir de 1921. La declaración de intenciones del curso fue:

> *Tenemos la pretensión de haber logrado una sensible simplificación de la teoría de las ecuaciones algebraicas, llegando a los resultados finales que suelen alcanzarse en los libros análogos, con menor complejidad de recursos, que se traduce en una visible brevedad de espacio, a pesar de la multitud de ejemplos aclaratorios que hemos juzgado indispensables.*

Desde este punto de vista, introducir al principio "las interesantes teorías algebraicas, cada día más en boga" sería supérfluo y Rey Pastor afirma que hacerlo así exigiría reedificar la exposición "con independencia del Análisis y de la Aritmética del continuo", lo que le parece ilusorio, porque cuando de nuevo "se quiere ligar el Álgebra con la Aritmética de los números reales y complejos" —final que Rey Pastor presupone inevitable— "reaparece el punto transcendente, que es preciso superar con los recursos del Análisis para poder edificar la teoría de las ecuaciones numéricas". Como éste es para Rey Pastor el fin último del álgebra, es mejor ir derecho a ello. En todo caso, dice, se puede añadir algún capítulo del álgebra moderna al final de un libro como el suyo, que declara de corte clásico. Llama la atención que la segunda parte del libro carezca de las referencias habituales en las obras de Rey Pastor, colocadas a pie de página y en la bibliografía final. Esto, junto con algunos aspectos de la construcción interna de las lecciones, transmite la idea de que se trata de un texto sin terminar, que previsiblemente tendría pronto una nueva edición mejorada, método de publicación intermitente habitual en él, pero la Guerra Civil cortó este lento proceso de recepción en España de la teoría de Galois.[6]

1925, Teoría de las Funciones Reales (TFR). El tercero de los libros surgidos de los *Resúmenes*, referido como *TFA*, iba a ser el segundo tomo del abortado *Tratado de Análisis Matemático*, entre *EAA* y *LA*. Empezó a aparecer por fascículos una vez publicado *EAA*, pero la edición completa se demoró. Fue un libro de transición ([15]), en cuyo breve prólogo se lee:

> *Terminada, después de varias interrupciones, la impresión de esta obra, natural continuación de nuestro* Análisis algebraico, *debemos contestar por anticipado a una crítica probable. Excesivo libro para texto elemental parecerá a los alumnos, y muy incompleto y deficiente como tratado sistemático les parecerá a los especialistas. Tengan éstos en cuenta que por ahora no hay en los países hispánicos número suficiente de lectores para costear la edición de tratados de Análisis superior, ni tampoco son necesarios, habiendo tantos y tan excelentes en otras lenguas; por otra parte, la mayoría de los alumnos de nuestras aulas universitarias, cualquiera que sea su futuro destino académico, no leerán más libros que los de texto, y la intercalación de teorías no contenidas en los programas parece el único medio de buscar el contacto de los espíritus jóvenes con la Matemática moderna, del cual podrá surgir, quizás, alguna vocación fecunda.*
>
> *Tal es el objeto que persigue la Introducción sobre la Aritmética trasfinita y otros varios capítulos, señalados con asterisco, cuya lectura no es necesaria para entender el resto del libro, ni aconsejable en su primer estudio.*

[6]Véase [5]. Al tiempo que Rey Pastor reanudaba sus viajes a España, la tercera edición apareció en 1947, pero no incluyó un capítulo final sobre "álgebra axiomática" hasta la tardía cuarta y última de 1957, que tiene un interesante prólogo —fechado en la ciudad argentina de San Luis— en el que exhibe su mala relación con el "álgebra moderna".

> *La favorable acogida dispensada a los fascículos en que el libro apareció fraccionado, atenúa ya nuestro temor de que la ambiciosa pretensión de dos fines tan diversos hiciera la obra ineficaz para ambos.*

Llama la atención que no trate el cálculo integral, lo que indica claramente que de nuevo estamos ante la primera entrega de un proyecto más amplio, que esta vez interrumpió la Guerra Civil Española, sin olvidar el lento avance de sus proyectos por trabajar en varios a la vez. Años después publicó una obra completa, *Elementos de la teoría de funciones* ([14]), elaborada a partir de *TFR*, de cursos en las dos orillas durante los últimos años veinte y primeros treinta, y otros ya solo en Buenos Aires durante la década siguiente. Como las últimas versiones de *LA*, este libro tuvo que esperar hasta 1947 y sale del periodo temporal fijado para estas páginas. No obstante, terminaré recogiendo que, según un fragmento del prólogo de la edición de 1953, el autor había creído

> *…llenar un vacío en la literatura matemática, suministrando a los alumnos de Ciencias e Ingeniería un texto de Introducción al Análisis superior, riguroso a la altura de nuestro tiempo, y sólo apoyado en los conceptos básicos del Análisis algebraico, pero elevado gradualmente hasta las teorías matemáticas más abstractas que exigen la Física, la Estadística y otras técnicas actuales…*

Hasta aquí los libros que corresponden a su enseñanza en España, en la sección siguiente vendrán los que se gestaron en Buenos Aires. Excepto el primero de cada lado, unos y otros los iba redactando a la vez durante la frenética década de los años veinte y tuvieron larga vida en ediciones sucesivas, con difusión en ambas orillas del Atlántico. En líneas generales, los libros españoles son más teóricos, dirigidos a matemáticos, mientras que los argentinos son de matemática para ingenieros y científicos.

§3. Libros argentinos

La primera obra de esta sección surgió durante la estancia de Rey Pastor en Buenos Aires invitado por la Institución Cultural Española, iniciada en septiembre de 1917 y prolongada hasta bien entrado el año siguiente a petición de los estudiantes de ingeniería ([20, 8, 17]). De vuelta a España tras esta exitosa experiencia, en el año 1919 coincidieron el inicio de la nueva revista de la Sociedad Matemática Española, que por algo se llamó *Revista Matemática Hispano-Americana*, y la celebración del Congreso Nacional de Ingeniería, en el que se debatió sobre la enseñanza de las matemáticas. Rey Pastor aprovechó el ambiente creado por este congreso para insertar en la revista recién citada, con el título “Matemática de precisión y matemática de aproximación”, un texto de Felix Klein en el que se lee:

> *La Matemática de aproximación es la parte que realmente se utiliza en las aplicaciones; la Matemática de precisión es, por decirlo así, la armazón de aquélla.*

Buen conocedor de los debates europeos sobre el contenido matemático de las enseñanzas básicas y de aplicación, con esa publicación mostró sus preferencias frente a la tendencia a reducir a formularios las matemáticas de la ingeniería o la escuela inglesa de John Perry que propugnaba una enseñanza intuitiva y práctica ([13, 19]).

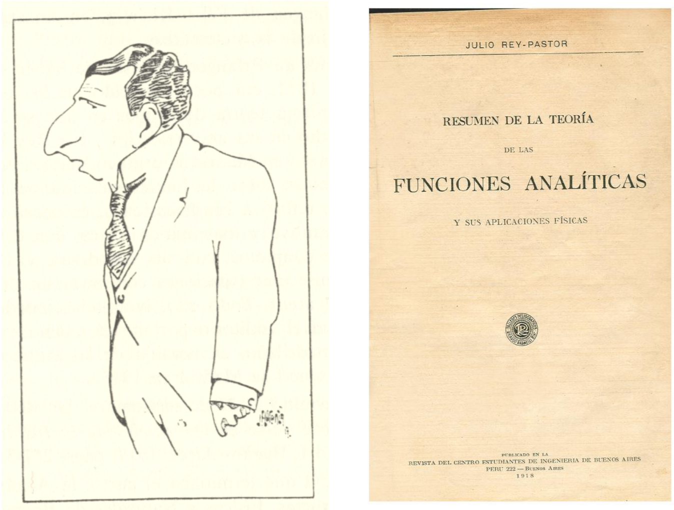


FIGURA 2. Caricatura de Julio Rey Pastor en 1918 en Buenos Aires y portada de su primer libro argentino.

Cuando volvió a Buenos Aires en 1921 lo hizo con el objetivo de implantar durante varios años el doctorado en matemáticas, pero tuvo que adaptarse a la situación educativa que encontró. Sintió la necesidad de intervenir en diversos cursos básicos de matemáticas para especialidades científicas e ingeniería, a fin de elevar el nivel y también con la intención de derivar estudiantes capaces hacia los estudios de matemáticas. Con los estudiantes de ciencias ensayó el método de Perry y con los de ingeniería siguió a Klein, como se verá en los comentarios a las otras dos obras de esta sección.

1918, Resumen de la Teoría de las Funciones Analíticas y sus aplicaciones físicas (RTFA). Como *TFR*, este es un libro de transición y corta vida, los temas en él tratados terminaron formando parte de *Elementos de la teoría de funciones*, aunque con diferente estilo expositivo. *RTFA* es el texto de un curso improvisado que fue publicado de inmediato en la *Revista del Centro de Estudiantes de Ingeniería de Buenos Aires*, con la intervención destacada del entonces estudiante José Babini, quien a la postre sería un estrecho colaborador y amigo de Rey Pastor.

En 112 páginas introduce las funciones analíticas al estilo de Riemann, la representación conforme y el problema de Dirichlet, exponiendo aplicaciones a fluidos incompresibles y elasticidad. En una breve introducción a esta su primera experiencia con la matemática dirigida a ingenieros, Rey Pastor plantea que el rigor alcanzado por el análisis aritmetizado es inexcusable en matemáticas, pero admite otros enfoques en las matemáticas para naturalistas e ingenieros:

> *Si la Matemática se considera como ciencia deductiva, cada vez que demos una demostración intuitiva, habrá que indicar los libros donde pueda estudiarse la demostración rigurosa; y si se considera como ciencia natural, habrá que completar el razonamiento con una comprobación experimental, para verificar las conclusiones obtenidas. He aquí, pues, la justificación de que los libros de matemáticas para uso de naturalistas prescindan del rigor.*

> *Teniendo en cuenta las costumbres de los ingenieros a quienes suelen repugnar los razonamientos puramente analíticos, debiéramos haber sacrificado todo rigor, salvando las dificultades del infinito actual con atrevidos pasos al límite, apoyados en imprecisas consideraciones espaciales. Atendiendo a los deseos de los espíritus curiosos, a quienes interesa conocer el estado actual del Análisis, debiéramos seguir método aritmético puro. Hemos intentado salvar esta incompatibilidad usando constantemente en las explicaciones* lenguaje geométrico *con sus correspondientes representaciones gráficas; pero susceptible de ser sustituido por conceptos aritméticos previamente definidos; así se gana en claridad sin perder en rigor.*

1924, Curso cíclico de Matemáticas (CCM). Se trata del libro más elemental de esta selección. En un principio, el programa de esta asignatura rezaba "Análisis algebraico", pero ni el contenido ni el nivel eran los de *EAA*, como el título parecía indicar. En *CCM* Rey Pastor expone las matemáticas del primer curso de ciencias influido por las ideas para la enseñanza de las matemáticas de Perry, con su enfoque intuitivo, y de su maestro García de Galdeano, defensor del "fusionismo".

En 1924 apareció el primer volumen de *CCM*, subtitulado *Las magnitudes y las funciones elementales con aplicaciones a la Mecánica, Física, Química, Ingeniería, etc.*. Tuvo una segunda edición en 1929, a la vez que aparecía el segundo volumen subtitulado *Cálculo infinitesimal con aplicaciones a la Mecánica, Física, Química, Ingeniería, etc.* Un año después publicó en colaboración con José Babini *Ejercicios de Matemáticas generales para físicos y químicos*, libro adaptado al primer volumen de *CCM*. En el prólogo de 1924 el autor explica que es "un libro desordenado" porque no respeta la "fragmentación" habitual de la matemática en sus diversas ramas, sino que se plantea como una obra "fusionista" basada en que las ideas matemáticas "se desarrollan y entremezclan en múltiples direcciones" manteniendo "una unidad funcional".

Esta obra también tuvo reediciones, pero menos que otras del autor. Con el tiempo la enseñanza de las matemáticas en las carreras de ciencias fue ganando nivel y quedó allí en desuso, pero todavía se utilizó en la formación de maestros. Para más detalles sobre *CCM* véase [11].

Por los años veinte Rey Pastor actuaba también en el Instituto de Profesorado Secundario, lo que le llevó a la confección de libros de texto de secundaria para el nuevo plan de estudios argentino de 1926. Inició así una dilatada producción de libros de este tipo, de orientación intuitiva o racional según la tendencia de los planes de estudio, que en Argentina desarrolló en colaboración con F. Toranzos, en Uruguay con M. Pereyra y en España con P. Puig Adam[7].

1929, Curso de Cálculo infinitesimal (CCI). Es la estrella de los libros de texto argentinos de Rey Pastor por su éxito y duración en el mercado. Este texto, como los tres comentados del lado español, tuvo repetidas ediciones a lo largo de toda su vida y después los herederos lo siguieron reimprimiendo.

[7]Sobre este asunto escribí unas pocas páginas al final de [3], que es un artículo precursor del que ahora escribo para completarlo y actualizarlo respecto a libros universitarios.

En cuanto llegó a Buenos Aires por segunda vez, se enfrentó al primer curso de matemáticas para ingenieros con el enfoque didáctico kleiniano que rechaza muy especialmente la enseñanza basada en recetarios. De inmediato circularon unos apuntes y en 1922 apareció "Resumen del curso de Cálculo infinitesimal" en la *Revista del Centro de Estudiantes de Ingeniería de Buenos Aires*, avance de urgencia que no completó en una primera edición de la obra hasta 1929.

Desde el inicio de esta obra, Rey Pastor clarificó en la introducción su enfoque de la enseñanza de la matemática para ingenieros:

> *La enseñanza deber ser sistemática y lógica, propendiendo a una educación de la inteligencia en el razonamiento matemático; y no empírica, con carácter de recetario, para la resolución de casos concretos.*
>
> *De los problemas de existencia que tienen tanta importancia y dificultad para el matemático [...] sólo interesan al técnico los resultados y no las demostraciones.*
>
> *De los métodos de resolución teórica [...] sólo importan los que conducen rápidamente al resultado apetecido, con aproximación suficiente.*
>
> *Además de los ejemplos abstractos, para ejercitar los métodos aprendidos, es conveniente tratar los problemas y magnitudes que se presentan en las ciencias físicas, para llenar el vacío que el ingeniero salido de las aulas suele encontrar entre la Matemática abstracta y la realidad concreta.*

Definió el rigor como "la precisión y la claridad" y lo reclamaba para el ingeniero porque "nadie como el técnico, que ha de manejar realidades y no abstracciones, debe ser exigente en claridad y precisión", pero notando que la esencia de este rigor en el estudio de las funciones

> *...no es sino la noción clara de aproximación suficiente. Nadie como el Ingeniero necesita este rigor; para nadie es tan necesario el sentido de la aproximación. [...] Cultivar el sentido de la aproximación es el principal objeto de estas lecciones.*

En la tercera edición de 1938, notablemente ampliada, introdujo un apretado apéndice histórico titulado "Evolución del cálculo infinitesimal", que mantuvo en ediciones posteriores. Cuando Rey Pastor murió estaba preparando una nueva edición, la séptima, que apareció el mismo año 1962 con los cuidados últimos a cargo de L. A. Santaló, quien insertó un texto en el que se lee:

> *Desaparecido el Maestro quedan sus obras, el gran número de obras en que se han formado varias generaciones de matemáticos e ingenieros de habla hispana. En todos los niveles, las obras de Rey Pastor fueron y siguen siendo un modelo de claridad, rigor y elegante concisión. El presente "Cálculo infinitesimal" es prueba y muestra de ello. Por encima de las modalidades de forma, la matemática tiene un fondo perdurable que mantiene vivo el espíritu de su creador. También en las obras didácticas, este espíritu que se transmite al lector y que trasciende a la palabra escrita, es lo que les da valor y permanencia. Esperamos que la obra de Rey Pastor, que ya ha marcado una época de varias décadas en la matemática de España y Latinoamérica, siga ejerciendo en ella su influencia proselitista y rectora.*

Referencias

[1] L. Español (ed.). *Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor*, IER, Logroño, 1985.

[2] L. Español (ed.). *Estudios sobre Julio Rey Pastor*, IER, Logroño, 1990.

[3] L. Español. *Julio Rey Pastor y la enseñanza de las matemáticas*, Suma 24, (37–38) 1997.

[4] L. Español (ed.). *Matemática y Región: La Rioja. Sobre matemáticos riojanos y matemática en La Rioja*, IER, Logroño, 1998.

[5] L. Español. *Rey Pastor ante los cambios en el álgebra de su tiempo*. En L. Español (ed.), Matemática y Región: La Rioja, IER, Logroño, (63–122) 1998.

[6] L. Español. *Un libro de texto viejo pero con categoría: Elementos de Análisis algebraico, por Julio Rey Pastor*, *Suma* 27, (121–125) 1998.

[7] L. Español. *Julio Rey Pastor y el espíritu del 98*. En E. Ausejo, Mª. C. Beltrán (eds.), *La enseñanza de las ciencias: una perspectiva histórica*, SEHCTAR, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, (169–203) 2000.

[8] L. Español. *Rey Pastor se decide por Argentina: 1917–1928.* En J. L. Aguiar *et al.* (coords.), *Entre Argentina y España: unas historias matemáticas para el recuerdo*, Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas / FESPM, La Laguna, (45–64) 2003.

[9] L. Español. *Julio Rey Pastor. Primeros años españoles: hasta 1920*, La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española 9(2), (545–585) 2006.

[10] L. Español. *Rey Pastor, Julio (1888-1962)*, Divulgamat, 2008. Centro virtual de divulgación de la RSME (http://www.divulgamat.net/), Historia de las matemáticas – Biografías de matemáticos españoles.

[11] L. Español. *El programa de un curso de Rey Pastor (Buenos Aires 1922)*, *Zubía* 25-26, (97–108) 2007-2008.

[12] L. Español. *Historia de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*, RSME, Sevilla, 2011. Presentación por A. Campillo, presidente de la RSME. *Preámbulo: Antes de la RSME*, por el autor, E. Ausejo, F. Vea, Mª. Á. Velamazán.

[13] L. Español. *Matemática e ingeniería en España en torno a la vida y la obra de Julio Rey Pastor*. En L. C. Arboleda (ed.) *Desarrollo histórico de las matemáticas y la ingeniería en Colombia en los siglos XIX y XX*, ACCEFN, Bogotá, (171–204) 2016.

[14] L. Español, E. Fernández, M. C. Mínguez. El libro de texto de Julio Rey Pastor *Elementos de la Teoría de funciones*. En J. A. Pérez-Bustamante *et al.* (coords.) *Actas del IX Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas (27–30 de septiembre de 2005, Universidad de Cádiz y ROA)*, SEHCYT, Cádiz, (837–847) 2006.

[15] L. Español, E. Fernández, M. C. Mínguez. *La peripecia (1918-1939) de un libro de texto de Julio Rey Pastor: Teoría de las Funciones Reales.* En Mª. Á. Velamazán *et al.* (coords.) *La historia de la ciencia y de la técnica: Un arma cargada de futuro. Ensayos en homenaje a Mariano Hormigón*, Diputación Provincial de Cádiz, Cádiz, (221–235) 2008.

[16] L. Español, M. Á. Martínez, Y. Álvarez, C. Vela. *Julio Rey Pastor y el análisis algebraico. De los apuntes de 1914-16 a tres libros de texto*. Zubía 28, (139–166) 2010.

[17] F. A. González Redondo. *La matemática en el marco general de las relaciones científicas entre España y Argentina, 1910-1940*. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española 6(1), (243–266) 2003.

[18] M. Hormigón. *Una aproximación a la biografía científica de Zoel García de Galdeano*, La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española 7(1), (281–294) 2004.

[19] G. Lusa. *Las matemáticas en la ingeniería: La obra de Rey Pastor*. En L. Español (ed.), *Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor*, IER, Logroño, (205–219) 1985.

[20] E. L. Ortiz. *Las relaciones científicas entre Argentina y España a principios de este siglo: La Junta para Ampliación de Estudios y la Institución Cultural Española.* En J. M. Sánchez Ron (ed.), *La Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas 80 años después*, CSIC, Cádiz, (119–158) 1988.

[21] E. L. Ortiz. *Julio Rey Pastor, su posición en la escuela matemática argentina*, Revista de la Unión Matemática Argentina, 52(1), (149–194) 2011.

[22] E. L. Ortiz, M. E. Ortiz. *Para una bibliografía de don Julio Rey Pastor*. En L. Español (ed.), *Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor*, IER, Logroño, (273–323) 1985.

[23] S. Ríos, L. A. Santaló, M. Balanzat. *Julio Rey Pastor, matemático*. Madrid, Instituto de España, 1979.

Luis Español González
Universidad de La Rioja, Logroño, España (UR).
Departamento de Matemáticas y Computación.
(✉) luis.espanol@unirioja.es

Recibido: *15 de octubre de 2017*.
Aceptado: *11 de noviembre de 2017*.
Publicado en línea: *1 de diciembre de 2017*.

¡Se puede recortar un cuadrado en cuatro piezas y armar con ellas un triángulo equilátero!

Sí, al estilo del famoso juego *Tangram*. Aquí podés ver una manera de hacerlo (¿se te ocurre alguna otra?):

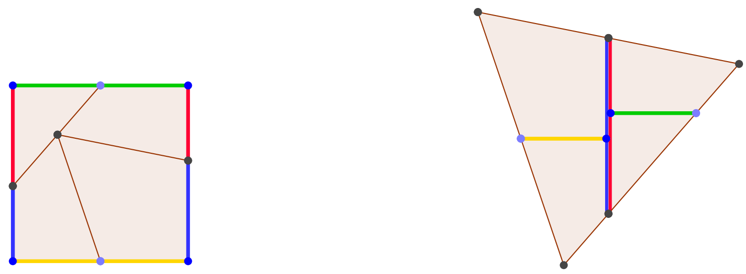


Figura 1

De hecho, el rompecabezas se puede dejar armado con “bisagras” de modo de que se pueda pasar del cuadrado al triángulo de forma continua plegando las partes. Aquí damos dos instancias intermedias de la secuencia de plegado:

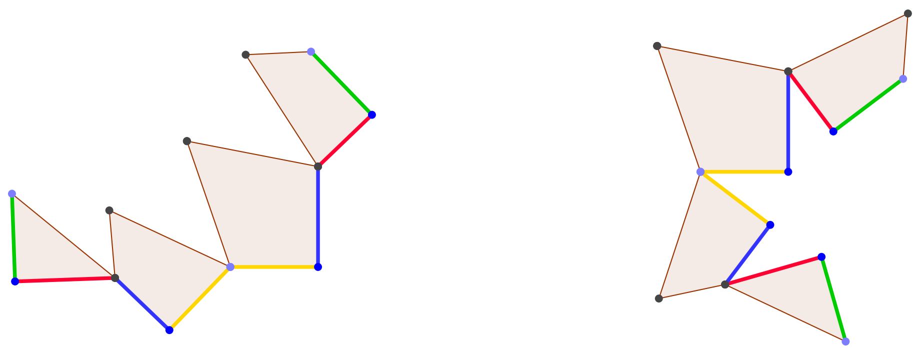
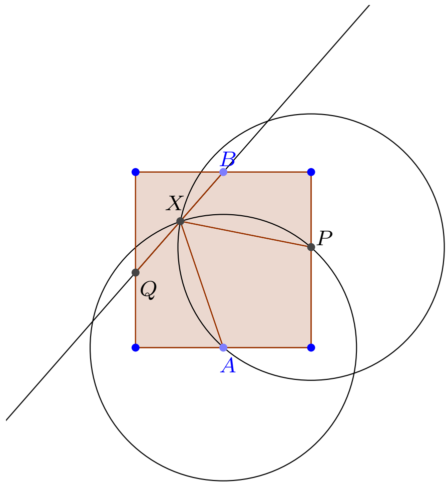


Figura 2

A continuación describimos los pasos para construir este rompecabezas a partir del cuadrado de lado L:

- marcamos los puntos medios de los lados horizontales A y B;
- trazamos la circunferencia de centro A y radio $\frac{L}{\sqrt[4]{3}}$, marcamos P;
- trazamos la circunferencia de centro P y radio $\frac{L}{\sqrt[4]{3}}$, marcamos X;
- trazamos la recta $\overline{BX}$, marcamos Q;
- trazamos los segmentos $\overline{AX}$ y $\overline{PX}$.

Se obtiene el cuadrado con la disección buscada:



Veamos por qué funciona el método de corte propuesto. Sea $\mathcal{C}$ el cuadrado y $\mathcal{T}$ el triángulo. Sabemos que ambos tienen la misma área, por lo que

$$A(\mathcal{T}) = A(\mathcal{C}) = L^2.$$

Por otra parte, $\mathcal{T}$ es equilátero, y de la Figuras 1 y 2 vemos que el lado superior de $\mathcal{T}$ tiene vértices X y punto medio P. Por lo que si pensamos a este lado como la base b, tenemos que $b = 2\,\overline{PX}$ y por lo tanto

$$A(\mathcal{T}) = \overline{PX} \cdot h,$$

donde h es la altura de $\mathcal{T}$. Puesto que $\mathcal{T}$ es equilátero, la altura bisecta al lado y forma un triángulo rectángulo. Usando Pitágoras, tenemos que $h^2 + \overline{PX}^2 = 4\,\overline{PX}^2$ de donde $h = \sqrt{3}\,\overline{PX}$. Luego, igualando las áreas, tenemos que

$$L^2 = \sqrt{3}\,\overline{PX}^2$$

de donde sale que $\overline{PX}$ debe tener longitud $\frac{L}{\sqrt[4]{3}}$. Faltaría probar que $\mathcal{T}$ es equilátero, te dejamos este hecho como ejercicio.

La *disección* que vimos es un caso particular de un resultado más general. Hay un viejo teorema (que ya era conocido por los antiguos griegos) que dice que dadas dos figuras planas F_1 y F_2 de igual área, es posible recortar F_1 en un número finito de piezas con las cuales se puede armar F_2 sin superposiciones. La demostración no es complicada y será objeto de un futuro artículo. Mas aún, un teorema muy reciente dice que tal disección ¡puede hacerse de forma abisagrada! (Ver Abbott T. G., Abel Z., Charlton D. et al., Discrete Comput. Geom. 47 (1), (150 – 186) 2012. https://doi.org/10.1007/s00454-010-9305-9).

El rompecabezas que presentamos se debe a Henry Dudeney (10/4/1857 – 23/4/1930), quien lo propuso en 1902, y se lo conoce como el problema del mercero (haberdasher's problem). Dudeney fue un matemático inglés conocido por sus acertijos lógicos y matemáticos. Es considerado uno de los mejores en esta área junto a celebridades como Sam Lloyd y Martin Gardner.

Sección de Problemas

por Juan Pablo Rossetti

Los primeros dos problemas son en homenaje a Julio Rey Pastor. Éstos, fueron publicados hace más de 100 años en la *Revista Trimestral de Matemáticas* de Zaragoza (España) en 1905. A pesar de su corta edad, nuestro homenajeado envió soluciones a dichos problemas, que fueron publicadas ahí mismo. El tercer problema, en cambio, es sobre "caminos mínimos", siendo las últimas preguntas un poco más avanzadas. Las soluciones (o gran parte de ellas) se encuentran en la página siguiente.

※ ※ ※

Problema 1. Números consecutivos. Para cada n natural, hallar los n números naturales consecutivos más pequeños cuya suma sea a la vez un cuadrado y un cubo perfecto.

Problema 2. Divisibilidad. Demostrar que siendo p un número primo mayor que 3, el producto $(p^2-1)(p^2-25)$ es siempre divisible por 576.

Problema 3. Caminos mínimos. Clara va siempre caminando con su hermano al colegio, que queda a 9 cuadras de su casa, 5 en una dirección y 4 en la otra. La primera mitad del año, fueron siempre por el mismo camino, el que le gustaba a su hermano (en azul en la Figura 1); pero después de las vacaciones de Julio, Clara quiso ir cada día por un camino diferente, siempre caminando solo 9 cuadras, no más.

(a) ¿Habrá podido Clara recorrer siempre caminos diferentes desde las vacaciones de Julio?

(b) ¿Cuántos caminos distintos (de 9 cuadras) hay?

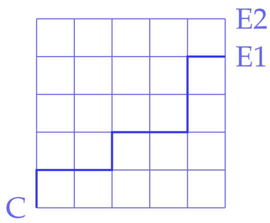


Figura 1. C = Casa de Clara, E1 = entrada vieja, E2 = entrada nueva.

Para el año que viene, el ingreso al colegio se hará por otra esquina, con lo que Clara tendrá que caminar entonces 10 cuadras (5 hacia el Este y 5 hacia el Norte) para ingresar.

(c) ¿Podrá en los 185 días de clases usar un camino diferente cada día?

Un día su abuelita le pide que pase por una farmacia que está en el mitad de una cuadra (como en la Figura 2) entre la casa y el colegio.

(d) ¿Cuántos caminos (mínimos) hay que pasan por la farmacia?

Otro día, su papá le dice en cambio que NO pase por cierta cuadra porque la están arreglando y es peligroso.

(e) ¿Cuántos caminos tiene Clara que no pasan por esa cuadra?

Ahora su mamá agrega otra cuadra en reparación que considera peligrosa (ver Figura).

(f) ¿Cuántos caminos le quedan a Clara para elegir?

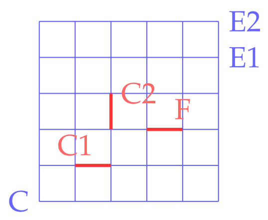


FIGURA 2. F = farmacia, C1 = corte 1, C2 = corte 2.

A Clara le gusta pensar, así que después de un buen rato –y con cierta ayuda de su profe de matemática– logra resolver todas estas cuestiones, no sólo para su recorrido de 5×5 cuadras, sino en general, si tuviera que hacer m cuadras al Este y n cuadras al Norte, con m y n números naturales cualesquiera, es decir, el caso $m \times n$.

(g) ¿Te animás a hacerlo?

Una vez resuelto totalmente cómo contar los caminos mínimos posibles, Clara se pone a imaginar cómo sería el cálculo si en lugar de tener que moverse 5 cuadras en una dirección y 5 en otra, tuviera que moverse en 3 dimensiones en lugar de dos, por ejemplo a la derecha, al frente y arriba, como en algunos juegos para niños que hay aun en las plazas. Se imaginó a una hormiga recorriendo los caños de ese gran cubo, formado por $5 \times 5 \times 5$ pequeños cubos.

(h) ¿Cuántas formas habría de ir de una esquina a la esquina opuesta por caminos que solo recorran 15 tramos, es decir, caminos mínimos?

Por último, se plantea la pregunta

(i) ¿cuántos caminos mínimos hay en un hipercubo k-dimensional, $k > 3$, yendo de un vértice del hipercubo $5 \times 5 \times \cdots \times 5$ (k-veces) a su opuesto? y también el caso general en el que en lugar de ser un hipercubo, es un politopo similar al cubo pero con longitudes de sus lados distintas entre si, del tipo $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$.

Otra problema interesante es

(j) contar los caminos mínimos que puede recorrer Clara sin cruzar la diagonal principal que une su casa con el colegio. Es decir, si por ejemplo, comenzó yendo hacia el Este, entonces siempre deberá moverse más veces hacia el Este que hacia el Norte, salvo al final del recorrido, que tiene que completar las 5 cuadras al Este y 5 al Norte.

Respuestas

✓ *Solución 1.* Se puede calcular bien la suma de números consecutivos. Si sumamos los n números $m, m+1, m+2, \ldots, m+n-1$, el resultado es n por el promedio entre el primer número y el último, es decir

$$\frac{n(2m+n-1)}{2}.$$

Para que este número sea un cuadrado y cubo perfecto al mismo tiempo, debe ser igual a una potencia sexta, o lo mismo, un número en cuya factorización los primos aparezcan elevados a potencias que son múltiplos de 6. Así, por ejemplo, para $n = 10$, necesitamos que $5(2m+9)$ sea una potencia sexta, por lo que tomamos $2m+9 = 5^5$, es decir $m = 1558$, de modo que para $n = 10$, los menores 10 números consecutivos que dan un cuadrado y cubo perfecto simultáneamente son $1558, 1559, \ldots, 1567$.

✓ *Solución 2.* Como $p^2-1 = (p-1)(p+1)$ y p es impar, resulta que $p-1$ y $p+1$ son ambos pares y uno de ellos es divisible por 4. Por lo tanto p^2-1 es múltiplo de 8. Además, como p es primo (mayor que 3), alguno de $p-1$ ó $p+1$ tiene que ser múltiplo de 3 (porque de tres números consecutivos, uno es múltiplo de 3). Asi, tenemos que p^2-1 es múltiplo de 8 y de 3, por lo tanto lo es de 24. Análogamente, se ve que $p^2-25 = (p-5)(p+5)$ es también múltiplo de 24 y por consiguiente el número del enunciado es múltiplo de $24 \cdot 24 = 576$, como queríamos probar.

✓ *Solución 3.*

(a) Sí, puede.

(b) Son 126 caminos distintos para caminar 9 cuadras (5 y 4) hasta el colegio.

(g) Haremos primero el caso general que se plantea en (g). Para el problema general, con n cuadras en una dirección y m en otra, la respuesta es el número combinatorio $n+m$ en n, es decir, el número de combinaciones de $n+m$ elementos, tomados de a n. Se denota $\binom{n+m}{n}$ y se cumple que $\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}$ y que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, donde $k! = k \cdot (k-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Esto es así porque se puede pensar cada camino como una serie de elecciones E o N si Clara decide en cada esquina tomar hacia el Este (E) o hacia el Norte (N). La única restricción que hay, es que hay que elegir m veces E y n veces N. De modo que los caminos mínimos se identifican completamente con las sucesiones del tipo EENENNNEE..., de longitud $m+n$ con exactamente m E's y n N´s. Esto equivale a elegir las n posiciones donde irán las letras N en nuestra sucesión, lo cual se puede hacer de exactamente $\binom{m+n}{n}$ formas distintas.

(c) Este es el caso $m = n = 5$, por lo tanto la respuesta es $\binom{5+5}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$. Hay 210 caminos diferentes, por lo tanto no le alcanzarán 185 días para recorrerlos a la ida al colegio.

(d) En este caso, podemos dividir el problema en dos, porque para pasar por la farmacia Clara tiene que ir primero desde su casa hasta la esquina correspondiente, previa a la farmacia, y luego desde la esquina posterior a la farmacia, hasta el colegio. Se calculan estos dos números y se los multiplica entre sí.

(e) Aquí conviene pensar en la cantidad total de caminos menos los que pasan por esa cuadra prohibida, así que esto es análogo al punto (d).

(f) La idea que sugerimos para este caso es usar el *principio de inclusión-exclusión* generalizado, donde una propiedad sería pasar por una de las cuadras en reparación y la otra propiedad pasar por la otra cuadra.

(h) A pesar de haber pasado de dimensión 2 a dimensión 3, la dificultad no se agranda mucho, puesto que ahora en lugar de pensar en sucesiones de 10 letras con 5 E's y 5 N's, podemos pensar en sucsiones de longitud 15 con 5 letras D (de Derecha), 5 letras F (de al Frente) y 5 A's, de Arriba. Así, la solución es elegir primero 5 lugares de los 15 posibles, y luego otros 5 de los 10 restantes, es decir, la respuesta es $\binom{15}{5}\binom{10}{5}$.

(i) Esto no es muy distinto a lo anterior. Hay que elegir n_1 posiciones primero de entre las $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, luego se eligen n_2 posiciones de las $n_2 + \cdots + n_k$ que quedan, y así sucesivamente, por lo que la respuesta es

$$\binom{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}{n_1}\binom{n_2 + \cdots + n_k}{n_2}\binom{n_3 + \cdots + n_k}{n_3}\cdots\binom{n_{k-1} + n_k}{n_{k-1}}\binom{n_k}{n_k}$$

que es el llamado número multinomial y se denota $\binom{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}{n_1,\ n_2,\ \ \ldots\ \ ,n_k}$.

(j) Para resolver este enunciado, aparecen los célebres números de Catalan.

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones $\{a_n\}$ y por qué? ¿Cuál es el término general para (b)?

(a) $1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, 102, 110, 111, \ldots$

(b) $1, 64, 729, 4096, 15625, 46656, 117649, \ldots$

(c) $27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, \ldots$

(d) $1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, 231, 297, 385, 490, 627, \ldots$

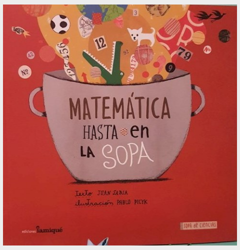
Ayuda: en (d), el número ubicado en la posición n, depende de n, y no de los números anteriores. Además, ese número cuenta algo relacionado con n. En (c), cada número depende únicamente del que le precede.

Podés encontrar las soluciones en la página 56.

Reseña de libro

por Bibiana Russo

• ***Matemática hasta en la sopa***
por Juan Sabia y Pablo Picyk.



Editorial IAMIQUE, 2016, 48 páginas.
ISBN: 9789871217922

Si una joven madre llama por teléfono a su tía matemática a las once de la noche por una inquietud, compartida con toda su familia, que les despertó la lectura de un libro, podemos afirmar que ese libro es atrapante. Y sin duda *Matemática hasta en la sopa* lo es en grado superlativo. De la veracidad de la anécdota doy fe, y no me asombra.

El autor de los cuentos reunidos en *El jardín desnudo* sigue la línea de su deliciosa obra *El anotador* dirigida al público infantil. Con esa misma sensibilidad Juan Sabia logra una amalgama exquisita: una escritura fluida con rigor matemático. Recrea una relación que es de las más entrañables (una charla tío-sobrino) para internarse en variadísimas cuestiones: desde el significado del percentil hasta leyendas con matemática.

Desde el el muy mentado "año luz" hasta el todo poderoso rating. Siempre aparece un giro inesperado: en el ítem "deportes" además de la clásica referencia al fútbol hay un apartado sobre el hándicap en golf. Y curiosos datos "de color" tales como las descripciones de la nomenclatura callejera en Italia o Alemania en "¿Qué información dan los números de las calles?"

Todo ello siguiendo un placentero hilo narrativo que es acompañado muy acertadamente por las ilustraciones de Pablo Picyk. Es especialmente atractiva la que corresponde a "¿Cuánto papel se necesita para tocar la luna?".

Celebramos entonces la aparición de esta obra de divulgación impecable en su amenidad y claridad matemática.

Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $a_{14} = 112$. Son los números naturales escritos en el sistema ternario, es decir, de base 3. También se los puede pensar como los números naturales que solo utilizan los dígitos 0, 1 y 2.

- $a_8 = 262144$. Son los números de la forma n^6, que son justamente los únicos números naturales que son al mismo tiempo un cuadrado y un cubo perfecto.

- $a_{19} = 182$. Esta es la famosa sucesión correspondiente a la Conjetura de Collatz (que tiene varios nombres más: de Ulam, Problema de Siracusa, etc) en donde cada nuevo número se obtiene del anterior simplemente diviendo por 2 si era par multiplicando por 3 y sumando 1 si era impar. La conjetura dice que aunque se comience con cualquier número natural, siempre se llegará al 1 en algún momento. Nuestro ejemplo comienza con 27 y recién llega al 1 en el término 112 de la sucesión.

- $a_{20} = 792$. Esta sucesión corresponde a la célebre *función partición* $p(n)$ que cuenta, para cada n, la cantidad de formas distintas de escribir a n como suma de números naturales (sin importar el orden), por ejemplo

$$\begin{aligned} 5 &= 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 \\ &= 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1 \end{aligned}$$

por lo tanto $p(5) = 7$.

Viene de la página 52.