
LA RECTA NUMÉRICA: ANÁLISIS DE LAS CONCEPCIONES DE ESTUDIANTES EN LOS INICIOS DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICA

María Carolina Benito, Mara Cedrón, Betina Duarte, Uriel Kasman,
Cecilia Lamela, María Cecilia Montes de Oca

RESUMEN. En este artículo, presentamos un análisis de las respuestas a un cuestionario y de un conjunto de entrevistas de profundización realizadas a estudiantes que finalizan el primer año de la formación del profesorado de matemática universitario. El objetivo es comprender cuáles son sus concepciones sobre los números reales, la recta numérica y la recta geométrica, así como los vínculos que establecen entre ellos. Identificamos que si bien la mayoría acuerda con la doble dimensión de la recta –ideal y material– esto no es tan claro al tratarse de los puntos de la recta. Analizamos los obstáculos que genera la representación decimal infinita de los números al considerar su representación en la recta numérica y exploramos estas ideas en vínculo con la densidad en \mathbb{R} . Esta indagación forma parte de un proyecto de investigación que tiene por objetivo estudiar un proceso de conceptualización del objeto recta real, de modo que sea accesible y al mismo tiempo potente para docentes de matemática en formación, a través del diseño de una secuencia de enseñanza. Poner en evidencia estas conceptualizaciones en estudiantes del primer año nos permitirá, en una etapa posterior, avanzar en el diseño de la propuesta.

ABSTRACT. In this article, we present an analysis of the answers to a questionnaire and a set of in-depth interviews developed with students who are completing the first year of university-level mathematics teacher education. The aim is to understand their conceptions about real numbers, the number line, and the geometric line, as well as the connections they establish between them. We identified that, although most of them agree with the double dimension of the line, ideal and material, this is not so clear when it concerns the points on the line. We analyse the obstacles generated by the infinite decimal representation of numbers when considering their representation on the number line and explore these ideas in relation to the density in \mathbb{R} . This inquiry is part of a research project that aims to study a process of conceptualisation of the real line object, in a way that is accessible and at the same time powerful for mathematics teachers' education, through the design of a teaching sequence. The evidence of these conceptualisations in first year students will allow us, at a later stage, to advance in the design of the proposal.

Palabras clave: Recta numérica, Números reales, Infinito, Formación docente.

Keywords: Number line, Real numbers, Infinity, Teacher education.

§1. Introducción

La representación de los números en la recta numérica se inicia en la educación elemental como un problema de índole práctico. La actividad de ubicar números, que suele estar presente en la escolaridad primaria y secundaria, se soporta en el tratamiento de la recta como un objeto tangible y por lo tanto material: tal ubicación de números requiere del dibujo de una recta, de la manipulación de escalas y medidas sobre ese dibujo. Esta actividad, en este momento de la escolaridad, permitiría al estudiante construir comprensiones sobre relaciones entre los números. Al mismo tiempo, en este proceso formativo se construyen ideas sobre el objeto recta numérica dotándola tanto de propiedades matemáticas como de propiedades heredadas de esa recta material. A modo de ejemplo, desde la enseñanza se propone que, al comparar dos números, el mayor es aquel que se encuentra ubicado a la derecha en la recta numérica sin importar su signo. De esta manera la recta adquiere y refleja el orden numérico. Así, las concepciones de estudiantes sobre la recta numérica se elaboran en vínculo con las ideas que construyen sobre los números reales. Estas concepciones pueden funcionar como herramientas para el avance, pero también pueden obstruir algunos aprendizajes posteriores.

Al considerar la representación de los números reales en la recta numérica nos encontramos con un problema teórico: se trata de asignar a un concepto matemático –la recta geométrica– la estructura de otro concepto –el conjunto de los números reales–. En este sentido, la completitud de los reales se asume en la continuidad de la recta geométrica. Dada esta complejidad, la representación de los números reales en la recta adquiere una mayor dificultad que otras representaciones, al menos en la escuela secundaria (Bergé, 2004; Scaglia, 2000). A partir de estas consideraciones postulamos que la comprensión de las propiedades matemáticas que adquiere la recta numérica, en tanto objeto matemático, a través de la relación número-punto conlleva un proceso de abstracción del cual debe hacerse cargo la enseñanza (Benito et al., 2023; Cedrón et al., 2021). Efectivamente, mientras la recta sea visualizada como un objeto material que puede ser dibujado, sus propiedades matemáticas resultan opacas (Zazkis & Sirotic, 2004) para el estudiante.

El avance en la formación matemática, especialmente en el contexto de la formación de un futuro profesor, requiere que la representación de los números reales en la recta numérica se constituya en un problema teórico. Aceptar que cada número real tiene un (único) lugar –idealmente exacto– en la recta numérica configura un problema matemático no exento de complejidades y de cuestionamientos. Consideramos que la posición construida durante la formación inicial del futuro profesor de matemática frente al saber matemático será una referencia al momento de elaborar su proyecto de enseñanza. Desde esta posición hemos concebido un proyecto de investigación *Los números reales en la formación de futuros profesores. La comprensión*

de la recta real como un objeto matemático–didáctico¹ en el cual nos planteamos estudiar condiciones didácticas que resulten favorables para que los y las estudiantes del profesorado alcancen una concepción robusta y estabilizada de la recta real en tanto objeto matemático. En una etapa previa al diseño de una propuesta de enseñanza para futuros profesores, comenzamos analizando los vínculos entre la recta numérica y los números reales construidos por estudiantes universitarios del primer año del profesorado de Matemática. Con este propósito se elaboró un cuestionario (ver Anexo) y se llevaron adelante entrevistas. En este artículo presentaremos los resultados de esta parte de la investigación.

§2. Antecedentes

Un recorrido histórico acerca de las intuiciones sobre lo continuo en la recta numérica nos permite comprender los obstáculos que han estado presentes en distintos momentos y su evolución. Vergnac (2013) postula que algunos de estos conflictos podrían estar presentes en estudiantes del nivel secundario. *¿Cómo es posible que una línea infinita esté compuesta por puntos de longitud cero? ¿Y cómo es posible que entre dos números ubicados en la recta haya una cantidad infinita de números?* son algunas de las preguntas que ponen de manifiesto la dificultad de hacer convivir nociones de la recta real en vínculo con la intuición geométrica de la recta.

Castela (1997) en su investigación acerca de la enseñanza de los números reales en la escuela secundaria en Francia, señala el hecho de que algunas características intuitivas de la recta en tanto objeto geométrico son asumidas desde la enseñanza para ser trasladadas a características del conjunto de los números reales. La autora pone de relieve que esta estrategia se sustenta en considerar, por ejemplo, que la correspondencia número–punto no comporta complejidad para las y los estudiantes. Sin embargo, en su estudio identifica concepciones de estudiantes del nivel secundario según las cuales esta correspondencia no está establecida en ambos sentidos. Mientras que un gran número de estudiantes muestra dificultad para asignar a un número con expresión decimal infinita un punto de la recta, son más quienes aceptan que a cada punto le corresponda un número. En su indagación también releva ideas intuitivas sobre la recta: considerarla naturalmente continua, no atomista, y sobre la que se “ubican” los puntos, o bien que está formada por puntos que la constituyen. Además, identifica que los puntos de la recta tampoco poseen –para los y las estudiantes– los atributos de continuidad y densidad. En este sentido, la autora sostiene que el marco numérico parece ser el más favorable para que los y las estudiantes conceptualicen la densidad del orden, siendo esta propiedad luego transferida a los puntos de la recta, y no al revés. Por último, esta identificación entre puntos y números favorece lo que Castela denomina el “pasaje clandestino” de \mathbb{R} por la *escuela secundaria* (esto es, un trabajo escolar que se lleva

¹Proyecto de Investigación PI UNIPE 22-23/14, Programación Científica 2022-2023, UNIPE

a cabo sin definir explícitamente a \mathbb{R} ni problematizar las características de este conjunto numérico).

Bergé (2004) en su tesis de doctorado recupera distintos autores que estudian la recta numérica como objeto de enseñanza en los niveles secundario y superior. Sus principales conclusiones ponen de relieve que la correspondencia entre puntos y números no es evidente para las y los estudiantes quienes pueden conceptualizar de maneras diferentes a la recta real (y por consiguiente a los puntos) dando lugar a objetos con diferentes atributos y propiedades.

En relación a lo continuo en la recta, desde una construcción intuitiva y geométrica es posible considerarlo como lo que no tiene agujeros ni saltos (Vergnac, 2013). Si bien esta caracterización permite distinguir lo continuo de lo discreto, no necesariamente permite distinguirlo de lo denso. Por ejemplo, no es posible distinguir visualmente la recta racional, que es densa pero no continua, de la recta real que es continua. Esta concepción es considerada por Durand-Guerrier (2018) y Vergnac (2013) como la “díada continuo/discreto” en la cual –según la visión de los y las estudiantes– entre lo discreto y lo continuo “no hay nada”. Las autoras sostienen que un estudio de la densidad de \mathbb{Q} permitiría considerar la “tríada discreto/denso/continuo” que sería un punto de apoyo para la conceptualización del conjunto de los números reales.

Montoro et al. (2017) estudian las concepciones de estudiantes de educación secundaria y universitaria sobre la naturaleza de la recta numérica en tanto representación de los números reales. Para ello diseñan y administran cuestionarios donde proponen una tarea que toma en cuenta actividades desarrolladas por Robinet (1986) y Romero (1996) y en la que piden a estudiantes analizar el fenómeno de amplificar infinitamente la imagen de una recta (en el estilo de la herramienta de *zoom* en GeoGebra). Esta experiencia permite hacer emerger las imágenes mentales disponibles de los y las estudiantes. Aunque la tarea se hace cargo de ubicarlos en una posición teórica, el pedido de dibujos que den cuenta de lo que imaginan como posible tensiona el problema hacia una situación concreta. Nos interesa esta tensión y la consideramos constitutiva del asunto que investigamos. Por último, la variedad de edades y orientaciones da como resultado una distribución de concepciones entre modelos de recta dibujada o material, discreta, densa y continua. Las autoras encuentran una relación entre estas concepciones y un mayor nivel de estudio en matemática.

A través de una investigación sobre enseñanza de los números reales para la escuela secundaria, Benito et al. (2023) consideran distintos procedimientos de representación de números en la recta y observan que mientras los números racionales disponen de un método con una cantidad finita de pasos, no sucede lo mismo con los números irracionales. De este modo, la tarea de ubicar a estos números en la recta numérica trae nuevas ideas para los y las estudiantes. En efecto,

la posibilidad de tener una ubicación teórica y precisa de ciertos números en la recta, constituye una problematización de la recta en tanto objeto matemático. Es necesario concebir un lugar “ideal” de todos los números en la recta numérica más allá de la representación efectiva. En este mismo sentido analizan una práctica usual en la escuela secundaria en Argentina: la ubicación de raíces cuadradas no enteras en la recta numérica apoyados en el teorema de Pitágoras. Para estos autores, esta práctica puede vivir simplemente como una técnica, pero también puede utilizarse como punto de apoyo para la conceptualización de los reales a partir de una propuesta que invite a un posicionamiento teórico por parte de los y las estudiantes.

Mencionamos previamente que los desarrollos decimales infinitos pueden representar un obstáculo al considerar su ubicación en la recta. La concepción de estudiantes sobre el infinito se torna así en un asunto a tener en cuenta para pensar la representación en la recta numérica de los números reales. Tomamos investigaciones (Garbin, 2005; Kidron & Tall, 2015; Sierspínska, 1987) que señalan distintas concepciones del infinito tanto en estudiantes de nivel secundario como superior: por un lado, la percepción del infinito potencial que no considera que el proceso esté completo y, por el otro, la aceptación del infinito en tanto proceso finalizado. Montoro y Ferrero (2022) reconocen otras concepciones del infinito al indagar en estudiantes de los últimos años de la escuela secundaria y primeros años de la universidad. Identifican en estudiantes con menor formación en matemática dos concepciones finitistas predominantes: percibir al infinito como un número muy grande o extender la propiedad de los conjuntos finitos a los infinitos. Además, recuperan de estudios anteriores la concepción de “infinito es todo” en tanto percepción según la cual un conjunto con cardinal infinito precisa incluir a todo elemento en consideración. Las autoras señalan que la diferenciación entre infinito y todo “necesita de cierta profundidad en el estudio de matemática”. Por otra parte, en investigaciones que consideran estudiantes universitarios de distintas carreras, Montoro y Scheuer (2004) identifican otras concepciones donde el infinito se asocia a lo “no determinado” o imposible de prever. En la indagación que presentamos en este artículo estas concepciones del infinito se revelan frente a la necesidad de considerar la ubicación exacta de las expresiones decimales infinitas.

En particular, Garbin (2005) analiza el impacto que tienen algunas representaciones –tales como modelos, dibujos y figuras– en la comprensión del infinito tomando de Fischbein una explicación que resulta de interés en nuestro estudio. Según esta autora, apelamos a imágenes mentales que pueden generar conflicto con los conceptos matemáticos en juego, por ejemplo, sabemos que los puntos no tienen dimensión, aunque los visualizamos con una pequeña superficie. Es en este sentido que Fischbein advierte una dificultad de índole psicológica en el gesto de liberarnos de algunas imágenes, dificultad que vemos reflejada en las

contradicciones del grupo de estudiantes que entrevistamos, quienes sostienen que la recta no tiene grosor mientras que dotan a los puntos de una diminuta superficie.

En vínculo con las ideas acerca del infinito queremos abordar algunas cuestiones del estudio de la densidad de los reales. Interpretar la propiedad de densidad obliga a romper con la idea del infinito como algo en expansión (Vergnac, 2013) que subyace por ejemplo en la construcción de los conjuntos de números enteros. Comprender y atrapar la existencia de infinitos números entre dos dados supone una percepción del infinito que puede no resultar evidente para estudiantes particularmente de escuela secundaria (Cedrón et al., 2021). Benito et al. (2023) proponen un estudio de la densidad de los números reales apoyado tanto en la representación decimal de los números y el orden en la numeración posicional (Castela, 1997; Cedrón et al., 2021) como en la representación de puntos en la recta numérica, por ejemplo considerando en \mathbb{Q} el punto medio entre dos puntos racionales. Así, las ideas del infinito –tanto en la representación decimal de los números como en la posibilidad de ubicar infinitos puntos entre dos dados– se entrelazan en la conceptualización de la recta en tanto representación de los números reales.

Algunos estudios sobre futuros profesores de matemática se han detenido en sus conocimientos formales e intuitivos de la irracionalidad. Peled y Hershkovitz (1999) indican que, aunque estos/as estudiantes conocen las características básicas y las definiciones de los irracionales, fallan en tareas que requieren un uso flexible de sus distintas representaciones. A su vez, Zazkis y Sirotic (2004) muestran que grupos de estudiantes de nivel avanzado del profesorado confunden en determinadas representaciones la condición de racional/irracional. Las conclusiones enfatizan la necesidad de sostener desde la enseñanza las distintas representaciones de los números dotadas de propiedades que fundamenten las equivalencias entre éstas. Para nuestro estudio nos interesa también recuperar la distinción que realizan las autoras entre representaciones opacas y transparentes de los números: una representación es transparente con respecto a una determinada propiedad si la misma puede derivarse a partir de la representación dada y, es opaca respecto a una característica, si ésta queda oculta en esa representación. Así, la representación de $0,10100100010000\dots$, es una representación transparente respecto a la irracionalidad de ese número, mientras que la representación $0,61802575107\dots$ del número $144/233$ que posee un período de 232 dígitos resulta opaca respecto a la racionalidad.

Por otra parte, en Sirotic y Zazkis (2007) se indagan las ideas de futuros profesores frente a la representación en la recta numérica de números irracionales; en particular, para el número $\sqrt{5}$. En su estudio muestran que solo el 20% –sobre un total de 46– logra ubicarlo de manera exacta. La mayoría de los futuros profesores se apoya en ubicaciones aproximadas del número en la recta y dudan de la posibilidad de una ubicación exacta dado que el desarrollo decimal no tiene fin. Las

autoras identifican que predomina en estos estudiantes la concepción de una recta racional. Además consideran que la representación de números irracionales a través del teorema de Pitágoras colaboraría con atrapar el concepto de irracionalidad al vincularlo con una representación específica del objeto (punto en la recta numérica a una distancia irracional de 0). Este método para representar ciertos números en la recta se constituye en una alternativa frente a un desarrollo decimal infinito no periódico que se concibe como un proceso sin fin. En el estudio que presentamos en este artículo nos detenemos a identificar y analizar las preguntas y conflictos que genera la (necesaria) puesta en relación de esta diversidad de representaciones, luego de que sean objeto de una primera instancia de aprendizaje.

Para precisar qué entendemos en este artículo sobre la noción de concepción tomamos el aporte de Artigue (1982, 1990) para quien la concepción constituye una idea construida por los y las estudiantes acerca de un objeto matemático en vínculo con situaciones de aprendizaje que ofrece la enseñanza. Así la concepción es local, ligada al conocimiento en juego en la enseñanza.

Cuando Castela (1997) indica que algunos/as estudiantes tienen una concepción de los puntos en la recta como “pince à linge” (pinzas para la ropa) se interesa por el modo en el que se imaginan a los puntos en la recta. La concepción involucra en este caso una visualización.

Las concepciones son movilizadas por un sujeto, en algunos casos con una consciencia personal de ellas, por ejemplo cuando las explicita para argumentar sobre algo; otras veces implícitamente cuando las utiliza durante un procedimiento: en este caso las pone en acto (concepción en acto).

Así, la concepción remite a interpretaciones y visualizaciones de un sujeto que resulta coherente desde su perspectiva en el espectro de un conjunto de ideas que ese sujeto tiene sobre alguna cuestión.

A continuación presentamos los propósitos y objetivos que nos planteamos para el desarrollo de los cuestionarios y entrevistas que compartimos en este artículo.

§3. Propósito y Objetivos

Como venimos señalando, diversas investigaciones afirman la necesidad de problematizar desde la enseñanza y de conceptualizar desde el aprendizaje el objeto matemático denominado “recta real” como una dimensión imprescindible en la comprensión de los números reales. Mencionamos en la Introducción que comprender la biyección número–punto configura un problema matemático complejo. Ahora bien, la problematización de este objeto en la formación de los futuros profesores de matemática no resulta evidente. Es por esto que nos propusimos como proyecto de investigación, estudiar condiciones didácticas favorables para que estudiantes del profesorado de matemática alcancen una concepción robusta y estabilizada de la recta real.

Con este propósito, comenzamos indagando en estudiantes que estaban terminando el primer año de formación qué concepciones tienen sobre los números reales, la recta numérica y la recta geométrica, y qué vínculos establecen entre ellos. Esto nos ofrece una base para diseñar, una secuencia de enseñanza destinada a futuros docentes de matemática donde la recta numérica esté dotada de las propiedades matemáticas necesarias para reflejar una comprensión profunda de los números reales.

Presentaremos aquí un análisis de esta primera indagación donde nos propusimos relevar información sobre conocimientos, ideas y dificultades que tienen los y las estudiantes acerca de:

- la recta y sus puntos en tanto objetos ideales: ¿distinguen la recta en tanto objeto ideal de la matemática de su representación concreta y material? En la misma línea, ¿distinguen a los puntos ideales de su representación concreta?
- la correspondencia entre números y puntos de una recta: ¿cómo conciben la distribución de números en la recta numérica?, ¿creen que los números completan toda la recta? ¿O, por el contrario, consideran que hay más puntos en la recta que números que se puedan ubicar en ella? ¿O piensan que existen más números que puntos en la recta?
- la ubicación de los números en la recta: ¿qué dificultades plantea pensar la ubicación exacta de números en la recta? En particular, ¿qué problemas detectamos en relación con las características de los números para determinar su ubicación? Puntualmente nos interesó estudiar el rol de la escritura decimal infinita en la comprensión de la representación de los reales en la recta.
- la densidad del conjunto de los números reales (\mathbb{R}): ¿qué ideas dominan sobre la densidad del conjunto de los números racionales (\mathbb{Q}) en sí mismo, de \mathbb{Q} en \mathbb{R} y de los irracionales en \mathbb{R} ? ¿Y sobre otros subconjuntos de \mathbb{R} como las expresiones decimales finitas?
- las representaciones de números reales: ¿qué representaciones de números aceptan o reconocen como número real? En particular, ¿qué dificultades produce la notación decimal para reconocer un número real?

En el siguiente apartado ampliaremos las decisiones metodológicas para llevar adelante nuestra indagación.

§4. Metodología

Para indagar las nociones sobre la recta numérica de estudiantes que finalizan un primer año, tomamos en cuenta que la institución tiene acceso irrestricto a la carrera. Por esta razón, los y las estudiantes inician su formación apoyados en sus experiencias anteriores poniendo en juego en cada asignatura sus ideas construidas en el nivel secundario. Respecto a la población de ingresantes su

formación de base es diversa al igual que su edad. En algunos casos han finalizado el secundario hace pocos años y en otros llevan más de diez años de terminada dicha formación. La posibilidad de recuperar nociones estudiadas mucho tiempo atrás y no utilizadas desde entonces es una cuestión de la que se hace cargo la propuesta formativa universitaria durante el primer año. En efecto, en este período la formación del profesorado de matemática de la UNIPE realiza una propuesta en la que se consolidan nociones centrales de la geometría, los números enteros, racionales e irracionales, y las funciones de variable real; todas estas cuestiones forman parte de la currícula del nivel secundario.

Elaboramos un cuestionario que fue suministrado a 18 estudiantes, quienes finalizando el segundo cuatrimestre del primer año, cursaron –parcial o totalmente– las asignaturas del programa de formación. Fue respondido en forma presencial (en papel) en la última clase de una de las materias del primer año en la que las docentes son parte del equipo de investigación. El cuestionario tiene como propósito documentar aspectos de las conceptualizaciones de un grupo de estudiantes construidas durante el cursado de estas asignaturas y también en su formación previa. Por otra parte, el análisis de estas conceptualizaciones sirve como insumo para identificar problemáticas a abordar en el diseño de una secuencia de enseñanza sobre los números reales a desarrollar en una asignatura que corresponde al segundo año de la formación, año en el cual se introduce el cálculo. Por lo que este grupo de estudiantes no ha estudiado las nociones de límite, continuidad, derivación y/o integración al momento de completar el cuestionario.

El cuestionario se organiza en dos secciones. En la primera, se presentan siete afirmaciones y se solicita indicar el grado de acuerdo con cada una de ellas pudiendo elegir entre las siguientes opciones: estás totalmente de acuerdo, estás parcialmente de acuerdo, no estás de acuerdo, no podrías tomar posición al respecto. A partir de los objetivos de la investigación y del análisis *a priori* de las afirmaciones solicitamos una explicación por escrito de la opción seleccionada para dos de estas afirmaciones. La segunda parte consiste en cuatro consignas abiertas. En ellas esperamos que los y las estudiantes: muestren en qué se apoyan para distinguir a los números reales de otros conjuntos contenidos en \mathbb{R} , identifiquen números reales a partir de diferentes escrituras, ubiquen números en la recta apelando a técnicas de representación que se apoyan en los teoremas de Thales o de Pitágoras y generalicen sus procedimientos adaptando las construcciones.

Las respuestas al cuestionario fueron analizadas con foco en: el grado de coherencia entre las distintas elecciones y explicaciones, la explicitación de nociones teóricas para sostener elecciones, el uso de ejemplos –concretos o genéricos– para sostener afirmaciones generales, las concepciones de infinito actual o potencial puestas en juego para considerar, por ejemplo, la ubicación de puntos en la recta.

Este análisis permitió identificar diferentes posturas a partir de las cuales seleccionamos dos grupos de 4 estudiantes para realizar entrevistas individuales². Un grupo se caracteriza por cierto posicionamiento teórico, por emplear propiedades en sus explicaciones escritas, aunque no siempre de manera completa o abarcando la generalidad involucrada, pero se evidencia una coherencia con las respuestas dadas en las consignas abiertas y las que dieron a las consignas cerradas. En el otro grupo, ubicamos a estudiantes cuyas respuestas presentaron algunas contradicciones, los conceptos teóricos que mencionaron y los ejemplos utilizados nos resultaron menos accesibles para entender su posición.

En el diseño de la entrevista elaboramos un conjunto de preguntas para avanzar sobre las respuestas brindadas en el cuestionario y, además, una serie de ejemplos a proponer en caso de ser necesario para poner a prueba su posicionamiento. Algunas preguntas fueron diseñadas para todas las entrevistas mientras que otras fueron específicas para estudiantes en particular con la intención de avanzar en la comprensión de sus explicaciones o también dilucidar concepciones puntuales esbozadas en el cuestionario.

Cada entrevista fue pautaada en forma individual con cada estudiante una vez finalizada la etapa de exámenes del profesorado. Se realizó en un formato híbrido: el/la estudiante asistió a un espacio de la universidad donde era recibido por un entrevistador del equipo de investigación que no pertenecía al grupo de docentes de ese primer año. En el encuentro participaba conectado de manera remota otro investigador–entrevistador y docente del estudiante. Decidimos esta combinación para dar cierta contención a los entrevistados quienes habían dado conformidad para participar de esta indagación en la cual sus docentes eran parte del equipo de investigación. Las entrevistas semiestructuradas fueron videograbadas, aplicadas tres semanas después de completados los cuestionarios y duraron 45 minutos. Durante la entrevista, cada estudiante tuvo disponible sus respuestas las cuales se fueron leyendo como parte de la conversación. En algunos casos cambiaban de posición releendo sus respuestas y ese cambio de posición se registró por escrito.

Por último, cada entrevista fue desgrabada y las transcripciones, junto con los videos, fueron el material analizado a la luz de las preguntas formuladas para el estudio, en forma conjunta con los cuestionarios completados, también cruzando respuestas de los distintos entrevistados hasta lograr visualizar y caracterizar concepciones del grupo de estudiantes.

§5. Análisis y resultados

5.1. El cuestionario. En este apartado nos centraremos en las siete afirmaciones presentadas en la primera sección del cuestionario. Analizaremos las posiciones tomadas por los y las estudiantes y sus argumentaciones interpretando posibles

²Finalmente 7 de los 8 estudiantes se presentaron a las entrevistas.

concepciones que pueden comandar sus respuestas. Estas interpretaciones constituyen una primera evidencia sobre sus concepciones.

En las distintas investigaciones que se proponen conocer conceptualizaciones de estudiantes sobre números reales y la recta (Castela, 1997; Montoro et al., 2017; Scaglia, 2000) se presenta una regularidad: cuando la pregunta que se formula o la afirmación que se analiza refiere a representaciones materiales de objetos ideales, la formulación puede ser compleja y difícil de comprender para los y las estudiantes. No obstante, consideramos que la indagación en sus concepciones necesita pasar ineludiblemente sobre estos aspectos.

Afirmación 1: “Al trazar una recta, la línea que dibujamos es una representación material y como tal tiene grosor pero la recta es un objeto ideal y por lo tanto no tiene grosor”.

Esta afirmación nos permite distinguir una posición de los y las estudiantes más próxima a lo ideal o a lo material, en cuanto a la concepción de la recta. Quienes distinguen entre objetos materiales e ideales estarían totalmente de acuerdo, mientras que alguien que no reconoce un objeto ideal podría no tomar posición al respecto o estar en desacuerdo. Si consideran a la recta como un objeto de representación material estarían en desacuerdo con que la recta no tiene grosor.

El 61 % estuvo totalmente de acuerdo con la afirmación y ningún estudiante se manifestó en desacuerdo. El 28 % seleccionó la opción “parcialmente de acuerdo”, mientras que el resto no pudo tomar posición. A partir de estos resultados consideramos que la mayoría concibe a la recta en una doble dimensión, por un lado la material y por el otro la ideal. Las entrevistas ofrecen matices a esta primera síntesis.

Afirmación 2: “Los puntos de la recta ocupan una diminuta superficie.”

En este caso, en el enunciado no se distingue si se trata de objetos materiales o ideales para dar la oportunidad al grupo de estudiantes a poner en juego estas dimensiones ya compartidas en la afirmación anterior. Es por ello que la respuesta a esta afirmación se puede analizar en vínculo con la primera. Quienes consideran que los puntos y la recta son objetos materiales, estarían de acuerdo. Quienes sostienen que la recta ideal no tiene grosor podrían pensar que los puntos ideales no tienen superficie y, en tal caso, no estarían de acuerdo. Quienes distinguen entre objetos ideales y objetos materiales, podrían no tomar posición al respecto o estar parcialmente de acuerdo porque consideran que falta información. De las respuestas obtenidas, el 50 % estuvo totalmente de acuerdo, el 22 % parcialmente de acuerdo, el 22 % no estuvo de acuerdo y un único estudiante no respondió.

En vínculo con las respuestas de la afirmación 1 y considerando el 61 % que está de acuerdo con su enunciado, notamos que la mitad dice estar totalmente de

acuerdo en que los puntos ocupan una diminuta superficie. Es decir, estos estudiantes pueden reconocer a la recta como objeto matemático, pero cuando responden sobre un enunciado sin distinciones optan por una concepción material de los puntos que la componen. En los antecedentes, hicimos referencia a la advertencia de Vergnac (2013) sobre la complejidad que implica concebir una línea infinita a partir de puntos sin superficie. Este grupo podría estar en una posición intermedia entre una mirada ideal y una material. Las lógicas subyacentes a estas posiciones se hicieron evidentes en las entrevistas.

Afirmación 3: “La recta numérica es el conjunto infinito de puntos que señalan a distintos números y si quitamos un punto generamos un agujero en la recta porque se pierde un número real.”

Con esta afirmación nos proponemos indagar acerca de las ideas de los y las estudiantes sobre la correspondencia entre puntos y números de la recta. Creemos que alguien que tiene una idea –intuitiva al menos– sobre la biyección entre números y puntos estaría de acuerdo con la afirmación. Quienes supongan la existencia de puntos en la recta libres de correspondencia con números podrían estar en desacuerdo –total o parcialmente– considerando que el punto que se saca podría no quitar números de la recta. Por otro lado, podrían suponer que, habiendo infinitos puntos en la recta, sacar uno no genera un agujero. Este argumento puede estar apoyado en la idea de que los puntos son “tantos” que resulta imperceptible quitar uno de ellos o bien, que al ser infinitos los puntos se “redistribuyen” y “ocupan” ese lugar. En este caso no estarían de acuerdo con la afirmación.

En síntesis, según nuestro análisis *a priori* de esta afirmación podemos anticipar que quienes están de acuerdo, tendrían construida alguna idea sobre la biyección número–punto mientras que las concepciones que subyacen a cualquier otra respuesta son diversas y por lo tanto menos evidentes.

Los resultados del cuestionario muestran una situación equilibradamente dividida: el 50 % del grupo estuvo de acuerdo con la afirmación, el 10 % estuvo parcialmente de acuerdo y el 40 % no estuvo de acuerdo.

Dado que en el enunciado se consideran puntos de la recta en vínculo con números, esta afirmación no resulta eficaz para indagar la posición que algún grupo de estudiantes pudiera tener sobre la existencia de números sin representación en la recta.

Afirmación 4: “Si ubicamos un punto en la recta numérica y lo movemos a lo largo de toda la recta, el punto pasará por todos los números reales sin dejar ninguno afuera.”

Con esta afirmación queremos seguir indagando acerca de la idea que tienen los y las estudiantes sobre la biyección número–punto. Si tienen construida esta biyección, estarían de acuerdo. No obstante, si consideran que la recta tiene puntos que

no se corresponden con números, también estarían de acuerdo con la afirmación. Tuvimos en cuenta esta alternativa para avanzar en las entrevistas.

Quienes piensan que algunos números no tienen una ubicación precisa en la recta numérica pueden dudar de la posibilidad de recorrerlos a todos al mover un punto sobre ella y en consecuencia podrían no estar de acuerdo, total o parcialmente.

El 61 % estuvo completamente de acuerdo, el 28 % en desacuerdo –parcial o totalmente– y los restantes no contestaron esta afirmación.

Comprendemos que la afirmación puede remitir al grupo de estudiantes a un conjunto de visualizaciones con matices respecto de qué significa mover un punto a lo largo de toda la recta. Advertidos por algunas investigaciones precedentes (Castela, 1997; Montoro et al., 2017) sobre esta posibilidad, nos propusimos para las entrevistas superar la visualización de los objetos involucrados en la afirmación, acercando ejemplos intencionalmente elaborados de forma que permitan medir cuán robusta está en el entrevistado la idea sobre la biyección número–punto.

Afirmación 5: “Es posible elegir dos puntos en la recta numérica de forma tal que no haya entre ellos un punto correspondiente a un número racional.”

Con esta afirmación queremos comprender qué nociones sobre la densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{R} tienen los y las estudiantes, en particular la densidad en el contexto de la representación de \mathbb{R} en la recta numérica.

Quienes estén de acuerdo no conciben la densidad del orden de los racionales en \mathbb{R} , tomando a la recta como objeto de representación. Dado que el enunciado refiere a puntos, sin especificar si corresponden a números racionales o irracionales, la afirmación requiere que cada estudiante considere distintos casos: dos números racionales, dos números irracionales o bien una combinación de ellos. Este nivel de generalidad es complejo de atrapar. Es por esto que decidimos pedir una explicación de la posición que toman.

Es posible que algún grupo de estudiantes tenga construida una idea de densidad de \mathbb{Q} en sí mismo³, “dados dos racionales hay siempre un racional entre ellos”. Sostenidos en esa idea podrían considerar en sus explicaciones, de manera explícita o implícita, dos puntos arbitrarios correspondientes a números racionales y en tal situación asegurarse un punto entre ellos –en la recta– correspondiente a un número racional. De esta forma, estarían en desacuerdo con la afirmación, pero sin diferenciar la recta real de la racional, considerando que la recta numérica está formada únicamente por puntos que se corresponden a números racionales.

Otro grupo de estudiantes podría considerar puntos que no sean racionales. En este caso encontramos a quienes conciben que todo punto de la recta representa a

³Algunos/as estudiantes que respondieron este cuestionario estaban cursando en paralelo la materia *Aritmética II. Números Racionales: orden y densidad*. En esta materia se realiza un estudio de la densidad de \mathbb{Q} en sí mismo desde las diversas representaciones de los números racionales en tanto sus escrituras (fraccionaria o decimal) como en la recta numérica.

algún tipo de número real y por lo tanto tomen también a los puntos irracionales como candidatos. Así podrían estar de acuerdo o en desacuerdo con la afirmación según los conocimientos que tengan de los números reales. Por ejemplo, podrían sostener que si se parte de puntos que representan irracionales no es posible hallar un racional entre ellos con el supuesto de que la densidad es válida sólo para los números racionales.

También podemos encontrar a quienes consideran que existen puntos en la recta que no refieren a números y en este caso podrían dudar si entre estos puntos hay o no números racionales. Podrían pensar que es posible tener un tramo de la recta sin racionales, solo compuesto por puntos que no se corresponden con números, y por lo tanto estarían de acuerdo con la afirmación.

Del total de respuestas, el 66 % está en desacuerdo y solo un 6 % está de acuerdo con la afirmación. El resto no contestó o no pudo tomar posición al respecto y no dió explicación. La mitad de quienes están en desacuerdo hace mención a la propiedad de densidad de manera implícita o explícita. Solo algunos/as identifican los puntos iniciales como racionales. Podemos conjeturar que en términos generales la densidad de los racionales es una cuestión consolidada y se activa frente a una situación que no proviene del ámbito numérico ya que se inicia en la recta. Dado que las explicaciones solo se apoyan en puntos racionales, nos queda por comprender si también consideran la densidad de \mathbb{R} . Sobre estas cuestiones decidimos avanzar a través de las entrevistas.

Afirmación 6: “Si elijo al azar un punto en la recta numérica es más probable que corresponda a un número racional que a un número irracional.”

Esta afirmación nos da información acerca de “cuántos” irracionales conocen. Aquellos/as que consideren que la cantidad de racionales es mayor que la de los irracionales, estarán de acuerdo con la afirmación.

Sabemos que muchos estudiantes, por su recorrido en la escuela secundaria, conocen algunos irracionales como π , e , $\sqrt{2}$ y eventualmente algunas otras raíces de enteros que ubicaron en la recta numérica apoyados en el teorema de Pitágoras. Esto contribuye a construir la idea de que los irracionales son muchos menos que los racionales.

Sin embargo, no estar de acuerdo con esta afirmación no nos informa necesariamente que estén considerando que hay más irracionales que racionales. Podrían pensar que las cantidades infinitas son todas iguales y, apoyados en el conocimiento de las raíces de números primos y los números no periódicos expresados con leyes de formación, imaginar la infinitud de ambos tipos de números. De este modo pueden concluir que la probabilidad de encontrar números de una clase u otra es la misma.

La mitad del grupo de estudiantes no estuvo de acuerdo con la afirmación y sólo el 16 % estuvo de acuerdo. Esta distribución nos permite conjeturar que para la mayoría los irracionales no son unos pocos números. Sin embargo, a la luz de las explicaciones de la Afirmación 5, advertimos que la mayoría considera como primera o única opción que un punto arbitrario de la recta corresponde a un número racional.

Afirmación 7: “Los números con expresión decimal infinita no tienen una ubicación exacta en la recta numérica.”

Esta afirmación nos permite indagar sobre la incidencia que tiene la infinitud de una expresión decimal en la posibilidad de que un número con esas características tenga una ubicación exacta en la recta. En este caso pedimos una explicación de su posición para poder acceder a los distintos ejemplos de números con expresión decimal infinita que consideran las y los estudiantes, a las conceptualizaciones que tienen sobre ellos y al papel que juega el hecho de disponer o no de un protocolo de construcción para concebir la existencia de la ubicación en la recta.

Quienes estén en desacuerdo con esta afirmación podrían apoyarse en uno o más ejemplos de números con expresión decimal infinita a los cuales les asignen una ubicación exacta en la recta, tanto racionales como irracionales. En efecto, podrían recurrir a expresiones decimales periódicas que pueden representarse de modo exacto con apoyo en el teorema de Tales, o bien a números irracionales particulares, como las raíces cuadradas no enteras para los cuales también conocen un método de construcción con base en el teorema de Pitágoras⁴. En todos estos casos recurren a un método para aceptar la ubicación exacta en la recta.

Dentro de las personas que estén de acuerdo con la afirmación podemos encontrar a quienes las condiciones materiales no les permiten tener precisión o a quienes consideran que frente a una expresión decimal infinita todo procedimiento de ubicación no se puede concluir. En el primer caso estarían considerando un proceso concreto de ubicación en la recta que trazan en la hoja que solo les permite ubicar el número de manera aproximada y no un procedimiento ideal de ubicación de los números. En el segundo caso conjeturamos que es la conceptualización del infinito como infinito potencial la que comandaría la relación entre los números con expresión decimal infinita y su representación en la recta (Castela, 1997; Sirotic & Zazkis, 2007).

Sobre los resultados obtenidos, el 44 % acuerda con la afirmación, el 44 % está en desacuerdo y 12 % está parcialmente de acuerdo.

Entre quienes acuerdan con la afirmación, la totalidad menciona la infinitud de la expresión decimal como impedimento para encontrar la posición exacta. Utilizaron expresiones como: “el número es infinito”, “no sabemos con exactitud el número”,

⁴En la materia *Aritmética II. Números racionales: orden y densidad* se estudia la existencia de números irracionales y la ubicación en la recta numérica de raíces cuadradas de números enteros.

“el número no es exacto”. Estas explicaciones podrían estar mediadas por distintas concepciones del infinito, ya sea una concepción del infinito potencial (por encima del actual) o una asociación del infinito con lo no determinado o imposible de prever (Montoro & Scheuer, 2004).

Algunos/as estudiantes que estuvieron en desacuerdo exhibieron ejemplos de números periódicos y/o de raíces cuadradas no enteras como habíamos anticipado. Otros/as, mencionaron esos ejemplos pero agregaron números que consideraron que no pueden ubicarse de manera exacta, mencionando a los irracionales dados por leyes de formación. Es decir, propusieron ejemplos para los que no conocen un método de construcción y por ese motivo no tienen una ubicación exacta. En otros casos expresaron que, a pesar de no conocer un método de ubicación para algunos números, todos tienen un lugar exacto en la recta. Además, encontramos en este grupo respuestas que afirman estar en desacuerdo porque estos números pueden expresarse como fracción; es decir, consideran que los números de expresión decimal infinita son racionales sin tener en cuenta la posibilidad de que estos sean irracionales.

A partir de las explicaciones analizadas notamos que la mayoría necesita conocer un método de construcción de finitos pasos para asumir que la ubicación del número en la recta es exacta. Además, observamos que estar en desacuerdo con la afirmación no asegura que los y las estudiantes piensen que todos los números tienen una ubicación precisa en la recta.

Las respuestas al cuestionario nos permitieron tener una primera aproximación a las concepciones de los y las estudiantes sobre las ideas que mencionamos en la §3 Propósito y objetivos.

- La mayoría puede reconocer a la recta como objeto matemático en una doble dimensión, por un lado la material y por el otro la ideal. Respecto a los puntos, este posicionamiento no es tan evidente pues en su mayoría los conciben ocupando una superficie evidenciando así una concepción más material.
- Ningún estudiante considera que hay más puntos que números en la recta. En general asignan un número racional a un punto de la recta aunque esto no implica desconocer la existencia de números irracionales en la recta.
- Para algunos/as estudiantes la infinitud de una expresión decimal es un impedimento para encontrar una ubicación exacta de estos números en la recta. Para otros/as, la ubicación exacta en la recta de expresiones decimales infinitas depende de la existencia de un método de finitos pasos. Si se conoce el método (Thales o Pitágoras), tendrán una ubicación exacta en la recta y en caso contrario no la tendrán.

- La mayoría tiene consolidada la densidad de los racionales y la consideran también sobre la recta numérica⁵. Sin embargo, necesitamos comprender su alcance en \mathbb{R} .

Las respuestas a las afirmaciones de opción múltiple nos permitieron conocer el grado de acuerdo de los y las estudiantes con respecto a esos enunciados. Las explicaciones escritas brindaron una primera aproximación a las ideas que sustentaban sus posiciones. Estas interpretaciones iniciales fueron puestas en vínculo con nuestras anticipaciones y las entrevistas posteriores ayudaron a profundizar y encontrar matices en el alcance de sus ideas. Esto se desarrollará en el próximo apartado.

5.2. Las entrevistas. El análisis de las respuestas del grupo de estudiantes al cuestionario nos brindó un primer acercamiento a sus concepciones sobre: la recta real y sus puntos en tanto objetos ideales; la correspondencia entre números y puntos de una recta; la ubicación de números en la recta; la densidad de \mathbb{R} y las representaciones de los números reales.

A continuación, compartimos algunos ejes de análisis elaborados a partir del despliegue de nuevas ideas o ampliaciones que surgieron en las entrevistas realizadas a siete estudiantes de los 18 que respondieron el cuestionario. En este apartado nos referiremos a seis entrevistadas: Andrea, Cristina, Diana, Isabel, Luciana y Laura.

5.2.1. Los puntos y su estatuto en la recta: ¿ocupan una diminuta superficie? ¿ocupan un lugar o espacio en la recta? Como se mencionó previamente, al diseñar el cuestionario decidimos que la primera afirmación sienta una posición ya que se refiere tanto a la recta material como a la ideal. Por el contrario, en el segundo enunciado “*Los puntos de la recta ocupan una diminuta superficie*”, no se especifica si se trata del plano material o ideal esperando que el estudiante cuestione en qué dimensión hace sentido y apele al que considere apropiado o pertinente. En este apartado compartimos el análisis de las reflexiones que realizaron las estudiantes en torno a estas dos afirmaciones.

En el cuestionario, Luciana omitió contestar a la segunda afirmación. En diálogo con la entrevistadora, expresa no entender el enunciado y al releerlo afirma “el punto ocupa un lugar”. Además, plantea una diferencia entre la recta ideal y la material: mientras que en la recta material un punto ocupa una diminuta superficie en la recta ideal no.

⁵Este resultado puede estar en vínculo con el hecho de que la mayoría de quienes completaron el cuestionario estaba cursando en paralelo la materia *Aritmética II. Números racionales: orden y densidad*. No pudimos obtener información de las respuestas al cuestionario en los casos que no dieron explicaciones y seleccionaron estar de acuerdo o que no podían tomar posición.

Por su parte, Cristina estuvo de acuerdo con las dos afirmaciones y al reflexionar sobre el segundo enunciado, se apoya en la recta material: “En la parte material, si yo pienso en las veces que ubicamos diferentes puntos... sí, es un diminuto espacio el que ocupa un punto”. En efecto, ella imagina los puntos sobre la recta material explicitando que “es con la que trabaja” (en alusión a su trabajo como docente del nivel primario), sobre la ideal prefiere no dar una respuesta.

Durante la entrevista, Isabel asume de modo implícito una visión material de la recta. En el cuestionario indicó que acuerda con las dos afirmaciones y fundamentó su posición para la segunda explicando que los números reales⁶ son infinitos. Ella expresa “Al lado de un número vamos a tener siempre otro número” y “todos ocupan un lugar, pero un lugar pequeñito. Podemos poner el 1,4 y al lado el 1,445 y está pegadito y 1,446 también va a estar pegadito”. A partir de esta necesidad de tener “muchos” números muy cerca, concluye que cada punto ocupa una diminuta superficie. En esta explicación, si bien coordina ideas sobre la recta, la infinitud de los conjuntos numéricos y el orden, su concepción sobre la recta es más cercana a una idea material que teórica.

En este mismo sentido, Diana acuerda con las primeras dos afirmaciones y para la segunda menciona “entre un número y otro puede haber infinitos, pero ocupan una diminuta superficie”. Diana no percibe una oposición entre la infinitud de puntos en un recinto acotado y el hecho de que cada uno ocupe una superficie.

Respecto a la afirmación 1, en el cuestionario, Andrea respondió que no puede tomar posición al respecto. Al volver sobre este enunciado en la entrevista, ella aclara que se quedó pensando y comenta algunas ideas discutidas en clases de una asignatura del Profesorado respecto a la relación material/ideal. Por ejemplo, “el triángulo es una figura idealizada” o “el círculo es una figura que se tiene en la mente, una figura ideal”. Esto la hizo pensar que podría ser lo mismo en el caso de la recta. Finalmente concluye que los objetos materiales tienen grosor y los ideales, no –tomando posición en la entrevista a favor de la afirmación 1–. Sin embargo, frente a la afirmación 2 señala que los puntos ocupan un espacio “muy chiquito” y por lo tanto “parcialmente ocupan un espacio.”

Las estudiantes que acuerdan con la doble dimensión –material e ideal– de la recta pero visualizan a los puntos ocupando un lugar o una superficie sobre ella, están –a nuestro entender– en una transición entre una concepción material y una ideal de la recta. En cierto momento asumen una mirada teórica al aceptar que la recta ideal no tiene grosor y, a la vez, están de acuerdo con que los puntos ocupan una pequeña superficie.

Todas argumentan que los puntos tienen una diminuta superficie porque son infinitos y constituyen la recta. Interpretamos que en estas ideas se pone en juego

⁶Si bien la afirmación se refiere a un punto en la recta, Isabel conecta punto con números y da su respuesta en el registro numérico.

una cierta materialización o imágenes mentales de los puntos pues, en su concepción, si no tienen superficie entonces la recta no existe. Retomando a Garbin (2005) comprendemos la coherencia en preguntarse, ¿cómo sería la recta compuesta por puntos sin superficie? ¿Cómo es posible que estos puntos existan sin ocupar una superficie? Por otra parte, al hablar de superficie, las estudiantes toman como equivalente ocupar un lugar y/o un espacio con la idea de ocupar una superficie. Entendemos que se produce una extensión del lenguaje natural a un contexto matemático. Aunque la entrevistadora utiliza la expresión “tienen una diminuta superficie”, las estudiantes responden en términos de lugar y espacio. Interpretamos que desde la perspectiva de ellas lo que “es o existe” tiene que ocupar un espacio, por lo que el punto es materializado para aceptar su existencia.

A su vez, encontramos una contradicción en los argumentos “los puntos de la recta ocupan una pequeña superficie porque son infinitos” y “entre dos puntos hay infinitos puntos”. La infinitud y densidad serían una razón para impedir que los puntos ocupen una superficie no nula, pues teniendo alguna superficie positiva, entre dos puntos solo podría ubicarse una cantidad finita entre ellos.

Volviendo al vínculo entre los números y la recta, entendemos que el recorrido por la escolaridad propone construir lazos entre ellos en pos de otorgarle a cada número un lugar en la recta a través de una identificación “punto–número”. También, desde el marco geométrico o funcional, los puntos son reconocidos como parte de la recta y, en cierta forma, “ocupando un lugar” en ella. Estas construcciones podrían operar en el hecho de que estas estudiantes piensen que los puntos “ocupan” una diminuta superficie en la recta.

A modo de síntesis de este apartado, hemos observado que varias estudiantes comparten algunas ideas teóricas sobre la recta (por ejemplo, que los puntos son infinitos o que entre dos puntos hay infinitos puntos) y acuerdan con la primera afirmación propuesta que distingue la recta material de la ideal. Además, para las estudiantes entrevistadas, los puntos adquieren una cierta materialidad en el momento de pensarlos como parte constitutiva de la recta, en aras de darle entidad a la propia recta. Interpretamos que considerar puntos sin superficie hace colapsar la idea de recta numérica, ella no podría existir como una unión infinita de puntos que “no se ven” y, en consecuencia, “no existen”.

Los matices que encontramos entre los dos grupos que distinguimos para hacer las entrevistas están vinculados a la explicitación de una diferencia entre la recta material e ideal. Mientras que un grupo acuerda en que los puntos ocupan una diminuta superficie sin indicar si se refieren a la recta material o ideal (asumen implícitamente una visión material), otro grupo distingue a los puntos con superficie para el caso de la recta material.

5.2.2. *La densidad en la recta numérica: ¿puede haber un racional entre dos irracionales? ¿y un irracional?* La afirmación 5, en la que se aborda la densidad, resultó compleja de interpretar para la mayoría de las estudiantes. Durante la entrevista, las alumnas muestran cierta dificultad para comprender el alcance de las ideas que involucra. Esta podría ser una de las razones por las que, en las explicaciones escritas, la mayoría consideró los dos puntos en el conjunto de los racionales y sus argumentos se basaron en la densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{Q} . Algunas enunciaron la propiedad de densidad en forma general y otras, propusieron ejemplos en los que los números involucrados son racionales. Es importante señalar que todas las entrevistadas ya habían estudiado esta propiedad en las clases de *Aritmética II. Números racionales: Orden y densidad*.

Al diseñar la entrevista, decidimos ampliar el alcance de esta afirmación del siguiente modo: “es posible elegir dos puntos en la recta de forma tal que entre ellos no haya un punto correspondiente a un número irracional”. También acordamos preguntar por la posibilidad de encontrar un punto racional entre dos irracionales –si no habían tenido esto en cuenta– y ofrecer algunos ejemplos concretos en el caso de que las estudiantes tuvieran alguna dificultad para explicar en forma general sus ideas.

La propuesta de incluir a los puntos irracionales en esta afirmación dio lugar a que las estudiantes –en su gran mayoría– se detuvieran a explicitar las dudas que les traía el hecho de considerar la ubicación de un número irracional en la recta numérica.

Luciana indicó que no está de acuerdo con la afirmación del cuestionario y en sus argumentos enunció la propiedad de densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{Q} . Durante el diálogo muestra confianza acerca de poder ubicar un racional partiendo de dos puntos racionales porque apela a dicha propiedad. En el caso de partir de dos puntos irracionales –algo que ella no había tenido en cuenta– tiene menos certeza. En relación con esto, ella menciona que “en algunos casos no es posible ubicar un irracional entre dos reales”. Sin embargo, construye un irracional entre dos racionales concretos recuperando un ejemplo de la clase de *Aritmética II*: “hemos construido un irracional entre uno y dos”. Cuando se le pregunta por otro caso –encontrar un irracional entre $1/3$ y $0,4$ – también puede hacerlo usando leyes de formación⁷. De este modo, Luciana muestra que puede generar sus argumentos en base a propiedades generales y también en construcciones de números en casos particulares. Si bien domina las leyes de formación para construir números irracionales, esto no le resulta suficiente para revisar su posición en el caso de partir de puntos irracionales e indica que: “entre dos irracionales no siempre es posible

⁷En el estudio de algunos números irracionales en el contexto de *Aritmética II. Números racionales: Orden y densidad* los y las estudiantes aprendieron a construir números dados por sus expresiones decimales infinitas a partir de determinar alguna ley que caracteriza la formación de esa expresión, lo que puede dar lugar tanto a una expresión periódica como a un número irracional.

encontrar un número irracional". Sus conocimientos sobre números irracionales son más recientes en su trayectoria de estudio respecto a los que dispone de los racionales y por eso entendemos que son menos estables o sólidos, así como también su posibilidad de generalizar estas ideas.

Por otra parte, Luciana comparte con las entrevistadoras que le cuesta aceptar la existencia de infinitos irracionales en la recta frente a la presencia de infinitos racionales densos. Concibe la infinitud de los números irracionales considerando sus escrituras decimales, pero se le genera un conflicto a partir de la representación en la recta de dichos números. No entiende cómo es posible que, teniendo la recta infinitos racionales, haya lugar para irracionales. Al respecto Luciana se pregunta "¿en qué lugar entran los irracionales en la recta (si ya hay infinitos racionales)?" Le parece que hay una contradicción entre ambos hechos. Vemos en ella una asimilación entre la densidad de \mathbb{Q} y la continuidad en la recta, un señalamiento hecho por investigaciones precedentes (Durand-Guerrier, 2018; Vergnac, 2013) que tuvimos presente para esta indagación. También puede deberse a una concepción sobre el infinito según la cual "infinito es todo" (Montoro & Ferrero, 2022).

Observamos que poner en juego la noción de densidad en vínculo con la recta, contribuye a precisar la diferencia entre una recta ideal y una material. En efecto, en la recta material no es posible ubicar infinitos puntos entre otros dos fijos mientras cada punto tenga una superficie (diminuta, pero distinta de cero). En el caso de Luciana, la dificultad que le trae concebir la ubicación de los puntos irracionales en la recta nos permite entender el papel que tiene este conflicto en su construcción de una recta ideal. Sin embargo, interpretamos que su visión se aleja de una recta material ya que acepta la idea teórica de que los infinitos números racionales densos tienen un lugar en la recta.

Andrea también se apoyó en la densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{Q} para explicar que entre dos puntos racionales siempre se puede encontrar un punto correspondiente a un número racional. Al revisar la afirmación y su respuesta, advierte que le faltó considerar el caso en el que se parte de puntos irracionales. Al respecto, ella se pregunta:

"Si tenemos dos números infinitos y no sabemos en qué momento terminan, ¿cómo los ubicamos? Porque ponele que son "consecutivos" (ella hace comillas con la mano), el último número cambia, pero... ¿y si vos no lo sabés? ¿Cómo encontrás entre dos números irracionales que sean más o menos consecutivos? ¿Cómo encontrás otro? Si son infinitos digamos... son decimales infinitos".

Andrea intenta aplicar estrategias para el orden de las expresiones decimales finitas en casos que involucran expresiones decimales infinitas. Para adaptarse a este nuevo contexto, imagina cómo detectar irracionales "consecutivos" para ubicar entre ellos otro número. Entonces supone que una expresión decimal infinita tiene

un último dígito y el problema es que no lo puede conocer. Esto le permite a ella hacer viable la existencia de un siguiente. Más adelante avanza y expresa:

“Si vamos mirando el orden en el que van los dos números que tenemos (hace un gesto comparando los dígitos después de la coma de cada número, lugar a lugar), si en un lugar encontramos ponele 1 y 3 podemos poner el 2 y ahí ya encontrás un número, entre medio de esos dos”.

Pareciera generarle dudas que siempre sea posible encontrar entre las cifras decimales de esos irracionales una diferencia que le permita armar ahí otro número dado que esas cifras son desconocidas.

Por su parte, Laura entiende que siempre podrá ubicar un número racional entre otros dos sin importar si parte de dos puntos racionales o irracionales. En la primera situación se apoya en la propiedad de densidad vista en Aritmética II y, en la segunda, simplemente afirma que sí aunque no da argumentos generales. Con la misma confianza considera que puede encontrar un irracional entre dos racionales y entre dos irracionales. Para favorecer que realice alguna explicación le proponemos abordar la afirmación considerando dos puntos particulares racionales: $1/3$ y $1/6$. En esta situación convierte estas fracciones a su expresión decimal periódica y se apoya en el orden para armar una expresión decimal infinita no periódica a través de una ley de formación. Esto le permite afirmar que entre dos racionales puede encontrar un irracional. Es el orden y la escritura decimal lo que activa esta explicación.

Para finalizar este apartado queremos mencionar que ampliar la afirmación 5 al conjunto de los irracionales en la entrevista, nos permitió comprender que el hecho de no disponer de un método para ubicar a todos los irracionales en la recta (así como es posible con los racionales) plantea un escenario desafiante para elaborar la idea de densidad de este conjunto en sí mismo o en \mathbb{R} , apoyándose en la recta. Volveremos a la ubicación de los irracionales en la recta en el siguiente apartado.

5.2.3. *¿Tienen los números una ubicación exacta y precisa en la recta?* La afirmación 7 del cuestionario, que hace referencia a la ubicación exacta de números con expresión decimal infinita, también nos permitió indagar acerca de las ideas que tienen los y las estudiantes sobre la recta en tanto objeto ideal y material. No obstante, en las entrevistas se analizó también la ubicación de otros números. Nos parece importante destacar que cuando mencionamos una ubicación exacta y precisa en la recta hacemos referencia a la recta ideal, ya que en la recta material todo es aproximado.

Durante la entrevista, Andrea comenta que puede ubicar exactamente a números con expresión decimal infinita y periódica, así como también a los que son de la forma “raíz cuadrada de un número primo”. En cambio, no puede ubicar con

precisión a los que son “al azar”⁸ o con una ley de formación porque “son números infinitos y no sabés cómo siguen”. Aún así, da una explicación sobre cómo aproximarse a la ubicación del número en la recta, procedimiento que ella llama “ubicación por posición”. Es un proceso que consiste en ir ubicando en la recta cada expresión decimal finita que se obtiene al truncar la expresión del irracional, incorporando en cada paso una cifra decimal más. Le genera dudas que, al ser un proceso infinito, esto le permita encontrar la ubicación exacta de ese número en la recta numérica. La ausencia de un método con finitos pasos para algunos números irracionales le hace dudar de la ubicación exacta de tales números.

Para Isabel los números con expresión decimal finita son “números que terminan” –a los que refiere como definidos– y tienen una ubicación exacta en la recta. Los números que tienen una expresión decimal infinita son “números que no terminan” –a los que llama indefinidos– y no tienen una ubicación exacta en la recta. Conoce los métodos de construcción de Tales y de Pitágoras con los que puede ubicar algunos números con expresión decimal infinita, pero no confía en que le aporten el lugar exacto. Si se le ofrece un número periódico a partir de su expresión fraccionaria, Isabel confía en que apoyada en el método de construcción de Tales tiene una forma de ubicarlo en la recta numérica. Sin embargo, expresa dudas si se considera su expresión decimal. En efecto, cuando la entrevistadora le pregunta por la ubicación de $0, \widehat{32}$, Isabel manifiesta la dificultad de ubicarlo exactamente: “necesito poner 0,33 para ubicarlo”.

Se le advierte que 0,33 es otro número, a lo que ella responde: “Sí, es otro número. Llega ahí (el $0, \widehat{32}$) y ya está al tope. Pero 0,323232 infinitamente no sé dónde lo voy a encontrar. Sé que en algún momento se va a chocar con 0,333333 o 0,323232 hasta que pueda cambiar a 0,33 el último ... pero ya va a ser otro número. Tampoco podría encontrarlo”.

A partir del diálogo con Isabel, interpretamos que los números con expresión decimal infinita están –en su concepción– en movimiento en la recta. La infinitud de sus cifras la induce a considerar sucesivos dígitos para su ubicación y, de este modo, “expande” o “mueve” al número. Por esta razón los números “indefinidos” están en movimiento y por eso no tienen un lugar exacto en la recta. Consideramos que este movimiento que visualiza Isabel frente a la infinitud de cifras se distingue de la infinitud de pasos necesarios para ir acercándose a la ubicación de un irracional que lleva a Andrea a dudar de la ubicación exacta.

Volviendo a Isabel y a la tarea de ubicar $0, \widehat{32}$, al pedirle la ubicación de $32/99$ aclarando que es la expresión fraccionaria del mismo número, ella manifiesta que esta fracción puede tener una ubicación exacta. Consideramos entonces que para

⁸Entendemos que al referirse “al azar” interpreta que las cifras decimales se definen de manera aleatoria, sin un patrón, lo que podría generar una expresión decimal infinita no periódica.

esta estudiante, la representación del número tiene un peso en la posibilidad de encontrar una ubicación exacta en la recta.

Por otra parte, Luciana manifiesta que puede ubicar de forma exacta a los números racionales y a las raíces cuadradas, pero no ve la manera de ubicar otros irracionales⁹. Menciona que quizás lo que le falta es la técnica para saber ubicarlos. Sin embargo, disponer o no de técnica no es el verdadero conflicto para pensar que cada número tiene una ubicación precisa en la recta. Como fue mencionado en el apartado anterior, el verdadero problema en su visión, está en el “espacio disponible” para ubicar irracionales una vez que la recta tiene infinitos racionales que son densos.

Poniendo en vínculo lo desplegado por Luciana e Isabel, nos interesa resaltar diferencias en sus planteos. Mientras Luciana “entiende” que con un método $\sqrt{2}$ se puede ubicar en la recta, le parece que no es posible ubicar irracionales cuando la recta está “llena” de racionales. En cambio, la duda de Isabel es diferente. Para ella, el hecho de que la expresión decimal sea infinita –tanto para periódicos como no periódicos– es lo que la hace dudar de la efectividad de un método para dar una ubicación exacta.

Cristina manifiesta conocer el teorema de Pitágoras para ubicar algunos irracionales de forma exacta en la recta numérica y además menciona que hay infinitos irracionales que “aunque no tenemos la forma de ubicarlos están en la recta también”. Por las respuestas que da Cristina en la entrevista, parece estar en una posición más teórica de la recta que sus compañeras: no necesita conocer un método o bien ubicar un número en la recta para tener cierta certeza o creencia de que igual ocupa un lugar.

Es claro que para estas estudiantes, la ubicación exacta de algunos números reales –enteros, expresiones decimales finitas– en la recta numérica no genera dudas. Nos hemos preguntado si consideran posible ubicar de forma exacta a todos los números con expresión decimal infinita tanto racionales como irracionales. Anteriormente señalamos varias investigaciones que consideran a los desarrollos decimales infinitos como un obstáculo para la ubicación de dichos números en la recta numérica. En concordancia con esto, en las respuestas a los cuestionarios también identificamos esta posición en algunos/as estudiantes. Mientras que en otros, la ubicación de expresiones decimales infinitas en la recta depende de conocer un método con finitos pasos. Las entrevistas nos permiten precisar ideas en estas diferentes posturas:

- aceptar que hay una posición exacta para todos los números aún cuando no se disponga de (o no se conozca) un método para ubicarlos

⁹Por la respuesta a la pregunta 3 de la segunda parte del cuestionario, Luciana se refiere por “raíces cuadradas” a aquellas que dan una expresión decimal infinita no periódica como las raíces cuadradas de números primos.

- considerar que la ubicación de los números con expresión decimal infinita no puede ser exacta pues el proceso de ubicación es infinito o bien un proceso en constante movimiento.
- rechazar que los irracionales puedan ubicarse en la recta (aún cuando conocen métodos para ubicar de manera exacta a algunos irracionales) dado que consideran que la recta está “llena” de racionales y no hay lugar para otros números más.

Por último, considerar la ubicación exacta de cualquier número, se conozca o no un método, remite a una concepción ideal de la recta. La duda acerca de poder ubicar o no a expresiones decimales infinitas (porque solo se puede aproximar o bien porque no tendrían un lugar) nos hace pensar en la transición entre una mirada material y una ideal de la recta.

5.2.4. La relación entre números y puntos En el apartado anterior reconocemos diferentes posiciones de las estudiantes respecto a la posibilidad de ubicar con precisión algunos números reales en la recta. Estas ideas junto con las que desplegaron sobre la densidad nos dan indicios acerca de las concepciones que tienen de la correspondencia número-punto. Con esto nos referimos al grado de aceptación que tienen respecto de la asignación uno a uno entre números reales y puntos de la recta.

Esto se recupera en la entrevista a partir de las afirmaciones 5 y 7 del cuestionario. En particular, al retomar la afirmación 5, se abordan dos nuevas cuestiones que se formulan en simultáneo para favorecer la conexión entre ambos enunciados: cómo se reconoce si un punto es racional o irracional y cómo puede decidirse si un número es racional o irracional.

Cristina explica que no puede saber si un punto de la recta se corresponde con un número racional o irracional y que solo conoce algunos puntos irracionales. Ampliando su respuesta, hace referencia a aquellos puntos irracionales que sabe construir como las raíces de números primos. En cambio, para reconocer si un número es racional o irracional ella apela a la representación decimal o bien, a la posibilidad de expresarlo o no como fracción.

Andrea explica cómo reconocer números racionales e irracionales pero en el caso de puntos no responde sobre cómo decidir. Cuando considera el problema de ubicar entre dos puntos dados un punto correspondiente a un número irracional, ella asimila puntos con números racionales ya que nos explica un procedimiento de construcción de un punto o número irracional apoyándose en una expresión decimal que revela que está pensando en un número racional.

Luciana reconoce con claridad números racionales e irracionales a través de características de las expresiones decimales en cada caso. No obstante, manifiesta dudas acerca de la correspondencia entre números irracionales y puntos de la recta

pues, como ya señalamos, la densidad de los puntos racionales se asimila para ella a la continuidad de la recta: la recta ya está “completa” cuando se “ubica” a los racionales. Partiendo de considerar puntos en la recta Lucila enuncia que “cuando un punto no es racional es irracional”. Interpretamos que, según su concepción, cada punto de la recta está en vínculo con un número real y en consecuencia no existen puntos en la recta que no representen números reales. Isabel reconoce que además de los números racionales hay irracionales en la recta, aunque para ella estos últimos no tienen un lugar fijo, tal como hemos comentado en el apartado anterior. Pensando en los puntos de la recta, Isabel acepta que pueden ser tanto racionales como irracionales y agrega “cuando hablamos de un punto no estamos hablando exactamente de un número sino de un lugar en la recta”. Con esta respuesta no resulta del todo clara la relación que establece entre números y puntos.

Ninguna de las estudiantes entrevistadas manifestó la posibilidad de considerar un punto de la recta que no se corresponda ni con un número racional ni con uno irracional. Esto nos lleva a pensar que para ellas todos los puntos de la recta se corresponden a números reales.

Lo visto hasta acá nos permite identificar que las estudiantes, aceptan y adoptan de modos más o menos explícitos la relación “número real - punto en la recta” como un hecho. En efecto, frente a ciertas tareas o afirmaciones asumen la correspondencia “número-punto”. Tal como dijimos en el inciso anterior lo que se pone en duda es la posibilidad de encontrar la ubicación exacta de números con expresión decimal infinita.

En síntesis, para estas estudiantes:

- si se les presenta un punto de la recta consideran que se trata de un número racional o irracional.
- si tienen que encontrar un punto racional o irracional entre otros dos dados, lo hacen a partir de recurrir a sus expresiones decimales lo que nos hace suponer que están pensando a esos puntos como números.
- en situaciones puntuales en donde el infinito juega algún rol (ya sea en la representación decimal o bien considerando la densidad de los números), manifiestan dudas acerca de esta relación o surgen contradicciones como una manifestación de estas dudas.

5.2.5. *El infinito en la concepción de los reales* Las expresiones decimales infinitas, la infinitud de los números naturales, enteros, racionales e irracionales, la recta y sus infinitos puntos, las infinitas fracciones equivalentes, convierten al infinito y sus formas de interpretarlo en parte de las concepciones que los y las estudiantes ponen en juego a la hora de estudiar a los números reales.

Ya mencionamos los diversos posicionamientos que encontramos en estas estudiantes ante la tarea de encontrar la ubicación exacta de las expresiones decimales infinitas en la recta. Queremos en este apartado señalar algunas posiciones respecto al infinito.

Durante el diálogo sobre la densidad Cristina explica que “en un número irracional yo no puedo materialmente ver dónde termina”. Consideramos que detrás de esta afirmación puede haber una interpretación del infinito en donde hay un final al que resulta imposible acceder. El número tiene una expresión decimal que termina en algún momento, pero no es posible acceder a ese final, en términos de Montoro y Scheuer (2004) el infinito como imposible de prever. Este posicionamiento respecto al infinito difiere de considerar que la expresión del número no termina, no tiene fin y por lo tanto no hay último elemento. Aceptar esto último representa una posición teórica, seguramente todavía en proceso en esta estudiante.

Al consultarle por la afirmación 4 para Andrea no es posible mover un punto y pasar por todos los números reales en la recta. Argumenta que “al ser infinitos no llegaríamos a pasar por todos”. El proceso de recorrer una cantidad infinita de objetos es algo inacabable, dicho en otros términos: porque son infinitos no se llega (a recorrerlos). Es la temporalidad del infinito (Sierspiska, 1987) lo que parece imposibilitar el proceso de pasar por todos los números.

En el caso particular de Diana encontramos un vínculo entre su concepción del infinito, la recta como objeto de representación de los números reales y la distinción de la recta en tanto objeto material o ideal. A propósito de las afirmaciones 1 y 2 y la superficie que pueden ocupar o no los puntos Diana afirma “aunque no se pueda representar dibujándola, ese punto ocupa una diminuta superficie ... la recta es infinita, en la recta hay infinitos números y yo no puedo representar infinitos números en un papel digamos, ahí en la recta... pero sí existen”. Para aclarar la posición de la estudiante sobre distintos objetos que ella indica como infinitos, se le repregunta “lo que vos no podés representar es una cantidad grande. Un número cualquiera ¿sí lo podés representar?” Y ella responde “un número que tiene infinitos decimales no se puede representar”. El infinito plantea a Diana una barrera que, por el momento, no puede superar. Interpretamos que, para ella, las expresiones decimales infinitas y los conjuntos infinitos de números no pueden representarse en la recta justamente por ser infinitos. Montoro y Ferrero (2022) ya identificaron en estudiantes con menor formación matemática una concepción que llamaron finitista, esto es, percibir al infinito como un número muy grande. En Diana esta idea parece predominante: “no puedo representar infinitos números en un papel”. Podríamos suponer que aún no ha entrado en la construcción del infinito potencial.

Como ya mencionamos en el apartado sobre la ubicación de los puntos en la recta, Isabel considera que “los irracionales no tienen un lugar fijo, que pueden ser

infinitos porque es un número que continua, no está exacto". Nos interesa señalar aquí que es la conceptualización del infinito como en movimiento o no determinado (Montoro & Scheuer, 2004) la que juega un rol central en su posicionamiento.

El infinito también configura en el caso de Luciana una dificultad para pensar que existen más puntos en la recta además de los infinitos puntos racionales. En efecto, ella se cuestiona –a propósito de la ubicación de los números irracionales en la recta– que “si entre dos (puntos) racionales hay infinitos (puntos) racionales, ¿dónde entran los (puntos) irracionales? O tenemos una cosa o tenemos otra”. Aquí la idea de infinito se presenta como el todo. Luciana aclara que no le es difícil aceptar la existencia de infinitos números racionales e irracionales sino la representación de ambos conjuntos infinitos en la recta.

Para finalizar este apartado, queremos destacar que el concepto de números reales se construye en la matemática a través de procesos que necesariamente hacen uso de la idea de infinito actual. En este recorrido por las respuestas de las estudiantes analizamos diversas concepciones del infinito, algunas en proceso de considerar un infinito actual, otras que funcionan como obstáculo para comprender características de los números reales.

§6. Conclusiones

En este artículo analizamos los vínculos entre la recta numérica y los números reales que tienen construidos estudiantes universitarios de un primer año del profesorado de Matemática de la Unipe.

Nos preguntamos por las concepciones que este grupo de estudiantes tiene sobre la recta y los puntos en tanto objetos ideales. A partir de los cuestionarios y las entrevistas advertimos que la mayoría acuerda con la doble dimensión –ideal y material– de la recta. Sin embargo, este posicionamiento no es tan claro al considerar los puntos de la recta. Efectivamente, concebir puntos sin superficie entra en conflicto con la idea de la recta compuesta por infinitos puntos, llevando a una materialización del punto para aceptar su existencia.

En concordancia con otras investigaciones identificamos que las expresiones decimales infinitas resultan ser un obstáculo al considerar la representación de los números reales en la recta numérica. A continuación, señalamos algunos matices de estos obstáculos encontrados en nuestro estudio:

- En algunos casos, contar con técnicas que implican una cantidad finita de pasos (apoyadas en los teoremas de Tales y Pitágoras) brinda confianza sobre la ubicación exacta de algunas familias de números con expresiones decimales infinitas. La falta de un procedimiento de este tipo genera dudas sobre su ubicación exacta. De este modo, la percepción de la posibilidad de ubicar estos números en la recta de forma exacta estaría condicionada por

una concepción del infinito como indefinido al no contar con una técnica de finitos pasos. Así, es la existencia de un método de finitos pasos y no tanto la expresión decimal infinita la que determina la posibilidad de la ubicación exacta.

- En otros casos, se consideran procedimientos con infinitos pasos para ubicar expresiones decimales infinitas, pero al ser un proceso infinito no se acepta como ubicación exacta porque el procedimiento “no termina”. Una concepción del infinito potencial explica por qué se considera imposible representar estos números en la recta.
- En cuanto a la ubicación de los números irracionales en la recta, encontramos casos en donde no es su expresión decimal la que impide la ubicación exacta. Un estudio previo de los racionales y la densidad de \mathbb{Q} por parte de estas estudiantes les hace pensar que la recta está “llena”. Observamos así una asimilación entre la densidad de \mathbb{Q} y la continuidad de la recta, como han señalado investigaciones precedentes (Durand-Guerrier, 2018; Vergnac, 2013). A futuro, este aspecto merece ser explorado en trabajos que avancen en distinguir lo denso de lo continuo en propuestas de enseñanza para estudiantes universitarios (Benito et al., 2023; Cedrón et al., 2021).

Admitir la ubicación exacta de cualquier número, más allá de disponer o no de un método, remite a una concepción ideal de la recta. Las dudas sobre la posibilidad de ubicar números con expresión decimal infinita nos hacen pensar en una transición entre una visión material y una ideal de la recta.

Se puede considerar una propuesta de enseñanza que ponga en juego la ubicación en la recta de números irracionales, como los dados por una ley de formación, a través de la localización de intervalos de longitud cada vez más pequeña y que contenga a esos números. De este modo, se podría abordar la existencia de un punto en la recta que representa a este número apoyándose en el principio de intervalos encajados. Esto permitiría cuestionar la suposición de que algunos números con expresión decimal infinita no tienen una ubicación exacta en la recta debido a la inexistencia de una técnica con finitos pasos que determine su posición exacta.

En la primera etapa de nuestra indagación (cuestionarios) encontramos que la mayoría de estos/as estudiantes concebían y manejaban la densidad de los racionales y la consideraban también en la recta numérica. En las entrevistas exploramos el alcance de esta propiedad en \mathbb{R} .

Abordar la densidad de los números reales genera un espacio para profundizar el estudio de las expresiones decimales infinitas y los conflictos cuando emergen aspectos ligados al infinito en la escritura de estos números (Cedrón et al., 2021). Mencionamos en Antecedentes que elaborar la densidad de \mathbb{Q} apoyándose en la recta permite considerar el punto medio entre dos racionales para avanzar en la comprensión de esta propiedad (Benito et al., 2023). Este tratamiento es mucho más

desafiante al tomar dos números irracionales, no sólo porque el punto medio entre dos irracionales podría ser racional, sino también porque muchos/as estudiantes ponen en duda su ubicación exacta en la recta. En ocasiones, tal como mostramos, esa ubicación se interpreta como movable (o susceptible de desplazamiento). En este contexto resulta lógico que los y las estudiantes no confíen en la posibilidad de ubicar un número irracional entre otros dos que se mueven en la recta. Por esto concluimos que considerar la densidad para el conjunto de irracionales pone en evidencia la complejidad del vínculo entre aceptar una ubicación exacta de estos números y disponer de la propiedad de densidad de \mathbb{R} con un apoyo en la recta.

Inicialmente señalamos que las concepciones de los y las estudiantes sobre la recta numérica se elaboran en vínculo con las ideas sobre los números reales que se van construyendo y pueden ser herramientas para el avance o generar obstáculos en los aprendizajes posteriores. Nuestro objetivo fue identificar algunas de estas concepciones.

Finalmente, la recta ideal, la densidad de \mathbb{R} y el infinito actual son todas ideas de índole teórico. La discusión en torno a ellas inaugura un tratamiento teórico que, inevitablemente, se confronta con concepciones que nuestros/as estudiantes han construido durante su escolaridad y que están vinculadas a una idea de recta material. El análisis de las concepciones compartidas en este artículo sugiere la necesidad de ofrecer desde la enseñanza variadas oportunidades de hacerlas visibles, discutir las y también movilizarlas, con el propósito de construir un posicionamiento teórico sobre este conjunto de cuestiones constitutivas del objeto recta numérica.

§7. Anexo I – Cuestionario sobre números reales

Hola, nos interesa conocer cuáles son las ideas acerca de los números reales que tiene un/a estudiante que inicia sus estudios superiores. Te agradecemos que participes en la investigación compartiendo con nosotros algunas cuestiones sobre los reales que probablemente estudiaste en la escuela secundaria. Nos parece importante aclarar que estas preguntas no constituyen una evaluación, sino que nuestro foco es el de entender qué puntos de partida y de llegada existen con respecto a esta temática. Es por eso que te pedimos que respondas a ellas desde tus ideas sin recurrir a otros medios.

Considerando las siguientes siete afirmaciones, indicá para cada una de ellas si:

1. estás totalmente de acuerdo
2. estás parcialmente de acuerdo
3. no estás de acuerdo
4. no podrías tomar posición al respecto

1. Al trazar una recta, la línea que dibujamos es una representación material y como tal tiene grosor, pero la recta es un objeto ideal y por lo tanto no tiene grosor.

1	2	3	4
---	---	---	---

2. Los puntos de la recta ocupan una diminuta superficie.

1	2	3	4
---	---	---	---

3. La recta numérica es el conjunto infinito de puntos que señalan a distintos números y si quitamos un punto generamos un agujero en la recta porque se pierde un número real.

1	2	3	4
---	---	---	---

4. Si ubicamos un punto en la recta numérica y lo movemos a lo largo de toda la recta, el punto pasará por todos los números reales sin dejar ninguno afuera.

1	2	3	4
---	---	---	---

5. Es posible elegir dos puntos en la recta numérica de forma tal que no haya entre ellos un punto correspondiente a un número racional. (Te pedimos que nos expliques por qué elegís tu opción en el espacio asignado).

1	2	3	4
---	---	---	---

6. Si elijo al azar un punto en la recta numérica es más probable que corresponda a un número racional que a un número irracional.

1	2	3	4
---	---	---	---

7. Los números con expresión decimal infinita no tienen una ubicación exacta en la recta numérica. (Te pedimos que nos expliques por qué elegís tu opción en el espacio asignado).

1	2	3	4
---	---	---	---

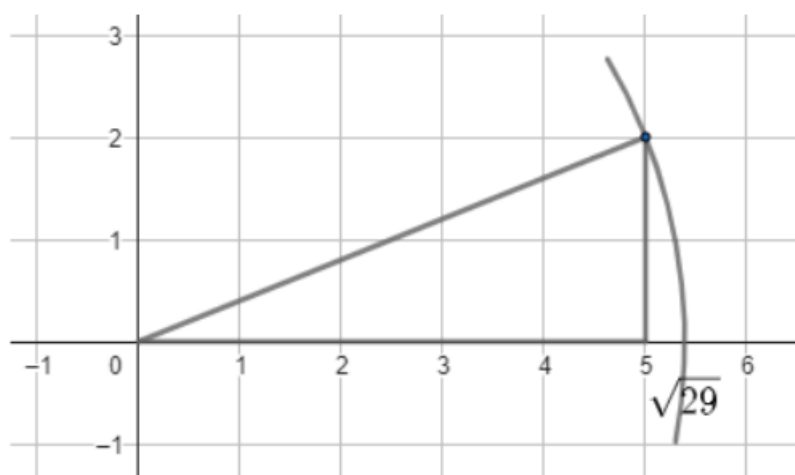
PREGUNTAS

8. ¿Pensás que el conjunto de los números reales tiene algunas características o propiedades específicas, propias, que lo distingue de otros conjuntos tales como los naturales, los enteros y los racionales? Te pedimos que además de contestar por sí o por no nos cuentes en qué te apoyas para pensar de ese modo.
9. Te pedimos que, **sin utilizar una calculadora**, indiques cuáles de las siguientes escrituras representan números reales:

		SI	NO
a)	$\sqrt{-1}$		
b)	0,101001000100001... Nota: esta expresión decimal responde a una regla de formación que ordena en forma consecutiva todas las potencias de 10 comenzando con 10, 100, 1000, etc.		
c)	$\sqrt{\pi}$		
d)	$(2^0 - 1)^{-1}$		
e)	$\frac{2}{1-0,\overline{9}}$		
f)	$(0,5)^\pi$		
g)	$1, \hat{6}7$		

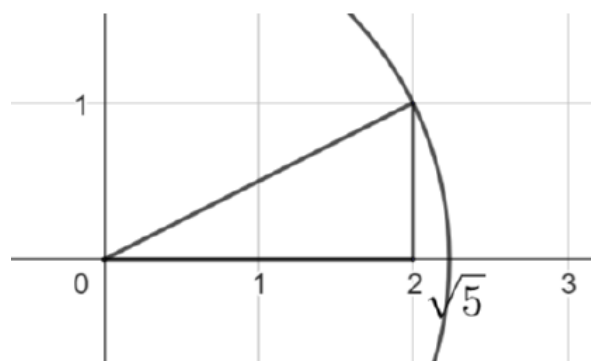
Si para responder a este punto 9 realizaste algunos cálculos te pedimos que los escribas en esta hoja.

10. El esquema muestra la representación de $\sqrt{29}$ en la recta numérica apelando al teorema de Pitágoras:



En estos ejes cartesianos se construyó un triángulo rectángulo con catetos de medidas 5 y 2 para obtener una hipotenusa de longitud $\sqrt{29}$ ya que según el teorema de Pitágoras “el cuadrado de la hipotenusa equivale a la suma del cuadrado de los catetos.”

Adaptando esta construcción a otros triángulos rectángulos cuyos catetos tienen longitud entera, podemos obtener la representación en la recta de otros números. Por ejemplo, la representación de $\sqrt{5}$ utilizando un triángulo rectángulo con catetos de longitudes 2 y 1.



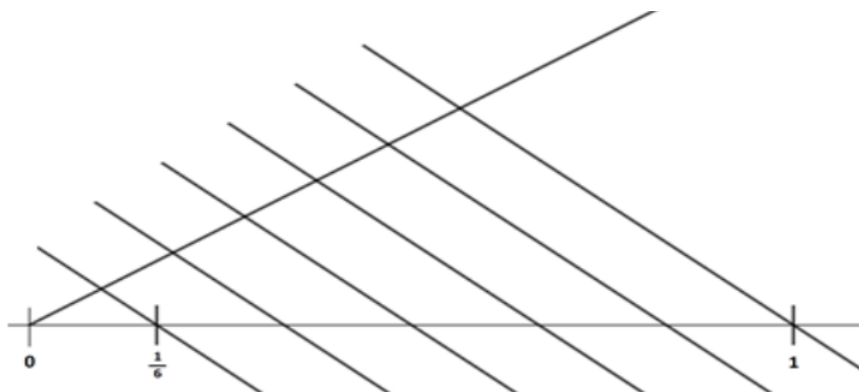
a) Te pedimos otros dos ejemplos de números irracionales que puedan representarse adaptando esta construcción a otros triángulos rectángulos **cuyos catetos tienen longitud entera**. Para cada uno de los ejemplos indicá la medida de los catetos que utilizaste en la construcción.

b) Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

Afirmación 1. Adaptando esta construcción a otros triángulos rectángulos con catetos de longitud entera podemos representar en la recta a todos los números irracionales.

Afirmación 2. Adaptando esta construcción a otros triángulos rectángulos con catetos de longitud entera podemos representar en la recta a las raíces cuadradas de infinitos números naturales.

11. El siguiente esquema muestra la representación de $\frac{1}{6}$ apelando al teorema de Tales. Indicá qué otros números pueden representarse adecuando el esquema.



§8. Anexo II – Posibles preguntas para las entrevistas

Las siguientes preguntas fueron diseñadas para todas las entrevistas. En algunos casos se elaboraron preguntas específicas para los y las estudiantes con la intención de avanzar en la comprensión de sus explicaciones escritas o también dilucidar

concepciones puntuales esbozadas en sus respuestas al cuestionario. Durante la entrevista, cada estudiante tuvo disponible sus respuestas al cuestionario, las cuales se fueron leyendo como parte de la conversación.

Afirmación 1

Al trazar una recta, la línea que dibujamos es una representación material y como tal tiene grosor, pero la recta es un objeto ideal y por lo tanto no tiene grosor.

Parcialmente de acuerdo Indicaste que estás parcialmente de acuerdo:

- ¿Podés explicarnos por qué respondiste esto?
- ¿Hay alguna parte de la afirmación con la que estás de acuerdo? ¿Con qué parte de la afirmación estás de acuerdo?
- ¿Qué debería cambiar de la afirmación para que estés de acuerdo?

No puede tomar posición.

¿Por qué no podés tomar una posición al respecto?

Afirmación 2

Los puntos de la recta ocupan una diminuta superficie.

No responde.

¿Por qué no respondiste esta pregunta?

Si respondiera que no sabe qué responder: ¿Hay algo en la afirmación que te resulte confuso?

De acuerdo.

¿Podrías ampliarnos esta idea? ¿Por qué considerarás que un punto tiene diminuta superficie?

Queremos conocer qué puntos considera, cómo los caracteriza, cuándo cree que tienen una diminuta superficie (si su descripción remite a puntos materiales o ideales).

Afirmaciones 1 y 2

Si en las afirmaciones 1 y 2 responde totalmente de acuerdo (acuerda que la recta no tiene grosor y que es un ente ideal, a la vez que el punto tiene una diminuta superficie).

Leemos las dos afirmaciones, le decimos que respondió que está totalmente de acuerdo con ambas y le preguntamos:

Esos puntos en los que pensás con una diminuta superficie ¿los imaginás sobre la recta material o sobre la ideal según la afirmación 1?

Afirmación 3

La recta numérica es el conjunto infinito de puntos que señalan a distintos números y si quitamos un punto generamos un agujero en la recta porque se pierde un número real.

No está de acuerdo.

No estás de acuerdo con que al retirar un punto de la recta numérica se genera un agujero. Nos interesa que nos expliques: Para vos, al sacar un punto de la recta numérica, ¿se produce algún efecto? Sí es así, ¿cuál? Si no es así, ¿por qué?

De acuerdo con esta afirmación y en desacuerdo con la afirmación 2.

En la afirmación 2 sostenés que los puntos no ocupan una superficie y en la afirmación 3 decís que quitando un punto de la recta numérica se genera un agujero: ¿Cómo te imaginás este agujero que se genera al quitar un punto?

Afirmación 4

Si ubicamos un punto en la recta numérica y lo movemos a lo largo de toda la recta, el punto pasará por todos los números reales sin dejar ninguno afuera.

En desacuerdo.

¿Por qué no estás de acuerdo con esta afirmación?

Parcialmente de acuerdo.

¿Con qué parte de la afirmación acordás y con cuál no?

Afirmación 5

Es posible elegir dos puntos en la recta numérica de forma tal que no haya entre ellos un punto correspondiente a un número racional. (Te pedimos que nos expliques por qué elegís tu opción en el espacio asignado.)

De acuerdo.

- ¿Podrías dar un ejemplo de dos puntos que contengan un racional entre ellos?
- ¿Podrías dar un ejemplo de dos puntos que no contengan un número racional entre ellos?
- Si elegís dos puntos en la recta, ¿a qué números podrían corresponder?

Solo responde que no está de acuerdo y no escribió una explicación.

¿Por qué no estás de acuerdo con la afirmación?

Si menciona la propiedad de densidad en la entrevista, sigue con el grupo de preguntas:

No está de acuerdo y menciona la propiedad de densidad.

- ¿Qué entendés por densidad? ¿Podrías explicarnos cómo usas la propiedad de densidad en este caso?
- Si la afirmación refiere a encontrar un punto irracional entre dos puntos ¿Te parece que esto sería posible?

Afirmación 6

Si elijo al azar un punto en la recta numérica es más probable que corresponda a un número racional que a un número irracional.

De acuerdo.

¿Por qué acordás con la afirmación?

¿Cuántos puntos que correspondan a números irracionales hay en la recta? ¿Cuántos números irracionales conocés?

No acuerda.

¿Por qué no acordás con la afirmación?

Si dice que porque ambos son infinitos: ¿Crees que la probabilidad de elegir un número racional respecto a un irracional es la misma o pensás que es más probable que, al elegir uno al azar, ese punto sea racional?

Afirmación 7

Los números con expresión decimal infinita no tienen una ubicación exacta en la recta numérica. (Te pedimos que nos expliques por qué elegís tu opción en el espacio asignado.)

Las preguntas que realicemos sobre esta afirmación dependerán de las explicaciones escritas que hayan brindado en el cuestionario. Aún así, proponemos algunas ideas:

¿Pensás que algunos números tienen una ubicación exacta/precisa y otros no?

Si sólo menciona a los números periódicos con ubicación exacta porque los piensa como fracción:

¿Pensás que los números que tienen infinitas cifras decimales no periódicas tienen una ubicación exacta en la recta?

Bibliografía

- Artigue, M. (1982). À propos des conceptions du cercle. Présentation de situations de classes privilégiant certaines de ces conceptions (CE2 et CM). *Grand N*, 27, 45-72.
- Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 241-286.
- Benito, C., Bergé, A., Cedrón, M., Duarte, B., Herrera, R., Lamela, C., Montes de Oca, M., Morales, G., & Rey, M. (2023). *Los números reales en la escuela secundaria. Una secuencia posible*. Ciudad de Buenos Aires, UNIPE: Editorial Universitaria.
- Bergé, A. (2004). *Un estudio de la evolución del pensamiento matemático: el ejemplo de la conceptualización del conjunto de los números reales y de la noción de completitud en la enseñanza universitaria* [Tesis doctoral, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires].
- Castela, C. (1997). La droite des réels en seconde: point d'appui disponible ou enjeux clandestin? En *Brochure de l'IREM de Rouen*. Université de Rouen.
- Cedrón, M., Duarte, B., Herrera, R., & Lamela, C. (2021). Representación y densidad en los reales. Análisis de experiencias de aula. *Revista Científica EFI-DGES*, 7(12), 109-122.
- Durand-Guerrier, V. (2018). La triade discret, dense, continu dans la construction des nombres. En *Actes de la CORFEM*. Nîmes, 13-14 Juin.
- Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(2), 169-193.
- Kidron, I., & Tall, D. (2015). The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics*, 88, 183-199.
- Montoro, V., Cifuentes, M., Salva, N., & Bianchi, M. (2017). Students' understanding of the number line / Estudiantes pensando en la recta numérica. *Infancia y Aprendizaje, Journal for the Study of Education and Development*. <https://doi.org/10.1080/02103702.2017.1304879>
- Montoro, V., & Ferrero, M. (2022). Diversidad de ideas construidas por estudiantes sobre los números reales, los números irracionales, el orden y la densidad. *Revista de Educación Matemática*, 37(1), 61-92.
- Montoro, V., & Scheuer, N. (2004). ¿Cómo piensan el infinito matemático los estudiantes universitarios de distintas carreras? *Revista Epsilon*, 60, 20(3), 435-447.
- Peled, I., & Hershkovitz, S. (1999). Difficulties in knowledge integration: Revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30(1), 39-46.

- Robinet, J. (1986). Les Réels: Quels modèles en ont les élèves? *Educational Studies in Mathematics*, 17, 359-386.
- Romero, C. (1996). Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario. *Enseñanza de las Ciencias*, 14, 3-14.
- Scaglia, S. (2000). *Dos conflictos al representar números reales en la recta numérica* [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
- Sierspínska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-397.
- Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers on the number line - where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(4), 477-488.
- Vergnac, M. (2013). *Les nombres réels au lycée et à l'entrée à l'université. Premier état des lieux et perspectives* [Tesis de maestría, 2 recherche, Université Montpellier II Mention "Histoire, Philosophie et Didactique des Sciences"].
- Zazkis, R., & Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: Focusing on representation. En A. Hoines & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th International Conference for Psychology of Mathematics Education* (pp. 497-505, Vol. 4). Bergen, Norway.

MARÍA CAROLINA BENITO

Universidad Pedagógica Nacional, UNIPE.

(✉) maria.benito@unipe.edu.ar

MARA CEDRÓN

Universidad Pedagógica Nacional, UNIPE.

(✉) mara.cedron@unipe.edu.ar

BETINA DUARTE

Universidad Pedagógica Nacional, UNIPE.

(✉) betina.duarte@unipe.edu.ar

URIEL KASMAN

Universidad Pedagógica Nacional, UNIPE.

(✉) uriel.kasman@unipe.edu.ar

CECILIA LAMELA

Universidad Pedagógica Nacional, UNIPE.

(✉) cecilia.lamela@unipe.edu.ar

MARÍA CECILIA MONTES DE OCA

Universidad Pedagógica Nacional, UNIPE.

(✉) maria.montes@unipe.edu.ar

Recibido: 1 de julio de 2024.

Aceptado: 10 de diciembre de 2024.

Publicado en línea: 20 de diciembre de 2024.
